

Genelleştirilmiş Anti-Gauss ve Optimal Dereceli Averaj İntegrasyon Kuralları

**Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi**

**Danışman
Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK**

**Hatice KOZKIRAN
Temmuz 2010**

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

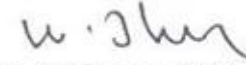
Tezin Adı : Genelleştirilmiş Anti-Gauss ve Optimal Dereceli Averaj
İntegrasyon Metotları
Öğrencinin Adı Soyadı : Hatice KOZKIRAN
Tez Savunma Tarihi : 28.07.2010


Prof. Dr. Ramazan KOÇ
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.


Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımda okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.


Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

1. Doç. Dr. Metin BEDİR
2. Doç. Dr. A. İhsan HASÇELİK
3. Yrd. Doç. Dr. Abdullah KABLAN


.....

.....

.....

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ ANTI-GAUSS VE OPTİMAL DERECELİ AVERAJ İNTEGRASYON KURALLARI

KOZKIRAN Hatice

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Ali İhsan Haşçelik

Temmuz 2010, 65 sayfa

Gauss integrasyon kuralları, verilen bir integralin değerini yaklaşık olarak hesaplamak için kullanılır. Fakat bu integrasyon kurallarının hatasını hesaplamak pratikte kolay değildir. Gauss integrasyon kurallarının hata tahmini için genelde Gauss-Kronrod integrasyon kuralları kullanılır. Ancak bazı ağırlık fonksiyonları için reel pozitif Gauss-Kronrod formülleri yoktur. Alternatif kurallar arasında özellikle ilgilenilen kurallar anti-Gauss kuralları, averaj kuralları ve bu kuralların genelleştirilmiş versiyonlarıdır.

Bu çalışmada genelleştirilmiş anti-Gauss ve averaj kuralları kısaca tanıtıldıktan sonra $(n+1)$ -nokta anti-Gauss kuralları kullanılarak elde edilen optimal dereceli averaj metotları ile $2n+1$ boyutlu üç köşegenli Jacobi matrisleri kullanılarak oluşturulan genelleştirilmiş averaj metotları karşılaştırılmıştır. Ayrıca Gegenbauer ölçümüne göre bu metotların denkleğini görmek için nümerik örnekler verilmiştir. Genel ölçümlerde bu metotların doğruluk dereceleri $2n+2$, simetrik ölçümlerde ise $2n+3$ dür.

Anahtar Kelimeler: Gauss integrasyon metotları, Hata tahmini, Gauss-Kronrod kuralları, Genelleştirilmiş anti-Gauss kuralları, Optimal dereceli averaj kuralları, Gegenbauer ölçümü.

ABSTRACT

GENERALIZED ANTI-GAUSS AND THE DEGREE OPTIMAL AVERAGE QUADRATURE RULES

KOZKIRAN, Hatice

M.Sc.in Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ali ihsan HASÇELİK

July 2010, 65 pages

Gauss integration rules are used to compute the value of an integral approximately. But it is not easy to compute error of these quadrature rules in practice. For the estimation of the error of Gauss quadrature rules, Gauss-Kronrod rules are widely used; however, it is well known that for some weight functions real positive Gauss-Kronrod rules do not exist. Among the alternatives which are available in the literature, the anti-Gauss rules, average rules and their generalized versions, are of particular interest.

In this study, generalized anti-Gauss rules and generalized average rules are summarized, then the degree optimal average rules obtained by using $(n+1)$ -point generalized anti-Gauss rules and the generalized average rules generated by tridiagonal Jacobi matrices of order $2n+1$ are compared. In addition, to see equivalence for Gegenbauer measure these methods numerical examples are given. Both of these methods have degree of exactness $2n+2$ for general measures, $2n+3$ for symmetric measures.

Key Words : Gauss quadrature methods, Error estimation, Gauss-Kronrod rules, Generalized anti-Gauss rules, The degree optimal average rules, Gegenbauer measure.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarımın her aşamasında bana yardımcı olan, değerli katkılarıyla beni yönlendiren, bilgi ve ilgisini esirgemeyen, bu yolda ışığım olan saygıdeğer hocam Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK'e teşekkür ederim.

Bölüm hocalarım ve asistan arkadaşlarıma ilgi ve güler yüzlerinden dolayı teőekkürü bir borç bilirim.

Destekleriyle her zaman yanımda olan bugünlerimi borçlu olduğum aileme ve hayatıma girdiğinden beri manevi destek ve sabrı ile hep yanımda olan Sinan KARABENLİ'ye teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

| | Sayfa |
|---|-------|
| ÖZET..... | i |
| ABSTRACT..... | ii |
| TEŞEKKÜR..... | iii |
| İÇİNDEKİLER..... | iv |
| TABLO LİSTESİ..... | vi |
| | |
| 1. BÖLÜM: GİRİŞ..... | 1 |
| | |
| 2. BÖLÜM: NÜMERİK İNTEGRASYON..... | 4 |
| 2.1 Newton – Cotes Formülleri..... | 5 |
| 2.2 Ortogonal Polinomlar..... | 7 |
| 2.2.1 Üç terimli yineleme bağıntısı..... | 8 |
| 2.3 Gauss İntegrasyon Kuralı..... | 11 |
| 2.3.1 İntegrasyon ağırlıklarının hesaplanması..... | 12 |
| 2.3.2 Gauss integrasyon kuralının integrasyon noktalarının ve ağırlıklarının hesaplanması..... | 14 |
| | |
| 3. BÖLÜM: GAUSS İNTEGRASYON METODUNUN HATASINI YAKLAŞIK OLARAK HESAPLAMAK İÇİN KULLANILAN METOTLAR..... | 17 |
| 3.1 Gauss-Radau ve Gauss-Lobatto İntegrasyon Metotları | 17 |
| 3.1.1 Gauss-Radau integrasyon metodu..... | 18 |
| 3.1.2 Gauss-Lobatto integrasyon metodu | 19 |
| 3.2 Gauss - Kronrod İntegrasyon Metodu..... | 20 |
| 3.3 Örnekler..... | 24 |

| | |
|---|----|
| 4. BÖLÜM: ANTI-GAUSS VE AVERAJ KURALLARI..... | 27 |
| 4.1 Anti-Gauss İntegrasyon Metodu..... | 27 |
| 4.2 Genelleştirilmiş Anti-Gauss İntegrasyon Metodu ve Optimal Dereceli Averaj Formülleri..... | 29 |
| 4.2.1 Genelleştirilmiş anti-Gauss formüllerinin oluşturulması..... | 30 |
| 4.2.2 Anti-Gauss metodunun teorik özellikleri | 34 |
| 4.3 Simetrik Ölçümler İçin Anti-Gauss ve Gauss-Lobatto Metotları..... | 39 |
| 4.4 Gegenbauer Ağırlık Fonksiyonu İçin Genelleştirilmiş Anti-Gauss Kuralları ve Optimal Dereceli Averaj Formülleri..... | 44 |
| 4.5 Genelleştirilmiş Hermite Ağırlık Fonksiyonu İçin Genelleştirilmiş Anti-Gauss Kuralları ve Optimal Dereceli Averaj Formülleri..... | 48 |
| 4.6 Genelleştirilmiş Laguerre Ağırlık Fonksiyonu İçin Genelleştirilmiş Anti-Gauss Kuralları ve Optimal Dereceli Averaj Formülleri..... | 50 |
| 5. BÖLÜM: GENELLEŞTİRİLMİŞ OPTİMAL DERECELİ GAUSS AVERAJ KURALI..... | 52 |
| 5.1 Genelleştirilmiş Optimal Dereceli Averaj Metodunun Nümerik Olarak Oluşturulması..... | 54 |
| 5.1.1 Genelleştirilmiş anti-Gauss kuralı kullanılarak elde edilen genel averaj metodu ile optimal dereceli averaj metotlarının Gegenbauer ölçümüne göre denkliği..... | 56 |
| 5.1.2 Gegenbauer ölçümü için optimal dereceli averaj metotlarının nümerik olarak karşılaştırılması..... | 59 |
| 6. BÖLÜM: SONUÇ..... | 62 |
| KAYNAKLAR..... | 60 |

TABLO LİSTESİ

| | | |
|---------------|---|----|
| Tablo 2.3.1 | Bazı ağırlık fonksiyonları ve ilgili ortogonal polinomlar..... | 11 |
| Tablo 4.2.1 | $\alpha = 4, \gamma = 0$ değerleri için Gauss ve anti-Gauss integrasyon kurallarının integrasyon hataları..... | 37 |
| Tablo 4.2.2 | $\alpha = 4, \gamma = \frac{2\alpha(\alpha-1)}{n(n+2\alpha-1)(n+\alpha+1)}$ değerleri için Gauss ve genelleştirilmiş anti-Gauss integrasyon kurallarının integrasyon hataları | 37 |
| Tablo 4.3.2 | Tablo 4.2.2' de verilen değerlere göre Q_n^G Gauss ve $\tilde{Q}_{n+1,\gamma}$ genelleştirilmiş anti-Gauss integrasyon metotları integralin gerçek değerini sınırlar..... | 41 |
| Tablo 5.1.2.1 | $n=1$ için Gegenbauer ölçümüne göre oluşturulan optimal dereceli averaj metotlarının integrasyon ağırlıklarının ve integrasyon noktalarının karşılaştırılması..... | 59 |
| Tablo 5.1.2.2 | Gegenbauer ölçümüne göre $n=2$ için optimal dereceli averaj metotlarının integrasyon noktalarının ve ağırlıklarının karşılaştırılması..... | 59 |
| Tablo 5.1.2.3 | Gegenbauer ölçümüne göre $n=3$ için optimal dereceli averaj metotlarının integrasyon noktalarının ve ağırlıklarının karşılaştırılması..... | 60 |
| Tablo 5.1.2.4 | Gegenbauer ölçümüne göre $n=5$ için optimal dereceli averaj metotlarının integrasyon noktalarının ve ağırlıklarının karşılaştırılması..... | 60 |

1. BÖLÜM

GİRİŞ

İntegral hesabı birçok alanda sıklıkla karşımıza çıkmaktadır. Bazı durumlarda integralin tam değeri her zaman analitik olarak bulunamamaktadır. Bu şekildeki integrallerin tam ya da yaklaşık olarak hesaplanması için çeşitli nümerik integrasyon metotları geliştirilmiştir.

2. bölümde nümerik integrasyon metotlarının oluşturulması için temel tanım ve teoremler verilmiştir. Nümerik integrasyon metotları, integrali alınacak fonksiyonun bazı noktalardaki (integrasyon noktalarındaki) değerleri kullanılarak oluşturulur. Ancak iyi bir yaklaşım olması için kaç tane integrasyon noktası gerektiği ve hangi fonksiyon değerlerinin kullanıldığı önemlidir. $\int_a^b f(x)dx$ şeklindeki integralin yaklaşık değerini hesaplarken x_i integrasyon noktaları, w_i integrasyon ağırlıkları olmak üzere n nokta integrasyon metodu $\sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$ şeklinde formüle edilebilir. Buradaki integrasyon noktalarını ve integrasyon ağırlıklarını hesaplamak için çeşitli integrasyon metotları geliştirilmiştir. Örneğin 2. bölümde anlatılan Newton-Cotes formüllerinde $[a, b]$ integrasyon aralığı n eşit parçaya bölünerek, polinomlar tam olarak integrallenebildiğinden, integrasyon noktalarında $f(x)$ fonksiyonlarıyla uyuşacak polinomlar alınıp integrale yaklaşık bir değer elde edilir. Daha iyi bir yaklaşım için $[a, b]$ aralığı parçalanarak elde edilen her bir aralığa integrasyon metodu ayrı ayrı uygulanır. Bu şekilde oluşturulan metotlara kompozit metotlar denir. n nokta kullanılarak elde edilen Newton-Cotes formülleri genel olarak derecesi $n-1$ olan polinomları tam olarak integralleyebilir. Ancak n 'nin büyük değerleri için bu şekildeki formüller integrale yaklaşım için uygun değildir. Bu durumlarda üç terimli yineleme bağıntısı verilen n . dereceden ortogonal polinomların kökleri kullanılarak oluşturulan Gauss integrasyon metotları kullanılabilir. Gauss integrasyon metodunun integrasyon noktalarının ve ağırlıklarının hesabı 2. bölümde detaylı bir şekilde ele alınacaktır. n nokta

kullanılarak elde edilen bu metodun doğruluk derecesi $2n-1$ dir. Gauss integrasyon metodunun yaklaşımı çok iyi neticeler vermesine rağmen hata terimindeki fonksiyonun $2n$. türevini hesaplamak pratikte kolay değildir.

3. bölümde Gauss integrasyon metodunun hatasını yaklaşık olarak hesaplamayı sağlayan Gauss-Lobatto, Gauss-Radau ve Gauss-Kronrod integrasyon metotları verilmiştir. Gauss integrasyon metodunun hatasını hesaplamak için oluşturulan integrasyon metotları durdurma fonksiyoneli olarak adlandırılır. Gauss integrasyon metotlarının durdurma fonksiyonelleri iki kategoride incelenebilir [1]. Birincisi, ek integrasyon noktaları kullanılarak oluşturulan genişletilmiş metotlar ikincisi ise Gauss integrasyon noktaları kullanılarak oluşturulan integrasyon metotlarıdır. İlk kategorinin en önemli metodu Gauss-Kronrod integrasyon metodudur. Gauss-Kronrod integrasyon metodu 1960'larda A.S. Kronrod tarafından oluşturulmuştur [2]. Gauss integrasyon metodunun n tane integrasyon noktasına ek olarak $n+1$ nokta içeren doğruluk derecesi $3n+1$ olan Gauss-Kronrod integrasyon metodu 3. bölümde bahsedildiği gibi yeni bir ağırlık fonksiyonuna göre oluşturulur. Ancak Kronrod noktalarının hesaplanması lineer olmayan sistemlerin çözümünü gerektirdiği için bu yöntemle Gauss-Kronrod integrasyon metodunun elde edilmesi güçtür. Bu durumda Laurie'nin yineleme katsayılarını içeren matrisler kullanılarak oluşturduğu algoritmadan yararlanılabilir [3]. Fakat bazı ağırlık fonksiyonları için reel integrasyon noktası ve bunlara karşılık gelen pozitif ağırlık fonksiyonu olmadığında doğruluk derecesi yüksek olan bu metot yoktur. Gauss-Kronrod integrasyon metotları başlı başına incelenmesi gereken ve halen birçok soru işareti içeren bir konu olduğundan burada daha fazla detaya girmeden konuyla ilgili bir kaç örnek verilecektir.

4. bölümde Gauss-Kronrod integrasyon metotlarının olmadığı durumlarda geliştirilen metotlar verilmiştir. Bunlardan birisi 1996 yılında Laurie tarafından oluşturulan ve anti-Gauss metodu olarak adlandırılan integrasyon metodudur [4]. Derecesi $2n+1$ den küçük tüm reel katsayılı polinomlar için bu metodun hatası Gauss integrasyon metodunun hatası ile aynı büyüklükte fakat zıt işaretlidir. Genel olarak anti-Gauss integrasyon metotları kullanılarak oluşturulmuş averaj metodunun doğruluk derecesi $2n+1$ dir. Anti-Gauss ve averaj metotları, $\gamma > -1$

olmak üzere genelleştirilmiş anti-Gauss ve Gauss integrasyon kurallarının hata terimleri $\tilde{R}_{n+1,\gamma}$ ve R_n arasındaki bağıntı $\tilde{R}_{n+1,\gamma} = -(1+\gamma)R_n$ olacak şekilde Ehrich tarafından genelleştirilmiştir [5]. Özel γ değerleri için doğruluk derecesi $2n+1$ den yüksek olan bu formüller optimal dereceli averaj formülleri olarak adlandırılırlar. Optimal dereceli averaj formüllerinin yaklaşım dereceleri, klasik Hermite ve Laguerre polinomları için Ehrich [5] tarafından, genel Hermite polinomları ve Gegenbauer polinomları için Hasçelik [6,7] tarafından elde edilmiştir. 4. bölümde bu polinomlar için genelleştirilmiş anti-Gauss kuralları kullanılarak oluşturulmuş optimal dereceli averaj formüllerinin özellikleri verilmiştir. Ayrıca simetrik aralıklarda genelleştirilmiş anti-Gauss ve Gauss-Lobatto integrasyon metotlarının denkleğinden bahsedilip, Gauss ve genelleştirilmiş anti-Gauss integrasyon metotlarının integralin gerçek değerini kuşattığını nümerik olarak gösteren bir tablo verilmiştir.

5. bölümde Spaleviç [8,9]'in üç köşegenli Jacobi matrisini farklı bir şekilde tanımlayarak elde ettiği optimal dereceli averaj metodu tanıtılmıştır. Ayrıca bu optimal dereceli averaj formülü ile 4.bölümde genelleştirilmiş anti-Gauss metodu kullanılarak elde edilen optimal dereceli averaj formülleri karşılaştırılmıştır. Her iki şekilde elde edilen ve aynı doğruluk derecesine sahip optimal dereceli averaj metotlarının Gegenbauer ölçümü için denkleği gösterilmiştir. Son olarak Gegenbauer ölçümü için optimal dereceli averaj formülleri kullanılarak elde edilen integrasyon noktalarının, n nin küçük değerlerinde sembolik, büyük değerlerinde ise nümerik olarak eşitliğini gösteren tablolar verilmiştir.

2. BÖLÜM

NÜMERİK İNTEGRASYON

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \quad (2.1)$$

şeklinde verilen bir integralin değerini yaklaşık ya da tam olarak hesaplamaya yarayan formüllere nümerik integrasyon metotları (kuralları) denir. Bu tür metotlar integralin analitik olarak hesaplanamadığı durumlarda kullanılır. Nümerik integrasyon metotları genel olarak

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^{m_i} w_{ik} f^{(k)}(x_{ik}) \quad (2.2)$$

biçimine ifade edilebilirler. Buradaki $x_{ik} \in \mathbb{R}$ sayılarına integrasyon noktaları $w_{ik} \in \mathbb{R}$ sayılarına da integrasyon ağırlıkları denir. İntegrasyon noktalarının ve ağırlıklarının hesaplanması ile ilgili tanım ve teoremler bu bölümde verilecektir. Eğer integrasyon aralığının içinde $f(x)$ fonksiyonu türevlenebilir değilse veya türev kullanılmak istenmezse sadece fonksiyon değerleri kullanılarak elde edilen (2.2) ifadesindeki m – nokta integrasyon metodu

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^m w_i f(x_i) \quad (2.3)$$

formundadır.

Bu şekilde oluşturulan integrasyon kurallarında;

- Eğer, tüm integrasyon noktaları ve ağırlıkları reel ise metot reeldir.
- Eğer, tüm integrasyon ağırlıkları pozitif ise metot pozitifdir.

Ayrıca $Q_n(f)$ kullanılan nümerik integrasyon metodunu göstermek üzere integralin tam değeri ve nümerik metot ile elde edilen değer arasındaki

$$R(f) = I(f) - Q_n(f) \quad (2.4)$$

farklı integrasyon hatasını verir. IP_m , derecesi en fazla m olan polinomların kümesi olmak üzere hata terimi

$$R(p) = \begin{cases} R(p) = 0 & \forall p \in IP_m \\ R(p) \neq 0 & \exists p \in IP_{m+1} \end{cases} \quad (2.5)$$

şeklinde gösterildiğinde $Q_n(f)$ integrasyon metodunun polinomsal mertebesinin m olduğu söylenir. Aşağıdaki bölümlerde çeşitli integrasyon metotları incelenecektir.

