GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BERNOULLİ VE q-BERNOULLİ POLİNOMLARI VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİLEK ERDAL

AĞUSTOS 2010

Bernoulli ve q-Bernoulli Polinomları
ve
Yaklaşım Özellikleri

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Dilek ERDAL

Ağustos 2010

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Bernoulli ve q-Bernoulli Polinomları ve Yaklaşım Özellikleri
Öğrencinin, Adı Soyadı: Dilek ERDAL
Tez Savunma Tarihi: 4 Ağustos 2010

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ramazan KOÇ
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca (tarafımızca) okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

	İmzası
Prof. Dr. Adil KILIÇ	______________________
Doç. Dr. Metin BEDİR	______________________
Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ	______________________

ÖZET

BERNOULLİ VE q-BERNOULLİ POLİNOMLARI VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

ERDAL, Dilek
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ
Ağustos 2010, 34 sayfa

Sayılar teorisinde önemli bir yeri olan ve matematiğin bir çok alanında kullanılan Bernoulli sayıları ve polinomları $1^k + 2^k + \ldots + (n-1)^k$ sonlu toplamının hesaplanmasında kullanılır.

q-Bernoulli sayıları ve polinomları ise fizikte önemli bir yeri olan Quantum calculus de özel bir konudur.

Bu çalışmada Bernoulli, q-Bernoulli sayı ve polinomları verilecek ve bu anlamda bazı teoremler ispatlanacaktır.

Bernoulli ve özellikle q-Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonlarına, p-adik q-integral ve Dirichlet q-l fonksiyonu ile yeni bir yaklaşım elde edilecektir. Ayrıca, yaklaşımda önemli bir yeri olan Bernstein polinomlarının ve sayılar teorisinde önemli bir yeri olan Bernoulli polinomlarının birbirleri ile bağlantısı verilecektir.

Sonuç olarak yukarıda tanımladığımız sonlu toplamı Bernstein polinomları ve Bernoulli sayıları cinsinden ifadesi verilecektir. Bu sonlu toplamın q-versiyonunun, q-Bernstein polinomları ve ikinci Sitirling sayıları cinsinden ilişkisi kurulacaktır.

Anahtar Kelimeler: Bernoulli sayıları, Bernoulli Polinomları, q-Bernoulli sayıları, q-Bernoulli polinomları, Dirichlet karekteri, p-adik q-integral, Bernstein polinomları, q-Bernstein polinomları, ikinci Stirling sayıları, Mellin dönüşümü, Riemann Zeta fonksiyonu, Beta fonksiyonu.

ABSTRACT

BERNOULLI AND q-BERNOULLI POLYNOMIALS AND THEIR APPROXIMATION PROPERTIES

ERDAL, Dilek
M.Sc. in Maths Department.
Supervisor: Assist. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ
August 2010, 34 pages

Bernoulli numbers and q-Bernoulli polynomials hold an important position in the theory of numbers and can be implemented in various mathematical fields to count $1^k + 2^k + ... + (n-1)^k$ finite addition.

q-Bernoulli numbers and polynomials are also special topics in Quantum calculus which have important position in physics.

In this work, Bernoulli, q-Bernoulli numbers and polynomials will be identified and some theories which are used in this frame will be proven.

There will be obtained a new approach toward Bernoulli, especially derivative functions of q-Bernoulli polynomias, p-adic function and Dirichlet q-l function and also the relationships of Bernoulli polynomials and Bernstein polynomials will be given.

As a conclusion, finite addition of Bernstein polynomials and Bernoulli numbers which are mentioned above will be obtained . This finite additon is established in terms of q- version of this addition, q-Bernstein polynomials and second stirling numbers.

Key words: Bernoulli numbers, Bernoulli Polynomials, q-Bernoulli numbers, q-Bernoulli polynomials, Dirichlet character, p-adic q-integral, Bernstein polynomials, q-Bernstein polynomials, second stirling numbers, Mellin transformation, Riemann zeta functions, Beta function.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince, değerli yardım ve katkılarını esirgemeyen kıymetli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet Açıkgöz’e, ders aşamasında bilgilerinden yararlandığım bölüm hocalarıma, tez jüri üyelerine, maddi ve manevi desteklerini her zaman arkamda hissettiğim canım aileme ve özellikle desteklerini esirgemeyen Serkan Aracı ve diğer arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\forall$	Her
$\exists$	En az bir
ε	Keyfi pozitif sayı
Δ	Fark operatörü
ς	Riemann-zeta fonksiyonu
B_n	Bernoulli sayıları
$B_n(x)$	Bernoulli polinomları
$val_p x$	x’in p-adik değeri
$[r]_q$	q-integer noktası
$[r]_q!$	q-faktöriyel
$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q$	q-binom katsayıları
$d_q f(x)$	$f(x)$’in q-diferensiyeli
$d_h f(x)$	$f(x)$’in h-diferensiyeli
$D_q f(x)$	$f(x)$’in q-türevi
$D_h f(x)$	$f(x)$’in h-türevi
$\beta_{m,q}$	q-Bernoulli sayıları

