GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$C_p(X)$ FONKSİYON UZAYLARININ TOPOLOJİK SINIFLANDIRILMASI

MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ülkü KARAKUŞ

MAYIS 2010

$C_p(X)$ Fonksiyon Uzaylarının Topolojik Sınıflandırılması

Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
M.Sc Tezi

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK

Ülkü KARAKUŞ

Mayıs 2010

anneme ve babama…

ÖZET

$C_p(X)$ FONKSİYON UZAYLARININ TOPOLOJİK SINIFLANDIRILMASI

KARAKUŞ, Ülkü
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK
Mayıs 2010, 47 Sayfa

Bu çalışmada C_p- teorisinin topolojik yönü üzerinde durulmuştur. $C_p(X)$ in sahip olduğu topolojik ve lineer topolojik özellikler incelenmiştir.

X ve Y Tychonoff uzayları olmak üzere $C_p(X)$ ve $C_p(Y)$ nin lineer homeomorfik olması durumunda X ve Y'nin hangi özellikleri için X ve Y'nin homeomorfik olduğu araştırılmıştır.

Fonksiyon uzayları üzerine topolojiler kurularak oluşan uzaylar arasında lineer ve sürekli lineer dönüşümler oluşturulmuştur. Ordinaller üzerindeki sürekli reel değerli fonksiyonların $C_p([1,\alpha])$ uzaylarının sınıflandırılması yapılmıştır. Bir topolojik uzayın n-boyutlu küpe l-denk olması için bu uzay üzerinde hangi şartın sağlanması gerektiği araştırılmıştır.

Anahtar kelimeler: Tychonoff uzayı, fonksiyon uzayı, lineer homeomorfizma, C_p-teorisi, ordinal, l-denk

ABSTRACT

TOPOLOGICAL CLASSIFICATION OF $C_p(X)$ FUNCTION SPACES

KARAKUŞ, Ülkü
M.Sc.in Department of Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Sabri BİRLİK
May 2010, 47 Pages

In this study, it is considered topological side of C_p-theory. It is researched that topological and linear topological properties of $C_p(X)$.

X and Y are Tychonoff spaces such that $C_p(X)$ and $C_p(Y)$ are linear homeomorphic. It was searched that for which properties of X and Y, X and Y are homeomorphic.

Topologies were formed over function spaces.And linear and continuous linear mappings were formed between these spaces. It was given a classification of spaces $C_p([1,\alpha])$ of continuous real valued functions on ordinals. It was searched that which property is necessary on a topological space to be l-equivalent to the n-dimensional cube.

Key words: Tychonoff space, function space, linear homeomorphic, C_p -theory, ordinal, l-equivalent

TEŞEKKÜR

Bütün çalışmam boyunca bana rehber olan çok değerli hocam Yrd.Doç.Dr.Sabri BİRLİK ‘e ve her konuda olduğu gibi bu tezi hazırlamam konusunda da benden desteklerini esirgemeyen anneme, babama, kardeşlerim Alper,Ali ve Anıl’a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

SİMGELER LİSTESİ

Simge	Açıklama
N	Doğal Sayılar
R	Reel Sayılar
I	[0,1]
Q	Rasyonel Sayılar
R^X	X den R ye tanımlı fonksiyonlar uzayı
$\underline{0}$	R^X in sıfır elemanı
$\underline{1}$	R^X in birim elemanı
$C(X)$	X den R ye tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^*(X)$	X den R ye tanımlı sınırlı, sürekli fonksiyonlar uzayı
$F(X,Y)$	X den Y ye tanımlı fonksiyonlar uzayı
τ	Topolojik yapı
(X,τ)	Topolojik uzay
$X \approx Y$	X ve Y homeomorfiktir
$X : Y$	X ve Y lineer homeomorfiktir
$\bar{A}$	A nın kapanışı
supp(y)	y nin desteği
$f \mid A$	f fonksiyonunun A ya kısıtlanması
$L_p(X)$	Sonlu lineer kombinasyonlar kümesi
$X \overset{t}{:} Y$	X ve Y uzayları t-denktir
$X \overset{u}{:} Y$	X ve Y uzayları u-denktir
Ord	Ordinal

Simge	**Açıklama**
Lim	Limit ordinal
Card	Kardinal
*int*A	*A* nın içi
f^{-1}	f nin tersi

1.BÖLÜM

GİRİŞ

X Tychonoff uzayı olmak üzere X üzerindeki reel-değerli sürekli fonksiyonların uzayı, noktasal yakınsaklık topolojisi ile donatılırsa lineer topolojik bir uzay olan $C_p(X)$ uzayına ulaşılır. X Hausdorff uzayı olmak üzere zayıf topoloji ile donatılmış her Banach uzayı, $C_p(X)$in kapalı lineer bir alt uzayına lineer homeomorftur. Böylece $C_p(X)$ in topolojik ve cebirsel yapısı, $C_p(X)$ i topolojik uzay çalışmalarında önemli bir araç haline getirmektedir.

$C_p(X)$, Cebirsel Topoloji ve Fonksiyonel Analiz'e ait olan kavramlarla Genel Topoloji arasında bir köprü görevindedir. C_p-teorisi ,Genel Topoloji'nin Fonksiyonel Analiz'e bir uygulamasıdır. C_p-teorisinde çalışılan temel konular, $C_p(X)$ in kendisi ve $C_p(X)$ in kompakt alt uzaylarıdır. Ayrıca $C_p(X)$ ve X uzaylarının özellikleri arasındaki bağ ile de ilgilenir.

C_p-teorisinde esas konu l-denkliği ve t-denkliği ve buna bağlı olarak l-değişmezleri ve t-değişmezleridir. Eğer $C_p(X)$ ve $C_p(Y)$uzayları homeomorf(lineer homeomorf) ise X ve Y uzaylarına t-denktir denir. t-denkliği ve l-denkliği ile korunan topolojik özelliklere t-değişmezleri ve l-değişmezleri denir. t-değişmezleri ve l-değişmezleri C_p-teorisinin temel problemleri arasındadır. Bu durum C_p-teorisinin dualite teoremleri ile ilgili olan bölümüdür. Yani herhangi bir X uzayının bir özelliği, $C_p(X)$ in topolojik (lineer topolojik) özelliği ile oluşturulabilir, X 'in bu özelliği t-değişmezdir.(l-değişmezdir). C_p-teorisinde önemli konulardan bir diğeri ise sürekli (ve lineer sürekli) genişlemeler teorisidir. Bu konudaki ilk temel sonuçlar Dugundji tarafından elde edilmiştir.

Son 20 yılda C_p-uzayları çalışmaları, genişleme teorisi içinde geliştirilerek bir çok önemli problem A.V. Arhangelsk'ii, J. Baars, M. M. Choban, J. De Groot, S. P Gul'ko, W. Marciszewski, J. Van Mill tarafından çözüme kavuşturulmuştur. Bunların dışında C_p-teorisinde ulaşılan önemli sonuçlardan bazıları şunlardır: W. Marciszewski**,** sonsuz kompakt bir X uzayı için $C_p(X)$ in $C_p(X)xR$ ye lineer homeomorf olmadığını kanıtlamıştır. J.Calbrix, eğer $C_p(X)$ analitik ise X uzayının δ-kompakt olduğunu göstermiştir. N.V. Velichko, Lindelöf özelliğinin *l*-denkliği ile nasıl korunacağını kurmuştur. R. Pol, sonsuz metriklenebilen kompakt X uzayı için $C_p(X)$ in karesinin $C_p(X)$ e lineer homeomorf olmadığını göstermiştir.

C_p-teorisi Genel Topoloji'nin Fonksiyonel Analiz'e bir uygulaması olmasına rağmen son dönemdeki C_p-teorisinin konuları, metotları ve sonuçları Fonksiyonel Analiz'in ve matematiğin diğer dallarında da uygulanmaktadır. Özellikle S. Negrepontis'in, "Banach Uzayları ve Topoloji" makalesi bu duruma iyi bir örnektir.

$C_p(X)$ in lineer topolojik uzay olmasıyla beraber ayrıca topolojik halka olmasından dolayı topolojik halkalar ve topolojik gruplar teorisi içinde C_p-teorisinin önemli bir yeri vardır. Bu konuda L. Gilmann ve M. Jerison 'un kitabı önemli bir referanstır.

Yukarıda tarihsel süreç içerisinde C_p-teorisinin nasıl bir gelişme gösterdiği ve salt topolojiye ait bir konu olmayıp aslında matematiğin diğer dalları ile ne kadar iç içe olduğu ifade edilmeye çalışıldı.

Bu çalışmada C_p-teorisinin topolojik yönü üzerinde durularak $C_p(X)$ in sahip olduğu topolojik ve lineer topolojik özellikler incelenmiştir. 2. bölümde genel olarak fonksiyon uzaylarının tanımı yapılmıştır. 3. bölümde fonksiyon uzayları üzerine topolojiler kurularak oluşan uzaylar arasındaki lineer ve sürekli lineer dönüşümlerden bahsedilmiştir. 4. bölümde ordinaller üzerindeki sürekli reel değerli fonksiyonların $C_p([1,\alpha])$ uzaylarının sınıflandırılması yapılmıştır.Bir topolojik uzayın n-boyutlu küpe *l*-denk olması için bu topolojik uzay üzerinde hangi şartın sağlanması gerektiği araştırılmıştır.

2. BÖLÜM

FONKSİYON UZAYLARI

2.1. Fonksiyon Uzayları

Boş olmayan bir X kümesinden R ye giden tüm fonksiyonların kümesini R^X ile göstereceğiz. R^X, $\alpha \in R, f, g, h \in R^X$ olmak üzere aşağıdaki işlemlere göre vektör uzayı ve aynı zamanda halkadır;

$$(\alpha f + gh)(x) = \alpha f(x) + g(x)h(x)$$

R^X birim elemanlı değişmeli bir halkadır. R^X in sıfır elemanı $\underline{0}$ ve birim elemanı $\underline{1}$ ile gösterilir. $f \in R^X$ in toplamaya göre tersi $-f$ ile gösterilir ve

$$(-f)(x) = -f(x)$$

dir. $f \in R^X$ in çarpmaya göre tersinin olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in X$ için $f(x) \neq 0$ olmasıdır. Bu durumda f nin tersi f^{-1} fonksiyonudur ve

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$$

dir. R^X aşağıda tanımlanan sıralamaya (noktasal sıralamaya) göre kısmi sıralı bir kümedir:

$$f \leq g : f(x) \leq g(x) \quad \text{(Her } x \in X \text{ için).}$$

Ayrıca

$$f \leq g \Leftrightarrow f+h \leq g+h \, (\forall h \in C(X))$$

ve

$$0 \leq f, 0 \leq g \Rightarrow 0 \leq fg$$

olduğu açıktır.

$f, g \in R^X$ için k fonksiyonu

$$k(x) = \max(f(x), g(x)) = f(x) \vee g(x) = (f \vee g)(x)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $k \geq f$ *ve* $k \geq g$ dir. $h \geq f$ ve $h \geq g$ koşullarını sağlayan $h \in R^X$ için $h \geq k$ dır. Yani her $f, g \in R^X$ için f ve g nin R^X içinde supremumu vardır ve $f \vee g$ ile gösterilir. Ayrıca bu sıralamaya göre R^X bir latis-sıralı halkadır. $f \in R^X$ için $f \vee (-f)$ fonksiyonu $|f|$ ile gösterilir ve aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$|f|(x) = |f(x)| \; (\forall x \in X)$$

X topolojik uzayından R topolojik uzayı içine olan tüm reel-değerli sürekli fonksiyonların kümesi $C(X)$ ile gösterilir. Sürekli iki fonksiyonun toplamı ve çarpımı süreklidir. Eğer f, $C(X)$ in bir elemanı ise $-f$ de $C(X)$ e aittir. Buradan $C(X)$ bir değişmeli halkadır ve R^X in bir alt halkasıdır. $\underline{1}$ sabit fonksiyonu $C(X)$ in birim elemanıdır. Eğer f sürekli ise $|f|$ de süreklidir. g, $f \in C(X)$ için

$$f \vee g = 2^{-1}(f + g + |f - g|)$$

olduğundan $f \vee g \in C(X)$ dir. Buradan $C(X)$, R^X in bir alt latisidir.

$f \in R^X$ ve $0 < r \in R$ için eğer f>0 ise f bir tek negatif olmayan r-inci kuvvete sahiptir ve f^r ile gösterilir. Her $x \in X$ için

$$f^r(x) = f(x)^r$$

olarak tanımlanır. Eğer $f \in C(X)$ *ise* f^r süreklidir.

Eğer X uzayı ayrık ise X üzerindeki her fonksiyon süreklidir yani R^X ile $C(X)$ özdeştir. Tersine $R^X = C(X)$ ise X üzerindeki her kümenin karakteristik fonksiyonu sürekli olduğundan X uzayı ayrık uzaydır.

$C(X)$ deki tüm sınırlı fonksiyonların kümesi $C^*(X)$ ile gösterilir. $C^*(X)$, cebirsel ve sıralama işlemleri altında kapalıdır. Buradan $C^*(X)$, $C(X)$ in bir alt halkası ve alt latisidir.

Tanım 2.1.1: $C^*(X) = C(X)$ ise yani, her sürekli $f \in C(X)$ fonksiyonu sınırlı ise X uzayına pseudokompakt denir. Her kompakt uzay pseudokompakttır.

Tanım 2.1.2: X uzayında sayılabilir her açık örtü, sonlu bir alt örtüye sahip ise X uzayına sayılabilir kompakttır denir. Sayılabilir kompakt uzay pseudokompakttır.

X sayılabilir bir kompakt uzay ve $f \in C(X)$ olsun. Her $n \in N$ için

$$\{x : |f(x)| < n : n \in N\}$$

kümesi X in sayılabilir açık bir örtüsüdür. Buradan sonlu bir alt aile X i örter, dolayısıyla f sınırlıdır. $C(Y)$ den $C(X)$ içine olan her izomorfizma sıralamayı korur. Ayrıca $f = k^2$ ve f sınırlı ise k sınırlıdır. Buradan $C^*(Y)$ den $C(X)$ içine olan bir izomorfizma sıralamayı korur.