2.1 Newton – Cotes Formülleri

Newton – Cotes formüllerinde verilen $[a, b]$ aralığı n eşit parçaya bölünerek elde edilen

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n} \quad (2.6)$$

noktaları kullanılır. $f(x)$ fonksiyonları bu noktalarda

$$P_n(x_i) = f_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2.7)$$

şeklinde uygun bir $P(x)$ polinomu ile uyuşan fonksiyonlardır. $L_i(x)$, Lagrange polinomları olmak üzere yukarıdaki şartları sağlayan

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f_i, \quad L_i(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \quad (2.8)$$

(interpolasyon) polinomunun integrali alınarak integralin gerçek değerine yaklaşık bir sonuç elde edilir :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_n(x) dx = \sum_{i=0}^n f_i \int_a^b L_i(x) dx \quad (2.9)$$

Eşitliğin sağ tarafındaki integralde

$$x = a + ht = a + \frac{b-a}{n} t \quad (2.10)$$

değişken değişikliği yapılırsa,

$$L_i(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{t - k}{i - k} = \varphi_i(t) \quad (2.11)$$

olacağından (2.9) ifadesi

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n f_i \int_a^b L_i(x) dx = h \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_0^n \varphi_i(t) dt \quad (2.12)$$

formunda yazılabilir. Bu şekilde elde edilen integrasyon metodu

$$\alpha_i = \int_0^n \varphi_i(t) dt = \int_0^n \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{t - k}{i - k} dt \quad (2.13)$$

olmak üzere

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \{ \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n) \} \quad (2.14)$$

şeklinde ve n . dereceden (kapalı) Newton-Cotes formülü olarak adlandırılır. Newton-Cotes formüllerindeki α_i sayılarının her biri bir rasyonel sayıdır ve bu rasyonel sayıların ortak paydası s olarak alınırsa $\sum_{i=0}^n \alpha_i = n$ şartı sağlanmak koşuluyla

$$\alpha_i = \frac{\sigma_i}{s}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.15)$$

sayıları için Newton-Cotes formülleri

$$I_{n+1} = \int_a^b P_n(x) dx = h \sum_{i=0}^n f_i \alpha_i = \frac{b-a}{ns} \sum_{i=0}^n f_i \sigma_i \quad (2.16)$$

şeklinde yazılabilir. l ve K değerleri sadece n değerine bağlı olmak üzere

$$\int_a^b P_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx = h^{l+1} K f^{(l)}(\xi) \quad \xi \in (a, b) \quad (2.17)$$

farklı Newton-Cotes formülleri için integrasyon hatasını verir. Kullanılan nokta sayısına göre Newton-Cotes formüllerine farklı isimler verilmiştir. Örneğin,

Newton-Cotes formülü $n=1$ için yamuk kuralı, $n=2$ için Simpson kuralı olarak adlandırılır. n nin büyük değerlerinde bazı α_i değerleri negatif çıktığı için Newton-Cotes formülü nümerik yaklaşım için uygun değildir.

n -nokta Newton-Cotes formüllerinin doğruluk derecesi en fazla $n-1$ dir. Aynı sayıda nokta kullanılarak daha yüksek dereceli integrasyon metotları n . ortogonal polinomların kökleri kullanılarak oluşturulabilir. Bu amaçla kullanılan ortogonal polinomların özellikleri ayrıca konuyla ilgili tanım ve teoremler bu bölümde verilecektir.

2.2 Ortogonal Polinomlar

$W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere bundan sonraki bölümlerde, iç çarpım $d\lambda(x) = W(x)dx$, $-\infty \leq a < b < \infty$ mutlak sürekli ölçümüne bağlı olacak şekilde tanımlanacaktır. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu pozitif ise $d\lambda$ ölçümünün pozitif olduğu söylenir. $\lambda(x)$, reel eksen üzerinde $x \rightarrow -\infty$ ve $x \rightarrow +\infty$ iken sonlu limitlere sahip azalmayan bir fonksiyon ve $d\lambda$ pozitif ölçüm olmak üzere

$$\mu_r = \mu_r(d\lambda) := \int_{\mathbb{R}} x^r d\lambda(x), \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad \mu_0 > 0 \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlanan bütün mertebeden sonlu momentleri olsun. IP reel polinomlar uzayı olmak üzere $\forall p, q \in IP$ için, $d\lambda$ ölçümüne göre oluşturulan iç çarpım

$$(p, q)_{d\lambda} = \int_{\mathbb{R}} p(x)q(x)d\lambda(x) \quad (2.19)$$

şekilde tanımlanır. Eğer $p = q$ ise

$$\|p\|_{d\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}} p^2(x) d\lambda(x) \right)^{1/2} \quad (2.20)$$

ifadesine p nin normu denir. Eğer $(p, q)_{d\lambda} = 0$ ise p ile q polinomları ortogonaldır denir. Sayılabilir bir kümenin tüm elemanlarının birbiriyle iç çarpımı sıfır ise kümeye ortogonal küme denir. Bu koşulları sağlayan ortogonal bir kümenin polinomlarının baş katsayısı bire eşitse bu polinomlara monik ortogonal

polinomlar denir.

Normları bire eşit olan ortogonal elemanlardan oluşan kümeye ortonormal küme denir. Ortogonal polinomları ortonormal duruma getirmek (normalleştirme) için

$$\tilde{\pi}_k = \frac{\pi_k}{\|\pi_k\|}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

şeklinde

$$(\tilde{\pi}_k, \tilde{\pi}_l)_{d\lambda} = \delta_{kl} := \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases} \quad (2.22)$$

bağıntısını sağlayan polinomlar kullanılır. Bundan sonraki bölümlerde kullanılan iç çarpım ifadelerinde sağ alt köşeye $d\lambda$ ölçümü yazılmasa da bu ölçüme göre iç çarpım yapıldığı kabul edilecektir.

2.2.1 Üç terimli yineleme bağıntısı

Üç terimli yineleme bağıntısı ortogonal polinomları ve türevlerini bulmak için kullanılır. Gauss integrasyon kuralı için hesaplanması gereken ağırlık fonksiyonları ve integrasyon noktaları, üç terimli yineleme bağıntısının yineleme katsayıları kullanılarak simetrik üç köşegenli matristen elde edilebilir. Ayrıca monik ortogonal polinomlardan ortonormal polinomlar oluştururken de kullanılabilir. (2.19)'da tanımlanan iç çarpıma göre

$$(tp, q)_{d\lambda} = (p, tq)_{d\lambda}, \quad \forall p, q \in IP \quad (2.23)$$

değişme özelliği sağlanır.

Teorem 2.2.1.1 : $\pi_k(\cdot) = \pi_k(\cdot; d\lambda)$, $k = 0, 1$, $d\lambda$ ölçümüne bağlı monik ortogonal polinomlar kümesi olsun. π_k ortogonal polinomlarının

$$\begin{aligned} \pi_{-1}(x) &= 0, \quad \pi_0(x) = 1 \\ \pi_{k+1}(x) &= (x - \alpha_k)\pi_k(x) - \beta_k\pi_{k-1}(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.24)$$

üç terimli yineleme bağıntısının yineleme katsayıları $\alpha_k = \alpha_k(d\lambda)$ ve $\beta_k = \beta_k(d\lambda)$ ile gösterilmek üzere

$$\alpha_k = \frac{(x\pi_k, \pi_k)}{(\pi_k, \pi_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

$$\beta_k = \frac{(\pi_k, \pi_k)}{(\pi_{k-1}, \pi_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

şeklinde bulunur [10].

$k = 0$ için β_0 katsayısının çarpanı $\pi_{-1} = 0$ olduğundan

$$\beta_0(d\lambda) = (\pi_0, \pi_0) = \int_{\mathbb{R}} d\lambda(x) \quad (2.27)$$

şeklinde tanımlamak uygun olacaktır. (2.26) ve (2.27) bağıntılarından tüm β_k katsayılarının pozitif olduğu açıktır.

Tanım 2.2.1.2 : (2.24) ifadesinde verilen üç terimli yineleme bağıntısının α_k, β_k yineleme katsayıları kullanılarak $d\lambda$ ölçümüne göre oluşturulan

$$J_\infty = J_\infty(d\lambda) := \begin{pmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & \\ & \sqrt{\beta_2} & \alpha_2 & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

şeklindeki matrise sonsuz boyutlu Jacobi matrisi denir. Bu üç köşegenli Jacobi matrisinin $n \times n$ tipindeki temel minör matrisi

$$J_n = J_n(d\lambda) := [J_\infty(d\lambda)]_{[1:n, 1:n]} \quad (2.29)$$

ile gösterilir. Sonlu boyutlu Jacobi matrisi, integrasyon noktalarını ve integrasyon ağırlıklarını hesaplamada önemli rol oynar. Bununla ilgili bağıntılar aşağıda verilecektir. Eğer Teorem 2.2.1.1'deki indis değerleri sonlu yani $0 \leq n \leq d$ için $k \leq d-1$ ise J_n matrisi iyi tanımlıdır. $d\lambda$ ölçümüne bağlı $\tilde{\pi}_k(\cdot) = \tilde{\pi}_k(\cdot; d\lambda)$ $k = 0, 1, \dots$ ortogonal polinomları

$$\tilde{\pi}_{-1}(x) = 0 \quad , \quad \tilde{\pi}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\beta_0}} \quad (2.30)$$

$$\sqrt{\beta_{k+1}} \tilde{\pi}_{k+1}(x) = (x - \alpha_k) \tilde{\pi}_k(x) - \sqrt{\beta_k} \tilde{\pi}_{k-1}(x) \quad , \quad k = 0, 1, \dots$$

yineleme bağıntısını sağlamak üzere bu yineleme bağıntısının ilk n eşitliği

$$x \tilde{\pi}_k(x) = \sqrt{\beta_k} \tilde{\pi}_{k-1}(x) + \alpha_k \tilde{\pi}_k(x) + \sqrt{\beta_{k+1}} \tilde{\pi}_{k+1}(x) \quad , \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.31)$$

şeklinde tanımlansın.

$$\tilde{\pi}(x) = [\tilde{\pi}_0(x), \tilde{\pi}_1(x), \dots, \tilde{\pi}_{n-1}(x)]^T \quad (2.32)$$

alınırsa $e_n = [0, 0, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$ de n -nokta koordinat vektörü olmak üzere (2.30)'daki yineleme bağıntısı genel olarak

$$x \tilde{\pi}(x) = J_n(d\lambda) \tilde{\pi}(x) + \sqrt{\beta_n} \tilde{\pi}(x) e_n \quad (2.33)$$

matris formunda ifade edilebilir.

Teorem 2.2.1.3 : $\pi_n(\cdot; d\lambda)$ ortogonal polinomunun kökleri $\tau_v^{(n)}$ değerleri n . dereceden $J_n(d\lambda)$ Jacobi matrisinin özdeğerleridir ve $\tilde{\pi}(\tau_v^{(n)})$ değerleri bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerdir [10].

Teorem 2.2.1.4 : $\tau_v^{(n)}$ özdeğerlerine karşılık gelen $J_n(d\lambda)$ matrisinin normalleştirilmiş özvektörleri ν_v vektörleri olsun. Yani $J_n(d\lambda) \nu_v = \tau_v^{(n)} \nu_v$, $\nu_v^T \nu_v = 1$ eşitliği sağlansın. Bu koşulu sağlayan özvektörlerin birinci bileşeni $\nu_{v,1}$ olmak üzere

$$\beta_0 \nu_{v,1}^2 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} [\tilde{\pi}_k(\tau_v^{(n)})]^2} \quad , \quad v = 1, 2, \dots, n \quad (2.34)$$

sağlanır [10].

2.3 Gauss İntegrasyon Kuralı

Newton-Cotes formülleri, $[a, b]$ aralığı eşit parçalara bölünerek oluşturulmuş fakat yaklaşım istenilen doğrulukta olmamıştır. Bu yüzden yaklaşım derecesinin maksimum olmasını sağlayacak şekilde metotlar aranmıştır. Bu şekilde elde edilen Gauss integrasyon metodu aşağıdaki koşulları sağlamak şartıyla, doğruluk derecesi $2n - 1$ olacak şekilde oluşturulabilir.

$W(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, $(W(x) \neq 0)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$I(f) = \int_a^b W(x) f(x) dx \quad (2.35)$$

şeklinde verilen integrali düşünelim. Buradaki $[a, b]$ integrasyon aralığı $[a, \infty]$, $[-\infty, \infty]$, $[-\infty, b]$ şeklinde olabilir. Genel olarak ağırlık fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $W(x) \geq 0$ ve $\forall x \in [a, b]$ için $\int_a^b W(x) dx > 0$ olur.
2. $\mu_0 > 0$ olmak üzere tüm $\mu_k = \int_a^b x^k W(x) dx$, $k = 0, 1, \dots$ momentleri var ve sınırlıdır.
3. $[a, b]$ integrasyon aralığında negatif olmayan $P(x)$ polinomları için $\int_a^b W(x) P(x) dx = 0$ ise $P(x) \equiv 0$ dır.

Pratikte çok sık kullanılan ağırlık fonksiyonları ve ilgili ortogonal polinomlar aşağıdaki tabloda verilmiştir. Tablo 2.3.1 [11]'den alınmıştır.

Tablo 2.3.1 Bazı ağırlık fonksiyonları ve ilgili ortogonal polinomlar

| $[a, b]$ – aralığı | Ağırlık Fonksiyonu | İlgili Ortogonal Polinom |
|---------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| $[-1, 1]$ | $W(x) = 1$ | $P_n(x)$: Legendre polinomları |
| $[-1, 1]$ | $W(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ | $T_n(x)$: Chebyshev polinomları |
| $[0, \infty]$ | $W(x) = e^{-x}$ | $E_n(x)$: Laguerre polinomları |
| $[-\infty, \infty]$ | $W(x) = e^{-x^2}$ | $H_n(x)$: Hermite polinomları |

Verilen $W(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre oluşturulan n . ortogonal polinomun kökleri x_i integrasyon noktaları ve w_i değerleri de integrasyon ağırlıkları olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun türevlerini içermeyen

$$\int_a^b W(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i), \quad w_i = \int_a^b W(x)L_i(x)dx \quad (2.36)$$

şeklinde tanımlanan integrasyon metoduna n – nokta Gauss integrasyon metodu denir. Buradaki $L_i(x)$ değerleri (2.8) ifadesinde verilen Lagrange polinomlarıdır. $2n-1$ doğruluk derecesine sahip bu integrasyon metodunun nasıl hesaplanacağı bu bölümde detaylı bir şekilde incelenmiştir.

2.3.1 İntegrasyon ağırlıkların hesaplanması

İntegrasyon ağırlıkları, (2.8)' de tanımlanan temel Lagrange polinomları kullanılarak

$$w_k = \int_a^b W(x)L_k(x)dx = \int_a^b \left(W(x) \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{x-x_j}{x_k-x_j} \right) dx \quad (2.37)$$

bağıntısından hesaplanabilir. Ancak n nin büyük değerleri için pratikte hesaplamaya uygun değildir. Bu yüzden ağırlıkları hesaplamak için $c_k, b_k > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi_{-1}(x) &= 0, \quad \varphi_0(x) \neq 0 \\ c_{k+1}\varphi_{k+1}(x) &= (x-a_k)\varphi_k(x) - b_k\varphi_{k-1}(x), \quad k=0,1,\dots \end{aligned} \quad (2.38)$$

yineleme bağıntısını sağlayan $\{\varphi_k \mid k=0,1,\dots,n\}$ ortogonal polinomları kullanılır. $\{x_i\}$ değerleri $\varphi_n(x) = A_n x^n + \dots$ ortogonal polinomunun kökleridir. Ağırlıklar ise

$$w_k = - \left(\frac{A_{n+1}}{A_n} \right) \frac{\varphi_0(x_k) \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle}{\varphi_{n+1}(x_k) \varphi_n'(x_k)} \quad (2.39)$$

bağıntısı kullanılarak hesaplanır. Ancak n nin büyük değerleri için bu şekilde hesaplamak da pratik olmadığından integrasyon noktalarının ve ağırlıkların hesabı için yineleme katsayıları ile oluşturulan üç köşegenli matrisler kullanılacaktır.

Teorem 2.3.2 : $f \in C^{2n}[a, b]$ ise Gauss integrasyon metodu için nümerik integrasyon hatası,

$$\int_a^b W(x)f(x)dx - \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \|P_n\|^2, \quad \xi \in (a, b) \quad (2.40)$$

eşitliği ile verilir [11].

Sonuç 2.3.3 : $R_n^G(f)$ hata terimi için $f^{(2n)}$, $[a, b]$ aralığında sürekli olmak şartıyla

$$R_n^G(f) \leq \frac{\|f^{(2n)}(\xi)\|_\infty}{(2n)!} \|P_n\|^2 = \frac{\|f^{(2n)}(\xi)\|_\infty}{(2n)!} \beta_0 \beta_1 \dots \beta_{n-1} \beta_n \quad (2.41)$$

eşitliği sağlanır.

İspat 2.3.3 : $\beta_0 = \int_a^b w(x)dx = \|P_0\|^2$, [10] şeklinde seçilip $\beta_k = \frac{(P_k, P_k)}{(P_{k-1}, P_{k-1})}$

$k=1, 2, \dots$ olduğu dikkate alınarak

$$\beta_0 \beta_1 \dots \beta_{n-1} \beta_n = (P_0, P_0) \frac{(P_1, P_1)}{(P_0, P_0)} \dots \frac{(P_n, P_n)}{(P_{n-1}, P_{n-1})} = (P_n, P_n) = \|P_n\|^2$$

bulunur. Bu sonuç (2.40) bağıntısında yerine yazılırsa teoremin ispatı tamamlanır.

Sonuç 2.3.4 : $f^{(2n)}$, $d\lambda$ nın destek kümesi üzerinde sürekli ve sabit işaretli ise hata terimleri için

$$\begin{aligned} \text{sign } f^{(2n)} = 1 &\Rightarrow R_n(f) > 0 \\ \text{sign } f^{(2n)} = -1 &\Rightarrow R_n(f) < 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Teorem 2.3.5 : $J_n = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ 0 & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$ matrisi için $P_n(x)$, n . ortogonal

polinom olmak üzere Teorem 2.2.1.1'de verilen yineleme bağıntısına göre J_n Jacobi matrisinin özdeğerleri n . ortogonal $P_n(x)$ polinomunun kökleridir.

İspat 2.3.5 :

$$\begin{aligned} n=1 \text{ için} \quad \det(xI - J_1) &= (x - \alpha_0)P_0(x) = P_1(x) \\ n=2 \text{ için} \quad \det(xI - J_2) &= (x - \alpha_1)P_1(x) - \beta_1 = P_2(x) \\ n=3 \text{ için} \quad \det(xI - J_3) &= (x - \alpha_2)P_2(x) - \beta_2P_1(x) = P_3(x) \end{aligned}$$

şeklinde devam ettirilirse ortogonal polinomların bilinen üç terimli yineleme bağıntısından da yola çıkılarak $\det(xI - J_n) = P_n(x)$ bulunur.

2.3.2 Gauss integrasyon kuralının integrasyon noktalarının ve ağırlıklarının hesaplanması

$a_k = a_k(d\lambda)$ ve $b_k = b_k(d\lambda) > 0$ reel yineleme katsayılarına sahip π_k polinomları

$$\begin{aligned} \pi_{-1}(t) &= 0, \quad \pi_0(t) = 1 \\ \pi_{k+1}(t) &= (t - a_k)\pi_k(t) - b_k\pi_{k-1}(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.43)$$

şeklindeki üç terimli yineleme bağıntısını sağlayan ortogonal polinomlar olsun. Bu ortogonal polinomlara göre oluşturulan Gauss integrasyon kuralı

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) d\lambda(t) = \sum_{v=1}^n \lambda_v^G f(\tau_v^G) + R_n^G(f) \quad (2.44)$$

$$a_k = \frac{(\pi_k, \pi_k)_{d\lambda}}{(\pi_k, \pi_k)_{d\lambda}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.45)$$

$$b_k = \frac{(\pi_k, \pi_k)_{d\lambda}}{(\pi_{k-1}, \pi_{k-1})_{d\lambda}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

bağıntıları kullanılarak

$$J_n(d\lambda) = \begin{pmatrix} a_0 & \sqrt{b_1} & & 0 \\ \sqrt{b_1} & a_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \sqrt{b_{n-1}} \\ 0 & & \sqrt{b_{n-1}} & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

şeklinde oluşturulan üç köşegenli Jacobi matrisi yardımıyla hesaplanır. Buradaki τ_v^G , Gauss integrasyon noktaları, $J_n(d\lambda)$ Jacobi matrisinin özdeğerleri ve $\pi_n(\cdot; d\lambda)$ polinomunun kökleridir. Ayrıca bu özdeğerlere karşılık gelen normleştirilmiş özvektörler v_v 'ler olmak üzere $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ matrisi oluşturulsun. $J = J_n(d\lambda)$ matrisinin özdeğer özvektör ayrışımından $D_\tau = \text{diag}(\tau_1^G, \tau_2^G, \dots, \tau_n^G)$ olmak üzere $JV = VD_\tau$ ifadesi sağlanır. Bu ayrışım kullanılarak elde edilen integrasyon ağırlıkları aşağıdaki teoremdedir.

Teorem 2.3.2.1: n -nokta Gauss integrasyon kuralının τ_v^G , $v = 0, 1, 2, \dots$ integrasyon noktaları $J_n(d\lambda)$ Jacobi matrisinin özdeğerleri ve $v_{v,1}$ bu özdeğerlere karşılık gelen normleştirilmiş özvektörlerin birinci bileşenleri olsun. b_0 , (2.27) ifadesindeki gibi tanımlanmak üzere λ_v^G ağırlıkları

$$\lambda_v^G = b_0 v_{v,1}^2 \quad (2.47)$$

formunda elde edilirler [10].