1.BÖLÜM

GİRİŞ

1.1. Temel Tanımlar

Tanım 1.1.1: Doğal sayılar kümesinde tanımlı bir fonksiyona dizi denir. f bir dizi ise her bir n doğal sayısına bir a_n sayısı karşılık geleceğinden f dizisi $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.2: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi verildiğinde $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için her $n \geq N$ iken $|a_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon, a) \in \mathbb{N}$ bulunabilirse $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi a ya yakınsar denir ve $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ile gösterilir. $\{a_n\}$ dizisinin bir limiti varsa bu diziye yakınsak dizi, yakınsak olmayan diziye de ıraksak dizi denir.

Tanım 1.1.3: $A \subset \mathbb{R}$ ve $F(A)$, A kümesi üzerinde tanımlı reel değerli bütün fonksiyonların kümesi olsun. Doğal sayılar kümesi üzerinde $F(A)$ kümesinde tanımlı fonksiyona fonksiyonel dizisi denir.

Tanım 1.1.4: $A \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonel dizisi verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ sayısı, $\forall x \in A$ ve her $n \geq N$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ bulunabilirse $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir.

Tanım 1.1.5: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n = b_n$ ise (a_n) ve (b_n) dizisine eşittir denir ve $(a_n) = (b_n)$ ile ifade edilir.

Tanım 1.1.6: $a, r \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(a_n) = (ar^{n-1}) = (a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}, ...)$ dizisine geometrik dizi denir. Geometrik dizinin ilk n terim toplamı $S_n = a\dfrac{1-r^n}{1-r}$ dir.

Tanım 1.1.7: $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n = c$ ise (a_n) dizisine bir sabit dizi denir ve $(a_n) = (c, c, ..., c) = (c)$ ile gösterilir.

Tanım1.8: $a, r \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$(a_n) = (a + (n-1)r) = (a, a+r, a+2r, ..., a+(n-1)r, ...)$

dizisine aritmetik dizi denir. Aritmetik dizinin ilk n terim toplamı

$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)r\right]$ dir.

Tanım 1.1.9: (a_n) dizisinin Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul, her $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sayısı için $n,m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$
gerektirmesini gerçekleyen ε a bağlı bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısının var olmasıdır.

Tanım 1.1.10: $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ gibi bir dizi verilmiş olsun. Bu diziden hareketle oluşturulan,

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

toplamına sonsuz seri veya kısaca seri denir.

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$

olmak üzere $\{S_n\}$ dizisine $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi denir. $\{S_n\}$ kısmi toplamlar dizisi yakınsak ve $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine yakınsak seri denir. s sayısına serinin toplamı veya limiti denir. Yakınsak olmayan serilere ıraksak seri denir.

Tanım 1.1.11: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{n-1} = a_1 + a_2.r + a_3 r^2 + ... + a_n r^{n-1} + ...$ serisine geometrik seri denir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} = \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1$$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.1.12:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[a + (n-1)d\right] = a + (a+d) + ... + (a + (n-1)d) + ...$$

serisine aritmetik seri denir.

Tanım1.1.13: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a)^n + ...$

şeklindeki bir seriye kuvvet serisi denir.

$a = 0$ için;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

elde edilir.

Tanım 1.1.14: f , $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun.

Eğer

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

limiti varsa f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilir denir.

Tanım 1.1.15: f fonksiyonu, a noktasını ihtiva eden bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

serisine a noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor serisi adı verilir. Taylor açılımında özel olarak $a=0$ alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

serisi elde edilir ki bu seriye Maclaurin serisi adı verilir.

Tanım 1.1.16: $\sum a_k\left(x-x_0\right)^k$ kuvvet serisinin $\left|x-x_0\right|<R$ için yakınsak olduğu en büyük pozitif R sayısına, bu kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı, $\left(x_0-R,x_0+R\right)$ aralığına da yakınsaklık aralığı denir.