Teorem 2.1.3: $C(Y)(C^*(Y))$ den $C(X)$ içine her φ halka homomorfizması bir latis homomorfizmasıdır. [12]

İspat: $g = l^2$ olduğundan $\varphi g = (\varphi l)^2$'dir. φ, negatif olmayan fonksiyonları, negatif olmayan fonksiyonların içine taşır yani φ sırayı korur.

$$(\varphi|g|)^2 = \varphi(|g|^2) = \varphi(g^2) = (\varphi g)^2$$

ve $\varphi|g|$ ¨ [illegible] olduğundan $\varphi|g| = |\varphi g|$ elde edilir.

$$(g \vee h) + (g \vee h) = g + h + |g - h|$$

olduğundan

$$\varphi(g \vee h) + \varphi(g \vee h) = \varphi g + \varphi h + |\varphi g - \varphi h| = (\varphi g \vee \varphi h) + (\varphi g \vee \varphi h)$$

eşitliğinden $\varphi(g \vee h) = \varphi g \vee \varphi h$ dır. Yani, φ latis homomorfizmadır.

Fonksiyonların sınırlılığının başka bir özelliği, $C(X)$ in cebirsel yapısı ile aşağıdaki şekilde belirlenmiştir.

Teorem 2.1.4: $C(Y)(C^*(Y))$ den $C(X)$ içine olan her φ halka homomorfizması sınırlı fonksiyonları, sınırlı fonksiyonlara taşır.[12]

Sonuç 2.1.5: Eğer X pseudokompakt değil ise Y için $C(X), C^*(Y)$ nin bir homeomorfik görüntüsü değildir. [12]

$C(X)$ ve $C^*(X)$ nin izomorfik olması için gerekli ve yeterli koşul $C(X)$ ve $C^*(X)$ in özdeş olmalarıdır.

Teorem 2.1.6: φ, $C(Y)$ den $C(X)$ içine bir homomorfizma olsun ve görüntüsü $C^*(X)$ i içersin. Bu durumda φ, $C^*(Y)$ yi $C^*(X)$ in üzerine taşır.[12]

2.2. F (X,Y) **Fonksiyon Uzayları**

Tanım 2.2.1: X ve Y herhangi iki küme olsun. X ten Y içine olan bütün fonksiyonların ailesini F (X,Y) ile gösterelim. F (X,Y) nin herhangi bir alt ailesi, bir τ topolojisi ile donatılırsa bu alt aileye fonksiyon uzayı denir.

$\mathcal{F}(X,Y)$ bir çarpım kümesi ile özdeştir: Y kümesi, $x \in X$ için $Y_x = Y$ şeklinde olsun. Elde edilen Y_x kümelerinin çarpımını F ile gösterelim. Yani

$$F = \Pi\{Y_x : x \in X\}$$

olsun. $p = < a_x : x \in X >$ noktaları her $x \in X$ i bir $a_x \in Y_x = Y$ elemanı ile eşleştirsin. F, tüm $p = < a_x : x \in X >$ noktalarını içerirse X ten Y içine olan bütün fonksiyonları da içerir bu da $F = \mathcal{F}(X,Y)$ olduğu anlamına gelmektedir.

Tanım 2.2.2: Her $x \in X$ için $\xi_x(f) = f(x)$ ile tanımlanan

$$\xi_x : \mathcal{F}(X,Y) \to Y$$

dönüşümüne x üzerinde evaluation dönüşümü denir.

Örnek 2.2.3: $\mathcal{F}(I,R), I = [0,1]$ üzerinde tanımlı, reel-değerli fonksiyonların bir koleksiyonu olsun. $f, g, h \in \mathcal{F}(I,R)$ fonksiyonları

$$f(x) = x^2,\ g(x) = 2x+1,\ h(x) = \sin \pi x$$

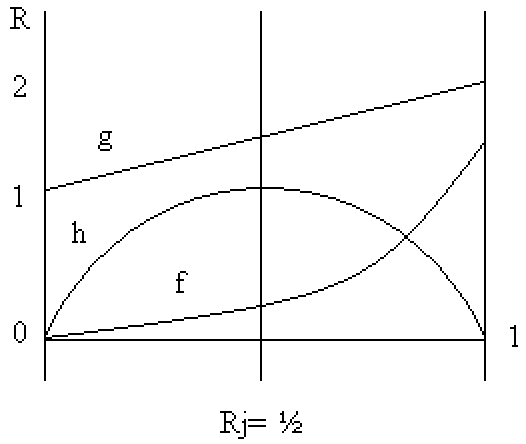
şeklinde olsun. Evaluation dönüşümü $\xi_j : \mathcal{F}(I,R) \to R$ ile tanımlansın ve $j = \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda;

$$\xi_j(f) = f(j) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\xi_j(g) = g(j) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$\xi_j(h) = h(j) = h\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

olur. Grafik olarak $\xi_j(f), \xi_j(g)$ ve $\xi_j(h)$ noktaları, *f, g,* ve *h* nin grafiklerinin *x=j* den reel eksene çıkılan R_j nin kestiği noktalardır.



Şekil 2.2.1. $\xi_j : \mathrm{F}\ (I, R) \to R$ ile tanımlı bazı fonksiyonlar için R_j nin kestiği noktalar

2.3. F (X,Y) Fonksiyon Uzayları Üzerindeki Topolojiler

2.3.1. Açık nokta topolojisi

Tanım 2.3.1.1: X bir küme, Y topolojik bir uzay olsun. F (X,Y) ile $F = \prod\{Y_x : x \in X\}$ ile çarpım kümesi özdeş olmak üzere F (X,Y) üzerinde bir τ çarpım topolojisi araştıralım. F nin

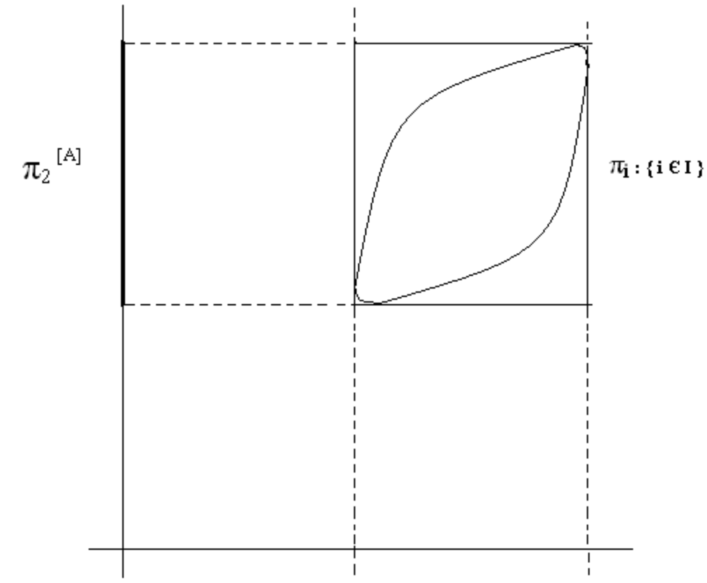
$$\pi_{x_o}^{-1}[G] = \{f : \pi_{x_o}(f) \in G\}$$

şeklindeki tüm alt kümelerini içeren, F üzerindeki çarpım topolojisinin alt tabanı S olsun. Burada $x_o \in X$ ve $G, Y_{x_o} = Y$ koordinat uzayının açık bir alt kümesidir. $\xi_{x_o}(f), x_o \in X$ üzerinde evaluation dönüşümü olmak üzere $\pi_{x_o}(f) = \xi_{x_o}(f) = f(x_o)$. Buradan F (X,Y) üzerindeki τ çarpım topolojisi için belirlenen S alt tabanı, F (X,Y) nin $\{f : f(x_o) \in G\}$ şeklindeki bütün alt kümelerini içerir. Yani bir $x_o \in X$ noktasını Y nin bir G açık kümesine dönüştüren bütün fonksiyonların dönüşümüdür. F (X,Y) üzerinde tanımlanan bu çarpım topolojisine açık nokta topolojisi denir.

Örnek 2.3.1.2: Eğer $A, \prod\{X_i : i \in I\}$ çarpım uzayının bir alt kümesi ise A, kendi izdüşümlerinin çarpımının alt kümesidir. Yani

$$A \subset \prod[\pi_i : i \in I]$$

biçimindedir.



Şekil 2.3.1. $A \subset \prod\{X_i : i \in I\}$

Buradan $cl\,\pi_i[A], \pi_i[A]$ nın kapanışı olmak üzere $A \subset \prod\{Y_x : x \in X\}$ çarpım uzayının kompakt bir alt kümesidir.

Teorem 2.3.1.3: Y Hausdorff uzayı ve $A \subset \mathrm{F}\,(X,Y)$ olsun. A nın açık nokta topolojisine göre kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul A nın kapalı olması ve her $x \in X$ için $c| \{f(x) : f \in A\}$ nın kompakt olmasıdır.[19]

2.3.2. Noktasal yakınsaklık topolojisi

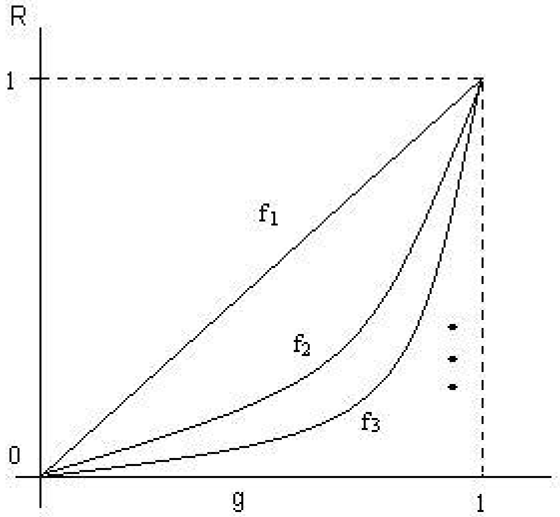
Tanım 2.3.2.1: X herhangi bir küme, Y topolojik bir uzay ve $(f_n), \mathrm{F}\,(X,Y)$ de bir dizi olsun. Eğer her $x_o \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = g(x_0)$$

ise (f_n) dizisi, $g : X \to Y$ fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir.

Örnek 2.3.2.2. $(f_1, f_2, ...), I = [0,1]$ dan R ye tanımlı fonksiyonların dizisi olsun ve aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3, ...$$



Şekil 2.3.2. $f_n : [0,1] \to R$ ile tanımlı $f_n(x) = x^n$ fonksiyonlar dizisi

(f_n) fonksiyon dizisi,

$$g(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq x < 1 \\ 1 & ; x = 1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $g : I \to R$ fonksiyonuna noktasal olarak yakınsaktır. Bu örnekte, f_n fonksiyonlarının her biri sürekli olduğu halde limit fonksiyonu olan g nin sürekli olmadığı görülüyor.

Noktasal yakınsaklık ile açık nokta topolojisi arasındaki ilişkiyi aşağıdaki teorem açıklamaktadır.

Teorem 2.3.2.3: $\mathrm{F}\,(X,Y)$ açık nokta topolojisi ile donatılmış olup $(f_n), \mathrm{F}\,(X,Y)$ içinde bir dizi olsun. Bu durumda (f_n) dizisinin, $g \in \mathrm{F}\,(X,Y)$ ye yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul (f_n) nin g ye noktasal olarak yakınsamasıdır. [19]

İspat: $\Rightarrow$ **:** $x_0 \in X$ ve $g(x_0) \in G, Y$ kümesinin açık bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$g \in F(x_o, G) = \{f \in \mathrm{F}\,(X,Y) : f(x_0) \in G\}$$

ise $F(x_0, G)$, F (X,Y) nin g yi içeren τ -açık bir alt kümesidir. $(f_n), g \in F(X,Y)$ ye τ 'ya bağlı olarak yakınsadığından

$$n > n_0 \Rightarrow f_n \in F(x_0, G)$$

olacak şekilde en az bir $n_0 \in N$ vardır. Buna bağlı olarak

$$n > n_0 \Rightarrow f_n(x_0) \in G \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = g(x_0)$$

olur. x_0 keyfi seçildiğinden (f_n), g ye noktasal yakınsaktır.

$\Leftarrow$: $F(x_0, G) = \{f \in$ F $(X,Y) : f(x_0) \in G\}$, g yi içeren τ için tanımlanmış bir alt taban olsun. $g(x_0) \in G$ dır. (f_n), g ye noktasal yakınsak olduğundan

$$n > n_0 \Rightarrow f_n(x_0) \in G$$

olacak şekilde en az bir $n_0 \in N$ vardır. Sonuç olarak

$n > n_0 \Rightarrow f_n \in F(x_o, G) \Rightarrow (f_n), g$ ye τ -yakınsaktır.

Bu teoremle F (X,Y) üzerindeki açık nokta topolojisinin aynı zamanda noktasal yakınsaklık topolojisi olduğu görülmektedir.

2.3.3. Düzgün yakınsaklık topolojisi

Tanım 2.3.3.1: $(f_n) = (f_1, f_2, ...)$ bir X kümesinden *(Y,d)* metrik uzayı içine olan fonksiyonların bir dizisi ve $n > n_0$ olsun. Her $x \in X$ için $d(f_n(x), g(x)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$ varsa (f_n) dizisi, $g : X \to Y$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir.

Eğer (f_n) dizisi g ye düzgün yakınsak ise aynı zamanda g ye noktasal yakınsaktır. Çünkü noktasal yakınsaklıkta n_0 sayısı ε ve x e bağlıyken düzgün yakınsaklıkta n_0 sayısı sadece ε bağlıdır.

X kümesinden *(Y,d)* metrik uzayı içine olan tüm sınırlı fonksiyonların koleksiyonu $\mathrm{B}(X,Y)$ ile gösterilsin ve $p(f,g)=\sup\{d(f(x),g(x)):x\in X\}$ şeklinde tanımlanan p, $\mathrm{B}(X,Y)$ üzerine metrik olsun. Bu metrik aşağıdaki özelliğe sahiptir:

Teorem 2.3.3.2: $(f_n),\mathrm{B}(X,Y)$ içindeki fonksiyonların bir dizisi olsun. (f_n) nin p metriğine bağlı olan $g\in\mathrm{B}(X,Y)$ ye yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul (f_n) nin g ye düzgün yakınsıyor olmasıdır. [19]

Tanım 2.3.3.3. $\mathrm{B}(X,Y)$ üzerinde $p(f,g)=\sup\{d(f(x),g(x)):x\in X\}$ metriği tarafından doğurulan topolojiye düzgün yakınsaklık topolojisi denir.