İspat 2.3.2.1: $\tilde{\pi}_k(t) = \tilde{\pi}_k(t; d\lambda)$, $d\lambda$ ölçümüne bağlı ortogonal polinomlar ve $\tilde{\pi}(t) = [\tilde{\pi}_0(t), \tilde{\pi}_1(t), \dots, \tilde{\pi}_{n-1}(t)]^T$ vektörü (2.32) ifadesindeki gibi bu ortogonal polinomların ilk n tanesinin vektörü olsun. Teorem 2.2.1.3 ve Teorem 2.2.1.4'den

$$b_0 v_{v,1}^2 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} [\tilde{\pi}_k(\tau_v^G)]^2}, \quad v = 1, 2, \dots, n \quad (2.48)$$

sağlanır. Diğer taraftan (2.44) eşitliğindeki Gauss integrasyon formülünde $k \leq n-1$ için $f(t) = \tilde{\pi}_k(t)$ alınarak ve $\tilde{\pi}_0 = b_0^{-1/2}$ ifadesi kullanılarak ortogonalitten

$$b_0^{1/2} \delta_{k,0} = \sum_{v=1}^n \lambda_v^G \tilde{\pi}_k(\tau_v^G), \quad (\delta_{k,0} \text{ Kronecker delta})$$

elde edilir veya matris formunda, P özdeğerlerin matrisi, λ^G ağırlıkların vektörü $\lambda^G = [\lambda_1^G, \dots, \lambda_n^G]^T$, $P = [\tilde{\pi}(\tau_1^G), \tilde{\pi}(\tau_2^G), \dots, \tilde{\pi}(\tau_n^G)]^T$ ve $e_1^T = [1, 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^n$ ilk koordinat vektörü olmak üzere

$$P\lambda^G = b_0^{1/2}e_1 \quad (2.49)$$

matris formunda yazılabilir. P matrisinin sütunları birbiriyle ortogonal olduğundan

$$P^T P = D_\pi \quad , \quad D_\pi = \text{diag}(d_0, d_1, \dots, d_{n-1}) \quad , \quad d_{v-1} = \sum_{k=0}^{n-1} [\tilde{\pi}_k(\tau_v^G)]^2$$

sağlanır. (2.49), P^T ifadesi ile soldan çarpılırsa $e = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$D_\pi \lambda^G = b_0^{1/2} P^T e_1 = b_0^{1/2} b_0^{-1/2} e = e$$

elde edilir. Buradan $\lambda^G = D_\pi^{-1} e$ olur, yani $\lambda_v^G = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} [\tilde{\pi}_k(\tau_v^G)]^2}$, $v = 1, 2, \dots, n$

sonucuna varılır. Böylece ispat tamamlanmış olur [10].

Gauss integrasyon kuralının integrasyon noktalarını ve ağırlıklarını veren algoritma (*gauss.m*) Matlab ortogonal programlar paketinde bulunmaktadır.

Sonuç 2.3.2.2 : f fonksiyonu τ_v^G Gauss integrasyon noktalarını içeren aralıkta analitik bir fonksiyon ve $J = J_n(d\lambda)$ Jacobi matrisi için $f(J)$ fonksiyonu tanımlı olsun. (2.44) eşitliğindeki Gauss integrasyon toplamı

$$\sum_{v=1}^n \lambda_v^G f(\tau_v^G) = b_0 e_1^T f(J) e_1 \quad , \quad e_1^T = [1, 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^n \quad (2.50)$$

formunda ifade edilebilir. $J = V D_\tau V^T$ ve $\lambda_v^G = b_0 v_{v,1}^2$ ifadeleri kullanılarak

$b_0 e_1^T f(J) e_1 = b_0 e_1^T V f(D_\tau) V^T e_1 = b_0 \sum_{v=1}^n v_{v,1}^2 f(\tau_v^G) = \sum_{v=1}^n \lambda_v^G f(\tau_v^G)$ eşitliği elde edilir [10].

3. BÖLÜM

GAUSS İNTEGRASYON METODUNUN HATASINI YAKLAŞIK OLARAK HESAPLAMAK İÇİN KULLANILAN METOTLAR

Bu bölümde anlatılacak integrasyon metotlarının amacı herhangi bir $n \rightarrow \infty$ değeri için bir nümerik integrasyon metodundan elde edilen sonucun integralin tam değerine yakınsadığını farzederek

$$|I(f) - Q_n(f)| \quad (3.1)$$

hatasını hesaplamaktır. Bunun için en iyi yaklaşım, $m > n$ olmak üzere m -nokta ikinci bir integrasyon metodu kullanılarak

$$|I(f) - Q_n(f)| \approx |Q_m(f) - Q_n(f)| \quad (3.2)$$

bağıntısı yardımıyla hata hakkında fikir sahibi olmaktır. Bu amaçla kullanılan integrasyon metotlarından bazıları bundan sonraki bölümlerde verilecektir.

3.1 Gauss-Radau ve Gauss-Lobatto İntegrasyon Metotları

Sonlu $[a, b]$ aralığının uç noktalarından biri veya her ikisi integrasyon noktası olarak alınıp kalan diğer integrasyon noktaları metodun mertebesi mümkün olduğu kadar büyük olacak şekilde seçilirse, Gauss integrasyon metodundan yeni bir integrasyon metodu oluşturulabilir.

Eğer integrasyon aralığının uç noktalarından birisi integrasyon noktası olarak alınıp kalan diğer integrasyon noktaları, metodun mertebesini mümkün olduğu kadar büyük yapacak şekilde seçilirse elde edilen metot Gauss-Radau integrasyon metodu, integrasyon aralığının her iki ucu integrasyon noktası olarak alınıp kalan diğer integrasyon noktaları metodun mertebesini mümkün olduğu kadar büyük yapacak şekilde seçilirse elde edilen metot Gauss - Lobatto integrasyon metodu olarak adlandırılır. Gauss-Radau metotları ağırlık fonksiyonları

$a < t < b$ olmak üzere $(b-t)W(t)$ veya $(t-a)W(t)$ alınarak elde edilen Gauss integrasyon metotları, Gauss-Lobatto metotları da ağırlık fonksiyonu $(b-t)(t-a)W(t)$ alınarak oluşturulan Gauss integrasyon metotları gibi düşünülebilir.

3.1.1 Gauss-Radau integrasyon metodu

Ölçümü $d\lambda_a(t) = (t-a)d\lambda(t)$ ve integrasyon noktalarından biri $a = \inf(\text{sup } p(d\lambda)) = \tau_0$ şeklinde olan $(n+1)$ -nokta Gauss - Radau formülü

$$\int_a^b f(t)d\lambda(t) = \lambda_0^a f(a) + \sum_{v=1}^n \lambda_v^a f(\tau_v^a) + R_n^a(f) \quad (3.3)$$

formülü ile edilebilir [12]. Bu integrasyon metoduna göre oluşturulan $(n+1)$ boyutlu modifiye edilmiş Gauss - Radau Jacobi matrisi

$$J_{n+1}^{R,a}(d\lambda) = \begin{pmatrix} J_n(d\lambda) & \sqrt{\beta_n} e_n \\ \sqrt{\beta_n} e_n^T & \alpha_n^R \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

şeklindedir.

Buradaki $\beta_n = \beta_n(d\lambda)$ yineleme katsayıları Gauss integrasyon metodunun katsayısına eşittir, bilinmeyen α_n^R katsayısı ise $\pi_{n+1}(t) = (t - \alpha_n^R)\pi_n(t) - \beta_n\pi_{n-1}(t)$ yineleme bağıntısı kullanılarak $\alpha_n^R = a - \frac{\beta_n\pi_{n-1}(a)}{\pi_n(a)}$ şeklinde elde edilir. Gauss-Radau

integrasyon metodunun $\tau_0^a (= a)$, $\tau_1^a, \dots, \tau_n^a$ integrasyon noktaları, $J_{n+1}^{R,a}(d\lambda)$ Jacobi matrisinin özdeğerleridir ve $\lambda_0^a, \lambda_1^a, \dots, \lambda_n^a$ integrasyon ağırlıkları $J_{n+1}^{R,a}(d\lambda)$ Jacobi matrisinden (2.47) ifadesinde verildiği gibi elde edilir [12].

Aynı şekilde, $\tau_{n+1} = b$ noktası alınırsa Gauss-Radau integrasyon metodu

$$\int_a^b f(t)d\lambda(t) = \sum_{v=1}^n \lambda_v^b f(\tau_v^b) + \lambda_{n+1}^b f(b) + R_n^b(f) \quad (3.5)$$

şeklinde ifade edilir.

(3.3) ve (3.5)'deki integrasyon formülleri (2.50)'deki ifadeye benzer şekilde J_n yerine $J_{n+1}^{R,a}$ ve $J_{n+1}^{R,b}$ yazılarak ve e_1 vektörünün boyutu bir artırılarak matris karakterizasyonu elde edilebilir.

$(n+1)$ -nokta Gauss- Radau integrasyon formülünün yaklaşım derecesi $2n$ dir ($R_n(f)=0$, $f \in IP_{2n}$). $[a,b]$ aralığı üzerinde Gauss-Radau integrasyon formülünün R_n^a , R_n^b hata terimleri için

$$\begin{aligned} \text{sign } f^{(2n+1)} = 1 &\Rightarrow R_n^a(f) > 0 \text{ , } R_n^b(f) < 0 \\ \text{sign } f^{(2n+1)} = -1 &\Rightarrow R_n^a(f) < 0 \text{ , } R_n^b(f) > 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

eşitsizlikleri sağlar. Bu ise fonksiyonun türevi sabit işaretli ise Gauss-Radau yaklaşımının uç noktalarından birinin integralin tam değeri için alt sınır, diğerinin ise integralin tam değeri için üst sınır olacağı anlamına gelir.

3.1.2 Gauss-Lobatto integrasyon metodu

$d\lambda_{a,b}(t) = (t-a)(b-t)d\lambda(t)$ ölçümlü, integrasyon noktalarının ikisi $\tau_0^L = a$, $\tau_{n+1}^L = b$ ve $\pi_n(\cdot; d\lambda_{a,b})$ polinomunun kökleri, τ_v^L aradaki integrasyon noktaları olmak üzere $(n+2)$ -nokta Gauss-Lobatto formülü

$$\int_a^b f(t)d\lambda(t) = \lambda_0 f(a) + \sum_{v=1}^n \lambda_v f(\tau_v) + \lambda_{n+1} f(b) + R_n^{a,b}(f) \quad (3.7)$$

şeklinde verilmiştir [12]. Bu şekilde tanımlanan Gauss-Lobatto integrasyon metodunun yaklaşım derecesi $2n+1$ dir ($R_n(f)=0$, $f \in IP_{2n+1}$). Gauss-Radau integrasyon metodunda olduğu gibi Gauss-Lobatto integrasyon metodu için aşağıdaki özellik verilmiştir.

$$\begin{aligned} \text{sign } f^{(2n+2)} = 1 &\Rightarrow R_n^{a,b}(f) < 0 \\ \text{sign } f^{(2n+2)} = -1 &\Rightarrow R_n^{a,b}(f) > 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Gauss-Lobatto integrasyon metodu için $(n+2)$ boyutlu modifiye edilmiş Jacobi

matrisi

$$J_{n+2}^L(d\lambda) = \begin{pmatrix} J_{n+1}(d\lambda) & \sqrt{\beta_{n+1}^L} e_{n+1} \\ \sqrt{\beta_{n+1}^L} e_{n+1}^L & \alpha_{n+1}^L \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

şeklinde olacaktır. Burada α_{n+1}^L ve β_{n+1}^L katsayıları, $\pi_{n+1}(t) = (t - \alpha^L)\pi_n(t) - \beta_n^L \pi_{n-1}(t)$ üç terimli yineleme bağıntısı kullanılarak elde edilen 2×2 tipindeki

$$\begin{bmatrix} \pi_{n+1}(a) & \pi_n(a) \\ \pi_{n+1}(b) & \pi_n(b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{n+1}^L \\ \beta_{n+1}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\pi_{n+1}(a) \\ b\pi_{n+1}(b) \end{bmatrix}$$

lineer sistemin çözümünden bulunur.

$\tau_0 = a$ ve $\tau_{n+1} = b$ noktalarını içeren Gauss-Lobatto integrasyon metodunun integrasyon noktaları, Gauss integrasyon metodunda olduğu gibi $J_{n+2}^L(d\lambda)$ Jacobi matrisinin özdeğerleridir ve λ_ν , $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ağırlıklarının, normalleştirilmiş özvektörlerin birinci bileşenlerinin karesinin β_0 katı olduğu [12]'de verilmiştir.

(3.7)'deki integrasyon formülünün (2.50)'deki ifadeye benzer şekilde J_n yerine J_{n+2}^L matrisi yazılarak ve e_1 vektörünün boyutu iki artırılarak matris karakterizasyonu elde edilebilir.

3.2 Gauss - Kronrod İntegrasyon Metodu

Hata terimini hesaplamada kullanılan bu integrasyon metodu ilk olarak 1960'larda Kronrod tarafından öne sürülmüş ve incelenmiştir [2]. $(2n+1)$ -nokta Kronrod metotları mertebesi $(2n-1)$ den büyük olacak şekilde oluşturulmuştur.

Gauss - Kronrod integrasyon metotları bir bakıma Gauss - Radau ve Gauss-Lobatto integrasyon metotlarının genelleştirilmiş halidir. Daha önceki bölümde verilen bu kurallarda uç noktalardan bir veya ikisi alınıp, diğer noktalar metodun mertebesi maksimum olacak şekilde seçilmişti. Bu metotta ise Gauss integrasyon metodunda kullanılan $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre oluşturulan

$$\varphi_n(x) = \prod_{v=1}^n (x - \tau_v^G) \quad (3.10)$$

ortogonal polinomun köklerine ek olarak $n+1$ tane integrasyon noktası belirlenir. Ayrıca λ_v^K , λ_μ^{*K} değerleri Gauss-Kronrod integrasyon ağırlıkları olmak üzere $(2n+1)$ - nokta Gauss- Kronrod integrasyon formülü

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) d\lambda(t) = \sum_{v=1}^n \lambda_v^K f(\tau_v^G) + \sum_{\mu=1}^{n+1} \lambda_\mu^{*K} f(\tau_\mu^K) + R_n^K(f) \quad (3.11)$$

şeklinde ifade edilebilir [3].

Metodun mertebesinin maksimum olması için $\tau_1^K, \tau_2^K, \dots, \tau_{n+1}^K$ Kronrod noktaları ile $\lambda_1^K, \lambda_2^K, \dots, \lambda_n^K; \lambda_1^{*K}, \lambda_2^{*K}, \dots, \lambda_{n+1}^{*K}$ integrasyon ağırlıkları aşağıdaki yöntemle belirlenir: Bunun için önce Stieltjes polinomu olarak bilinen

$$\psi_{n+1}(x) = \prod_{\mu=1}^{n+1} (x - \tau_\mu^K) \quad (3.12)$$

polinomu ile, genelde işaret değiştiren

$$w(x) = W(x) \prod_{v=1}^n (x - \tau_v^G) = W(x) \varphi_n(x) \quad (3.13)$$

yeni bir ağırlık fonksiyonu tanımlansın. Buna göre τ_μ^K değerleri

$$(p, \psi_{n+1})_w = \int_a^b W(x) \psi_{n+1} p(x) dx = 0, \quad \forall p \in \pi_n \quad (3.14)$$

ya da bu bağıntıya denk olan

$$(p, \psi_{n+1})_w = \int_a^b W(x) \psi_{n+1} x^j dx = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (3.15)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde seçilir. Gauss-Kronrod integrasyon formülünün var ve tek olması için Stieltjes polinomunun köklerinin (Kronrod noktalarının) verilen aralığın içinde olması, integrasyon ağırlıklarının pozitif olması ve Kronrod noktalarının

$$a \leq \tau_1^K < \tau_1^G < \tau_2^K < \tau_2^G < \dots < \tau_n^K < \tau_{n+1}^G \leq b \quad (3.16)$$

şeklinde seçilmesi gerekir çünkü aralığın dışında olan integrasyon noktaları için fonksiyon tanımlı olmayabilir.

Gauss-Kronrod metotlarının integrasyon ağırlıkları Gauss integrasyon metodunda olduğu gibi integrasyon noktaları için oluşturulan Lagrange polinomlarının

$$\lambda_j^G = \int_a^b W(x)L_j(x)dx \quad j=1,2,\dots,n, \quad \lambda_j^{*K} = \int_a^b W(x)L_{j+1}(x)dx \quad j=1,2,\dots,n+1 \quad (3.17)$$

integrallerinden elde edilir.

Genel olarak Kronrod noktalarının hesabı için lineer olmayan cebirsel sistemlerin çözümü gerekir, bu yöntemle Gauss-Kronrod metodunu hesaplamak pratikte oldukça zordur. Ancak büyük n değerleri için integrasyon noktaları ve ağırlıkları daha az hata ile Gauss integrasyon metodunda olduğu gibi üç köşegenli matris oluşturarak hesaplanabilir. Belirlenen matrisin özdeğerleri integrasyon noktaları ve integrasyon ağırlıklarının da (2.47) eşitliğindeki gibi elde edildiği Laurie tarafından gösterilmiştir [3]. Simetrik üç köşegenli Jacobi-Kronrod matrisi

$$J_{2n+1}^K(d\lambda) = \begin{pmatrix} J_n(d\lambda) & \sqrt{\beta_n}e_n & 0 \\ \sqrt{\beta_n}e_n^T & \alpha_n & \sqrt{\beta_{n+1}}e_1^T \\ 0 & \sqrt{\beta_{n+1}}e_1 & J_n^{K*}(d\lambda) \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

formunda gösterilmiştir [12]. $J_{2n+1}^K(d\lambda)$ matrisinin tüm özdeğerlerini bilmediğimizden Gauss metoduna benzer algoritmayı kullanmamız olanaksızdır. Buradaki J_n^{K*} matrisi n 'nin tek ve çift olması durumunda değişecektir.

$J_{[p:q]}(d\lambda)$ matrisi, köşegeninde $\alpha_p, \dots, \alpha_q$ elemanları bulunan matris olmak üzere J_n^{K*} matrisi,

n tek iken;

$$J_n^{K*}(d\lambda) = \begin{pmatrix} J_{[n+1:(3n-1)/2]} & \sqrt{\beta_{(3n+1)/2}^*}e_{(n-1)/2} \\ \sqrt{\beta_{(3n+1)/2}^*}e_{(n-1)/2}^T & J_{[(3n+1)/2:2n]} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

n çift iken;

$$J_n^{K*}(d\lambda) = \begin{pmatrix} J_{[n+1:3n/2]} & \sqrt{\beta_n^*}e_{n/2} \\ \sqrt{\beta_n^*}e_{n/2}^T & J_{[(3n+2)/2:2n]} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

matrisleriyle ifade edilir [10].

Yukarıdaki matrisler kullanılarak Gauss-Kronrod integrasyon metodunu hesaplamak için kullanılan algoritma Laurie tarafından oluşturulmuştur [3]. Üç köşegenli Jacobi – Kronrod matrisi için

$$J_{2n+1}^K = P_{2n+1} \Lambda_{2n+1} P_{2n+1}^T, \quad \Lambda_{2n+1} = \text{diag}[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{2n+1}], \quad P_{2n+1} P_{2n+1}^T = I \quad (3.21)$$

şeklinde matris karakterizasyonu elde edilebilir. Bu şekilde oluşturulan Gauss-Kronrod integrasyon metodunun doğruluk derecesi n tek iken $3n+2$, n çift iken $3n+1$ olur. Ayrıca Gauss - Kronrod integrasyon metodu için

- Ağırlıklar ve integrasyon noktaları reel ise metot reeldir.
- Tüm integrasyon noktaları integrasyon aralığındadır.
- Tüm ağırlıklar pozitif ise integrasyon metodu pozitifdir.

Teorem 3.2.1 : Jacobi - Kronrod matrisi vardır ve reeldir \Leftrightarrow Gauss-Kronrod formülü var, reel ve pozitifdir [3].

Buradaki ifade Kronrod formülünün integrasyon aralığı dışında noktaya sahip olmayacağı anlamına gelmez. Monegato'nun sonuçlarına göre yeni noktaların ağırlıklarının pozitifliği, herhangi birbirini izleyen iki Kronrod integrasyon noktası arasında bir tane Gauss integrasyon noktasının bulunmasına bağlıdır [13]. Bu durumda integrasyon aralığının dışında en fazla iki nokta olabilir. Bu noktalar da ancak integrasyon aralığının uç noktaları olur.