Tanım 1.1.17: $a>0$ ve $a\neq 1$ olmak üzere $f(x)=a^x$ ve $e=2,71828...$ olmak üzere $f(x)=e^x$ fonksiyonuna üstel fonksiyon denir.

Tanım 1.1.18: $z\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{Z}^+$, $\mathrm{Re}(z)>1$ için Riemann zeta fonksiyonu,

$$\varsigma(z)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-z}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Riemann zeta fonksiyonu sayılar teorisinde, özellikle asal sayıların dağılımında, serilerin yakınsaklığında çok önemli rol oynar.

Tanım 1.1.19: $\mathrm{Im}(s)>0$ olmak üzere

$$\varsigma(s,a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^s}$$

fonksiyonuna Hurwitz zeta fonksiyonu denir.
$a=1$ ise; Hurwitz zeta fonksiyonu, Riemann zeta fonksiyonuna indirgenir.

Tanım 1.1.20: Dirichlet l-fonksiyonu $\mathrm{Re}(s)>1$ ve χ Dirichlet karekteri olmak üzere; Dirichlet l-fonksiyonu

$$L=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$$

şeklinde tanımlanır.
Özel olarak $\chi=\chi_1$ alınırsa,

$$L(s,\chi)=\varsigma(s)$$

olur. Burada $\varsigma(s)$ Riemann zeta fonksiyonudur.

Tanım 1.1.21: f ve f' fonksiyonları her kapalı aralıkta parçalı sürekli ve $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|<\infty$ ise f, x noktasında süreklidir ve

$$M\{f(t);f\}=F(s)=\int_0^{\infty} f(t)t^{s-1}dt$$

integraline $f(x)$ fonksiyonunun Mellin dönüşümü denir.

Tanım 1.1.22: p bir asal sayı olsun. Eğer $q\neq 0$ bir kesirli sayı ise, p ye bölünmeyen a ve b tamsayıları ve bir n tamsayısı için

$$q=p^n\frac{a}{b}$$

olur. n tamsayısı q tarafından belirlenmiştir. Bu durumda,

$$val_p(q)=n \text{ ve } val_p(0)=\infty$$

olarak tanımlanır. Dolayısıyla

$$val_p:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$$

fonksiyondur.

Tanım 1.1.23: $t\in[0,1]$, $\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ ve $i=0,1,2,...,n$

$$B_{i,n}(t)=\binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i}$$

şeklinde tanımlanan polinomlara n. dereceden Bernstein polinomları denir**.**

Tanım 1.1.24: İkinci Stirling sayıları (n,k) parametresi ile $S(n,k)$ biçiminde gösterilir. İkinci Stirling sayılarının üreteç fonksiyonu;

$$F(t,k)=\frac{(-1)^k}{k!}(1-e^t)^k=\sum_{n=0}^{\infty}S(n,k)\frac{t^n}{n!}$$

şeklinde verilir.

Tanım 1.1.25: Klasik q-Bernstein polinomunun üreteç fonksiyonu;

$$F_k(q;t,x)=\frac{(t[x])^k}{k!}e^{t[1-x]}=\sum_{n=k}^{\infty}B_{k,n}^q(x)\frac{t^n}{n!},\ n\in\mathbb{N},\ t\in\mathbb{C}$$

şeklinde verilir.

2.BÖLÜM

BİNOM KATSAYILARI

Sayılar teorisinde önemli bir problem olan, ilk N doğal sayıların toplamı, karelerinin toplamı ve küplerinin toplamı çok iyi bilinen formüllerle,

$$\sum_{n=1}^{N} n = 1+2+3+...+N = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = 1^2+2^2+3^2+...+N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^3 = 1^3+2^3+3^3+...+N^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$$

şeklinde gösterilir. Burada

$$\sum_{n=1}^{N} n^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} = \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{N} n\right)^2 \qquad (1.1)$$

dır.

Jacob Bernoulli, yukarıdaki denklemlerin daha yüksek kuvvetleri üzerinde çalışmıştır. Doğrudan doğruya kuvvet fonksiyonlarını kullanmadan fonksiyonları toplama yöntemiyle daha iyi bir şekilde elde etmiştir.