Y metriği üzerinde verilen düzgün yakınsama genel topolojik bir uzay için tanımlanamaz. Ancak düzgün yakınsama durumu, topolojik uzaylarla metrik uzaylar arasındaki uzayların bir koleksiyonu olan düzgün uzaylara genişletilebilir. Her metrik uzay düzgün uzaydır.

2.3.4. Kompakt açık topoloji

Tanım 2.3.4.1: κ, X içinde kompakt ve U,Y içinde açık bir küme olsun. F (X,Y) üzerindeki topoloji

$$(\kappa,U)=\{f\in \mathrm{F}\ (X,Y):f[\kappa]\subset U\}$$

kümesini alt taban kabul eden topolojidir.Bu topolojiye kompakt açık topoloji denir.

Teorem 2.3.4.2. F (X,Y) üzerindeki açık nokta topolojisi, F (X,Y) üzerindeki kompakt açık topolojiden daha zayıftır. [19]

Sonuç 2.3.4.3. $\xi_x:\mathrm{F}\ (X,Y)\to Y$ evaluation dönüşümü, F (X,Y) üzerindeki kompakt açık topolojiye bağlı olarak süreklidir.[19]

Örnek 2.3.4.4. Eğer Y Hausdorff uzayı ise $\mathrm{F}\,(X,Y)$ üzerindeki kompakt açık topoloji de bir Hausdorff uzayıdır.

$f,g \in \mathrm{F}\,(X,Y)(f \neq g)$ olsun. Bu durumda $f(p) \neq g(p)$ olacak şekilde en az bir $p \in X$ vardır. Y Hausdorff uzayı ise $f(p) \in G, g(p) \in H$ ve $G \cap H = \phi$ olacak şekilde Y nin G ve H gibi açık kümeleri vardır. Buradan

$$f \in F(p,G), g \in F(p,H) \text{ ve } F(p,G) \cap F(p,H) = \phi$$

dır. Ancak $\{p\}$ tek nokta kümesi kompakt olduğundan $F(p,G)$ ve $F(p,H), \mathrm{F}\,(X,Y)$ üzerindeki kompakt açık topolojiye aittir. Yani, $\mathrm{F}\,(X,Y)$ Haussdorff uzayıdır.

3.BÖLÜM

FONKSİYON UZAYLARI ÜZERİNDEKİ DÖNÜŞÜMLER

3.1. Fonksiyon Uzayları Üzerindeki Topolojiler

X ve Y iki Tychonoff uzayı olmak üzere eğer X ve Y topolojik uzaylar ise X in Y ye homeomorf olduğunu göstermek için $X \approx Y$ sembolü kullanılmıştır. Eğer X ve Y lineer uzaylar ise $X : Y$ sembolü, X in Y ye lineer homeomorf olduğunu göstermektedir.

K, X in bir örtüsü olmak üzere $f \in C(X), \kappa \in \mathrm{K}$ ve $\delta > 0$ için $N(f,\kappa,\delta) = < f,\kappa,\delta > = \{g \in C(X) : | f(x) - g(x) | < \delta$, her $x \in \kappa$ için$\}$ şeklindeki bütün kümelerden oluşan aile bir alt taban olmak üzere $C(X)$ üzerinde bir topoloji tanımlansın. $C(X)$ üzerinde tanımlanan bu topoloji X in K - örtüsüne bağlıdır. Eğer bu form $f \in R^x$ olarak genişletilirse f nin komşuluklar tabanıdır.

Tanım 3.1.1. $N(f,\kappa,\delta)$ ye κ ve δ tarafından tanımlanmış f nin komşuluklar tabanı denir.

Eğer K - örtüsü, X in sadece kompakt alt kümelerini içeriyorsa bu şekildeki kümeleri alt taban kabul eden topoloji ile donatılan $C(X)$ bir topolojik gruptur. Bu durumda genellikle $\kappa \in \mathrm{K}$ ve $\delta > 0$ için $< \underline{0},\kappa,\delta >$ şeklindeki açık kümeleri göz önünde bulundurulacaktır.

Tanım 3.1.2. *A, X* in bir alt kümesi olsun. Eğer her $f \in C(X)$ için $f(A)$, R de sınırlı ise A ya X de sınırlı denir. Eğer *A, X* in sınırlı bir alt kümesi ise o zaman A nın kapanışı olan $c|\,A$ da aynı zamanda X in sınırlı bir alt kümesidir.

Tanım 3.1.3. Eğer K -örtüsü X in bütün tek nokta kümelerini içeriyorsa o zaman bu topoloji ile donatılan $C(X), C_p(X)$ ile gösterilir. Bu topolojiye noktasal yakınsaklık topolojisi denir.

Tanım 3.1.4. Eğer K - örtüsü, X in sadece bütün kompakt alt kümelerini içeriyorsa o zaman bu topoloji ile donatılan $C(X)$, $C_o(X)$ ile gösterilir. Bu topolojiye kompakt-açık topoloji denir.

Tanım 3.1.5. Eğer $\mathrm{K} = \{X\}$ ise o zaman bu topoloji ile donatılan $C(X), C_u(X)$ ile gösterilir. Bu topolojiye düzgün yakınsaklık topolojisi denir.

Eğer K -örtüsü X in sadece sınırlı alt kümelerini içeriyorsa, o zaman bu topoloji ile donatılan $C(X), C_b(X)$ ile gösterilir.

Yukarıda tanımlanan $C_p(X), C_o(X), C_u(X)$ ve $C_b(X)$ birer topolojik vektör uzaylarıdır.

X ve Y uzayları için $X \leq Y$ gösterimi, X ve Y nin aynı küme elemanlı olması ve Y nin topolojisinin X in topolojisinden daha kuvvetli veya eşit olması demektir. Bu gösterim ile $C_p(X) \leq C_o(X) \leq C_b(X) \leq C_u(X)$ dir.

3.2. Lineer Homeomorfik Uzaylar

X ve Y birer Tychonoff uzayı, normal ve birinci sayılabilir uzaylar olsunlar. $C_p(X)$ ve $C_p(Y)$ lineer olarak homeomorfiktir. X^{α}, bazı $\alpha < w_1$ için sayılabilir kompakt olsun.

X bir topolojik uzay ve A, X in bir alt kümesi olsun. $Y = Y_{X,A}$, X den elde edilmiş bir katsayı uzayını ifade etmektedir. $C_{p,A}(X), A$ üzerinde sıfır değerini alan fonksiyonlardan oluşan $C_p(X)$ in alt uzayı ve $C_{p,0}(Y)$ de ∞ da sıfır değerini alan fonksiyonlardan oluşan $C_p(Y)$ nin alt uzayıdır.

Yardımcı Teorem 3.2.1. X bir uzay ve A, X in bir alt kümesi olsun. $C_{p,A}(X) : C_{p,0}(Y)$ olur. [10]

X topolojik uzayı ve her α ordinali için X in α -ıncı türevi tümevarım yöntemiyle aşağıdaki gibi tanımlanır.

(a) $X^{(0)} = X$ ve $X^{(1)} = \{x \in X \mid x, X$ in bir yığılma noktasıdır.$\}$

(b) $\alpha = \beta + 1$ ise $X^{(\alpha)} = (X^{(\beta)})^{(1)}$ olur.

(c) Eğer α bir limit ordinal ise $X^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta<\alpha} X^{(\beta)}$ dir.

Bir α ordinali $\beta\, ve\, \delta$ ordinalleri için $\alpha = \beta + \delta$ şeklinde ise α bir asal bileşendir. Bu durumda ya $\delta = 0$ ya da $\delta = \alpha$ olur. Her α ordinali için α dan daha küçük veya ona eşit olan en büyük asal bileşen "α^{ι}" şeklinde gösterilir.

$C_{p,0}([1,\alpha])$ ile α da sıfır değerini alan fonksiyonlardan oluşan $C_p([1,\alpha])$ nın alt uzaylarını ifade ederiz.

Yardımcı Teorem 3.2.2. α bir ordinal olsun. O halde

$$C_{p,0}([1,\alpha]) : C_p([1,\alpha]) \text{ olur.[10]}$$

Yardımcı Teorem 3.2.3. $w^{\cdot\cdot}\ \alpha, \beta \leq w_1$ olsun. $\alpha^{\cdot\cdot}\ \beta \,\alpha^{w}$ ise

$$C_p([1,\alpha]) : C_p([1,\beta]) \text{ olur. [10]}$$

X ve Y Tychonoff uzayları , $\phi : C(X) \to C(Y)$ lineer bir dönüşüm ve $y \in Y$ olsun. Eğer X içinde x in her U- komşuluğu için

$f(X \setminus U) \subseteq \{0\}$ ve $\phi(f)(y) \neq 0$

olacak şekilde bir $f \in C(X)$ varsa o zaman bu tür $x \in X$ lerden oluşan *supp(y)* kümesine $y \in Y$ nin desteği denir. X içindeki bu destek ϕ ye bağlıdır ve $supp\phi(y)$ şeklinde gösterilebilir. Y nin bir A alt kümesi için $U_{y\in A} supp(y)$ yi $suppA$ ile gösterelim. Her $f, g \in C(X)$ ve $y \in Y$ için f ve g , $supp(y)$ nin komşuluğunda bulunmak üzere $\phi(f)(y) = \phi(g)(y)$ dir ve ϕ dönüşümü etkindir.

Eğer her $f \in C(X)$ için $f(A)$, R de sınırlı ise X in A alt kümesi de sınırlıdır.

Önerme 3.2.4. X ve Y Tychonoff uzayları ve $\phi : C_p(X) \to C_p(Y)$ lineer homeomorfizma olsun. Bu durumda,

(a) ϕ etkindir.
(b) Eğer A, Y nin sınırlı bir alt kümesi ise $suppA, X$ içerisinde sınırlıdır. [10]

Yardımcı Teorem 3.2.5. X ve Y Tychonoff uzayları ve $\phi : C_p(X) \to C_p(Y)$ bir homeomorfizma olsun. f_n, süreksiz $f \in R^X$ fonksiyonuna yakınsamak üzere $(f_n)_{n\in N}, C_p(X)$ içerisinde bir küme olsun. $g : Y \to R, \{\phi(f_n) \mid n \in N\}$ kümesinin bir yığılma noktasıdır. Bu sebeple g sürekli değildir. [10]

İspat: $\{f_n \mid n \in N\}, C_p(X)$ içerisinde kapalı ve ayrık olduğu sürece, $\{\phi(f_n) \mid n \in N\}, C_p(Y)$ içerisinde kapalı ve ayrıktır.

Teorem 3.2.6. X ve Y normal uzaylar ve birinci sayılabilir topolojik uzaylar olsunlar. $C_p(X)$ ve $C_p(Y)$ lineer homeomorfiktir. O halde $X^{(1)}$ in sayılabilir kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul $Y^{(1)}$ in sayılabilir kompakt olmasıdır.[10]

İspat: $X^{(1)}$ sayılabilir kompakt olmasın ve $Y^{(1)}$ sayılabilir kompakt olsun. $X^{(1)}$ dizisel kompakt olmadığı sürece içerisinde kapalı ayrık bir $F = \{x_n \mid n \in N\}$ kümesi vardır. Her $n \in N$ için $\{U_j^n \mid j \in N\}$ kümesi x_n de azalan bir açık taban ve f_j^n ifadesi bir Urysohn fonksiyonu olsun.

O halde $f_j^n(x_n)=1$ ve $f_j^n(X \setminus U_j^n)=0$ olur. Bu sebeple $f_j^n \to X_{X_n}$ süreksizdir. Ayrıca $\phi : C_p(X) \to C_p(Y)$ lineer bir homeomorfizma ve $g_j^n=\phi(f_j^n)$ olsun.

Yardımcı Teorem 3.2.7. Her $y \in Y$ ve $n \in N$ için $\{g_j^n(y) \mid j \in N\}$ kümesi R de sınırlıdır. [10]

$X \oplus Y$ veya $\oplus_{i=1}^{\infty} X_i$ ile topolojik X ve Y uzaylarının veya $X_i (i \in N)$ nin topolojik toplamlarını ifade ederiz.

Örnek 3.2.8. $X=\oplus_{i=1}^{\infty}[1,w]_i$ olsun. $A=X^{(1)}$ olmak üzere $Y=Y_{X,A}$ ifadesi X den elde edilmiş katsayı uzayı olsun.

X birinci sayılabilir ve normal uzaydır. Y de normal uzaydır ancak birinci sayılabilir uzay değildir. Yardımcı Teorem 3.2.1 e göre $C_{p,A}(X) : C_{p,o}(Y)$ dir. Ayrıca,

$$C_{p,A}(X) : \prod_{i=1}^{\infty} C_{p,o}([1,w])_i$$

$$: \prod_{i=1}^{\infty} C_p([1,w]) \qquad \text{(Yardımcı Teorem 3.2.2)}$$

$$: C_p(X)$$

dir. Her Z Tychonoff uzayı ve her $z \in Z$ için $C_p(Z)$ içerisinde z de sıfır değerini alan fonksiyonlardan oluşan $C_{p,o}(Z)$ için $C_p(Z) : C_{p,o}(Z)xR$ olur. Buna göre Yardımcı Teorem 3.2.2 ye göre $C_p([1,w]) : C_p([1,w])xR$ olur. Bu da $C_p(X) : C_p(X)xR$ olduğunu gösterir. Böylece,

$$C_p(X) : C_p(X)xR$$

$$: C_{p,A}(X)xR$$

$$: C_{p,0}(Y)xR$$

: $C_p(Y)$ olur.

Ancak $X^{(1)} = A$ sayılabilir kompakt değildir ve $Y^{(1)} = \{\infty\}$ sayılabilir kompakttır. Teorem 3.2.6 ya göre eğer $C_p(X)$ ve $C_p(Y)$ lineer homeomorfik ise ve X sayılabilir kompakt ise Y sayılabilir kompakttır. Aşağıdaki gibi bir tahmin yapılabilir: α keyfi bir ordinal olsun. Eğer X ve Y nin her ikisi de normal uzay ve birinci sayılabilir uzaylar ise $C_p(X)$ ve $C_p(Y)$ lineer homeomorfik olur ve $X^{(\alpha)}$ sayılabilir kompakt olur. Böylece $Y^{(\alpha)}$ da sayılabilir kompakt olur.