Gauss-Kronrod formülü reel ve pozitif olmadığında Gauss-Kronrod formülünü hesaplamak için kullanılan algoritma yine de iyi sonuç verebilir. Fakat Jacobi-Kronrod matrisi reel olmayabilir, bu durumda yineleme katsayılarından herhangi bir β_j katsayısı negatif olur, bu da algoritmanın Gauss-Kronrod formülünü hesaplamada kullanılamayacağı anlamına gelir. Gauss-Kronrod integrasyon metodu reel olmayan integrasyon noktalarına veya negatif ağırlıklara sahipse reel Gauss-Kronrod integrasyon metodu yoktur. Örneğin 3- noktalı Hermite formülünün 7- noktalı Gauss-Kronrod formülünü elde etmeye çalıştığımızda $\beta_6^K = -1$ bulunur. 4- noktalı Hermite formülünün 9-noktalı Gauss-Kronrod formülünü elde etmeye çalıştığımızda $\beta_7^K = -\frac{1}{4}, \beta_8^K = \frac{1}{4}$ bulunur. Burada Gauss-Kronrod integrasyon

formülü reel integrasyon noktalarına sahip olmasına rağmen β^K katsayıları negatif olduğundan integrasyon ağırlıkları negatif olacaktır. Bu da bazı ağırlık fonksiyonları için Gauss-Kronrod formülünün olmadığı anlamına gelir.

Aşağıdaki örneklerde Klasik Laguerre ağırlık fonksiyonuna göre $n=1$ ve $n=2$ için Gauss-Kronrod integrasyon metodunun olup olmadığı gösterilecektir.

3.3 Örnekler

Örnek 3.3.1 İntegrasyon aralığı $[0, \infty]$ olan $W(x) = e^{-x}$ klasik Laguerre ağırlık fonksiyonuna göre $n=1$ için Gauss-Kronrod integrasyon metodunu oluşturalım. $\varphi_1(x) = E_1(x) = 1-x$ birinci dereceden Laguerre polinomudur. Dolayısıyla yeni oluşturulan ağırlık fonksiyonu $w(x) = e^{-x}(1-x)$ şeklinde elde edilir. Ayrıca Stieltjes polinomu

$$\psi_2(x) = (x - \tau_1^K)(x - \tau_2^K)$$

şeklinde olacaktır. τ_1^K, τ_2^K değerleri

$$(x^j, \psi_2)_w = \int_0^{\infty} e^{-x}(1-x)(x - \tau_1^K)(x - \tau_2^K)x^j dx = 0 \quad j = 0, 1$$

eşitliklerinden elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa integrasyon noktaları

$$\tau_1^G = 1, \quad \tau_1^K = 2 - \sqrt{6}, \quad \tau_2^K = 2 + \sqrt{6}$$

şeklinde elde edilir. İntegrasyon ağırlıkları ise

$$\tau_1^G = 1, \quad \tau_2^G = 2 - \sqrt{6}, \quad \tau_3^G = 2 + \sqrt{6}$$

apsis noktaları için oluşturulan $L_j(x), j = 1, 2, 3$ Lagrange polinomları kullanılarak

$$\lambda_1^K = \int_0^{\infty} e^{-x} L_1(x) dx, \quad \lambda_{j-1}^{*K} = \int_0^{\infty} e^{-x} L_j(x) dx, \quad j = 2, 3$$

integrallerinden $\lambda_1^K = \frac{4}{5}, \quad \lambda_1^{*K} = \frac{1}{-2\sqrt{6}+12}, \quad \lambda_2^{*K} = \frac{1}{2\sqrt{6}+12}$

olarak elde edilir. Yukarıda elde edilen integrasyon noktaları ve ağırlıkları (3.11) formülünde yerine yazılarak reel Gauss-Kronrod integrasyon metodunun sonucu elde edilir.

Örnek 3.3.2 Yukarıdaki örnekte uygulanan yöntemle $W(x) = e^{-x}$ klasik Laguerre ağırlık fonksiyonuna göre $n=2$ için Gauss-Kronrod integrasyon metodunu oluşturalım. $\varphi_2(x) = E_2(x) = 1 - 2x - \frac{x^2}{2}$ ikinci dereceden Laguerre polinomu olmak üzere yeni oluşturulan ağırlık fonksiyonu $w(x) = e^{-x} \left(1 - 2x - \frac{x^2}{2}\right)$ şeklinde elde edilir. Ayrıca

$$\psi_3(x) = (x - \tau_1^K)(x - \tau_2^K)(x - \tau_3^K)$$

şeklindeki Stieltjes polinomu kullanılarak $\tau_1^K, \tau_2^K, \tau_3^K$ değerleri

$$(x^j, \psi_3)_w = \int_0^{\infty} e^{-x} \left(1 - 2x - \frac{x^2}{2}\right) (x - \tau_1^K)(x - \tau_2^K)(x - \tau_3^K) x^j dx = 0 \quad j = 0, 1, 2.$$

eşitliklerinden elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa integrasyon noktaları

$$\tau_1^G = -2 - \sqrt{6}, \quad \tau_2^G = 2 + \sqrt{6}, \quad \tau_1^K = 2.41825, \quad \tau_2^K = 6.40141, \quad \tau_3^K = 19.9803$$

şeklinde elde edilir. $n=2$ için $W(x) = e^{-x}$ klasik Laguerre ağırlık fonksiyonuna göre oluşturulan Gauss-Kronrod integrasyon metodunun integrasyon ağırlıklarından birisi (3.17) formülleri uygulandığında $\lambda_1^K = -2,52861$ bulunur. Görüldüğü gibi integrasyon noktaları reeldir ancak bunlara karşılık gelen ağırlıklar pozitif olmadığından klasik Laguerre ağırlık fonksiyonuna göre $n=2$ için Gauss-Kronrod formülleri yoktur. $n=3,4,5,\dots$ değerleri için de Gauss-Kronrod formüllerinin olmadığı farklı çalışmalarda gösterilmiştir.

Lemma 3.2.2 : J_{2n+1}^K Jacobi-Kronrod matrisinin $n \times n$ tipindeki J_n^{K*} yardımcı matrisi ile $n \times n$ tipindeki J_n temel matrisinin karakteristik polinomları aynıdır [3].

İspat 3.2.2 : ϕ_n ve ψ_n sırasıyla J_{2n+1}^K 'in $n \times n$ tipindeki J_n ve J_n^{K*} temel ve yardımcı matrislerinin karakteristik polinomları olsun. $\phi_{2n+1}(\lambda) = \det(J_{2n+1}^K - \lambda I)$ ifadesinin $(n+1)$. satıra göre açılımı yapılırsa

$$\phi_{2n+1}(\lambda) = -\phi_{n-1}(\lambda)\beta_n\psi_n(\lambda) + (\alpha_n - \lambda)\phi_n(\lambda)\psi_n(\lambda) - \phi_n(\lambda)\beta_{n+1}\psi_{n-1}(\lambda) \quad (3.22)$$

bağıntısı elde edilir. ϕ_{2n+1}, ϕ_n çarpanına sahip olacağından (Gauss-Kronrod metodu Gauss integrasyon noktalarını biçereceğinden) β_n katsayısı sıfırdan farklı olduğu için $\phi_{n-1}\psi_n$ terimi ϕ_n ile bölünebilmelidir. Fakat ϕ_n ve ϕ_{n-1} ortogonal polinomlar dizisinin ardışık terimleri oldukları için aralarında asallardır. O halde ψ_n polinomu ϕ_n polinomu ile bölünebilir. Bu iki polinom aynı baş katsayıya sahip oldukları için özdeş olmalıdırlar [3].

Sonuç 3.2.3 : $\phi_n = \psi_n$ polinomlarının eşit olduğunu biliyoruz. (3.22) eşitliğini

ψ_n polinomu ile böldüğümüzde $\frac{\phi_{2n+1}}{\psi_n} = -\phi_{n-1}\beta_n + (\alpha_n - \lambda)\phi_n - \beta_{n+1}\psi_{n-1}$ sonucu

elde edilir, bu da Kronrod integrasyon noktalarında sıfır olan polinom için açık bir bağıntı verir.

Laurie, karışık momentleri kullanarak Gauss–Kronrod integrasyon metodunu hesaplayan bir algoritma oluşturmuştur [4]. Kronrod formülü var, reel ve pozitif ise Gauss-Kronrod metodu *r_kronrod.m* ve *kronrod.m* isimli matlab ortogonal polinomlar paket programları kullanılarak hesaplanabilir. Gauss-Kronrod integrasyon metotlarının ilk ortaya çıkışı 1960 olmasına rağmen farklı ağırlık fonksiyonlarına göre metodun varlığı ve tekliği, Kronrod noktalarının ve ağırlıklarının hesaplanması gibi konular halen güncelliğini koruyan araştırma konuları olduğundan burada daha fazla detaya girilmeyecektir.

4. BÖLÜM

ANTI-GAUSS VE AVERAJ KURALLARI

4.1 Anti-Gauss İntegrasyon Metodu

Önceki bölümde belirtildiği gibi $I(f) - Q_n^G(f)$ hatasını tam olarak hesaplamak kolay değildir. A , derecesi $2n-1$ den büyük nümerik integrasyon metodu olmak üzere $I(f) - Q_n^G(f)$ hatasını elde etmek için genelde $A(f) - Q_n^G(f)$ farkı kullanılır. Bu durumda yeni oluşturulan A integrasyon metodunun en az $(n+1)$ ek noktaya sahip olması gerekir. Çünkü n nokta kullanılarak elde edilen bir metodun doğruluk derecesi en fazla $2n-1$ dir.

$(n+1)$ ek nokta içeren A formülünü oluşturmak için bir kaç olasılık vardır:

1. Doğruluk derecesi $2n+1$ olan $(n+1)$ -nokta Q_{n+1}^G Gauss integrasyon metodu A integrasyon metodu olarak hata hesaplamada kullanılabilir. Örneğin tam değeri 1.582233 olan

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4 + x^2 + 0.9}$$

integraline 3 ve 4-nokta $Q_3^G(f)$, $Q_4^G(f)$ Gauss integrasyon metotları uygulanırsa sırasıyla 1.585026 ve 1.585060 sonuçları elde edilir. Burada hata terimleri $I(f) - Q_3^G(f) \approx 27.93 \times 10^{-4}$, $Q_4^G(f) - Q_3^G(f) \approx 34 \times 10^{-6}$ şeklinde bulunur. Hata hesabında kullanılan algoritmanın $|I(f) - Q_3^G(f)| < 10^{-4}$ olduğu sürece işlem yapmasını istediğimiz taktirde oluşturulan algoritma $Q_4^G(f) - Q_3^G(f) \approx 34 \times 10^{-6}$ hatasını dikkate almayacaktır. Fakat hata 34×10^{-6} kadar olduğundan integrale yaklaşım hatalı olur. Bu yüzden $(n+1)$ -nokta Q_{n+1}^G Gauss integrasyon metodu hata hesabı için güvenilir bir yöntem değildir [14].

2. Bazı ağırlık fonksiyonları için ($w(x)=1$ dahil) orijinal n tane Gauss integrasyon noktasını içeren $2n+1$ noktalı doğruluk derecesi en az $3n+1$ olan integrasyon formülünü bulmak mümkündür. Bu şekildeki formüller ilk olarak Kronrod tarafından oluşturulmuştur ve integrasyon katsayıları otomatik bir algoritma ile istenilen doğrulukta elde edilmiştir. $Q_n^G(f)$ Gauss integrasyon noktalarını içeren Gauss-Kronrod formülünün doğruluk derecesi maksimumdur. Ancak önceki bölümde bahsedildiği gibi bazı ağırlık fonksiyonları için reel Gauss-Kronrod formülleri yoktur.

3. Reel Gauss-Kronrod formülünün olmadığı durumlarda Begusima ve Robinson [15] dereceyi aşama aşama azaltarak derecesi $2n$ den fazla $3n+1$ den az olan formüle ulaşmaya çalışmışlardır, ancak pratikte uygulaması zor olduğundan bu yöntem çok fazla ilgi görmemiştir.

Gauss integrasyon kuralının hatasını ölçmenin bir diğer yolu da ilk olarak Laurie [4] tarafından oluşturulan anti-Gauss integrasyon metodunu kullanmaktır. Laurie $(n+1)$ -nokta anti-Gauss integrasyon kuralını $\hat{\tau}_i$ integrasyon noktaları ve $\hat{\lambda}_i$ integrasyon ağırlıkları olmak üzere

$$\hat{Q}_{n+1}(f) := \sum_{i=1}^{n+1} \hat{\lambda}_i f(\hat{\tau}_i) \quad (4.1)$$

formunda göstermiştir ve anti-Gauss integrasyon hatasını, $Q_n^G(f)$ Gauss-Christoffel formülünün hatası ile zıt işaretli olacak şekilde

$$(I - \hat{Q}_{n+1})p = -(I - Q_n^G)p, \quad \forall p \in IP_{2n+1} \quad (4.2)$$

belirlemiştir. Bu eşitliğe göre derecesi $2n+1$ e kadar artan tüm polinomlar için Gauss ve anti-Gauss integrasyon kurallarından elde edilen hatalar aynı büyüklükte, fakat zıt işaretlidir. Bu şekilde oluşturulan anti-Gauss integrasyon metodunun doğruluk derecesi $2n-1$ dir.

Burada verilen anti-Gauss integrasyon metodu Ehrich [5] tarafından geliştirilerek genel averaj formülleri elde edilmiştir. Bu bölümde sadece geliştirilmiş anti-Gauss ve averaj formüllerinin elde edilişi ve özellikleri detaylı bir şekilde verilecektir. Benzer şekilde $\gamma=0$ için Laurie'nin oluşturduğu (4.1)'deki anti-Gauss ve ilgili averaj metotlarına ulaşılabilir [4].

4.2 Genelleştirilmiş Anti-Gauss İntegrasyon Metodu ve Optimal Dereceli Averaj Formülleri

$\tilde{Q}_{n+1,\gamma}$, $(n+1)$ -nokta genelleştirilmiş anti-Gauss integrasyon kuralı $\tilde{\tau}_i$ integrasyon noktaları ve $\tilde{\lambda}_i$ integrasyon ağırlıkları olmak üzere

$$\tilde{Q}_{n+1,\gamma}(f) := \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{\lambda}_i f(\tilde{\tau}_i) \quad (4.3)$$

şeklinde gösterilebilir. Genelleştirilmiş anti-Gauss metodunun integrasyon noktalarının ve ağırlıklarının hesabı bu bölümde detaylı bir şekilde verilecektir.

(4.1) ifadesinde verilen anti-Gauss integrasyon metodu, Ehrich tarafından $\gamma > -1$ olmak üzere, genelleştirilmiş anti-Gauss integrasyon metodunun hata terimi ile Gauss integrasyon metodunun hata terimi arasında

$$\tilde{R}_{n+1}[x^k] = -(1+\gamma)R_n^G[x^k] \quad , \quad k = 0, 1, \dots, 2n+1 \quad (4.4)$$

şeklinde bir bağıntı olacak şekilde genelleştirilmiştir [5].

$\tilde{Q}_{n+1,\gamma}$ ve Q_n^G genelleştirilmiş anti-Gauss ve Gauss integrasyon metotları için bilinen hata terimleri (4.4) bağıntısında yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} I(f) - \tilde{Q}_{n+1,\gamma} &= -(1+\gamma)[I(f) - Q_n^G] = -(1+\gamma)I(f) + (1+\gamma)Q_n^G \\ I(f) &= \frac{1}{2+\gamma}((1+\gamma)Q_n^G + \tilde{Q}_{n+1,\gamma}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

ifadesi elde edilir. $\gamma > -1$ için elde edilen

$$Q_{2n+1,\gamma} = \frac{1}{2+\gamma}((1+\gamma)Q_n^G + \tilde{Q}_{n+1,\gamma}) \quad (4.6)$$

formüllerine genelleştirilmiş averaj formülleri denir. Bu şekilde oluşturulan genelleştirilmiş averaj metotlarının integrasyon hatası

$$R_{2n+1}(f) = (I - Q_{2n+1,\gamma})(f) = \frac{(1+\gamma)(I - Q_n^G)(f) + (I - \tilde{Q}_{n+1,\gamma})(f)}{2+\gamma}$$

şeklinde elde edilir. Derecesi $2n+1$ den düşük tüm polinomlar için (4.4) bağıntısı

sağlanacağından averaj metotlarının doğruluk derecesi $2n+1$ olur.

Bu şekilde oluşturulan genelleştirilmiş averaj formüllerinin doğruluk derecesi $2n+1$ dir [5]. Ancak γ 'nın bazı değerleri kullanılarak doğruluk derecesinin genel bir ölçüm için $2n+2$, simetrik ölçümler için $2n+3$ olduğu gösterilmiştir [5,7,8]. Doğruluk derecesi yüksek olan bu şekildeki formüller optimal dereceli averaj formülleri olarak adlandırılırlar. Eğer Q_n^G Gauss integrasyon metodu varsa, genelleştirilmiş anti-Gauss formülleri ve optimal dereceli averaj formülleri her zaman vardır, pozitif ağırlıklara, reel integrasyon noktalarına sahiptir ve en fazla iki noktası integrasyon aralığının dışındadır. Bazı ortogonal polinomlar için optimal dereceli averaj formüllerini elde etmemizi sağlayan γ değerleri ve doğruluk dereceleri önümüzdeki bölümlerde verilecektir.

4.2.1 Genelleştirilmiş anti-Gauss formüllerinin oluşturulması

(4.6) bağıntısından elde edilen

$$\tilde{Q}_{n+1,\gamma}(p) = (2+\gamma)I(p) - (1+\gamma)Q_n^G(p), \quad p \in IP_{2n+1} \quad (4.7)$$

ifadesi ve $Q_n^G(p) = Ip$, $\forall p \in IP_{2n-1}$ eşitliği için $\tilde{Q}_{n+1,\gamma}$ genelleştirilmiş anti-Gauss integrasyon metodu $T = (2+\gamma)I - (1+\gamma)Q_n^G$ lineer fonksiyoneli için Gauss integrasyon formülüdür.

1. π_j ortogonal polinomlarına göre oluşturulan

$$\begin{aligned} \pi_{-1}(x) &= 0, \quad \pi_0(x) = 1 \\ \pi_{j+1}(x) &= (x - \alpha_j)\pi_j(x) - \beta_j\pi_{j-1}(x), \quad j = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

üç terimli yineleme bağıntısının $\{\alpha_j, j = 0, 1, \dots, n\}$ ve $\{\beta_j, j = 1, 2, \dots, n\}$ yineleme katsayıları (2.45)'deki gibi bulunabilir. π_j polinomları $(2+\gamma)I - (1+\gamma)Q_n^G = T$ lineer fonksiyoneline göre ortogondur. $\pi_{-1} = 0$ olduğundan β_0 katsayısı herhangi bir sonlu sayı olabilir. Burada $T = (2+\gamma)I - (1+\gamma)Q_n^G$ lineer fonksiyoneli için $\beta_0 = [(2+\gamma)I - (1+\gamma)Q_n^G]\pi_0$ kabul edilmiştir.

$$2. \quad \tilde{J}_{n+1,\gamma}(d\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_n} \\ 0 & & \sqrt{\beta_n} & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

modifiye edilmiş simetrik üç köşegenli Jacobi matrisinin özdeğerleri anti-Gauss integrasyon noktalarını, normleştirilmiş özvektörlerinin birinci bileşenlerinin karelerinin katları ise integrasyon ağırlıklarını verir.

Bu yineleme bağıntısına göre oluşturulan yineleme katsayıları

$$\alpha_j = \frac{T(x\pi_j^2)}{T(\pi_j^2)} = \frac{\left((2+\gamma)I - (1+\gamma)Q_n^G\right)(x\pi_j^2)}{\left((2+\gamma)I - (1+\gamma)Q_n^G\right)(\pi_j^2)}, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (4.9)$$

$$\beta_j = \frac{T(\pi_j^2)}{T(\pi_{j-1}^2)} = \frac{\left((2+\gamma)I - (1+\gamma)Q_n^G\right)(\pi_j^2)}{\left((2+\gamma)I - (1+\gamma)Q_n^G\right)(\pi_{j-1}^2)}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

şeklinde olacaktır. $\{P_j, j = 0, 1, \dots\}$ Gauss integrasyon metodunda kullanılan $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre oluşturulmuş ortogonal polinomlar dizisi

$$P_{-1}(x) = 0, \quad P_0(x) = 1$$

$$P_{j+1}(x) = (x - a_j)P_j(x) - b_jP_{j-1}(x) \quad j = 0, 1, \dots \quad (4.10)$$

$$a_j = \frac{I(xP_j^2)}{I(P_j^2)} \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_j = \frac{I(P_j^2)}{I(P_{j-1}^2)} \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

şeklinde verilen üç terimli yineleme bağıntısını sağlasın.