Aşağıdaki örnek, eğer α asal bileşen değilse yukarıdaki tahminin yanlış olduğunu göstermektedir.

Örnek 3.2.9. $\alpha < w_1$ asal bileşen olmayan bir ordinal olsun. Bu durumda 1'' $\alpha' < \alpha$ olur.

$X = \oplus_{i=1}^{\infty}[1, w^{\alpha'}]_i$ ve $Y = \oplus_{i=1}^{\infty}[1, w^{\alpha}]_i$ olsun. Teorem 3.2.3 e göre $C_p([1, w^{\alpha'}]) : C_p([1, w^{\alpha}])$ dır. Bu sebeple $C_p(X) : C_p(Y)$ dir. Ancak sayılabilir kompakt olmayan $Y^{(\alpha)} \approx N$ dir ve sayılabilir kompakt olan $X^{(\alpha)} = \phi$ dir.

3.3. Fonksiyon Uzayları Arasında Lineer Dönüşümler

$C_p(X)$ fonksiyon uzayı çarpım topolojisi ile birlikte R^X in yoğun alt uzayı olan bir topolojik vektör uzayıdır. Eğer lineer olan $C_p(X)$ ve $C_p(Y)$ arasında bir homeomorfizm varsa $C_p(X)$ ve $C_p(Y)$ fonksiyon uzayları da lineer homeomorfiktir.

X ve Y tam regüler uzaylar, $\phi = C_p(X) \to C_p(Y)$ sürekli lineer fonksiyon ve $y \in Y$ olsun. $\psi(y)(f) = \phi(f)(y)$ ile tanımlanan $\psi_y : C_p(X) \to R$ fonksiyonu sürekli ve lineerdir. $f \in C_p(X)$ için, $\xi_X(f) = f(x)$ ile tanımlanan $\xi_X(x \in X)$ evaulation dönüşümü $L(X)$ için bir Hamel bazı oluşturur, bu sebeple $\psi_y \neq 0$ için $x_1,...,x_n \in X$ ve $\lambda_1,...,\lambda_n \in R\setminus\{0\}$ ve $\psi_y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_{X_i}$ olur. $f \in C_p(X)$ için, $\phi(f)(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$ dir. Genellikle $\phi(f)(y) = \sum_{z\in \quad (y)} \lambda_z f_{(z)}$ dir. Eğer $\psi_y = 0$ ise $supp(y)$ boş kümedir. $A \subset Y$ için, $U\{supp(y) : y \in A\}$ ifadesi $suppA$ ile gösterilir. $f \in C_p(X)$ ve $f(A), R$ nin sınırlı bir alt kümesi ise *A, X* içinde sınırlıdır.

Teorem 3.3.1. $C_p(X)$ ve $C_p(Y)$ lineer homeomorfik olmak üzere *X* ve *Y* tam regüler uzaylar olsunlar. O halde;

(a) *X* in pseudokampt olması için gerekli ve yeterli koşul *Y* nin pseudokampt olmasıdır.
(b) *X* in kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul *Y* nin kompakt olmasıdır.
(c) *X* in σ-kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul *Y* nin σ-kompakt olmasıdır.
(d) *X* in reelkompakt olması için gerekli ve yeterli koşul *Y* nin reelkompakt olmasıdır. [11]

Yardımcı Teorem 3.3.2. *X* ve *Y* birer tam regüler uzay ve $\phi : C_p(X) \to C_p(Y)$ sürekli, lineer ve örten olsun. O halde, *X* in her kapalı ve sınırlı κ alt kümesi için $L = \{y \in Y : supp(y) \subset \kappa\}$ kümesi *Y* nin kapalı ve sınırlı bir alt kümesidir.[11]

İspat: Öncelikle *L* nin kapalı olduğunu ispatlayalım. Herhangi bir $y \notin L$ alalım. $x \notin \kappa$ olmak üzere $x \in supp(y). f \in C(X)$ için $f(x) = 1$ ve $f(\kappa \cup (supp(y)\setminus\{x\})) = 0$ dır. $\phi(f)(y) = \sum_{z\in supp(y)} \lambda_z f_{(z)} = \lambda_X \neq 0$ dır.
$W = \{z \in Y : \phi(f)(z) \neq 0\}$ olsun. Buradan $y \in W$ dir. $z \in W \cap L$ ise $\phi(f)(z) \neq 0$ ve $f(supp(z)) = 0$ olduğundan $supp(z) \subset \kappa$ ve $\phi(f)(z) = 0$ dır. . *L* nin *Y* içerisinde sınırlı olduğunu ispatlamak için tam tersini düşünmek gerekir
$h(L) \subset R$ ve $h : Y \to R$ sürekli olsun. $\{t_n : n \in N\}, R$ nin kapalı ve ayrık bir alt küme-

sidir. $t_n \in h(L)\setminus\{0\}.h(y_n)=t_n$ ve $s_n = n.\sum_{z\in supp(y_n)} |\lambda_z|$ olacak şekilde $n\in N$ için $y_n \in L$ olsun.

ϕ örten ve $supp(y_n)\neq\phi$ olduğundan $s_n>0$ dır. Bu durumda, $g(t_n)=s_n$ olmak üzere sürekli olan bir $g:R\to R$ vardır. ϕ örten olduğundan $\phi(f)=goh$ eşitliğini sağlayan bir $f\in C(X)$ vardır.

κ sınırsız olduğundan $f(\kappa)\subset[-c,c]$ koşulunu sağlayan bir $c\in R$ vardır. $n>c$ için,

$$s_n=\phi(f)(y_n)=\left|\sum_{z\in supp(y_n)} \lambda_z.f_{(z)}\right|$$

$$\leq \sum_{z\in supp(y_n)} |\lambda_z|.|f_{(z)}| \leq c.\sum_{z\in supp(y_n)} |\lambda_z| < s_n$$

çelişkisi elde edilir.

Sonuç 3.3.3. X ve Y tam regüler uzay ve $\phi:C_p(X)\to C_p(Y)$ sürekli, lineer ve örten olsun. X pseudokompakt olduğunda Y de pseudokompakttır. [11]

Sonuç 3.3.4. X ve Y tam regüler uzaylar ve $\phi:C_p(X)\to C_p(Y)$ sürekli, lineer ve örten olsun. μ -uzayı için

(a) X kompakt ise Y de kompakttır.
(b) X bir σ -kompakt ise Y de σ -kompakttır.[11]

İspat: (a) Sonuç 3.3.3 ve μ -uzayının tanımından kolayca görülür.

(b) $X=U_{n=1}^{\infty}X_n, X_n$ kompakt ve $X_n\subset X_{n+1}.Y_n=\{y\in Y: supp(y)\subset X_n\}$ olsun. Yardımcı Teorem 3.3.2 ile μ -uzayının tanımından Y_n kompakttır.

$Y_n \subset Y_{n+1}$ ve bir noktanın support'u sonlu olduğundan $Y = U_{n=1}^{\infty} Y_n$.

Sonuç 3.3.5. *X* ve *Y* tam regüler uzaylar ve $\phi : C_p(X) \to C_p(Y)$ sürekli, lineer ve örten olsun. Eğer *Y* normal uzay ve *X* σ-pseudokompakt ise Y de σ-pseudokompakttır. [11]

Örnek 3.3.6: *X*, σ-kompakt olmayan herhangi bir pseudokompakt uzay olsun. Bu sebeple *X* aynı zamanda ne kompakt ne de reel kompakttır. $\phi(f) = f \mid X$ ile tanımlanan $\phi : C_p(\beta X) \to C_p(X)$ fonksiyonu sürekli lineer bir fonksiyondur. *X* pseudokompakt olduğundan *X* üzerindeki herhangi bir reel değerli sürekli fonksiyon her zaman sınırlıdır. Bundan dolayı bu fonksiyon βX e genişletilebilir. Bu ϕ nın örten olduğunu gösterir. Dolayısıyla Teorem 3.3.1.(a) ya göre ϕ bir homeomorfizma olamaz.

Yardımcı Teorem 3.3.7: *X* ve *Y* tam regüler uzaylar ve $\phi : C_p(X) \to C_p(Y)$ sürekli, lineer ve 1-1 olsun. supp(y) ,X içerisinde yoğundur. [11]

Sonuç 3.3.8. *X* ve *Y* tam regüler uzaylar ve $\phi : C_p(X) \to C_p(Y)$ sürekli, lineer ve 1-1 olsun. *Y* pseudokompakt ise *X* de pseudokompakttır. [11]

3.4. Fonksiyon Uzayları Arasında Sürekli Lineer Dönüşümler

X, *Y* ve *Z* sonlu Tickhonoff topolojik uzayları olsunlar.

$C_p^*(X) = \{f \in C_p(X) : f \; sınırlı\}$ ve $C_u^*(X) = \{f \in C(X) : f \; sınırlı\}$.

G, R nin açık bir alt kümesi olsun. $V(x;G) = \{f \in C_p(X), f(x) \in G\}$ kümelerinin ailesi, $C_p(X)$ in bir açık alt tabanıdır.

τ ve λ sonsuz kardinaller olmak üzere $X, (\tau, \lambda)$ çapına sahip bir uzay ve $|\gamma| = \tau$

dır. X in boş olmayan açık alt kümelerinin her bir γ ailesi için $\cap\gamma_1 \neq \phi$ ve $|\gamma_1| = \lambda$ olmak üzere bir $\gamma_1 \subset \gamma$ alt ailesi vardır.

$A \subset X$ ve $f \in C_p(X)$ için f nin A ya kısıtlanmışını $f|_A$ ile f nin desteğini $suppf = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ ile ve A nın kapanışını $\overline{A}$ ile gösterelim.

$f \in C_p(X)$ için $e(x) = \hat{x}$ ve $\hat{x}(f) = f(x)$ olmak üzere $e : X \to C_p(C_p(X))$ dir. $z = a_1\hat{x}_1 + ... + a_n\hat{x}_n$ şeklindeki sonlu lineer kombinasyonlardan oluşan aile $L_p(X)$ ile gösterilir. $L_p(X), C_p(X)$ in dual uzayıdır. Eğer $\theta, C_p(X)$ ten $C_p(Y)$ ye bir sürekli lineer fonksiyon ise o zaman $\theta^*(y) = yo\theta$ şeklinde tanımlanan $\theta^* : L_p(Y) \to L_p(X)$ fonksiyonu da $y \in L_p(Y)$ için lineer ve süreklidir. $y \in Y$ ve her $f \in C_p(X)$ için $\theta^*(y)(f) = \theta(f)(y)$ olur. $y \in Y$ için $a_1, ..., a_n \neq 0$ olmak üzere $\theta^*(y) = a_1\hat{x}_1 + ... + a_n\hat{x}_n$. X içerisinde y nin tanım kümesi $D(y,\theta) = \{x_1, ..., x_n\}$ şeklindedir. $D(y,\theta)$ yerine kısaca $D(y)$ yazabiliriz. Açıkça görülüyor ki, $f \in C_p(X)$ ve her $x_i \in D(y) = \{x_1, ..., x_n\}$ için $f(x_i) = 0$ ve $\theta(f)(y) = \theta^*(y)(f) = (a_1\hat{x}_1 + ... + a_n\hat{x}_n)(f) = a_1 f(x_1) + ... + a_n f(x_n) = 0$ olur. Bundan dolayı $f, g \in C_p(X)$ için $f|_{D(y)} = g|_{D(y)}$ ve $\theta(f)(y) = \theta(g)(y)$.

Böylece $x \in X$ için ve her $G \in N_X$ için $x \in D(y)$ olur. $f \in C_p(X)$ için $suppf \subset G$ ve $\theta(f)(y) \neq 0$ olacak şekilde $x \notin D(y)$ vardır. $G \cap D(y) = \phi$ ve $G \in N_X$ için $suppf \subset G$ ve $\theta(f)(y) = 0$ dır. Tersine $f \in C_p(X), f(x) \neq 0$ ve $x \in D(y)$ için $suppf \subset G, suppf \cap (D(y) \setminus \{x\}) = \phi$ ve ayrıca $\phi(f)(y) \neq 0$ dır.

Yardımcı Teorem 3.4.1. $\theta : C_p(X) \to C_p(Y)$ lineer sürekli bir fonksiyon ve $x_o \in X$ olsun. $y_o \in Y$ için aşağıdakiler her zaman doğrudur.

(a) $x_o \in D(y_o)$ ve $f, g \in C_p(X)$ için $f|_{D(y_o)} \setminus \{x_o\} = g|_{D(y_o)} \setminus \{x_o\}$ olmak üzere $\theta(f)(y_o) = \theta g(y_o)$ ve $f(x_o) = g(x_o)$.

(b) $A \subset Y$ için $y_o \in \overline{A}$ ise $D(y_o) \subset U\overline{\{D(y) : y \in A\}}$.

(c) ϕ bir homeomorfizma olmak üzere $D(y_o) = \{x_o\}$ ve $D(x_o) = \{y_o\}$ olur. [21]

Önerme 3.4.2. $\theta: C_p(X) \to C_p(Y)$ lineer bir homeomorfizma olsun. $f \in C_p(X)$ için $f \geq 0$ ise $\theta(f) \geq 0$. Bu nedenle X ve Y uzayları homeomorfiktir. [21]

İspat: $x_o \in X$ ve $n \geq 2$ için $D(x_o) = \{y_1, ..., y_n\}$ olsun. Yardımcı Teorem 3.4.1.(c) ye göre her $i = 1,...,n$ için $D(y_i) \setminus \{x_o\} \neq \phi$ olur. $F = U_{i=1}^{n} D(y_i) \setminus \{x_o\}$ olsun. Her $x \in F, x = x'$ ve $G_x \in N_x$ için $x_o \notin G_x$ ve $G_x \cap G_{x'} = \phi$.

$f_x \in C_p(X)$ için $f(x) \geq 0$. Her $x \in F$ için $suppf_X \subset G_x$ ve $f_X(x) = 1$. Her $i = 1,...,n$ ve $f = \sum_{x \in F} f_X$ sürekli fonksiyonu için $\theta(f)(y_i) > 0$. Her $i = 1,...,n$ için $V_i \in N_{y_i}$ seçelim. $i \neq j, h_i \in C_p(Y)$ ve $h_i \geq 0$ için $supp\, h_i \subset V_i, h_i(y_i) = \theta(f)(y_i) > 0$ ve

$V_i \cap V_j; = \phi$. Yardımcı Teorem 3.4.1.(a) dan $\theta^{-1}(h_i)(x_o) > 0$. Dolayısıyla $\theta^{-1}(h)(x_o) = f(x_o) = 0$. Bu durumda $\theta^{-1}(h)(x_o) = \sum_{i=1}^{n} \theta^{-1}(h_i)(x_o) > 0$ şeklinde bir çelişki ortaya çıkar. Buradan $D(x_o) = \{y_o\}$ ve Yardımcı Teorem 3.4.1.(c) den $D(y_o) = \{x_o\}$ olur. $D(y) = \{x\}$ ve $t(y) = x$ için $t: Y \to X$ şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım. Yardımcı Teorem 3.4.1 den t nin bir homeomorfizma olduğu görülür.
$\theta: C_p(X) \to C_p(Y)$ lineer fonksiyonu için $\theta(\max\{f, g\}) = \max\{\theta(f), \theta(g)\}$ olduğundan θ bir latis homeomorfizmadır. Böylece $g \geq 0$ için $\theta(g) \geq 0$ dır.

Sonuç 3.4.3. $\theta: C_p(X) \to C_p(Y)$ homeomorfizma ve bir latis homeomorfizma olsun. O halde X ve Y uzayları homeomorfiktir. [21]

X ve Y kompakt uzayları için $T: C_\mu(X) \to C_\mu(Y)$ izomorfizması varsa bu uzaylar homeomorfiktir. (Banach Stone Teoremi). Bu teoremin ispatından $T: C_p(X) \to C_p(Y)$ nin bir homeomorfizma olduğu görülür.

Sonuç 3.4.4. $\theta: C_\mu^*(X) \to C_\mu^*(Y)$ bir izometri ve aynı zamanda $\theta: C_p^*(X) \to C_p^*(Y)$ lineer bir homeomorfizma ve $\theta(1_x) = 1_Y$ ise X ve Y uzayları homeomorfiktir.[21]

Önerme 3.4.5. θ lineer, sürekli ve $C_p(X)$ ten $C_p(Y)$ye 1-1 fonksiyon ise X in pseudokompakt olması için gerekli ve yeterli koşul Y nin pseudokompakt olmasıdır.[21].

İspat: $B=\{D(y): y\in Y\}$ için $B\neq\phi.\overline{B}\neq X$ ise bazı $x\in X\setminus\overline{B}$ için $C_p(X)$ de, $\overline{B}$ de sıfır değerini alan ve $f(x)=1$ koşulunu sağlayan bir fonksiyonu vardır. $\theta(f)$, Y de sıfır değerini alır. Bu da θ nın lineer ve 1-1 fonksiyon olmasıyla çelişir.

Bu sebeple $\overline{B}=X.\theta$ lineer olduğundan B sınırlıdır. Dolayısıyla X, yoğun sınırlı bir alt küme içerdiğinden X pseudokompakttır.

Önerme 3.4.6: $\theta: C_p(X)\to C_p(Y)$ sürekli, lineer ve 1-1 fonksiyon ve τ ile $\lambda,\tau\geq\lambda\geq w$ şeklinde sonsuz kardinaller olsunlar. $Y,(\tau,\lambda)$ çapına sahipse X de aynı çapa sahiptir. [21]

İspat: G, X in açık bir alt kümesi olsun. $U\overline{\{D(y): y\in Y\}}=X$ olduğu için $V=\{y\in Y: D(y)\cap G\neq\phi\}$ kümesi boş olmayan bir kümedir. Bu kümenin açık olduğunu ispatlayalım. $F=Y\setminus V$ ve $y\in\overline{F}\setminus F$ olsun. Buradan $D(y)\cap G=\{x_1,...,x_n\}$ olur.

Her $x_k, k=1,...,n$ için $f_k\in C_p(X)$ vardır. Böylece $suppf_k\subset G$ ve $\theta(f_k)(y)>0$ olur. Ancak her $z\in F$ için, $f_k\,|_{D(z)}=0$ olduğundan $\theta(\sum_{k=1}^{n} f_k)(y)=\sum_{k=1}^{n}\theta(f_k)(y)>0$ ve $\theta(\sum_{k=1}^{n} f_k)\,|_F=0$ olur; bu bir çelişkidir.

$\{G_i: i<\tau\}, X$ içerisinde açık kümelerin bir ailesi olsun. Buna göre Y içerisinde açık kümelerin bir $\{V_i: i<\tau\}$ ailesi vardır. Böylece her $i<\tau$ için $V_i=\{y\in Y: D(y)\cap G_i\neq\phi\}.Y,(\tau,\lambda)$ çapına sahip olduğundan $|A|=\lambda$ ve $A\subset\tau$. Dolayısıyla $W=\cap\{V_j: j\in A\}\neq\phi.y_o\in W$ ve $j\in A$ için $D(y_o)\cap G_j\neq\phi.D(y_o)$ sonlu olduğundan bir $x_o\in D(y_o)$ vardır. Bundan dolayı $X,(\tau,\lambda)$ çapına sahiptir.

4. BÖLÜM

ORDİNALER ÜZERİNDEKİ FONKSİYON UZAYLARI

4.1. Ordinaller Üzerindeki Fonksiyon Uzayları

$C_p(X)$ ve $C_p(Y)$ uzayları (düzgün) homeomorfik ise X ve Y uzaylarına t-denktir veya u-denktir denir. X ve Y uzayları t-denk ise bu durum $X \overset{t}{:} Y$ şeklinde, u-denk ise $X \overset{u}{:} Y$ şeklinde gösterilir.

E ve L lineer topolojik uzaylar olsun. L de ki sıfırın her U komşuluğu için E de sıfırın bir V komşuluğu vardır ve her $f, g \in E, (f-g) \in V$ için $\varphi(f) - \varphi(g) \in U$ oluyorsa $\varphi : E \to L$ lineer dönüşümü düzgün sürekli olur.

Teorem 4.1.1. α ve β birer ordinal olsun.

(a) $|\alpha| = |\beta|$ ise $C_p([1,\alpha\})$ ve $C_p([1,\beta])$ homeomorfik değildir.

(b) $|\alpha| = |\beta| = \mathrm{k}$, $k = w$, k tekil ya da $\alpha, \beta \geq k^2$ ise $C_p([1,\alpha\})$ ve $C_p([1,\beta])$ düzgün homeomorfiktir.

(c) k düzenli sayılamaz bir kardinal ve $\alpha \in [\mathrm{k}\lambda_a, \mathrm{k}(\lambda_a + 1)], \beta \in [\mathrm{k}\lambda_b, \mathrm{k}(\lambda_b + 1)]$ ve $\lambda_a, \lambda_b \in [1, k)$ için $\alpha, \beta \in [\mathrm{k}, \mathrm{k}^2)$ dir.

Sonuç olarak $|\lambda_a| = |\lambda_a|$ ise $C_p([1,\alpha])$ ve $C_p([1,\beta])$ (düzgün) homeomorfiktir. [14]

Bu teoremden $C_p([1, k^t.\mathrm{k}])$ ve $C_p([1, (\mathrm{k}^t)^2])$ nin (düzgün) homeomorfik olup olmadığını kesin olarak söyleyemeyiz.

Bundan böyle aksi belirtilmedikçe üzerinde çalışılan bütün uzaylar tam regüler uzay olarak kabul edilecektir.

$x \in X$ için $C_p(X,x) = \{f \in C_p(X) : f(x) = 0\}$ dır. X kompakt ise $C_p(X,x)$ sup normal ile donatılır.

Teorem 4.1.2. $C_p(X)$ ve $C_p(Y)$ homeomorfik ise $|X| = |Y|$ dir. [14]

α ve β ordinalleri için $[\alpha,\beta]$ ve $[\alpha,\beta)$ kümelerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$[\alpha,\beta] = \{\gamma : \alpha \le \gamma \le \beta\} \text{ ve } [\alpha,\beta) = \{\gamma : \alpha \le \gamma < \beta\}.$$

Bütün ordinalleri "Ord" ile, limit ordinalleri "Lim" ile, kardinalleri "Card" ile göstereceğiz. $[\alpha,\beta]$ üzerindeki topoloji ve onun alt kümeleri her zaman sıra topolojisi olacaktır.

İddia 4.1.3. $\beta, w \le \alpha$ için $[1,\alpha+\beta]$ ve $[1,\alpha]$ homeomorfiktir.[14]

İspat: Özellikle k sonsuz bir kardinal olmak üzere ($k \in Card$ ve $k \ge w$) her $\beta < k$ için $[1,k+\beta]$ ve $[1,k]$ homeomorfiktir.

Tanım 4.1.4. Her $t \in T$ için E_t bir lineer topolojik uzay ve $\|.\|_t, E_t$ üzerinde bir norm ve

$\underset{t\in T}{*} E_t = \{(f_t)_{t\subset T} \in_{t\in T} E_t : \forall_\varepsilon > 0, \|f_t\| < \varepsilon$, sonlu $t \in T$ için$\}$ olsun.

$\underset{t\in T}{*} E_t$ üzerindeki topoloji çarpım topolojisidir. $\underset{t\in T}{*} E_t$ için $\|(f_t)_{t\in T}\| = \max_{t\in T} \|f_t\|_t$ normu üzerinde duracağız. $\underset{t\in T}{*} E_t$ sembolü her $t \in T$ ve $E_t = E$ için $\underset{t\in T}{*} E_t$ çarpımını göstermektedir.

Tanım 4.1.5 E ve F lineer topolojik uzaylar ve $\|.\|_1, \|.\|_2$ sırasıyla E ve F üzerindeki normlar olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $f \in E$ için

$$(1+\varepsilon)^{-1}\|f\|_1 \le \|u_\varepsilon(f)\|_2 \le \|f\|_1$$

koşulunu sağlayan $u_\varepsilon : E \to F$ homeomorfizması için bu durum $(E, \|.\|_1) \underline{\Omega} (F, \|.\|_2)$ şeklinde gösterilir.

E ve F normlu uzay olarak düşünüldüğünde bu durum $E \underline{\Omega} F$ şeklinde gösterilir.

Sırasıyla E ve F lineer topolojik uzayları üzerindeki normlar $\|.\|_0$ ve $\|.\|_1$ olsun. E x F çarpım uzayı üzerindeki norm ise $\|e, f\| = \max(\|e\|_0, \|f\|_1)$ şeklindedir.

"$\underline{\Omega}$" bağıntısının bazı önemli özelliklerine aşağıda değinilmiştir.

İddia 4.1.6. $X \underline{\Omega} X_1$ ve $Y \underline{\Omega} Y_1$ ise $XxY \underline{\Omega} X_1 x Y_1$. [14]

İddia 4.1.7. Her $t \in T$ için $X_t \underline{\Omega} Y_t$ ise $\underset{t \in T}{*} X_t \underline{\Omega} \underset{t \in T}{*} Y_t$. [14]

Teorem 4.1.8. Her kompakt X uzayı ve her $x_o \in X$ için $C_p(X) \underline{\Omega} C_p(X, x_o) xR$ [14]

Yardımcı Teorem 4.1.9. R^2 gerçel düzlemi $\|(x_1, x_2)\| = \max(|x_1|, |x_2|)$ normu ile donatılmış olsun. $\varphi_\varepsilon : R^2 \to R$ ve $\psi_\varepsilon : R^2 \to R$ fonksiyonları için;

(a) (x_1, x_2) a $(x_1, \varphi_\varepsilon(x_1, x_2))$ dönüşümü, düzlem ile (x_1, x_2) a $(x_1, \psi_\varepsilon(x_1, x_2))$ dönüşümünün tersi arasında bir düzgün homeomorfizmadır.

(b) $x_1 = x_2$ ise $\varphi_\varepsilon(x_1, x_2) = 0$ dır.

(c) $(x_1, x_2) \in R^2$ için $(1+\varepsilon)^{-1} \|(x_1, x_2)\| \le \|x_1, \varphi_\varepsilon(x_1, x_2)\| \le \|(x_1, x_2)\|$. [14]

İddia 4.1.10. Eğer α bir sonsuz ordinal ise $C_p([1,\alpha]) \underline{\Omega} C_p([1,\alpha], \alpha)$ dır. Eğer $[1,\alpha]$ *ve* $[1,\beta]$ homeomorfik ise de $C_p([1,\alpha],\alpha) \underline{\Omega} C_p([1,\beta],\beta)$ dır.[14]

İspat: Teorem 4.1.8 den $C_p([1,\alpha]) \underline{\Omega} C_p([1,\alpha],\alpha) xR$.

$C_p([1,\alpha],\alpha)xR$ ve $C_p([1,\alpha]\oplus\{.\},\alpha)$ nın özdeş olduğu açıktır. Diğer taraftan $h:[1,\alpha]\oplus\{.\}\to[1,\alpha]$ homeomorfizması için $h(\alpha)=\alpha$ dır. ($\alpha\geq w$ olduğu varsayılmaktadır.) Bu homeomorfizma $C_p([1,\alpha]\oplus\{.\},\alpha)\underline{\Omega}C_p([1,\alpha],\alpha)$ nin homeomorfik olmasına yol açmaktadır.

Teorem 4.1.11. $\alpha\, ve\ \beta$ ordinal olsunlar.

(a) $|\alpha|\neq|\beta|$ ise $C_p([1,\alpha])\ ve\ C_p([1,\beta])$ lineer homeomorfik değildir.

(b) $|\alpha|=|\beta|=\mathrm{k}, \mathrm{k}=w$ veya k bir tekil kardinal veya da $\alpha,\beta\geq k^2$ ise $C_p([1,\alpha])$ ve $C_p([1,\beta])$ nın lineer homeomorfik olması için gerekli ve yeterli koşul $\max(\alpha,\beta)<[\min(\alpha,\beta)]^w$ olmasıdır.