Gauss integrasyon kuralının yaklaşım derecesi $2n-1$ olduğundan (yani, Gauss integrasyon kuralı derecesi $2n-1$ den düşük tüm polinomları tam olarak integralleyebildiğinden)

$$\left((2+\gamma)I - (1+\gamma)Q_n^G\right)p = Ip, \quad p \in IP_{2n-1} \quad (4.12)$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla

$$\alpha_j = \frac{T(x\pi_j^2)}{T(\pi_j^2)} = \frac{((2+\gamma)I - (1+\gamma)I)(x\pi_j^2)}{((2+\gamma)I - (1+\gamma)I)(\pi_j^2)} = \frac{I(x\pi_j^2)}{I(\pi_j^2)} = a_j, \quad j=0,1,\dots,n-1$$

$$\beta_j = \frac{T(\pi_j^2)}{T(\pi_{j-1}^2)} = \frac{((2+\gamma)I - (1+\gamma)I)(\pi_j^2)}{((2+\gamma)I - (1+\gamma)I)(\pi_{j-1}^2)} = \frac{I(\pi_j^2)}{I(\pi_{j-1}^2)} = b_j, \quad j=1,2,\dots,n-1 \quad (4.13)$$

$$\pi_j = P_j, \quad j=0,1,2,\dots,n$$

ifadelerine ulaşılır. Bu durumda $\tilde{Q}_{n+1,\gamma}$ genelleştirilmiş anti-Gauss integrasyon kuralının ilk $n-1$ tane α_k, β_k katsayıları Gauss integrasyon metodunun yineleme katsayıları ile aynıdır. O halde sadece α_n, β_n en son yineleme katsayıları bilinmemektedir. $x_i, i=1,2,\dots,n$ sayıları $P_n = \pi_n$ polinomunun kökleri olsun. Q_n^G Gauss integrasyon metodunda yerine yazılırsa

$$Q_n^G(x\pi_n^2) = \sum_{i=1}^n w_i x_i \pi_n^2(x_i) = 0$$

$$Q_n^G(\pi_n^2) = \sum_{i=1}^n w_i \pi_n^2(x_i) = 0 \quad (4.14)$$

değerleri elde edilir. (4.12) fonksiyoneli α_n yineleme katsayısına uygulanırsa

$$\alpha_n = \frac{((2+\gamma)I - (1+\gamma)Q_n^G)(x\pi_n^2)}{((2+\gamma)I - (1+\gamma)Q_n^G)(\pi_n^2)} = \frac{(2+\gamma)I(x\pi_n^2)}{(2+\gamma)I(\pi_n^2)}$$

$$= \frac{I(xP_n^2)}{I(P_n^2)} = a_n \quad (4.15)$$

bulunur. Aynı şekilde $\pi_{n-1}^2 \in IP_{2n-2}$ olduğu ve Gauss integrasyon metodu derecesi $2n$ den küçük tüm polinomları tam olarak integralleyebildiği için $I(\pi_{n-1}^2) = Q_n^G(\pi_{n-1}^2)$ eşitliği dikkate alınarak

$$\beta_n = \frac{((2+\gamma)I - (1+\gamma)Q_n^G)(\pi_n^2)}{((2+\gamma)I - (1+\gamma)Q_n^G)(\pi_{n-1}^2)} = \frac{(2+\gamma)I(\pi_n^2)}{(2+\gamma)I(\pi_{n-1}^2) - (1+\gamma)I(\pi_{n-1}^2)}$$

$$= \frac{(2+\gamma)I(\pi_n^2)}{(2+\gamma)I(\pi_{n-1}^2) - (1+\gamma)I(\pi_{n-1}^2)} = \frac{(2+\gamma)I(\pi_n^2)}{I(\pi_{n-1}^2)} = (2+\gamma)b_n \quad (4.16)$$

katsayısı elde edilir.

O halde genel olarak $J_n(d\lambda)$ Gauss integrasyon kuralının Jacobi matrisi olmak üzere (4.3) ifadesindeki genelleştirilmiş anti-Gauss formülünün integrasyon noktaları

$$\tilde{J}_{n+1,\gamma}(d\lambda) = \begin{pmatrix} J_n & \sqrt{\beta_n} e_n \\ \sqrt{\beta_n} e_n^T & \alpha_n \end{pmatrix}, \beta_n = (2+\gamma)b_n, \quad e_n^T = [0, 0, \dots, 1] \in \mathbb{R}^n \quad (4.17)$$

modifiye edilmiş Jacobi matrisinin özdeğerleridir, integrasyon ağırlıkları ise modifiye edilmiş anti-Gauss Jacobi matrisinden (2.47) eşitliğindeki gibi elde edilir [5]. Burada $\tilde{Q}_{n+1,\gamma}(f)$ integrasyon metodu için Gauss-Christoffel formülünün katsayıları, $(2+\gamma)$ katına çıkan β_n katsayısı dışında aynı küme olacaktır.

O halde (4.6) eşitliği ile verilen genelleştirilmiş averaj metotları, integrasyon noktaları ve integrasyon noktalarındaki fonksiyon değerlerinin çoğu Gauss metodundan bilindiğinden hesaplama avantajı sağlayacaktır.

Genelleştirilmiş anti-Gauss integrasyon metodu kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş averaj metodu, ya

$$J_{2n+1,\gamma}(d\lambda) = \begin{pmatrix} J_n(d\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & J_n(d\lambda) & \sqrt{(2+\gamma)b_n} e_n \\ 0 & \sqrt{(2+\gamma)b_n} e_n^T & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

şeklinde tanımlanan Jacobi matrisinden bilinen Gauss yöntemindeki gibi hesaplanır ya da Gauss ve anti-Gauss integrasyon metodunun ayrı ayrı elde edilip (4.6) formülünde yerine yazılarak hesaplanır. Daha küçük boyutlu matrislerle işlem yapılması açısından ayrı ayrı hesaplamak avantaj sağlayacaktır.

Tanım 4.2.3: Laurie [16] ve Patterson [17] bir $\theta \in \mathbb{R}$ sayısı için $[a, b]$ integrasyon

aralığı üzerinde $I_\theta(f) = \int_a^b w(x)f(x)dx - \theta Q_n^G$ fonksiyoneline göre oluşturulan optimal dereceli integrasyon formülünü

$$Q_{2n+1} = \theta Q_n^G + Q_{n+1} \quad (4.19)$$

şeklinde belirlemişlerdir. Daha önce kullanılan metodun integrasyon noktalarını

kullanılarak oluşturulan Q_{2n+1} şeklindeki integrasyon metotlarına stratified metotlar denir. Yeni oluşturulan Q_{2n+1} integrasyon metodu hesaplanırken Q_n^G integrasyon metodunun integrasyon noktaları ve o noktalara karşılık gelen fonksiyon değerleri bilindiği için stratified metotlar hesaplama avantajı sağlar.

Bu tanıma göre genelleştirilmiş optimal dereceli averaj kuralları genelleştirilmiş optimal stratified formüllerdir. Dolayısıyla, optimal dereceli averaj metodu, daha önce kullanılan metodun integrasyon noktaları ve o noktalardaki fonksiyon değerleri kullanıldığından hesaplama yönünden avantaj sağlayan bir metottur.

$\gamma = 0$ değeri için (4.1) eşitliği ile verilen anti-Gauss kuralları aşağıdaki özellikleri sağlar. Bu özellikler genelleştirilmiş anti-Gauss kuralları için de benzer şekilde oluşturulabilir.

4.2.2 Anti-Gauss metodunun teorik özellikleri

Teorem 4.2.2.1: $\tilde{Q}_{n+1}(f)$, anti – Gauss integrasyon metodu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. λ_i , $i = 1, 2, \dots, n+1$ ağırlıkları pozitifdir.
2. τ_i , $i = 1, 2, \dots, n+1$ anti-Gauss kuralının integrasyon noktaları reel ve Q_n^G Gauss integrasyon noktalarının arasına ardışık olarak yerleşmiştir.
3. Uç noktalar dışındaki integrasyon noktaları integrasyon aralığının içindedir. Yani $\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n \in [a, b]$ olur.
4. P_j , $j = 1, 2, \dots, n+1$ polinomları ortogonal ve orijinal ağırlık fonksiyonuna denk gelen β_j katsayıları (4.13) eşitliğini sağlamak üzere

$$\tau_1 \in [a, b] \Leftrightarrow \frac{P_{n+1}(a)}{P_{n-1}(a)} \geq \beta_n \quad \text{ve} \quad \tau_{n+1} \in [a, b] \Leftrightarrow \frac{P_{n+1}(b)}{P_{n-1}(b)} \geq \beta_n \quad (4.20)$$

bağıntıları sağlanır [4].

İspat 4.2.2.1 : $b_n > 0$ olduğundan $\sqrt{2b_n}$ yineleme katsayısı reeldir ve metodun integrasyon noktaları, reel simetrik üç köşegenli matrisin özdeğerleri olduğundan reel olacaktır. Ağırlıklar, Gauss integrasyon kuralındaki gibi reel sayıların karesi

olarak alındığından pozitifdir. Gauss integrasyon noktaları, özdeğerleri τ_i olan üç köşegenli matrisin, $n \times n$ tipindeki temel matrisinin özdeğerleridir ve Cauchy aralama değer teoremine göre Gauss integrasyon noktalarının her birinin arasına anti-Gauss integrasyon noktası yerleşir. Bundan dolayı arada kalan noktalar $[a, b]$ integrasyon aralığındadır. Ayrıca τ_{n+1} uç noktasının integrasyon aralığında olması için gerek ve yeter şart aşağıda bulunmuştur. Benzer şekilde τ_1 noktası için aynı işlem yapılabilir.

Başkatsayısı 1 ve b uç noktasının sağında en fazla bir köke sahip olan herhangi bir polinom, b den büyük ise negatif, b de sıfır ise sıfır, b den küçük ise pozitifdir. O halde $P_{n-1}(b)$ ve $P_{n+1}(b)$ pozitifdir ve köklerin birbiri arasında olma özelliğinden π_{n+1} polinomunun tüm kökleri b den küçük olduğundan $\pi_{n+1}(b)$ de pozitif olacaktır. Anti-Gauss integrasyon formülü için (4.13), (4.15), (4.16) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= (x - \alpha_n)P_n(x) - \beta_n P_{n-1}(x) \\ \pi_{n+1}(x) &= (x - \alpha_n)P_n(x) - 2\beta_n P_{n-1}(x) \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Bu bağıntılar taraf tarafa çıkarıldığında $\pi_{n+1} = P_{n+1} - \beta_n P_{n-1}$ ifadesi bulunur. Böylece $\pi_{n+1}(b) > 0 \Leftrightarrow \frac{P_{n+1}(b)}{P_{n-1}(b)} \geq \beta_n$ koşulu sağlanır [4].

Bu teoreme göre anti-Gauss integrasyon metodu pozitif ağırlıklara sahiptir ve integrasyon noktaları integrasyon aralığının içindedir. Ancak bazı ağırlık fonksiyonlarına göre integrasyon noktalarının en fazla iki tanesi integrasyon aralığının dışında kalabilir. Ayrıca genelleştirilmiş anti-Gauss kuralında anlatıldığı gibi $(n+1)$ -nokta Gauss kuralı gibi kolayca hesaplanır.

Klasik ağırlık fonksiyonları için yineleme katsayıları ve ortogonal polinomların uç noktalarda aldığı değerler açık olarak bilindiğinden Teorem 4.2.2.1 için aşağıdaki teoremi elde edebiliriz.

Teorem 4.2.2.2 : Aşağıda verilen ağırlık fonksiyonlarına göre elde edilen anti-Gauss formüllerinin integrasyon noktaları integrasyon aralığındadır ve integrasyon ağırlıkları pozitifdir.

1. $w(x) = (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$, integrasyon aralığı $[-1, 1]$ ve $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ (Gegenbauer)

Gegenbauer ağırlık fonksiyonunun özel durumları

(a) $w(x) = 1$, $[-1, 1]$ (Legendre),

(b) $w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $[-1, 1]$ (Chebyshev),

(c) $w(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $[-1, 1]$ (İkinci çeşit Chebyshev).

2. $w(x) = x^\alpha e^{-x}$, integrasyon aralığı $[0, +\infty)$ ve $\alpha > -1$ (Genel Laguerre).

3. $w(x) = |x^\alpha| e^{-x^2}$, integrasyon aralığı $(-\infty, +\infty)$ ve $\alpha > -1$ (Genel Hermite) [4].

İspat 4.2.2.2 : Gegenbauer ağırlık fonksiyonu Jacobi ağırlık fonksiyonunun özel durumudur. Genel Hermite ağırlığı için [12]

$$b_n = n(n+\alpha) \quad \text{ve} \quad P_n(0) = (-1)^n n! \binom{n+\alpha}{n}$$

bağıntıları kullanılarak

$$\frac{P_{n+1}(0)}{P_{n-1}(0)} = \frac{(-1)^{(n+1)}(n+1)! \binom{n+1+\alpha}{n+1}}{(-1)^{(n-1)}(n-1)! \binom{n-1+\alpha}{n-1}} = (n+\alpha)(n+\alpha+1) > b_n \quad \alpha > -1$$

sonucu elde edilir [4].

$\tilde{Q}_{n+1,\gamma}$ genelleştirilmiş anti-Gauss integrasyon metodunun en önemli özelliği Gauss Q_n^G integrasyon metodu ile bir çok integrant için hatalarının hemen hemen aynı büyüklükte fakat zıt işaretli olmasıdır. O halde anti-Gauss ve Gauss integrasyon metodundan elde edilen sonuçlar bir çok integrant için integralin gerçek değerini alttan ve üstten sınırlar. $Q_n^G(f)$ ve $\tilde{Q}_{n+1}(f)$ değerlerinin integralin gerçek değeri için üst ve alt sınır olduğunu D.Calvetti, F.Sgallari, L.Reichel isimli yazarlar teorik ve nümerik olarak göstermişlerdir [18,19].

Örneğin, $f(x) = \frac{1}{10} \exp(2 \arccos(x) \sin^3(3 \arccos(t)))$ fonksiyonunun $-1 < x < 1$

integrasyon aralığında $d\lambda(x) = (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$ Gegenbauer ölçümüne göre

oluşturulmuş n -nokta Q_n^G Gauss integrasyon metodu ile $(n+1)$ -nokta $\tilde{Q}_{n+1,\gamma}$ genelleştirilmiş anti-Gauss integrasyon metotlarının hataları aynı büyüklükte fakat zıt işaretlidir. İntegralin gerçek değeri $I(f) \approx -0.889225$ olmak üzere $\gamma = 0$ ve $\gamma = \frac{2\alpha(\alpha-1)}{n(n+2\alpha-1)(n+\alpha+1)}$ değerleri için tablolar aşağıda verilmiştir. Buradaki γ değeri Gegenbauer ölçümüne göre oluşturulan optimal dereceli averaj kurallarını oluşturmak için Hasçelik tarafından elde edilmiştir [7].

Tablo 4.2.1 $\alpha = 4$, $\gamma = 0$ değerleri için Gauss ve anti-Gauss integrasyon kurallarının hataları

| n | $(I - Q_n^G)f$ | $(I - \tilde{Q}_{n+1,\gamma})f$ |
|-----|--------------------------|---------------------------------|
| 5 | -0.0220 | 0.0220 |
| 10 | 9.47838×10^{-6} | -8.87091×10^{-6} |
| 20 | 1.03823×10^{-8} | -9.67357×10^{-9} |

Tablo4.2.2 $\alpha = 4$, $\gamma = \frac{2\alpha(\alpha-1)}{n(n+2\alpha-1)(n+\alpha+1)}$ değerleri için Gauss ve genelleştirilmiş anti-Gauss integrasyon kurallarının hataları

| n | $(I - Q_n^G)f$ | $(I - \tilde{Q}_{n+1,\gamma})f$ |
|-----|--------------------------|---------------------------------|
| 5 | 0.023029 | -0.022061 |
| 10 | 9.47838×10^{-6} | -9.07567×10^{-6} |
| 20 | 1.03823×10^{-8} | -9.80104×10^{-9} |

Teorem 4.2.3 : $\{P_n\}$ derecesi n olan monik ortogonal polinomları göstermek üzere $a < 0$ için $P = ap_{n-1} + bp_n + p_{n+1}$ lineer kombinasyonunun $n+1$ tane basit kökü vardır. Bu şekilde bir lineer kombinasyon olan P polinomunun, p_n polinomunun kökleri arasında en az bir kökü vardır [20].

Teorem 4.2.4 : $w(x)$, \mathbb{R} üzerinde integrallenebilir ve $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monik ortogonal polinomlar olsun.

$$(P_n, P_n) = h_n = \int_{\mathbb{R}} w(x)(P_n(x))^2 dx \quad (4.21)$$

şeklinde tanımlanmak üzere $\tilde{Q}_{n+1, \gamma}$ anti –Gauss integrasyon formülünün integrasyon noktaları

$$q_{n+1} = P_{n+1} - (1 + \gamma) \frac{h_n}{h_{n-1}} P_{n-1} \quad (4.22)$$

şekilde tanımlanan q_{n+1} polinomunun kökleridir. $\forall \gamma > -1$ için q_{n+1} polinomunun kökleri reel ve P_n polinomunun kökleri ile iç içedir (Yani P_n polinomunun iki kökü arasında q_{n+1} polinomunun en az bir kökü vardır) [7].

İspat 4.2.4: $P_{n+1}(x)$ ve $\varphi_{n+1}(x)$ sırasıyla J_{n+1} ve \tilde{J}_{n+1} matrislerinin karakteristik polinomları olsunlar. $P_{n+1}(x)$ ve $\varphi_{n+1}(x)$ polinomlarına göre oluşturulan determinantlar son satıra göre açılırsa

$$P_{n+1}(x) = (x - a_n)P_n(x) - b_n P_{n-1}(x)$$

$$\varphi_{n+1}(x) = (x - a_n)P_n(x) - (2 + \gamma)b_n P_{n-1}(x)$$

eşitlikleri elde edilir. \tilde{x}_i değerleri \tilde{J}_{n+1} matrisinin özdeğerleri ve $\varphi_{n+1}(x)$ polinomunun kökleri olarak alınır

$$P_{n+1}(\tilde{x}_i) - \varphi_{n+1}(\tilde{x}_i) = P_{n+1}(\tilde{x}_i) = (1 + \gamma)b_n P_{n-1}(\tilde{x}_i)$$

bulunur. Ayrıca yukarıdaki φ_{n+1} polinomu P_{n+1} ve P_{n-1} ardışık polinomları cinsinden yazıldığından Teorem 4.2.3'den P_n polinomunun iki kökü arasında φ_{n+1} polinomunun bir kökü olduğu söylenebilir [7].

Lemma 4.2.5 : $P_m(x) = x^m + \sum_{j=0}^{m-1} A_{m,j} x^j$ $m = 0, 1, 2, \dots$ monik ortogonal polinomları

ve q_{n+1} polinomu (4.22) eşitliğindeki gibi tanımlanmak üzere $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$R_n^G[x^{2n+k}] = \int_a^b w(x)P_n(x)x^{n+k} dx - \sum_{j=n-k}^{n-1} A_{n,j}R_n^G[x^{n+k+j}]$$

$$\tilde{R}_{n+1,\gamma}[x^{2n}] = -(1+\gamma)R_n^G[x^{2n}] = -(1+\gamma)h_n$$

$$\tilde{R}_{n+1,\gamma}[x^{2n+k}] = \int_a^b w(x)q_{n+1}(x)x^{n+k-1} dx$$

$$- A_{n+1,n} \sum_{j=n-k}^{n-1} R_n^G[x^{2n+k-1}] - \sum_{i=n-k+1}^{n-1} (A_{n+1,i} - (1+\gamma)b_n A_{n-1,i}) R_{n+1}^{AG}[x^{n+k+i-1}]$$

eşitlikleri sağlanır[5]. Lemma 4.2.5' in ispatı [5]'de verilmiştir.

4.3 Simetrik Ölçümler İçin Anti-Gauss ve Gauss-Lobatto Metotları

Tanım 4.3.1: $d\lambda(t) = w(t)dt$ mutlak sürekli ölçümü için destek aralığı $[-c, c]$, $0 < c \leq \infty$ ve $w(-t) = w(t)$, $t \in \mathbb{R}$ şeklinde ise ölçüm simetriktir denir.