(c) k bir düzenli sayılamaz kardinal, $\alpha,\beta\in[\mathrm{k},\mathrm{k}^2)$ ve $\gamma_a,\gamma_b\in[1,k)$ ise $\alpha\in[\mathrm{k}\gamma_a,\mathrm{k}(\gamma_a+1)]$ ve $\beta\in[\mathrm{k}\gamma_b,k.(\gamma_b+1)]$ dir. Böylece $C_p([1,\alpha])$ ve $C_p([1,\beta])$ nın lineer homeomorfik olması için gerekli ve yeterli koşul $|\gamma_a|=|\gamma_b|$ olmasıdır.

(d) k bir düzenli sayılamaz kardinal, $\alpha<k^2\ ve\,\beta\geq k^2$ ise $C_p([1,\alpha])$ ve $C_p([1,\beta])$ lineer homeomorfik değildir. [14]

Teorem 4.1.12 $\alpha\in Ord$ ve $\tau,k\in Card(\tau\geq w\ ve\ k\geq 1)$ için $k\leq\tau\ ve\ \alpha\in[\tau.k,\tau.k^+)$ ise

$$C_p([1,\alpha])\underline{\Omega}\prod_{\beta\in k}{}^{*}C_p([1,\tau])\underline{\Omega}\prod_{\beta\in k}{}^{*}C_p([1,\tau],\tau) \quad [14]$$

Yardımcı Teorem 4.1.13. γ bir limit ordinal $(\gamma\in Lim)$ ve $(\lambda_\xi)_{0\leq\xi\leq\gamma}$ ordinallerin artan bir dizisi olmak üzere

(1) $\xi\in(0,\gamma]\cap Lim$ için $\lambda_\xi=\lim_{\beta<\xi}\lambda_\beta$

(2) $\lambda_o=0$,

ise

$$C_p([1,\lambda_\gamma],\lambda_\gamma)\underline{\Omega}C_p([1,\gamma],\gamma)x\prod_{\xi\in\gamma}{}^{*}C_p([\lambda_\xi+1,\lambda_{\xi+1}],\lambda_{\xi+1}) \quad [14]$$

İddia 4.1.14. $C_p[(1,\lambda_\gamma],\lambda_\gamma)\underline{\Omega}XxY$ [14]

İddia 4.1.15. $C_p([1,\gamma],\gamma)\underline{\Omega}X$ **.** [14]

İddia 4.1.16. $\prod\limits_{\xi\in\gamma}^{*} C_p([\lambda_\xi+1,\lambda_{\xi+1}],\lambda_{\xi+1})\underline{\Omega}Y$. [14]

Teorem 4.1.17. Her $n,m\in N$, her $\tau>w$ düzenli kardinal sayısı ve $\alpha\in[\tau.m,\tau.(m+1)),\beta\in[\tau.n,\tau.(n+1))$ için $C_p([1,\alpha])$ ve $C_p([1,\beta])$ (lineer) homeomorfiktir. [14]

Teorem 4.1.17. Her $n,m\in T,\tau>w$ düzenli kardinal sayısı ve $\alpha\in[\tau.m,\tau.m^+),\beta\in[\tau.n,\tau.n^+)$ için $C_p([1,\alpha])$ ve $C_p([1,\beta])$ (lineer) homeomorfiktir.[14]

Bu teoremi ispatlamak için önce aşağıdaki yardımcı teoremleri inceleyelim.

Yardımcı Teorem 4.1.19. $A_\alpha\, ve\, B_\alpha$ sırasıyla X ve Y nin alt uzayları olmak üzere $X=\mathrm{U}\{A_\alpha:\alpha\in\tau\},Y=\mathrm{U}\{B_\alpha:\alpha\in\tau\}$ olsun. $\alpha<\beta$ için $A_\beta=\bigcup\{A_\alpha:\alpha<\beta\},B_\beta=\bigcup\{B_\alpha:\alpha<\beta\}$ ise ve β limit ordinali için $|A_\alpha|.|B_\alpha|<\tau$ ise $A_\alpha\subset A_\beta\, ve\, B_\alpha\subset B_\beta$ olur. E ve F sırasıyla $R^X\;\; ve\, R^Y$ nin yoğun alt uzayları ve

$T:E\to F$ bir homeomorfizma olsun. O halde $L=\{\alpha\in\tau;\forall f.g\in E: f|A_\alpha=g|A_\alpha\Leftrightarrow Tf|B_\alpha=Tg|B_\alpha\}$ kümesi $\tau([0,\tau])$ içinde kapalı ve sınırsızdır. [14].

Yardımcı Teorem 4.1.20. E ve F lineer topolojik uzaylar, $T:E\to F$ bir homeomorfizma ve $E_\alpha\, ve\, F_\alpha,\tau=weight(E)=weight(F)$ den daha küçük olan ağırlığın kapalı alt uzayları olmak üzere $E=\bigcup\{E_\alpha:\alpha\in\tau\}$ ve $F=\{F_\alpha:\alpha\in\tau\}$olsun. $\alpha<\beta$ için; $E_\beta=cl\bigcup\{E_\alpha:\alpha<\beta\},F_\beta=cl\bigcup\{F_\alpha:\alpha<\beta\}$ ve β bir limit ordinali ise $E_\alpha\subset E_\beta$ dır. O halde

$$M=\{\alpha\in\tau:T(E_\alpha)=F_\alpha\}$$

kümesi $\tau([0,\tau))$ içerisinde kapalı ve sınırsızdır. [14]

Şimdi Teorem 4.1.18 i ispatlayabiliriz.

Teorem 4.1.18 in ispatı: $C_p([1,\alpha])\, ve\, C_p([1,\beta])$ homeomorfik ve *m*, *n* sonsuz olsun. Teorem 4.1.12 ye göre;

$$E=\prod_{\theta\in m}{}^{*}C_p([1,\tau],\tau)\underline{\Omega}C_p([1,\alpha])\approx C_p([1,\beta])\underline{\Omega}\prod_{\theta\in n}{}^{*}C_p([1,\tau],\tau)=F\,.$$

$T:E\to F$ bir homeomorfizma ve $T(0)=0$ ve E, F sırasıyla $R^{[1,\tau)xm}\, ve\, R^{[1,\tau)xn}$ nin yoğun alt kümeleri olsun. $\gamma<\tau$ için aşağıdaki tanımları yapalım:

$$A_\gamma=\{(\eta,\zeta)\in[1,\tau)xm:\eta<\gamma\},B_\gamma=\{(\eta,\zeta)\in[1,\tau)xn;\eta<\gamma\}$$

ve

$$E_\gamma=\{(f_\zeta)_{\zeta\in m}\in\prod\nolimits_{\theta\in m}^{*}C_p([1,\tau]):\forall_{\zeta\in m}f_\zeta\,|[\gamma,\tau]\equiv 0\},$$

$$F_\gamma=\{(f_\zeta)_{\zeta\in n}\in\prod\nolimits_{\theta\in n}^{*}C_p([1,\tau]):\forall_{\zeta\in n}f_\zeta\,|[\gamma,\tau]\equiv 0\}.$$

Yukarıda tanımlanan kümeler için Yardımcı Teorem 4.1.19 ve Yardımcı Teorem 4.1.20 ye başvuralım. L ve M bu teoremlerde tanımlandığı gibidir. $\xi\in M\cap L\cap Lim$ ve $G_\xi=\{(f_\zeta)_{\zeta\in m}\in E:\forall_{\zeta\in m}f_\zeta(\xi)=0\}$, $H_\xi=\{(f_\zeta)_{\zeta\in n}\in F:\forall_{\zeta\in n}f_\zeta(\xi)=0\}$ olsun.

$T(G_\xi)=H_\xi$ olduğuna dikkat ediniz. $(f_\zeta)_{\zeta\in m}\in G_\xi$ olsun. $f'_\zeta\,|[1,\xi)\equiv f_\zeta|[1,\xi)$ ve $f'_\zeta\,|[\xi,\tau]\equiv 0$ ifadeleri tanımlayalım. $\xi\in M$ için $T((f'_\zeta)_{\zeta\in m})=(g'_\zeta)_{\zeta\in n}\in F_\xi$. $\xi\in L$ dir; bundan dolayı $x<\xi$ için $g_\zeta(x)=g'_\zeta(x)$ olur. Çünkü $\xi\in Lim$, $g_\zeta(\xi)=g'_\zeta(\xi)=0$ ve $(g'_\zeta)_{\zeta\in n}=T((f_\zeta)_{\zeta\in m})$. Bundan dolayı $T((f_\zeta)_{\zeta\in m})\in H_\xi$ dır. O halde $T^{-1}(H_\xi)\subset G_\xi$ dır. İspatı tamamlamak için aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı Teorem 4.1.21: *E*, R^X in yoğun bir alt kümesi ve $T:E\to R^Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Her sonsuz $B\subset Y$ alt kümesi için $kardinalite|A|<kardinalite|B|$

olacak şekilde bir A kümesi vardır ve her $f,g\in E$ için $f\mid A=g\mid A$. Buradan $Tf\mid B=Tg\mid B$ dir. [14]

$C_\xi^m=\{(\xi,\theta):\theta\in m\}$ ve $C_\xi^n=\{(\xi,\theta);\theta\in n\}$ olsun. C_ξ^n için Yardımcı Teorem 4.1.21 uygulandığında $A\subset[1,\tau)xm$ elde edilir ve her $f,g\in E$ için $f\mid A=g\mid A$. Buradan ise $Tf\mid C_\xi^n=Tg\mid C_\xi^n$ elde edilir. $m>n$ için, $[1,\tau)x\{x\}$ I $A=\phi$ eşitliğini sağlayan bir x sayısı vardır. $\zeta\neq x$ için $f_\zeta\equiv 0$ ve $\zeta=x$ için $f_\zeta\equiv 1$ olacak şekilde $f=(f_\zeta)_{\zeta\in m}\in E$ alalım. $f\notin G_\xi$ ve $Tf\in H_\xi$ dır. Ancak bu $T(G_\xi)=H_\xi$ olması ile çelişir. Buradan $m\leq n$ olduğunu ispatlanmış olur. Aynı zamanda $m\geq n$ olduğu da açıktır.

Teorem 4.1.22. α,β,γ, $\alpha\leq\gamma\leq\beta$ şeklinde ordinaller olsunlar. $C_p([1,\alpha])$ ve $C_p([1,\beta])$ (düzgün) homeomorfik ise $C_p([1,\gamma])$ da $C_p([1,\alpha])$ ve $C_p([1,\beta])$ ile (düzgün) homeomorfiktir.[14]

İspat: α,β,γ nın aynı kardinaliteye sahip olduğu açıktır. $k\geq w$ olsun. Teorem 4.1.11 (b) ve Teorem 4.1.17 den $k.w\leq\beta$ dir. Teorem 4.1.12 den;

$$C_p([1,\alpha])\underline{\Omega}\prod_{\eta\in k_\alpha}{}^{*}C_p([1,k])$$

$$C_p([1,\beta])\underline{\Omega}\prod_{\eta\in k_\beta}{}^{*}C_p([1,k])$$

$$C_p([1,\gamma])\underline{\Omega}\prod_{\eta\in k_\gamma}{}^{*}C_p([1,k])$$

bilgisine ulaşırız. Burada $k_\beta,k_\alpha\,ve\,k_\gamma$ kardinaller, $k_\beta\in[w,k^+)\,ve\,k_\alpha,k_\gamma\in[1,k^+)$ dır. $k_\alpha\leq k_\gamma\leq k_\beta$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$C_p([1,\gamma])\underline{\Omega}\prod_{\eta\in k_\gamma}{}^{*}C_p([1,k])\underline{\Omega}\prod_{\eta\in k_\gamma\setminus k_\alpha}{}^{*}C_p([1,k])x\prod_{\eta\in k_\alpha}{}^{*}C_p([1,k])$$

$$\underline{\Omega}(\prod_{\eta\in k_\gamma\setminus k_\alpha}{}^{*}C_p([1,k]))x\,C_p([1,\alpha])$$

$$(\underline{\Omega})\approx(\prod_{\eta\in k_\gamma\setminus k_\alpha}{}^{*}C_p([1,k])x\,C_p([1,\beta]))$$

$$\underline{\Omega}\prod_{\eta\in k_\gamma\setminus k_\alpha}{}^{*}C_p([1,k])x\prod_{\eta\in k_\beta}{}^{*}C_p([1,k])$$

bilgisine ulaşırız. Buradan $\left|k_\gamma \setminus k_\alpha\right| \leq k_\beta \; ve \; k_\beta \geq w$ dir.

$$\prod_{\eta\in k_\gamma \setminus k_\alpha} {}^{*}C_p([1,k])x\prod_{\eta\in k_\beta} {}^{*}C_p([1,k])\underline{\Omega}\prod_{\eta\in k_\beta} {}^{*}C_p([1,k])\underline{\Omega}C_p([1,\beta])$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla,

$C_p([1,\beta])\, ve\, C_p([1,\gamma])$ (düzgün) homeomorfiktir.

Şimdi Teorem 4.1.1 in ispatını yapabiliriz.

Teorem 4.1.1 in ispatı: Teorem 4.1.3'den (a) sağlanır. $\alpha,\beta \geq k^2$ olsun. Teorem 4.1.12 den $C_p([1,\alpha])$ ve $C_p([1,\beta])$ nın düzgün homeomorfiktir. Eğer $k=w$ ya da k tekil ise Teorem 4.1.11 (b)den $\alpha,\beta \in \left[k,k^2\right]$ için $C_p([1,\alpha])$ ve $C_p([1,\beta])$ düzgün homeomorfiktir. Buradan (b) nin ispatı tamamlanmıştır (c) ise Yardımcı Teorem 4.1.13 de ki gibidir.