$[-c, c]$ aralığında negatif olmayan $d\lambda(t)$ ölçümü (2.17) ifadesindeki gibi tanımlanan tüm mertebelerden sonlu momentlere sahip olsun. f, g polinomlarının simetrik aralıkta iç çarpımı

$$\int_{-c}^c f(t)g(t)d\lambda(t) \quad (4.23)$$

şeklinde tanımlansın. Bu iç çarpıma göre p_j , $j = 0, 1, 2, \dots$ ortogonal polinomlar ailesi

$$\beta_j p_j(t) = t p_{j-1}(t) - \beta_{j-1} p_{j-2}(t), \quad 2 \leq j < n \quad (4.24)$$

üç terimli yineleme bağıntısını sağlasın. Simetrik ölçümlerde genelleştirilmiş anti-Gauss kuralı ve Gauss integrasyon metodu bir çok integrand için integrasyon değerini sınırlar yani integralin gerçek değeri için alt ve üst sınır oluştururlar. Gauss-Lobatto integrasyon metodu ile Gauss integrasyon metodunun hatasının zıt işaretli olduğu D.Calvetti ve L.Reichel tarafından gösterilmiştir [19]. Bunu teorik olarak göstermek için öncelikle

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j p_j(t) \quad -c < t < c \quad (4.25)$$

serisinin integralin gerçek değerine yakınsadığını farzedelim.

$Ip_0 = \mu_0^{1/2}$, $Ip_j = 0$, $j > 0$ ve (2.35)'de tanımlanan I integral operatörü (4.25) bağıntısına uygulandığında $I(f) = \eta_0 \mu_0^{1/2}$ elde edilir ve $d\lambda(t)$ ölçümü orijine göre simetrik olduğundan simetrik aralıklar üzerinde

$$Q_n^G p_{2j+1} = \tilde{Q}_{n+1,\gamma} p_{2j+1} = 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.26)$$

sağlanır. Q_n^G ve $\tilde{Q}_{n+1,\gamma}$ integrasyon metotlarının (4.25) eşitliğine uygulanmasıyla (4.26) özelliği kullanılarak Gauss integrasyon metodu

$$Q_n^G(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_{2j} Q_n^G p_{2j} = I(f) + \eta_{2n} Q_n^G p_{2n} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \eta_{2j} Q_n^G p_{2j} \quad (4.27)$$

ve anti-Gauss integrasyon metodu için

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{n+1,\gamma}(f) &= \sum_{j=0}^{\infty} \eta_{2j} \tilde{Q}_{n+1,\gamma} p_{2j} \\ &= \sum_{j=0}^n \eta_{2j} [(2+\gamma)I - (1+\gamma)Q_n^G] p_{2j} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \eta_{2j} \tilde{Q}_{n+1,\gamma} p_{2j} \\ &= \sum_{j=0}^n \eta_{2j} [(2+\gamma)Ip_{2j} - \sum_{j=0}^n \eta_{2j} (1+\gamma)Q_n^G p_{2j}] + \sum_{j=n+1}^{\infty} \eta_{2j} \tilde{Q}_{n+1,\gamma} p_{2j} \\ &= I(f) - \eta_{2n} Q_n^G p_{2n} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \eta_{2j} \tilde{Q}_{n+1,\gamma} p_{2j} \end{aligned} \quad (4.28)$$

bağıntıları elde edilir. η_{2j} katsayılarının sıfıra yakınsadığında (4.27) ve (4.28) ifadeleri için $R_n^G f$ ve $\tilde{R}_{n+1,\gamma} f$ integrasyon hatalarının zıt işaretli olduğu görülür [19]. O halde Gauss ve genelleştirilmiş anti-Gauss integrasyon metotları

$$Q_n^G(f) \leq I(f) \leq \tilde{Q}_{n+1,\gamma}(f) \quad \text{ya da} \quad \tilde{Q}_{n+1,\gamma}(f) \leq I(f) \leq Q_n^G(f) \quad (4.29)$$

eşitsizliklerini sağlar.

Teorem 4.3.1 : $f(t)$, simetrik $[-c, c]$ aralığında (4.25) şeklinde seri açılımına sahip olsun. Ek olarak

$$\left| \eta_{2n} (1+\gamma) Q_n^G p_{2n} \right| \geq \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} \eta_{2j} \tilde{Q}_{n+1,\gamma} p_{2j} \right| \quad (4.30)$$

$$|\eta_{2n}(1+\gamma)Q_n^G p_{2n}| \geq \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} \eta_{2j} \tilde{Q}_{n+1,\gamma} p_{2j} \right| \quad (4.31)$$

eşitsizlikleri sağlamak üzere yukarıdaki (4.29) bağıntısı sağlanır [19].

İspat 4.3.1 : $R_n^G f = (I - Q_n^G)f = -\eta_{2n}Q_n^G p_{2n} - \sum_{j=n+1}^{\infty} \eta_{2j}Q_n^G p_{2j}$

ve (4.26) eşitsizliğinden $\text{sign}(R_n f) = -\text{sign}(\eta_{2n}Q_n^G p_{2n})$ veya $R_n f = 0$ olur.

$$\tilde{R}_{n+1,\gamma} f = (I - \tilde{Q}_{n+1,\gamma})f = (1+\gamma)\eta_{2n}Q_n^G p_{2n} - \sum_{j=n+1}^{\infty} \eta_{2j}\tilde{Q}_{n+1,\gamma} p_{2j}$$

ve (4.27) eşitsizliğinden $\text{sign}(\tilde{R}_{n+1,\gamma} f) = -\text{sign}(\eta_{2n}Q_n^G p_{2n})$ veya $\tilde{R}_{n+1,\gamma} f = 0$ olur.

Böylece (4.29) bağıntısı sağlanır. O halde $I(f)$ integralinin gerçek değeri her zaman anti-Gauss ve Gauss metodunun değerlerinin arasında kalır. Bununla ilgili tablo aşağıda verilmiştir [19].

Tablo 4.3.2 Tablo 4.2.2’de kullanılan fonksiyonun integralinin yaklaşık değeri $I(f) \approx -0.889225$ olarak verilmişti. Aşağıdaki tabloda görüldüğü gibi bu integralin gerçek değeri, Q_n^G Gauss ve $\tilde{Q}_{n+1,\gamma}$ genelleştirilmiş anti-Gauss integrasyon metotlarından elde edilen değerlerle sınırlanır (kuşatılır). Başka bir deyişle integralin gerçek değeri Gauss ve genelleştirilmiş anti-Gauss kurallarından elde edilen değerlerin arasında kalır.

| Nokta Sayısı | $Q_n^G(f)$ | $\tilde{Q}_{n+1,\gamma}(f)$ |
|--------------|------------|-----------------------------|
| $n = 1$ | 0 | -1,98785 |
| $n = 2$ | -0,445169 | -1,36309 |
| $n = 3$ | -1.9271 | -0,541397 |
| $n = 4$ | -0.87107 | -0,908312 |
| $n = 5$ | -0.867164 | -0,912254 |
| $n = 6$ | -0.888359 | -0,890146 |
| $n = 10$ | -0.889225 | -0.889216 |
| $n = 15$ | -0.889225 | -0.889225 |

Tablodan da görüldüğü gibi anti-Gauss ve Gauss integrasyon metotları integrali kuşatarak n nin belirli bir değerinden sonra integralin gerçek değerine yaklaşırlar. Önümüzdeki bölümde bahsedileceği üzere bu kuşatma averaj kurallarında önem teşkil edecektir.

Genelleştirilmiş anti-Gauss kurallarında kullanılan γ sayısının bazı özel değerleri için anti-Gauss integrasyon metotları Gauss-Lobatto integrasyon metotlarıdır. Bu γ değeri aşağıdaki teoremden elde edilmiştir.

Teorem 4.3.3: Gauss Lobatto metotları $[-c, c]$ simetrik integrasyon aralığında

$$\gamma = \frac{c p_n(c)}{\beta_n p_{n-1}(c)} - 2 \quad (4.32)$$

değeri için modifiye edilmiş anti-Gauss metotlarıdır.

İspat 4.3.3 : $(n+1)$ – nokta Gauss - Lobatto formülünün Jacobi matrisi

$$J_{n+1}^L(d\lambda) = \begin{bmatrix} J_n(d\lambda) & \sqrt{\beta_n^L} e_n \\ \sqrt{\beta_n^L} e_n^T & \alpha_n^L \end{bmatrix}$$

ve $(n+1)$ – nokta genelleştirilmiş anti-Gauss Jacobi matrisi

$$\tilde{J}_{n+1,\gamma}(d\lambda) = \begin{bmatrix} J_n(d\lambda) & \sqrt{(2+\gamma)b_n} e_n \\ \sqrt{(2+\gamma)b_n} e_n^T & \alpha_n \end{bmatrix}$$

olsun. Gauss - Lobatto yineleme bağıntısından n . Lobatto katsayılarına ve $[-c, c]$ integrasyon aralığına göre oluşturulan sistem

$$\begin{bmatrix} P_n(-c) & P_{n-1}(-c) \\ P_n(c) & P_{n-1}(c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_n^L \\ \beta_n^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c P_n(-c) \\ c P_n(c) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Cramer metodunun sisteme uygulanmasıyla

$$\alpha_n^L = \frac{\begin{vmatrix} -c P_n(-c) & P_{n-1}(-c) \\ c P_n(c) & P_{n-1}(c) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_n(-c) & P_{n-1}(-c) \\ P_n(c) & P_{n-1}(c) \end{vmatrix}}, \quad \beta_n^L = \frac{\begin{vmatrix} P_n(-c) & -c P_n(-c) \\ P_n(c) & c P_n(c) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_n(-c) & P_{n-1}(-c) \\ P_n(c) & P_{n-1}(c) \end{vmatrix}}$$

elde edilir. Herhangi bir simetrik ölçüm için $P_n(-c)=(-1)^n P_n(c)$ olduğu dikkate alınarak

$$\alpha_n^L = \frac{-cP_{n-1}(c)P_n(-c) - cP_n(c)P_{n-1}(-c)}{P_n(-c)P_{n-1}(c) - P_{n-1}(-c)P_n(c)} = 0$$

$$\beta_n^L = \frac{cP_n(c)P_n(-c) + cP_n(-c)P_n(c)}{P_n(-c)P_{n-1}(c) - P_{n-1}(-c)P_n(c)} = \frac{2c(-1)^n P_n^2(c)}{2(-1)^n P_n(c)P_{n-1}(c)} = \frac{cP_n(c)}{P_{n-1}(c)}$$

sonuçları bulunur. Gauss-Lobatto ve genelleştirilmiş anti-Gauss integrasyon metotlarının α_k katsayıları sifıra eşittir. β_n katsayılarının eşitliğinden ise

$$(2 + \gamma)b_n = \frac{cP_n(c)}{P_{n-1}(c)} \text{ elde edilir. O halde genelleştirilmiş anti-Gauss kuralı ile Gauss -}$$

Lobatto integrasyon kuralının eşit olduğu genel bir $[-c, c]$ simetrik ölçümü için γ değeri

$$\gamma = \frac{c}{b_n} \frac{P_n(c)}{P_{n-1}(c)} - 2 \quad (4.33)$$

bağıntısı ile hesaplanabilir. Ayrıca $p_j(c) > 0$ ve $\beta_j > 0$ eşitsizlikleri yardımıyla

$$cP_n(c) - b_n P_{n-1}(c) > 0 \quad (4.34)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Aşağıdaki bölümlerde bazı klasik ortogonal polinomlar için optimal dereceli averaj metotları elde edilmiştir. Genel olarak $2n+1$ doğruluk derecesine sahip averaj formüllerinin özel γ değerleri için doğruluk dereceleri $2n+3$ e kadar arttığı aşağıdaki bölümlerde verilmiştir.

4.4 Gegenbauer Polinomları İçin Genelleştirilmiş Anti-Gauss Kuralları ve Optimal Dereceli Averaj Formülleri

Yineleme katsayıları

$$b_o^c = \frac{\Gamma(\alpha+1/2)\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad b_k^c = \frac{k(k+2\alpha-1)}{4(k+\alpha)(k+\alpha-1)}, \quad k > 1 \quad (4.35)$$

olan ve

$$C_{-1}^\alpha(x) = 0, \quad C_o^\alpha(x) = 1, \quad \alpha > -1/2 \quad (4.36)$$

$$C_{k+1}^\alpha(x) = C_k^\alpha(x) - b_k^c C_{k-1}^\alpha(x), \quad k = 0, 1, \dots$$

şeklinde verilen üç terimli yineleme bağıntısını sağlayan [12] monik Gegenbauer (Ultraküresel) polinomları $[-1, 1]$ aralığında $w_\alpha^c = (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogondur. Ayrıca δ_{km} kronicker delta ve Gegenbauer polinomlarının normu

$$h_k^c = I[(C_k^\alpha)^2] = \frac{2^{1-2k-2\alpha} k! \Gamma(k+2\alpha)\pi}{\Gamma(k+\alpha)\Gamma(k+\alpha+1)} \quad (4.37)$$

olmak üzere

$$I[C_k^\alpha C_m^\alpha] = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} C_k^\alpha(x) C_m^\alpha(x) dx = \delta_{km} h_k^c \quad (4.38)$$

eşitliği sağlanır. Gegenbauer polinomu açık olarak

$$A_{m, m-2k-1}^c = 0, \quad A_{m, m-2k}^c = \frac{(-1)^k m! \Gamma(m+\alpha-k)}{4^k k! (m-2k)! \Gamma(m+\alpha)}, \quad 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \quad (4.39)$$

katsayılarına sahip olmak üzere

$$C_m^\alpha(x) = x^m + A_{m, m-1} x^{m-1} + \dots + A_{m, 0} \quad (4.40)$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 4.4.1 : Q_n^{GC} , $n = 0, 1, \dots$ için monik Gegenbauer polinomlarına göre

oluşturulmuş n – nokta Gauss integrasyon formülü olsun. Bu integrasyon formülüne karşılık gelen $\tilde{Q}_{n+1,\gamma}^C$ genelleştirilmiş anti-Gauss integrasyon formülü ve $Q_{2n+1,\gamma}^C$ optimal dereceli averaj formülleri

$$\tilde{R}_{n+1,\gamma}[x^k] = -(1+\gamma)R_n^G[x^k] \quad k=0,1,\dots,2n+1 \quad (4.41)$$

$$Q_{2n+1,\gamma}^C = \frac{1}{2+\gamma} \left[(1+\gamma)Q_n^{GC} + \tilde{Q}_{n+1,\gamma}^C \right] \quad (4.42)$$

bağıntılarını sağlasın. Herhangi $\gamma > -1$ sayısı için $\tilde{Q}_{n+1,\gamma}^C$ genelleştirilmiş anti-Gauss kuralının integrasyon noktaları

$$q_{n+1}^C = C_{n+1}^\alpha - (1+\gamma)b_n C_{n-1}^\alpha \quad (4.43)$$

polinomunun kökleridir ve Q_n^{GC} Gauss integrasyon kuralının integrasyon noktaları arasına ardışık olarak yerleşmiştir [7].

İspat 4.4.1 : İspatın ilk kısmı Teorem 4.2.2.1’de $P_k = C_k^\alpha$ alınarak elde edilir. (4.17) eşitliğindeki $\tilde{Q}_{n+1,\gamma}^C$ anti-Gauss integrasyon formülü için oluşturulan $\tilde{J}_{n+1,\gamma}$ matrisi $\forall \alpha > -1/2$ ve $\gamma > -1$ değerleri için reel ve simetrik olduğundan matrisin tüm özdeğerleri ve buna karşılık gelen özvektörleri reeldir. Sonuç olarak $\tilde{Q}_{n+1,\gamma}^C$ formülünün bütün ağırlıkları reeldir. $\tilde{J}_{n+1,\gamma}$ matrisinin λ_k özdeğerlerini ve bu özdeğerlere karşılık gelen $u_k^T u_k = 1$ özelliğini sağlayan $u_k^T = [u_{k,1} \ u_{k,2} \ \dots \ u_{k,n+1}]$ özvektörünü alalım. (4.18) bağıntısından $\tilde{Q}_{n+1,\gamma}^C$ anti-Gauss formülünün \tilde{w}_k ağırlıkları $b_0^C > 0$ olmak üzere $\tilde{w}_k = b_0^C (u_{k,1})^2$ olur. Burada $u_{k,1} \neq 0$ olacağını göstermek mümkündür. Farzedelim ki $u_{k,1} = 0$ olsun. $\forall k \geq 0$ için $b_k^C > 0$ olduğu dikkate alınırsa özdeğer özvektör ayrışımıyla $\tilde{J}_{n+1} u_k = \lambda_k u_k$ sisteminin sadece $u_k = 0$ çözümüne sahip olduğu gösterilir, bu da u_k ’nın özvektör olması ile çelişir. O halde $\tilde{Q}_{n+1,\gamma}^C$ formülünün integrasyon ağırlıkları pozitif olur. Sonuç olarak Gauss integrasyon formülleri de pozitif olduğu için (4.38) tanımından $Q_{2n+1,\gamma}^C$ averaj kuralı pozitif olacaktır [7].

Teorem 4.4.2 : $\alpha \geq 0$ için Gegenbauer ölçümüne göre oluşturulan genelleştirilmiş anti-Gauss formüllerinin integrasyon noktalarının tamamı $[-1, 1]$ aralığında olması için gerek ve yeter koşul $-1 < \gamma < \frac{2\alpha}{n}$ olmasıdır [7].

İspat 4.4.2 : Teorem 4.1.1'den $\tilde{Q}_{n+1, \gamma}^c$ integrasyon noktaları, $n \geq 1$ için $q_{n+1} = P_{n+1} - (1 + \gamma)b_n P_{n-1}$ polinomunun kökleridir. Her bir k için P_k monik polinomunun kökleri $(-1, 1)$ aralığında ve $P_k(-\infty) = P_k(\infty)$ olduğundan $p_{n+1}(1)$ ve $p_{n-1}(1)$ pozitifdir. Böylece $q_{n+1} \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{P_{n+1}(1)}{P_{n-1}(1)} - 1 \geq \gamma \quad (4.44)$$

olmasıdır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için simetrik ölçümlerde $P_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$ özelliğine sahip olduğundan $q_n(-x) = (-1)^n q_n(x)$ sağlandığı görülür. Bu da simetrik ölçümler için anti-Gauss integrasyon noktalarının da simetrik olacağı anlamına gelir. P_k^α, d_k katsayılı k . dereceden klasik Gegenbauer polinomunu göstermek üzere [21], (4.44)'de $b_k = b_k^c, p_k(x) = C_k^\alpha(x)$ alınıp

$$C_k^0(1) = 2^{1-k}, C_k^\alpha(1) = \frac{P_k^\alpha(1)}{d_k}, P_k^\alpha(1) = \frac{\Gamma(k+2\alpha)}{k! \Gamma(2\alpha)}, d_k = \frac{2^k \Gamma(k+\alpha)}{k! \Gamma(\alpha)}, \alpha > 0 \quad (4.45)$$

sonuçları kullanılarak $2\alpha \geq n\gamma > -n$ bulunur [7].

Teorem 4.4.3: $\alpha \geq 0$ iken Gegenbauer ölçümü için oluşturulan $(n+1)$ -nokta Gauss-Lobatto integrasyon formülü ve

$$\gamma = \gamma^c = \frac{2\alpha}{n} \quad (4.46)$$

değeri için $\tilde{Q}_{n+1, \gamma}^c$ genelleştirilmiş anti-Gauss integrasyon formülüdür [7].

İspat 4.4.3 : Gegenbauer polinomları için integrasyon aralığı $[-1, 1]$ olduğundan Teorem 4.2.2.2'de $c = 1$ alındığında $\alpha_k = 0, 0 \leq k \leq n$ ve $\beta_n^L = \frac{P_n(1)}{P_{n-1}(1)}$ elde

edilir. $P_n(x)=C_n^\alpha(x)$, $b_n = b_n^C$ alınıp ve (4.32) yineleme bağıntısı kullanılırsa $x=1$ için $C_{n+1}^\alpha(1)=C_n^\alpha(1)-b_n^C C_{n-1}^\alpha(1)$ eşitliği elde edilir. Her iki taraf $b_n^C C_{n-1}^\alpha(1)$ terimine bölündüğünde $\frac{C_{n+1}^\alpha(1)}{b_n^C C_{n-1}^\alpha(1)} = \frac{C_n^\alpha(1)}{b_n^C C_{n-1}^\alpha(1)} - 1$ bulunur. Bu bağıntı ve $\frac{C_{n+1}^\alpha(1)}{b_n^C C_{n-1}^\alpha(1)} = \frac{2\alpha}{n} + 1$ sonucu kullanılarak

$$\beta_n^L = \frac{C_n^\alpha(1)}{C_{n-1}^\alpha(1)} = \left(\frac{C_{n+1}^\alpha(1)}{b_n^C C_{n-1}^\alpha(1)} + 1 \right) b_n^C = \left(\frac{2\alpha}{n} + 2 \right) b_n^C = (\gamma + 2) b_n^C$$

$$\gamma = \frac{2\alpha}{n} \Leftrightarrow J_{n+1}^L = \tilde{J}_{n+1}$$

olduğu görülür [7].

Teorem 4.4.4 : $n \geq 2$ için, n -nokta Gauss - Gegenbauer formülüne karşılık gelen $(n+1)$ - nokta Q_{2n+1, γ^*}^C optimal dereceli stratified averaj formülü

$$\gamma^* = \gamma^c(n, \alpha) = \frac{2\alpha(\alpha-1)}{n(n+2\alpha-1)(n+\alpha+1)} \quad (4.47)$$

değeri için vardır ve tektir.

Ayrıca doğruluk derecesi $\deg(Q_{2n+1, \gamma^*}^C) = 2n+3$ olur [7].

İspat 4.4.4 : Lemma 4.2.1.3'de verilen değerler

$$R_{2n+1, \gamma}[x^{2n+2}] = \frac{\tilde{R}_{n+1, \gamma}[x^{2n+2}] + (1+\gamma)R_n^G[x^{2n+2}]}{2+\gamma}$$

ifadesinde yerine yazıldığında ve gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$R_{2n+1, \gamma}[x^{2n+2}] = \frac{(1-n-2\alpha)(2\alpha^2(\gamma n-1) + \gamma n(n^2-1) + \alpha(2+\gamma n(1+3n)))}{2^{2n+2\alpha+1}((\alpha+n)^2-1)(\Gamma(n+\alpha+1))^2} \pi$$

sonucu elde edilir.

γ için $R_{2n+1, \gamma}[x^{2n+2}] = 0$ denkleminin tek çözümü

$$\gamma^* = \gamma^c(n, \alpha) = \frac{2\alpha(\alpha-1)}{n(n+2\alpha-1)(n+\alpha+1)}$$

bulunur. $\forall n > 1$ için $\alpha > -\frac{1}{2}$ olduğundan payda pozitiftir. Bu da $\forall n \geq 2$ için $\gamma^* > -1$ olacağı anlamına gelir. Böylece ispatın ilk kısmı tamamlanmış olur. İkinci kısmın ispatı için gerekli değerler yerine konularak $R_{2n+1,\gamma}[x^{2n+4}]_{\gamma=\gamma^*} \neq 0$ olduğu gösterilebilir $R_{2n+1,\gamma}[x^{2n+k}] = 0, k = 1, 2, 3$ sağlandığından $\deg(Q_{2n+1,\gamma^*}^C) = 2n + 3$ bulunur, ispat tamamlanmış olur [7].

Sonuç 4.4.5 : $n \geq 2$ ve $\alpha \geq 0$ için γ^* , (4.47)'de verildiği gibi alındığında Q_{2n+1,γ^*}^C genelleştirilmiş averaj formülünün tüm integrasyon noktaları integrasyon aralığındadır [7].

İspat 4.4.5 : $\alpha \geq 0, -1 < \gamma^* = \frac{2\alpha(\alpha-1)}{n(n+2\alpha-1)(n+\alpha+1)} \leq \frac{2\alpha}{n}$ eşitsizliği tüm

$n \geq 2$ değerleri için sağlanır.

Bu sonuç teorem 4.4.2'den de görülebilir.

4.5 Genelleştirilmiş Hermite Ağırlık Fonksiyonu İçin Modifiye Edilmiş Anti-Gauss Kuralları ve Optimal Dereceli Averaj Formülleri

Üç terimli yineleme bağıntısı

$$\begin{aligned} H_{-1}^\alpha(x) &= 0, \quad H_0^\alpha(x) = 1 \\ H_{k+1}^\alpha(x) &= xH_k^\alpha(x) - b_k^H H_{k-1}^\alpha(x), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.48)$$

olan ve yineleme katsayıları [9]

$$b_0^H =, \quad b_k^H = \frac{k}{2} + \frac{1 + (-1)^{k+1}}{2} \alpha, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.49)$$

şeklinde verilen H_k^α monik Hermite polinomları $(-\infty, \infty)$ aralığında

$$d\mu(x) = w_\alpha^H(x) dx, \quad w_\alpha^H = |x|^{2\alpha} \exp(-x^2) \quad (4.50)$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogondur. Genelleştirilmiş Hermite polinomları için reel pozitif Gauss-Kronrod integrasyon formülleri yoktur, bu polinomlar için

oluşturulan genelleştirilmiş anti-Gauss ve averaj kuralları ile ilgili teoremler aşağıda verilmiştir. Bu teoremler Gegenbauer ölçümüne benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 4.5.1 : H_k^α , $k = 0, 1, 2, \dots$, monik genelleştirilmiş Hermite ölçümüne göre oluşturulmuş Q_n^{GH} n -nokta Gauss integrasyon kuralı olsun. n -nokta Gauss ve buna karşılık gelen $(n+1)$ -nokta genelleştirilmiş anti-Gauss integrasyon formüllerinin hata bağıntıları için

$$\tilde{R}_{n+1}^H[x^k] = -(1+\gamma)R_n^H[x^k] \quad , \quad k = 0, 1, \dots, 2n+1 \quad (4.51)$$

eşitliği verilsin. Herhangi bir $\gamma > -1$ için $\tilde{Q}_{n+1, \gamma}^H$ genelleştirilmiş anti-Gauss integrasyon kuralının integrasyon noktaları

$$q_{n+1}^H = H_{n+1}^\alpha - (1+\gamma)b_n^H H_{n-1}^\alpha \quad (4.52)$$

şeklinde tanımlanan polinomunun kökleridir ve bu polinomun kökleri Q_n^{GH} Gauss integrasyon metodunun integrasyon noktalarının arasına ardışık olarak yerleşmiştir. Bu ölçüme göre oluşturulmuş genelleştirilmiş Hermite averaj formülü

$$Q_{2n+1, \gamma}^H = \frac{1}{(2+\gamma)} [(1+\gamma)Q_n^H + \tilde{Q}_{n+1, \gamma}^H] \quad (4.53)$$

şeklinde tanımlanır. Teorem 4.4.4' e benzer şekilde ispatlanabilir.

Genelleştirilmiş Hermite ölçümüne göre oluşturulan modifiye edilmiş averaj kuralını optimal dereceli olmasını sağlayacak γ değeri aşağıda verilmiştir [7].

Teorem 4.5.2 : $n \geq 1$ için Genelleştirilmiş Hermite ölçümüne göre oluşturulan optimal dereceli averaj kuralı aşağıdaki $\gamma = \gamma^*$ değeri için vardır ve tektir.

$$\gamma^* = \gamma^H(n, \alpha) = \begin{cases} (2\alpha + 1) / n & , \quad n \text{ çift} \\ (1 - 2\alpha) / (2\alpha + n) & , \quad n \text{ tek} \end{cases} \quad (4.54)$$

Ayrıca doğruluk derecesi $\deg(Q_{2n+1, \gamma^*}^H) = 2n + 3$ tür [7].

4.6 Genelleştirilmiş Laguerre Ağırlık Fonksiyonu İçin Modifiye Edilmiş Anti-Gauss Kuralları ve Optimal Dereceli Averaj Formülleri

Üç terimli yineleme bağıntısı

$$L_{-1}^{(\alpha)}(x)=0, L_0^{(\alpha)}(x)=1$$

$$L_{k+1}^{(\alpha)}(x)=(x-a_k^L)L_k^{(\alpha)}(x)-b_k^L L_{k-1}^{(\alpha)}(x) \quad k=0,1,\dots \quad (4.55)$$

yineleme katsayıları [12]

$$a_k^L=2k+\alpha+1 \quad k=0,1,\dots, \quad b_0^L=\Gamma(1+\alpha), \quad b_k^L=k(k+\alpha) \quad k=1,2,\dots \quad (4.56)$$

şeklinde verilen L_k^α monik Laguerre polinomları $[0, \infty]$ aralığında

$$d\mu(x)=w_\alpha^L(x)dx, \quad w_\alpha^L=x^\alpha \exp(-x) \quad (4.57)$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir.

Teorem 4.6.1: $L_k^{(\alpha)}$, $k=0,1,2,\dots$ monik genelleştirilmiş Laguerre ölçümüne göre oluşturulmuş n -nokta Q_n^{GL} Gauss integrasyon metodu ve buna karşılık gelen $(n+1)$ -nokta $\tilde{Q}_{n+1,\gamma}^L$ genelleştirilmiş anti-Gauss integrasyon metodu için

$$\tilde{R}_{n+1}^L[x^k]=-(1+\gamma)R_n^L[x^k], \quad k=0,1,2,\dots,2n+1 \quad (4.58)$$

bağıntısı sağlanır. Herhangi bir $\gamma > -1$ sayısı için $\tilde{Q}_{n+1,\gamma}^L$ formülünün integrasyon noktaları

$$q_{n+1}^L=L_{n+1}^{(\alpha)}-(1+\gamma)(n+\alpha)nL_{n-1}^{(\alpha)} \quad (4.59)$$

şeklinde tanımlanmış polinomun kökleridir. $\alpha > \gamma n - 1$ iken tüm α, γ sayıları için q_{n+1}^L nin kökleri negatif değildir, $\alpha < \gamma n - 1$ iken tüm γ, α sayıları için q_{n+1}^L nin köklerinden biri negatif diğerleri pozitiftir. $\alpha > -1$ ve $\gamma > -1$ için $\tilde{Q}_{n+1,\gamma}^L$ ve $Q_{2n+1,\gamma}^L$ fomülleri pozitiftir. Bu ağırlık fonksiyonuna göre oluşturulmuş optimal dereceli averaj formülleri için γ değeri aşağıdaki teoremde verilmiştir [5].

Teorem 4.6.2 : $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{Q}_{n+1, \gamma}^L$ $(n+1)$ -nokta genelleştirilmiş anti-Gauss formülüne karşılık gelen optimal averaj metodu $\gamma = \gamma^*$ değeri için vardır, tektir ve

$$\gamma^* = \gamma^L(n, \alpha) := \frac{(2n + \alpha + 1)}{n(n + \alpha)} \quad (4.60)$$

bağıntısı ile elde edilir. Ayrıca doğruluk derecesi $\deg(Q_{2n+1, \gamma^*}^L) = 2n + 2$ 'dir [5].

Teorem 4.6.1'den görüldüğü gibi $\alpha \geq 1$ için $\tilde{Q}_{2n+1, \gamma^*}^L$ integrasyon metodunun integrasyon noktalarının hepsi negatif değildir. $-1 < \alpha < 1$ aralığında ise integrasyon noktalarından sadece biri negatiftir.

5. BÖLÜM

GENELLEŞTİRİLMİŞ OPTİMAL DERECELİ GAUSS AVERAJ KURALI

Önceki bölümde genelleştirilmiş anti-Gauss integrasyon metodu kullanılarak elde edilen optimal dereceli averaj metotları verilmişti. Bu bölümde ise Spaleviç'in Jacobi matrisini farklı bir formda seçerek elde ettiği optimal dereceli averaj formülleri incelenecektir [9].

λ , $[a, b]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli ve $d\lambda$, sınırlı veya sınırsız $[a, b] = \text{supp } p(d\lambda)$ aralığı üzerinde verilen pozitif bir ölçüm olsun. w ağırlık fonksiyonu için $d\lambda(x) = w(x)dx$ ölçümüne göre oluşturulan genelleştirilmiş optimal dereceli Gauss averaj formülünün integrasyon noktaları $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ ve integrasyon ağırlıkları $w_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, p$ olmak üzere

$$\int_a^b f(x) d\lambda(x) = Q_p(f) + R_p(f), \quad Q_p(f) = \sum_{j=1}^p w_j f(x_j) \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanan integrasyon formülü interpolasyona dayalı integrasyon formülü olarak adlandırılır. Bu formülün doğruluk derecesinin $(2p - m - 1)$ olduğundan [9]'da bahsedilmiştir ($R_p[f] = 0, f \in IP_{2p-m-1}$). w_j , $j = 0, 1, 2, \dots$ ağırlıkları pozitif ise integrasyon metodu, pozitif $(2p - m - 1, p, d\sigma)$ integrasyon metodu olarak adlandırılır. Eğer t_p , $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ şeklinde sıralı p basit köke sahip ve $t_p = \prod_{j=1}^p (x - x_j)$ şeklinde oluşturulmuş ise $t_p \in IP_p$ polinomundan x_j , $j = 0, 1, 2, \dots$ integrasyon noktaları kullanılarak oluşturulan $(2p - m - 1)$ doğruluk derecesine sahip integrasyon formülü elde edilebilir [9].

Derecesi k olan monik ortogonal polinomlar P_k ile gösterilsin. Bu polinomlar $d\lambda$ ölçümüne göre p_{k-1} ile ortogondirler. Yani

$$\int_a^b x^j P_k(x) d\lambda(x) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k-1 \quad (5.2)$$

eşitliği sağlanır. (P_k) polinomları β_k 'lar pozitif olmak üzere

$$\begin{aligned} P_{-1}(x) &= 0 & P_0(x) &= 1 \\ P_{k+1}(x) &= (x - \alpha_k)P_k(x) - \beta_k P_{k-1}(x) \quad , k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (5.3)$$

üç terimli yineleme bağıntısını sağlasın. Bu polinomlara göre oluşturulmuş $(2n+1)$ -nokta optimal dereceli averaj kuralı $Q_{2n+1}^{*A}(f)$ olsun. Bu optimal dereceli Gauss averaj integrasyon metodunun integrasyon noktaları τ_k^* , integrasyon ağırlıkları λ_k^* olmak üzere bu formül

$$Q_{2n+1}^{*A}(f) = \sum_{k=1}^{2n+1} \tau_k^* f(\lambda_k^*) \quad (5.4)$$

formunda gösterilebilir. Önceki bölümde tanıtilan $(2n+1)$ -nokta optimal stratified averaj integrasyon metodunun

$$Q_{2n+1,\gamma}(f) = \frac{1}{(2+\gamma)} \left[(1+\gamma)Q_n^G(f) + \tilde{Q}_{n+1,\gamma}(f) \right] \quad (5.5)$$

şeklinde hesaplanacağını vermiştik. (5.4) ve (5.5) formülleri kullanılarak

$$\begin{aligned} Q_{2n+1,\gamma}(f) &= \frac{1}{(2+\gamma)} \left[(1+\gamma) \sum_{k=1}^n \lambda_k f(\tau_k) + \sum_{k=1}^{n+1} \tilde{\lambda}_k f(\tilde{\tau}_k) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1+\gamma}{2+\gamma} \right) \lambda_k f(\tau_k) + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2+\gamma} \right) \tilde{\lambda}_k f(\tilde{\tau}_k) \\ &= \sum_{k=1}^{2n+1} \lambda_k^* f(\tau_k^*) \end{aligned} \quad (5.6)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten $Q_{2l+1,\gamma}$ ve Q_{2l+1}^{*A} integrasyon kurallarının eşit integrasyon noktalarına ve $Q_{2l+1,\gamma}$ integrasyon metodunun ağırlıklarının belli bir katının Q_{2l+1}^{*A} integrasyon metodunun ağırlıklarına eşit olacağı açıktır.

n -nokta Gauss kuralının integrasyon noktalarını ve ağırlıklarını veren $J_n(d\lambda)$ Jacobi matrisi (2.41) ifadesindeki gibi tanımlansın. M.Spaleviç [8] çalışmasında $J_n(d\lambda)$ Jacobi matrisini kullanarak farklı bir yöntemle Q_{2n+1}^{*A} Gauss averaj metodunun integrasyon noktalarını ve ağırlıklarını veren Jacobi matrisini

aşağıdaki şekilde oluşturmuştur. Bu şekilde oluşturulan integrasyon metotları aynı zamanda doğruluk derecesi maksimum olan genelleştirilmiş stratified metotlardır.

$J_{2n+1}^{*A}(d\lambda)$, Jacobi matrisinin hesabı için $(n+1) \times (n+1)$ ve $n \times n$ tipinde iki alt matris kullanılacaktır.

5.1 Genelleştirilmiş Optimal Dereceli Averaj Metodunun Nümerik Olarak Oluşturulması

(1) $(n+1) \times (n+1)$ tipindeki üst matris $(n+1)$ -nokta Gauss integrasyon metodunun $J_{n+1}(d\lambda)$ Jacobi matrisi ile aynıdır.

(2) $n \times n$ tipindeki $J_n^*(d\lambda)$ yardımcı matrisi, n -nokta Gauss integrasyon metodu için oluşturulan Jacobi matrisinin ters sıralı durumudur.

$$J_n^*(d\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha_{n-1} & \sqrt{\beta_{n-1}} & & 0 \\ \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-2} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_1} \\ 0 & & \sqrt{\beta_1} & \alpha_0 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

(3) Geriye kalan elemanlar $(n+2)$ -nokta Gauss integrasyon metodunun $J_{n+2}(d\lambda)$ Jacobi matrisinin iki köşegeni ile aynıdır.

Sonuç olarak simetrik modifiye edilmiş üç köşegenli Jacobi matrisi

$$J_{2n+1}^{*A}(d\lambda) = \begin{pmatrix} J_n(d\lambda) & \sqrt{\beta_n} e_n & 0 \\ \sqrt{\beta_n} e_n^T & \alpha_n & \sqrt{\beta_{n+1}} e_1^T \\ 0 & \sqrt{\beta_{n+1}} e_1 & J_n^*(d\lambda) \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

şeklindedir. Burada e_k , k -ıncı koordinat vektörüdür.

Lemma 5.1.1: n -nokta Gauss integrasyon kuralının $J_n(d\lambda)$ Jacobi matrisi ile ters sıralı $J_n^*(d\lambda)$ Jacobi matrisinin özdeğerleri eşittir.

İspat 5.1.1: R satır, C sütun işlemi olmak üzere $n=2$ için

$$\begin{aligned}
|J_2(d\lambda) - \lambda I| &= \begin{vmatrix} \alpha_0 - \lambda & \sqrt{\beta_1} \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} \begin{vmatrix} \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 - \lambda \\ \alpha_0 - \lambda & \sqrt{\beta_1} \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftrightarrow C_2}{=} \begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & \sqrt{\beta_1} \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_0 - \lambda \end{vmatrix} \\
&= |J_2^*(d\lambda) - \lambda I|
\end{aligned}$$

$n = 3$ için

$$\begin{aligned}
|J_3(d\lambda) - \lambda I| &= \begin{vmatrix} \alpha_0 - \lambda & \sqrt{\beta_1} & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 - \lambda & \sqrt{\beta_2} \\ 0 & \sqrt{\beta_2} & \alpha_2 - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftrightarrow C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{\beta_1} & \alpha_0 - \lambda \\ \sqrt{\beta_2} & \alpha_1 - \lambda & \sqrt{\beta_1} \\ \alpha_2 - \lambda & \sqrt{\beta_2} & 0 \end{vmatrix} \\
&\stackrel{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} \begin{vmatrix} \alpha_2 - \lambda & \sqrt{\beta_2} & 0 \\ \sqrt{\beta_2} & \alpha_1 - \lambda & \sqrt{\beta_1} \\ 0 & \sqrt{\beta_1} & \alpha_0 - \lambda \end{vmatrix} = |J_3^*(d\lambda) - \lambda I| \quad \dots
\end{aligned}$$

şeklinde devam ettirildiğinde gerekli satır sütun işlemleri yapılarak $|J_n(d\lambda) - \lambda I| = |J_n^*(d\lambda) - \lambda I|$ karakteristik polinomlarının eşit olduğu görülür.

(5.1)'de tanımlanan $(2p - m - 1)$ doğruluk derecesine sahip interpolasyona dayalı integrasyon metodu p ve m sayılarının özel seçimleri için optimal dereceli averaj kuralını oluşturur.

Bu şekilde oluşturulan $(2n + 1)$ -nokta genelleştirilmiş averaj metotları aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- i. $p = 2n + 1$ ve $m = 2n - 1$ alınırsa genelleştirilmiş averaj metodunun doğruluk derecesi $2(2n + 1) - (2n - 1) - 1 = 2n + 2$ elde edilir.
- ii. n -nokta Q_n^G Gauss integrasyon metodunun integrasyon noktaları yeni oluşturulan metodun integrasyon noktalarının alt kümesidir.
- iii. Bu integrasyon noktalarına karşılık gelen ağırlıklar bölümün başında bahsedildiği gibi orijinal ağırlıkların katlarıdır.