4.2. Birim Aralığa *l*-denk Olan Uzayların Sınıflandırılması

$C_p(X)$ ve $C_p(Y)$ sırasıyla X *ve* Y uzayları üzerindeki sürekli fonksiyonların uzayı olmak üzere $C_p(X)$ ve $C_p(Y)$ arasında bir lineer (düzgün) homeomorfizma varsa X ve Y topolojik uzaylarına *l*-denktir ya da u-denktir denir. *l*-denk ya da *u*-denk olan uzayların hangi topolojik özellikleri sağladığını inceleyelim. X uzayının, X ve Y uzaylarının *l*-denk(*u*-denk) olmasını sağlayan topolojik P özelliklerine sahip olması için gerekli ve yeterli koşul Y uzayının da bu P özelliklerine sahip olmasıdır.

Teorem 4.2.1. Her pozitif n tamsayısı için bir X uzayının I^n ye u-denk olması için gerekli ve yeterli koşul

(1) X uzayının n-boyutlu kompakt metrik olması

(2) X in her boş olmayan kapalı alt kümesinin I^n içine gömülebilen açık, boş olmayan bir alt küme içermesidir. [20]

Teorem 4.2.2. $n > 0$ ve $i \in N$ olmak üzere $X^{|i,n|} = X^{|1+i,n|}$ eşitliğini sağlayan bir X uzayı için, aşağıdaki şartlar denktir.

(1) X, I^n ye l-denktir.

(2) X, n-boyutlu kompakt metrik bir uzay ve $X^{|i,n|} = \phi$ dir. [19]

$i \in N$ ve X, n-boyutlu kompakt metrik bir uzay olsun. $X^{|i,n|} = \phi$ için X in I^n ye l-denk olup olmadığını ve bu durumun $n = 1$ için sağlanıp sağlanmadığını inceleye-

lim. l-denkliğini sağlayan bazı sonlu i için bir boyutlu i-ninci gömme türevinin sahip olduğu özelliklere değineceğiz. C(X), X üzerindeki sınırlı sürekli fonksiyonların Banach uzayını , $C_p(X)$ ve $C_p^*(X)$ sırasıyla X üzerindeki sürekli ve sınırlı sürekli fonksiyonların uzayını göstermektedir.

$$H : Cp^*(X) \to Cp^*(Y)$$

lineer homeomorfizmasını göz önünde tutalım. H nin

$$F(H) \subset Cp^*(X)xCp^*(Y)$$

grafiği kapalıdır. $C(X)$ norm topolojisinin $C_p(X)$ noktasal yakınsaklık topolojisinden daha ince olması

$$F(H) \subset C(X)xC(Y)$$

nin de aynı zamanda kapalı olduğunu gösterir, bu yüzden Kapalı Grafik Teoremi'nden

$$H : C(X) \to C(Y)$$

sınırlıdır. Bunun tersi de sınırlıdır.

Tanım 4.2.3: Verilen bir lineer $H : Cp^*(X) \to Cp^*(Y)$ lineer homeomorfizması için

$$L(H) = \max\left\{\|H\|.\|H^{-1}\|\right\} \qquad (1)$$

kümesini ele alalım. $H : C_p(X) \to C_p(Y)$ bir lineer homeomorfizma olsun. $y \in Y$ için $v(y)f = (Hf)(y)$ şeklinde tanımlan $v(y) : C_p(X) \to R$ lineer fonksiyonu sürekli ise bu fonksiyon

$$C_p(X)^* = \{\sum_{x \in D} \alpha_x \delta_x : D \subset CX, card\, D < \infty, \alpha_x \in R\}$$

kümesinin bir elemanı olarak tanımlanabilir. Burada δ_X, x teki yönlü ölçümü göstermektedir. $v(y)$ içerisinde δ_X in katsayısı $v_x(y)$ ile gösterilmek üzere

$$v(y) = \sum_{x \in X} v_x(y)\delta_X$$

şeklindedir.

Her sürekli $f \in C_p(X)$ fonksiyonu için $Hf \in C_p(Y)$ görüntü uzayı ve $\upsilon : Y \to C_p(X)^*$ fonksiyonu süreklidir. $\mu : X \to C_p(Y)^*$ sürekli dönüşümü ve $\mu_y(x)$ katsayıları önceden tanımlandığı gibidir. $\mu(x)$'in desteği (support'u) $supp\mu(x)$ ile gösterilmektedir.

(1) den $v(y)$ *ve* $\mu(x)$ için

$$\|\upsilon(y)\| = \sum_{x \in X} |\upsilon_x(y)| \le L(H), \forall y \in Y$$

$$\|\mu(x)\| = \sum_{y \in Y} |\mu_x(y)| \le L(H), \forall x \in X$$

bilgisine ulaşırız.

Tanım 4.2.4: Her açık $U \subset X$ kümesi için, $ind\, U = n$ ise topolojik bir X uzayı her yerde n-boyutludur denir.

Tanım 4.2.5: I^n içine gömülebilen X in bütün açık alt kümelerinin ailesi

$\{U_s : s \in S\}$ ve en fazla (n-1) boyutlu olan X in bütün açık alt kümelerinin ailesi $\{V_t : t \in T\}$ olmak üzere X topolojik uzayı ve $n \in N$ için

$$I_n(X) = \bigcup_{s \in S} U_s, \qquad J_n(X) = \bigcup_{t \in T} V_t$$

olsun.

Bir α ordinali için $\alpha\, th$ n-boyutlu, α -ıncı $X^{|\alpha.n|}$ gömme türevini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$X^{|0,n|} = X;$$

$$X^{|\alpha+1,n|} = X^{|\alpha,n|} \setminus I_n(X^{|\alpha,n|});$$

$$X^{|\alpha,n|} = \bigcap_{\beta<\alpha} X^{|\beta,n|}, \alpha \quad \text{limit ordinali ise.}$$

Benzer şekilde, n-boyutlu, α -ıncı $X^{\|\alpha,n\|}$ güçlü gömme türevini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$X^{\|0,n\|} = X \setminus J_n(X);$$

$$X^{\|\alpha+1,n\|} = X^{\|\alpha,n\|} \setminus (I_n(X^{\|\alpha,n\|}) \cup J_n(X^{\|\alpha,n\|} \setminus I_n(X^{\|\alpha,n\|})))$$

$$X^{\|\alpha,n\|} = \bigcap_{\beta<\alpha} X^{\|\beta,n\|} \setminus J_n(\bigcap_{\beta<\alpha} X^{\|\beta,n\|}), \alpha \quad \text{limit ordinal ise.}$$

Bir kompakt metrik uzayın her gömmesi ya da güçlü gömme türevi kompakt metriktir. $n=1$ ve bazı $i \in N$ için $X^{\|i.1\|} = \phi$ ise $X^{|i.1|} = \phi$ olması için gerekli ve yeterli koşul bazı $j \in N$ için $X^{\|i.1\|} = \phi$ olmasıdır. Başka bir deyişle herhangi evrensel (n-1)-boyutlu kompakt metrik uzayı benzer ifadelerin $n \geq 2$ için sağlanmadığını gösterir.

Teorem 4.2.6: X bir topolojik uzay olsun. Eğer X, n-boyutlu küpe l-denk ise o halde bazı $m \in N$ için $X^{\|m.n\|} = \phi$ dir [20].

Teorem 4.2.7: I^n nın kompakt bir alt kümesinin n-boyutlu olması için gerekli ve yeterli koşul boş olmayan içe sahip olmasıdır [20].

Teorem 4.2.8: Her sıfır-boyutlu ayrılabilir metrik uzay I^1 içine gömülebilir . [20]

Teorem 4.2.9: X ayrılabilir metrik uzay olsun. X, n-boyutlu kapalı alt uzayların bir sayılabilir birleşimi ise n-boyutludur [20].

Yardımcı Teorem 4.2.10: X ve Y metrik uzaylar ve

$$\mu : X \rightarrow Cp(Y)^*$$

bir sürekli fonksiyon olsun. O halde her açık $B \subset Y$ kümesi için ve her $n \in N$ için

$$\{x \in X : card(\mathrm{supp}\mu(x) \cap B) \geq n\}$$

kümesi açıktır [20].

Yardımcı Teorem 4.2.11: $s \in N$, $\forall x \in X$ ve $card\,\mathrm{supp}\mu(x) = s$ olmak üzere

$$\mu : X \rightarrow C_p(Y)^*$$

bir sürekli fonksiyon ve X, Y metrik uzaylar olsunlar. Her $x \in X$, x in bir açık $N_x \subset X$ komşuluğu ve $\mu(x) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i(x)\delta_{\mu_i}(x)$ için

$$\mu_1, \mu_2, ..., \mu_s : N_x \rightarrow Y$$

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s : N_x \rightarrow R$$

sürekli fonksiyonları vardır.[20]

İspat: $x \in X$ keyfi ve $\operatorname{supp} \mu(x) = \{y_1, ..., y_s\}$ olsun. $y_i \in B_x^i,\ 1 \le i \le s$ için ikişer ikişer ayrık, açık $B_x^1, ..., B_x^s$ kümelerini seçelim. Yardımcı Teorem 4.2.10 dan her $z \in N_x$ ve $1 \le i \le s$ için $card(\operatorname{supp}\mu(z) \cap B_x^i) = 1$ olmak üzere bir açık $x \in N_x \subset X$ kümesi vardır. $z \in N_x$ ve $1 \le i \le s$ için

$$\mu_i(z) = \operatorname{supp} \mu(z) \cap B_x^i, \alpha_i(z) = \mu_{\mu_i(z)}(z)$$

olsun. Tekrar Yardımcı Teorem 4.2.10 dan μ_i fonksiyonları N_x üzerinde süreklidir ve μ 'nun sürekliliği α_i katsayılarının sürekliliğini göstermektedir. Bu da Yardımcı Teorem 4.2.11 in ispatını verir.

Yardımcı Teorem 4.2.12: X bir kompakt metrik uzay, X' onun kompakt alt kümesi ve

$$\mu : X \to C_p(I^n)^*,\ \nu : I^n \to C_p(X)^*$$

sürekli fonksiyonlar olsunlar. Bir $U \subset X$ açık kümesi ve $l \in N$ için $s_1, s_2, ..., s_l \in N$ sayılarının bir kümesini ve $B_1, ..., B_l \subset I^n$ açık yuvarlarının ikişer ikişer ayrık kümesini tanımlayalım.

$$U_1 = \{x \in X' \cap V : card \operatorname{supp} \mu(x) = l, card(\operatorname{supp} \mu(x) \cap B_i) = 1$$
$$card(\operatorname{supp} \nu(\operatorname{supp} \mu(x) \cap B_i)) = s_i,\ \ 1 \le i \le l\}$$

kümesi X' içinde ikinci kategoriden bir küme olup boş olmayan içe sahiptir. [20]

İspat: Yardımcı Teorem 4.2.10 dan $1 \le i \le l$ için

$$\{x \in X' \cap U : card(\operatorname{supp}\mu(\mathrm{x}) \cap B_i) \ge 1\}$$

kümesi X' içinde açıktır.

$$U_{1.0} = \{x \in X' \cap U : card\,\mathrm{supp}\,\mu(x) = l, card\,(\mathrm{supp}\,\mu(x) \cap B_i) = 1,\ 1 \leq i \leq l\}$$

kümesi X' içindeki açık ve kapalı kümelerin bir sonlu sayısının kesişimidir. Tekrar Yardımcı Teorem 4.2.10 dan $1 \leq i \leq l$ için

$$\{x \in U_{1,0} : card(\mathrm{supp}\,v\ (\mathrm{supp}\mu(\mathrm{x}) \cap B_i)) \geq s_i\}$$

kümesi $U_{1.0}$ içinde açıktır, bu yüzden $U_1, U_{1.0}$ içindeki açık ve kapalı sonlu kümelerin kesişimidir. Bundan dolayı X' kompakt metrik olduğundan U_1 in X' içinde ikinci kategoriden bir küme olması için gerekli ve yeterli koşul U_1 in X' içinde boş olmayan içe sahip olmasıdır. Bu da ispatı bitirir.

Yardımcı Teorem 4.2.13: Herhangi kompakt metrik X uzayı ve α ordinali için, $X^{\|\alpha.n\|}$ boştur ya da her yerde n-boyutludur [20].

Yardımcı Teorem 4.2.14: Bazı $m \in N$ için $X^{\|m.n\|} \neq \phi$ olmak üzere X bir kompakt metrik uzay olsun ve X in her boş olmayan kapalı alt kümesi I^n içine gömülebilen boş olmayan bir açık alt küme içersin.

X in alt kümelerinin aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $X_1, X_2, ..., X_m$ kümesi vardır. Buna göre,

(1) X_i, yerel kompakt ve her yerde n-boyutludur, $i = 1, ..., m$

(2) $X_j \subset cl\,X_i,\ 1 \leq i < j \leq m$

(3) $X_i \cap cl\,X_j = \phi, 1 \leq i < j \leq m$

İspat: $X_i = I_n(X^{\|i-1.n\|}), i = 1, ..., m$ için

$X^{\|i-1.n\|} \subset X$ boş olmadığı ve kapalı olduğu için X_i nin $X^{\|i-1.n\|}$ nin bir yoğun açık alt kümesidir. Bu yüzden özellikle X boş olmayan, yerel kompakt ve her yerde n-boyutlu olan bir kümedir. $1 \leq i < j \leq m$ için

$$X_j = I_n(X^{\|j-1,n\|}) \subset X^{\|j-1,n\|} \subset X^{\|i,n\|} = cl\, X_i \tag{2}$$

dir. Bu da Yardımcı Teorem 4.2.14 de ki (1) ve (2)'yi ispatlar. (2) den $X^{\|i-1.n\|}$ nin bir kompakt alt kümesi olan $X^{\|i.n\|}, X_j$ yi içerir, $1 \le i < j \le m$ için

$$X_i \cap c \mid X_j \subset X_i \cap X^{\|i,n\|} = I_n(X^{\|i-1,n\|}) \cap X^{\|i,n\|} = \phi$$

bilgisine ulaşırız. Bu da Yardımcı Teorem 4.2.14 deki (3)'ü ispatlar, böylece ispat tamamlanmış olur.