Jacobi matrisinin derece özelliğinden (1) ve (2) sağlandığında (i) özelliğinin varlığı görülür. Eğer ağırlık fonksiyonu verilen aralıkta simetrik yani $w(-x) = w(x)$ ise (i)'deki doğruluk derecesi $2n + 3$ tür.

5.1.1 Genelleştirilmiş anti-Gauss integrasyon kuralı kullanılarak elde edilen genel averaj metodu ile genelleştirilmiş averaj metotlarının Gegenbauer ölçümüne göre denkliği

3.bölümde incelenen Gauss-Kronrod integrasyon metodunun $J_{2n+1}^K(d\lambda)$ Jacobi matrisi (3.16)'daki gibi verilsin. $J_n(d\lambda)$ ile $J_n^*(d\lambda)$ matrislerinin karakteristik polinomları sırasıyla $\pi_n(x), \psi_n(x)$ olmak üzere (5.8)'de verilen Jacobi matrisinin $(n+1)$. satıra göre açılımı yapıldığında karakteristik polinomu Lemma 3.3.5' den

$$\left| \lambda I - J_{2n+1}^{*A}(d\lambda) \right| = (\alpha_n - \lambda)\pi_n(\lambda)\psi_n(\lambda) - \beta_n\pi_{n-1}(\lambda)\psi_n(\lambda) - \beta_{n+1}\psi_{n-1}(\lambda)\pi_n(\lambda) \quad (5.9)$$

şeklinde elde edilir. Lemma 5.1.1'den $J_n(d\lambda)$ ve $J_n^*(d\lambda)$ matrislerinin karakteristik polinomlarının eşit olduğu biliniyor. O halde $\psi_n(x) = \pi_n(x)$, $\psi_{n-1}(x) = \pi_{n-1}(x)$ eşitlikleri ve Peherstorfer'in karakterizasyon teoremine göre oluşturulan

$$\begin{aligned} \alpha_j &= a_j \quad j = 0, 1, 2, \dots, n+1 \\ \beta_j &= b_j \quad j = 1, 2, \dots, n+1 \end{aligned} \quad (5.10)$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\left| \lambda I - J_{2n+1}^{*A}(d\lambda) \right| = (a_n - \lambda)\pi_n(\lambda)\pi_n(\lambda) - b_n\pi_{n-1}(\lambda)\pi_n(\lambda) - b_{n+1}\pi_{n-1}(\lambda)\pi_n(\lambda) \quad (5.11)$$

şeklinde yazılabilir. Anti-Gauss integrasyon metodu kullanarak elde edilen optimal dereceli averaj kuralının

$$J_{2n+1,\gamma}(d\lambda) = \begin{pmatrix} J_n(d\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & J_n(d\lambda) & \sqrt{\beta_n^*}e_n \\ 0 & \sqrt{\beta_n^*}e_n^T & a_n \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

şeklindeki Jacobi matrisine göre oluşturulan karakteristik polinomunu elde etmek için önce

$$\tilde{J}_{n+1,\gamma}(d\lambda) = \begin{pmatrix} J_n(d\lambda) & \sqrt{\beta_n^*} \\ \sqrt{\beta_n^*} & a_n \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

genelleştirilmiş anti-Gauss Jacobi matrisinin karakteristik polinomunu elde edelim.

$n = 2$ için 3. satıra göre determinant açılımı yapılırsa

$$\begin{aligned} |\tilde{J}_3(d\lambda) - \lambda I| &= \begin{vmatrix} a_0 - \lambda & \sqrt{b_1} & 0 \\ \sqrt{b_1} & a_1 - \lambda & \sqrt{\beta_2^*} \\ 0 & \sqrt{\beta_2^*} & a_2 - \lambda \end{vmatrix} = (a_2 - \lambda) \begin{vmatrix} a_0 - \lambda & \sqrt{b_1} \\ \sqrt{b_1} & a_1 - \lambda \end{vmatrix} - \sqrt{\beta_2^*} \begin{vmatrix} a_0 - \lambda & 0 \\ \sqrt{b_1} & \sqrt{\beta_2^*} \end{vmatrix} \\ &= (a_2 - \lambda) \begin{vmatrix} a_0 - \lambda & \sqrt{b_1} \\ \sqrt{b_1} & a_1 - \lambda \end{vmatrix} - \beta_2^* (a_0 - \lambda) = (a_2 - \lambda) \pi_2(\lambda) - \beta_2^* \pi_1(\lambda) \end{aligned}$$

Genel olarak genelleştirilmiş anti-Gauss Jacobi matrisinin karakteristik polinomu

$$|\tilde{J}_{n+1,\gamma}(d\lambda) - \lambda I| = (a_n - \lambda) \pi_n(\lambda) - \beta_n^* \pi_{n-1}(\lambda) \quad (5.14)$$

elde edilir. Bu sonuç kullanılarak (5.12) eşitliğinin karakteristik polinomu

$$|J_{2n+1,\gamma}(d\lambda) - \lambda I| = \pi_n(x) [(\lambda - a_n) \pi_n(x) - \beta_n^* \pi_{n-1}(x)] \quad (5.15)$$

şeklinde elde edilir. (5.11) ve (5.15) Jacobi matrislerinin karakteristik polinomlarının eşitliğinden

$$\beta_n^* = (2 + \gamma) b_n = b_n + b_{n+1} \quad \Rightarrow \quad (1 + \gamma) b_n = b_{n+1} \quad (5.16)$$

ifadesi bulunur. [7]'de elde edilen

$$\gamma^* = \gamma^c(n, \alpha) = \frac{2\alpha(\alpha - 1)}{n(n + 2\alpha - 1)(n + \alpha + 1)}$$

değeri için monik Gegenbauer polinomlarının yineleme katsayısı [10]

$$b_n^c = \frac{n(n + 2\alpha - 1)}{4(n + \alpha - 1)(n + \alpha)}$$

kullanılarak

$$(1 + \gamma) b_n = \left[1 + \frac{2\alpha(\alpha - 1)}{n(n + 2\alpha - 1)(n + \alpha + 1)} \right] \left[\frac{(n + 1)(n + 2\alpha - 1)}{4(n + \alpha - 1)(n + \alpha)} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{n^3 + 2n^2\alpha + n^2\alpha + 2\alpha^2n + n\alpha - n + 2\alpha^2 - 2\alpha}{4(n+1+\alpha)(n+\alpha)(n+\alpha-1)} \right] \\
&= \left[\frac{n^2(n+2\alpha) + n\alpha(n+1) + 2\alpha^2(n+1) - n - 2\alpha}{4(n+1+\alpha)(n+\alpha)(n+\alpha-1)} \right] \\
&= \left[\frac{n^2(n+2\alpha) + \alpha(n+1)(n+2\alpha) - (n+2\alpha)}{4(n+1+\alpha)(n+\alpha)(n+\alpha-1)} \right] \\
&= \left[\frac{(n+2\alpha)(n+1)(n+\alpha-1)}{4(n+1+\alpha)(n+\alpha)(n+\alpha-1)} \right] \\
&= b_{n+1}
\end{aligned}$$

(5.16) eşitliği kolay bir şekilde elde edilir. O halde Spaleviç[8] tarafından oluşturulan geliştirilmiş averaj kuralları, Gegenbauer ağırlık fonksiyonuna göre geliştirilmiş anti-Gauss integrasyon metodu kullanılarak elde edilen optimal averaj kuralına denktir.

Bu denklik Peherstorfer'in karakterizasyon sonuçları kullanılarak da gösterilebilir [22,23].

Gegenbauer ağırlık fonksiyonuna göre elde edilen γ değeri için Spaleviç tarafından oluşturulan optimal dereceli averaj metodunun integrasyon noktaları, anti-Gauss integrasyon metodu kullanılarak elde edilen optimal dereceli averaj metodunun integrasyon noktaları ile aynıdır. Ayrıca (5.6)' da bahsedildiği gibi

integrasyon ağırlıkları Gauss ve anti-Gauss integrasyon ağırlıklarının $\left(\frac{1+\gamma}{2+\gamma}\right)$ ve

$\left(\frac{1}{2+\gamma}\right)$ katıdır. Gegenbauer ağırlık fonksiyonu için anti-Gauss kuralı kullanılarak

elde edilen optimal dereceli averaj metodu ile Spaleviç [8]'de oluşturulan geliştirilmiş averaj metodunun denkliği n sayısının küçük değerlerinde sembolik büyük değerlerinde ise nümerik olarak gösterilebilir.

5.1.2 Gegenbauer ölçümü için optimal dereceli averaj metotlarının nümerik olarak karşılaştırılması

Tablo 5.1.2.1

Gegenbauer ölçümüne göre $\alpha = 4, \gamma^* = \gamma^c(n, \alpha) = \frac{2\alpha(\alpha-1)}{n(n+2\alpha-1)(n+\alpha+1)}$ ve $n = 1$

için (5.8) ve (5.11) Jacobi matrisleri kullanılarak oluşturulan optimal dereceli averajformüllerinin integrasyon noktalarının ve integrasyon ağırlıklarının karşılaştırılması.

| | İntegrasyon Noktaları | İntegrasyon Ağırlıkları |
|------------------|--------------------------------|---|
| Q_{2n+1}^C | $0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ | $\frac{35\pi}{128}, \frac{35\pi}{256}, \frac{35\pi}{256}$ |
| Q_{2n+1}^{*AC} | $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ | $\frac{7\pi}{128}, \frac{21\pi}{128}, \frac{7\pi}{128}$ |

Tablo 5.1.2.2

Gegenbauer ölçümüne göre Tablo 5.1.2.1'deki veriler baz alınarak $n = 2$ için optimal dereceli averaj metotlarının integrasyon noktalarının ve ağırlıklarının karşılaştırılması.

| | İntegrasyon Noktaları | İntegrasyon Ağırlıkları |
|------------------|---|---|
| Q_{2n+1}^C | $-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, -\sqrt{\frac{3}{7}}, 0, \sqrt{\frac{3}{7}}$ | $\frac{35\pi}{256}, \frac{35\pi}{256}, \frac{49\pi}{1536}, \frac{161\pi}{768}, \frac{49\pi}{1536}$ |
| Q_{2n+1}^{*AC} | $-\sqrt{\frac{3}{7}}, \sqrt{\frac{3}{7}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, 0$ | $\frac{343\pi}{23552}, \frac{343\pi}{23552}, \frac{875\pi}{11776}, \frac{875\pi}{11776}, \frac{49\pi}{512}$ |

Tablo 5.1.2.3

Gegenbauer ölçümüne göre Tablo 5.1.2.1'deki veriler baz alınarak $n = 3$ için optimal dereceli averaj metotlarının integrasyon noktalarının ve ağırlıklarının karşılaştırılması.

| $Q_{2n+1,\gamma}^C$ | | Q_{2n+1}^{*AC} | |
|--------------------------|----------------------------|--------------------------|----------------------------|
| İntegrasyon Noktaları | İntegrasyon Ağırlıkları | İntegrasyon Noktaları | İntegrasyon Ağırlıkları |
| -0,5 | 0,171806 | -0,746838 | 0,136626 |
| 0 | 0,515418 | 0,746838 | 0,136626 |
| 0,5 | 0,171806 | 0,5 | 0,0899935 |
| -0,746838 | 0,0286915 | -0,5 | 0,0899935 |
| -0,259292 | 0,400823 | -0,259292 | 0,190868 |
| 0,259292 | 0,400823 | 0,259292 | 0,190868 |
| 0,746838 | 0,0286915 | 0 | 0,269981 |

Tablo 5.1.2.4

Gegenbauer ölçümüne göre Tablo 5.1.2.1'deki veriler baz alınarak $n=5$ için optimal dereceli averaj metotlarının integrasyon noktalarının ve ağırlıklarının karşılaştırılması.

| $Q_{2n+1,\gamma}^C$ | | Q_{2n+1}^{*AC} | |
|--------------------------|----------------------------|--------------------------|----------------------------|
| İntegrasyon Noktaları | İntegrasyon Ağırlıkları | İntegrasyon Noktaları | İntegrasyon Ağırlıkları |
| -0,698349 | 0,0283257 | 0,847111 | 0,0017135 |
| -0,370552 | 0,0212202 | 0,698349 | 0,0144406 |
| 0 | 0,0377973 | 0,544761 | 0,0474202 |
| 0,370552 | 0,0212202 | 0,370552 | 0,1081817 |
| 0,698349 | 0,0283257 | 0,188779 | 0,1614126 |
| -0,847111 | 0,0349568 | 0 | 0,1926920 |
| -0,544761 | 0,0967372 | -0,188779 | 0,1614126 |
| -0,188779 | 0,0329282 | -0,370552 | 0,1081817 |
| 0,188779 | 0,0329282 | -0,544761 | 0,0474202 |
| 0,544761 | 0,0967372 | -0,698349 | 0,0144406 |
| 0,847111 | 0,0349568 | -0,847111 | 0,0017136 |

Yukarıda verilen tablolardan da görüldüğü gibi Gegenbauer ağırlık fonksiyonlarına göre $Q_{2n+1,\gamma}, Q_{2n+1}^{*AC}$ optimal dereceli averaj kurallarının integrasyon

noktaları eşittir. Ayrıca Q_{2n+1}^{*AC} genelleştirilmiş averaj metodunun integrasyon ağırlıkları Gauss ve anti-Gauss integrasyon metodlarının ağırlıklarının sabit bir katıdır. Örneğin Tablo 5.1.2.1’de $\tau_1 = 0$ Gauss integrasyon noktasına karşılık gelen integrasyon ağırlığının $\left(\frac{1+\gamma^*}{2+\gamma^*}\right)$ katı Q_{2n+1}^{*AC} optimal dereceli averaj metodunun integrasyon ağırlıklarından biri olacaktır. $n=1$ ve $\alpha=4$ için elde edilen $\gamma^* = \frac{1}{2}$ değeri kullanılarak

$$\frac{35\pi}{128} \left(\frac{1+\gamma^*}{2+\gamma^*} \right) = \frac{35\pi}{128} \left(\frac{1+\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}} \right) = \frac{21\pi}{128}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde $\tilde{\tau}_1 = \frac{1}{2}$ anti-Gauss integrasyon noktasına karşılık gelen integrasyon ağırlığının $\left(\frac{1}{2+\gamma^*}\right)$ katı Q_{2n+1}^{*AC} optimal dereceli averaj metodunun integrasyon ağırlıklarından biridir. Gerekli işlemler yapıldığında

$$\frac{35\pi}{256} \left(\frac{1}{2+\gamma^*} \right) = \frac{35\pi}{128} \left(\frac{1}{2+\frac{1}{2}} \right) = \frac{7\pi}{128}$$

integrasyon ağırlığı elde edilir.

Her iki averaj metodu da optimal dereceli olmasına rağmen anti-Gauss integrasyon metodu kullanılarak oluşturulan optimal dereceli averaj metodu tercih edilir. Çünkü anti-Gauss kuralı kullanılarak elde edilen averaj kuralları, integrali kuşatarak integralin gerçek değerine yaklaşır ve diğer averaj metoduna oranla daha küçük boyutlu matrislerle işlem yapılması açısından avantaj sağlar.

SONUÇ

Bu çalışmada, verilen bir integralin değerini tam veya yaklaşık olarak hesaplamak için kullanılan integrasyon metotları tanıtılarak bu metotların özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. İntegralin gerçek değerine yaklaşım için genelde Gauss integrasyon metodu kullanılır. Ancak Gauss integrasyon metodunun hatasını hesaplamak pratikte oldukça zordur. Bu yüzden integrasyon hatasını hesaplamak için çeşitli integrasyon metotları geliştirilmiştir. 3. bölümde bahsedilen $(2n+1)$ -nokta doğruluk derecesi $3n+1$ olan Gauss-Kronrod integrasyon formülü bu amaçla kullanılabilir. Ancak reel pozitif Gauss-Kronrod integrasyon formülü bazı ağırlık fonksiyonuna göre yoktur.

Gauss-Kronrod integrasyon metotlarının olmadığı durumlarda Laurie tarafından anti-Gauss integrasyon metodu oluşturulmuştur. Gauss metodu ile birlikte integralin gerçek değerini kuşatan bu metot Ehrich tarafından geliştirilerek, doğruluk derecesi $2n+1$ den fazla olan geliştirilmiş averaj metodu bulunmuştur. 4. bölümde bazı ağırlık fonksiyonlarına göre oluşturulmuş optimal dereceli averaj metotlarının elde edilmesini sağlayan γ değerleri verilmiştir. Bu γ değeri kullanılarak elde edilen geliştirilmiş averaj metotlarının dereceleri Ehrich [5] tarafından Hermite ağırlık fonksiyonu için $2n+3$, Hasçelik [7] tarafından Gegenbauer ağırlık fonksiyonu için $2n+3$ elde edilmiştir.

5. bölümde Spaleviç tarafından Jacobi matrisi farklı bir şekilde seçilerek oluşturulan geliştirilmiş averaj metodu tanıtılmıştır. Bu averaj metodu anti-Gauss integrasyon metodu kullanılarak elde edilen optimal dereceli averaj metodu ile karşılaştırılmış aynı doğruluk derecesine sahip bu metotların denkliği görülmüştür. Ayrıca Gegenbauer ağırlık fonksiyonu için n nin küçük değerlerinde sembolik, büyük değerlerinde ise nümerik olarak bu averaj kurallarının denkliğini gösteren tablolar verilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Ehrich, S. (2001). Stopping functionals for Gaussian quadrature formulas. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **127**, 153-171.
- [2] Kronrod, A.S. (1965) . *Nodes and weights of quadrature formulas* (Consultants Bureau, English trans.). Sixteen place tables. New York.
- [3] Laurie, D.P. (1997). Calculation of Gauss-Kronrod quadrature rules. *Mathematical Computation* , **66**, 1133-1145.
- [4] Laurie, D.P. (1996). Anti-Gaussian quadrature formulas. *Mathematical Computation* , **65**, 739-747.
- [5] Ehrich, S. (2002). On stratified extensions of Gauss-Laguerre and Gauss-Hermite quadrature formulas. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. **140** , 291-299.
- [6] Haşçelik, A.Ihsan (2006). Gauss quadrature rules for a generalized Hermite function. *Applied Mathematics and Computation*, **180**, 86-96.
- [7] Haşçelik, A.Ihsan (2008). Modified anti-Gauss and degree optimal average formulas for Gegenbauer measure. *Applied Numerical Mathematics*, **58**, 171-179.
- [8] Spaleviç, M.M. (2007). On generalized averaged Gaussian formulas. *Mathematical Computation* , **76**, 1483-1492.
- [9] Spaleviç, M.M. (2007). A note on generalized averaged Gaussian formulas. *Numerical Algorithms*, **46**, 253-264.

- [10] Gautschi, W. (2004). *Orthogonal Polynomials Computation and Approximation* Oxford University Press.
- [11] Bulirsch, R. and Stoer, J. (2002). *Introduction to Numerical Analysis*. Springer Verlag. New York, 3rd.
- [12] Gautschi, W. (2002). The interplay between classical analysis and Linear Algebra, *Elec.Trans.Numer.Anal.* 13,119-147.
- [13] Monegato, G. (1982). Stieltjes polynomials and related quadrature rules. *SIAM. Review*, **30**, 812-817.
- [14] Clenshaw, C.W. and Curtis, A.R. (1960). A method for numerical integration on an automatic computer, *Numerische Mathematik* 2, **15**, 197-205.
- [15] Begusima A. and Robinson, I (1991). Suboptimal Kronrod extension formulas for numerical quadrature. *Numer.Math.* **58**, 807-818.
- [16] Laurie, D.P. (1992). Stratified sequences of nested quadrature formulas, *Questions Math.* **15**, 365-384.
- [17] Patterson, T.N.L. (1999) Stratified nested and related quadrature rules, *Journal of Computational and Applied Mathematics.* **112**, 243-251.
- [18] Calvetti, D., Reichel, L. and Sgallari, F.(1999). Application of anti-Gauss quadrature rules in linear algebra. *Applications and Computation of Orthogonal Polynomials*, **131**, 41-56.
- [19] Calvetti, D. and Reichel, L. (2003). Symmetric Gauss-Lobatto and modified anti-Gauss rules. *BIT, Numer Math.* **43**, 541-554.
- [20] Beardon, A.F. and Driver, K.A. (2005). The Zeros of linear combinations orthogonal polynomials. *Journal of Approximation Theory*, **137**, 179-186.

- [21] Szegő, G. (2003). *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society, Collegium Publications. Vol. 23 (reprint with corrections).
- [22] Peherstorfer, F. (1993). On positive quadrature formulas, *ISNM*. **112**, 297-313.
- [23] Peherstorfer, F. (1981). Characterization of positive quadrature formulas, *SIAM. Journal of Mathematical Analysis*, **12**, 935-942 (82m:65021)