Yardımcı Teorem 4.2.15. Her kompakt metrik X uzayı ve $m \in N$ için

$X^{|2m+1,1|} \subset X^{\|m,1\|} \subset X^{|m,1|}$ dır. [20]

İspat: İspata başlamadan önce eğer X ve Y birer topolojik uzay ise $X \subset Y$ nin $X \setminus I_1(X) \subset Y \setminus I_1(Y)$ olduğuna dikkat edelim. $U \subset Y$ kümesi I^1 içine gömülebiliyorsa o halde $U \cap X$ de I^1 içine gömülebilir. Teorem 4.2.8 den aynı zamanda her kompakt metrik X uzayı için $J_1(X) \subset I_1(X)$ olduğunu biliyoruz. Her $m \in N$ için $X^{\|m,1\|} \subset X^{|m,1|}$ olduğu açıktır. m üzerinde tümevarımı uygulayalım.

$m = 0$ olsun. O halde

$X^{|1,1|} = X \setminus I_1(X) \subset X \setminus J_1(X) = X^{\|0,1\|}$ olur.

Eğer bazı $m \in N$ için $X^{|2m-1,1|} \subset X^{\|m-1,1\|}$ ise

$X^{|2m,1|} = X^{|2m-1,1|} \setminus I_1(X^{|2m-1,1|}) \subset X^{\|m-1,1\|} \setminus I_1(X^{\|m-1,1\|})$ olur.

Bundan dolayı,

$$X^{|2m+1,1|} = X^{|2m,1|} \setminus I_1(X^{|2m,1|})$$

$$\subset (X^{\|m-1.1\|} \setminus I_1(X^{\|m-1,1\|})) \setminus I_1(X^{\|m-1,1\|}) \setminus I_1(X^{\|m-1,1\|})) \qquad (3)$$

olur.

$J_1(X^{\|m-1.1\|} \setminus I_1(X^{\|m-1,1\|})) \subset I_1(X^{\|m-1,1\|})) \setminus I_1(X^{\|m-1,1\|}))$

olduğundan (3) ten

$$X^{|2m+1,1|} \subset (X^{\|m-1,1\|} \setminus I_1(X^{\|m-1,1\|})) \setminus J_1(X^{\|m-1,1\|} \setminus I_1(X^{\|m-1,1\|}))$$

bilgisine ulaşırız. Tümevarım sağlanmıştır, bu da ispatı bitirir.

4.2.1. *n*-boyutlu küpe *l*-denk olmayan uzaylar

Yardımcı Teorem 4.2.1.1: X bir kompakt metrik uzay ve X', X in her yerde n-boyutlu olan kompakt alt kümesi ve

$$\mu : X \to C_p(I^n)^*,\ v : I^n \to C_p(X)^*$$

sürekli fonksiyonlar olsunlar. Her $\varepsilon > 0, U \cap X' \neq \phi$ ve her açık $U \subset X$ kümesi için bir $V \subset cl V \subset U$ açık kümesi vardır. $0 \leq k \leq l$ tamsayılar, $s_1, s_2, ..., s_l \in N$ ve $G_1, G_2, ..., G_l \subset I^n$ olmak üzere

(1) $V \cap X' \neq \phi$

(2) $G_i \cap G_j = \phi, 1 \leq i < j \leq l$

(3) her $x \in V \cap X'$ için $card supp \mu(x) = l$

(4) her $x \in V \cap X', 1 \leq i \leq l$ için $card(supp \mu(x) \cap G_i) = 1$

(5) her $x \in V \cap X'$, $1 \leq i \leq l$ için $card(\operatorname{supp} v(\operatorname{supp} \mu(x) \cap G_i)) = s_i$

(6) her $x \in V \cap X'$ ve $y \in \operatorname{supp} \mu(x)$ için $\operatorname{supp} v(y) \cap V \neq \phi$ olması bazı $1 \leq i \leq k$ için $y \in G_i$ olduğunu ve $\operatorname{supp} v(y) \cap V = \{x\}$ olduğunu gösterir.

(7) her $1 \leq i \leq k$ ve $y \in G_i$ için $\operatorname{supp} v(y) \cap V \neq \phi$ olması $\operatorname{supp} v(y) \cap V \subset X'$

olduğunu gösterir.

(8) her $1 \le i \le k, u \in V$ ve $u' \in V \cap X'$ için

$$\sum_{y \in \mathrm{supp}\mu(u) \cap G_i} |\mu_y(u)| \ge \left|\mu_{\mathrm{supp}\mu(u') \cap G_i}(u')\right| - \frac{\varepsilon}{k}$$

(9) her $1 \le i \le k$ ve boş olmayan açık $W \subset V \cap X'$ kümesi için $\bigcup_{x \in W} supp(x) \cap G_i$ n-boyutludur.[20]

Sonuç 4.2.1.2: $X, X', U, V, k, l, G_1, ..., G_l$, Yardımcı Teorem 4.2.1.1 de tanımlandığı gibidir. Herhangi açık $B \subset I^n$ kümesi için V ve G_j 'yi seçelim, $1 \le j \le k$ ve her sabit j için ya $G_j \subset B$ ya da $G_i \cap B = \phi$ 'dir.

İspat: $B_o = B$ ve $B_1 = I^n \setminus cl\, B$ olsun. Bir $\sigma \in \{0,1\}^k$ için

$$C_\sigma = \{x \in V \cap X' : supp\,\mu(x) \cap G_j \in B_\sigma(j), 1 \le j \le k\} \text{ olsun.}$$

C_σ kümeleri X' içinde açıktır. Teorem 4.1.7 den B en fazla (n-1)-boyutludur. Yardımcı Teorem 4.2.1.1 in (9). sonucundan

$$\bigcup_{\sigma \in (0,1)^k} C_\sigma$$

ifadesi $V \cap X'$ içinde yoğundur, özellikle bazı $\sigma \in \{0,1\}^k$ için $C_\sigma \cap X'$ boş değildir. Tekrar yardımcı Teorem 4.2.1.1 den $U \cap X' \neq \phi$ ve bir açık $U \subset V$ kümesi için $U \cap X' \subset C_\sigma$ dır.

Teorem 4.2.1.3: X, n-boyutlu kompakt metrik uzay ve

$$H : C_p(X) \to C_p(I^n)$$

bir lineer homeomorfizma olsun.Bazı $m \in N$ için $X^{\|m,n\|} \neq \phi$ ise $L(H) \ge \sqrt{m}$ 'dir.[20]

Sonuç 4.2.1.4: Topolojik X uzayı I^n ye l-denk olsun. Bazı $m \in N$ için $X^{\|m,n\|} = \phi$ dır. [20]

Sonuç 4.2.1.5: w, ilk sonlu ordinal olmak üzere X bir topolojik uzay olsun. X, I^n ye l-denk ise

(1) X uzayı kompakt metriktir ve n-boyutludur.

(2) X in her boş olmayan kapalı alt kümesi I^n içine gömülebilen açık boş olmayan bir alt küme içerir.

(3) Bazı $m < w$ için $X^{\|m,n\|} = \phi$ dir.[20]

Sonuç 4.2.1.6: :Topolojik bir X uzayının I^1 e l-denk olması için gerekli ve yeterli koşul

(1) X in bir-boyutlu, kompakt, metrik bir uzay olması ve

(2) bazı $m < w$ için $X^{\|m,1\|} = \phi$ olmasıdır.[20]

Sonuç 4.2.1.7: X ve Y l-denk olan kompakt metrik uzaylar olsunlar. Bazı $m \in N$ için $X^{\|m,1\|} = \phi$ olması için gerekli ve yeterli koşul bazı $m' \in N$ için $Y^{\|m',1\|} = \phi$ olmasıdır.[20].

Sonuç 4.2.1.8: Bir α ordinali için $I^n X[1,\alpha]$ uzayının I^n ye l-denk olması için gerekli ve yeterli koşul $\alpha < w^w$ olmasıdır. [20]

5. BÖLÜM

SONUÇLAR

Genel olarak fonksiyon uzayının tanımı yapılarak bu yapının bir alt taban bulunması şartı ile noktasal yakınsaklık topolojisi, kompakt-açık topoloji, düzgün yakınsaklık topolojileri ile donatılabileceği gösterilmiştir. Daha sonra uzay, reel-değerli sürekli fonksiyonlar uzayı seçilerek üzerine aynı topolojiler kurulup topolojiler karşılaştırılmıştır. Böylece $C_p(X) \leq C_o(X) \leq C_u(X)$ ilişkisine ulaşılmıştır.

X ve Y normal ve birinci sayılabilir uzaylar olmak üzere $C_p(X)$ ve $C_p(Y)$ lineer homeomorfiktir. w ilk sonlu ordinal olmak üzere bazı $\alpha < w_1$ için $X^{(\alpha)}$ sayılabilir kompakt ise $\alpha = 1$ iken $Y^{(\alpha)}$ nın da aynı zamanda sayılabilir kompakt olduğu görüldü.

X ve Y tam regüler uzaylar ve $C_p(X)$ ile $C_p(Y)$ lineer homeomorfik olmak üzere eğer $\phi : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ bir sürekli, lineer, örten ise X pseudokompakt olduğunda Y nin de pseudokompakt olduğu ve eğer ϕ sürekli, lineer, 1-1 ise Y pseudokompakt olduğunda X in de pseudokompakt olduğu sonucuna ulaşıldı.

Noktasal yakınsaklık topolojisi ile ordinaller üzerindeki reel değerli fonksiyonların $C_p([1,\alpha])$ uzaylarının sınıflandırılması yapıldı. $\alpha, \beta\, ve \gamma$ nın $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ eşitsizliğini sağlayan ordinaller olduğunu kabul ettiğimizde $C_p([1,\alpha])$ ve $C_p([1,\beta])$ ifadeleri düzgün homeomorfik ise $C_p([1,\gamma])$ ifadesinin de $C_p([1,\alpha])$ ve $C_p([1,\beta])$ ile düzgün homeomorfik olduğu sonucunu elde ettik.
$C_p(X)$ ve $C_p(Y)$ sırasıyla X ve Y uzayları üzerindeki sürekli fonksiyonların uzayı

olmak üzere $C_p(X)$ ve $C_p(Y)$ arasında bir lineer homeomorfizma varsa *X* ve *Y* topolojik uzaylarına *l*-denktir ya da *u*-denktir denir. *X* uzayının, *X* ve *Y* uzaylarının *l*-denk olmasını sağlayan topolojik *P* özelliklerine sahip olması için gerekli ve yeterli koşulun *Y* uzayının da bu *P* özelliklerine sahip olması gerektiği sonucuna ulaşıldı.

Her pozitif *n*-tamsayısı için *X* uzayının I^n ye u-denk olması için gerekli ve yeterli koşulun *X* uzayının n-boyutlu kompakt metrik olması ve *X* in her boş olmayan kapalı alt kümesinin I^n içine gömülebilen açık, boş olmayan bir alt küme içermesi ve bazı $m \in N$ için $X^{\|m,n\|} = \phi$ olması gerektiği sonucu elde edildi.

w ilk sonlu ordinal olmak üzere topolojik *X* uzayının I^1 e l-denk olması için gerekli ve yeterli koşulun *X* in bir-boyutlu kompakt metrik bir uzay olması ve $m < w$ için $X^{\|m,1\|} = \phi$ olması gerektiği ve bir α ordinali için $I^n X[1,\alpha]$ uzayının I^n ye l-denk olması için $\alpha < w^w$ olması gerektiği bilgisini elde ettik.

KAYNAKLAR

[1] Arhangelsk'ii, A.V. (1982). *On linear homeomorphism of function spaces*. Soviet Mathematicae Dokl., **25**, (2) 105-120.

[2] Arhangelsk'ii, A.V. (1992). *Topological function spaces*. Math. Appl. 78. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[3] Arhangelsk'ii, A.V. (1987). *A survey of C_p-theory.* Questions Answers General Topology **5**, 1-109.

[4] Arhangelsk'ii, A.V. and Chobam M.M. (1988). *The extension property of Tychonoff spaces and generalized retracts*. C.R. Acad. Bulgare Sci, **41** (12), 5-7.

[5] Baars, J. and De Groot, J. (1992). *On topological and linear equivalence of certain function spaces.* CWI Tract **86**. Centre for Mathematic and Computer Sciences, Amsterdam.

[6] Baars, J. ,De Groot, Van Mill J. and Pelant, J. (1993). *An example of l_p-equivelant spaces which are not l_p^*-equivelant.* Proc. Amer. Math. Soc. **119,** 963-969.

[7] Baars, J. ,De Groot, Van Mill, J. and Pelant, J. O*n topological and linear homeomorphisms of certain function spaces.*

[8] Baars, J. and Groot D.J (1988). *An isomorphical classification of function spaces of zero dimensional locally compact metric spaces.* Comm. Math. Univ. Carolinae **29**,3, 577-595

[9] Baars, J. and De Groot, J. (1990). *On topological and linear equivalence of certain function spaces*, Amsterdam.

[10] Baars, J.,De Groot, J. and Van Mill, J.(1989). *A theorem on function spaces.* Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 105. 1020-1024.

[11] Baars, J.(1993). *A note on linear mappings between function spaces*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae **34**.4, 711-714.

[12] Birlik, S.(1995) .*Fonksiyon uzaylarında lineer homeomorfizmalar*.Doktora Tezi,Çukurova Üniversitesi.

[13] Górak, R., *Spaces u-equivalent to the n-cube.* Topology Appl., submitted for publication.

[14] Gorak, R.(2005), *Function spaces on ordinals*. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae **46** (1), 93-103.

[15] Gul'ko, S.P. (1992) *On uniform homeomorphisms of spaces of continuous functions*. Proc. Steklov Math. **193,** 87-93.

[16] Gul'ko, S.P. (1990). *Spaces of continuous functions on ordinals and ultrafilters.* Mat. Zametki **47**, 26-34.

[17] Gul'ko, S.P. (1988). *The space $C_p(X)$ for countable infinite compact X is uniformly homeomorphic to c_o*. Bull. Polish Arad. Sci. Math **36,** 391-396.

[18] Kislyakov S.V. (1975). *Classification of spaces of continuous functions of ordinals*. Siberian Math.J. **16,** 226-231.

[19] Lipshutz, S. *General Topology*.Mc Graw-Hill Book Company.231-235

[20] Matrai, T.(2004). *A characterization of spaces l-eguivalent to the unit interval*. Department of Applied Analysis Eötvös Lorand University, Topology and It's Applications **138**, 299-314

[21] Spiliopoulas (Athens),G.D (1991). *A note on continuous linear mappings between function spaces,* 209-212