Öncelikle binom katsayılarını inceleyelim. Binom katsayıları,

$$\binom{x}{j} = \frac{x!}{j!(x-j)!} = \frac{x(x-1)...(x-j+1)}{j!} \qquad (1.2)$$

özelliğini sağlarlar. Burada

$$\binom{x}{j} = \binom{x+1}{j+1} - \binom{x}{j+1} \qquad (1.3)$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi bu eşitliği gösterelim:

$$\begin{aligned}\binom{x+1}{j+1} - \binom{x}{j+1} &= \frac{(x+1)!}{(x-j)!(j+1)!} - \frac{x!}{(x-j-1)!(j+1)!} \\ &= \frac{(x+1)x!}{(x-j)!(j+1)!} - \frac{(x-j)x!}{(x-j)!(j+1)!} \\ &= \frac{x!(x+1-x+j)}{(x-j)!(j+1)!} \\ &= \binom{x}{j}\end{aligned}$$

Buradan istenilen elde edilmiş olur. O halde

$$\sum_{n=M}^{N-1} \binom{n}{j} = \binom{N}{j+1} - \binom{M}{j+1}$$

eşitliğinden söz edilebilir.

x^q kuvvetleri binom katsayılarının kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Binom katsayıları, x değişkeninin tamsayı değeri için bir tamsayı değerine sahip olan polinomlardır. Ayrıca, binom katsayıları bu polinomların tamamı için bir taban oluşturur.

$f(x)$, n. dereceden tamsayı değerli bir polinom olsun ve

$$f(x) = A_0 + A_1\binom{x}{1} + \ldots + A_n\binom{x}{n} \tag{1.4}$$

şeklinde tanımlansın. A_j nin belirlenebilmesi için,

$x = 0$ için $f(0) = A_0$,

$x = 1$ için $f(1) = A_0 + A_1\binom{1}{1} = A_0 + A_1$,

$x = 2$ için $f(2) = A_0 + A_1\binom{2}{1} + A_2\binom{2}{2} = A_0 + 2A_1 + A_2$,

$\vdots$

$$x = n \text{ için } \quad f(n) = A_0 + A_1\binom{n}{1} + A_2\binom{n}{2} + \ldots + A_{n-1}\binom{n}{n-1} + A_n + \ldots \tag{1.5}$$

dır.

Bu lineer denklem sistemi A_j lerin tek şekilde belirlendiğini gösterir ve $f(j)$ tamsayı olarak alındığından A_j ler tamsayıdır. Burada n den daha yüksek dereceli bir polinom üretildiğinden $\binom{x}{n}$ binom katsayılarından sonra (1.4) ün sağ tarafında bu x' in sonsuz tamsayı değeri için $n-$inci dereceden bir polinom ile eşleşmeyebilir. O halde (1.4)' ü genel olarak

$$f(x) = \sum_{j\geq 0} A_j\binom{x}{j}, \qquad \binom{x}{0} = 1 \tag{1.6}$$

şeklinde ifade edilir.

Burada (1.5) in genişlemesi olan bu ifade de

$$A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = 0$$

olarak bulunur. Çünkü

$$\binom{n}{n+a} = 0 \tag{1.7}$$

dır. Bu sonuçlarda kuvvet formunda yazılan

$$x^q = \sum_{j\geq 0} A_{qj}\binom{x}{j}, \qquad q = 1,2,... \tag{1.8}$$

alınırsa şeklindeki özel polinomları ele alınırsa sağ tarafta sonlu bir toplam elde edilir ve $j > q$ için;

$$A_{qj} = 0 \tag{1.8a}$$

bulunur. (1.8)de $q = 0$ ve $j > 0$ için

$$A_{00} = 1 \text{ ve } A_{0j} \tag{1.8b}$$

genel durumları elde edilir.

$$x^q = \sum_{j\geq 0} A_{qj}\binom{x}{j}$$

ise, $q = 0$ için yukarıdaki durumlar;

$$x^0 = A_{00}\binom{x}{0} + A_{01}\binom{x}{1} + ... + A_{0j}\binom{x}{j}$$

$$1 = A_{00}$$

olarak bulunur. Eğer (1.8) de $q \geq 1$ için $x = 0$ alınırsa (1.5) den

$$A_{q0} = 0, \; q > 0 \tag{1.8.c}$$

elde ederiz.

$x = 0$ ve $q \geq 1$ için bu ifadeyi ispatlayalım;

$$x^q = 0^q = \sum_{j\geq 0} A_{qj}\binom{x}{j} = A_{00}\binom{0}{0} + A_{00}\binom{0}{1} + ...$$

olmak üzere $A_{q0} = 0$ olduğu görülür.

x in kuvvetleri (1.8) in eşitliğinin her iki tarafı ile eşleşmeyebilir. Özellikle $j = q$ için bu eşitliğin sağlandığı gösterilirse;

$$\begin{aligned} x^q &= \sum_{j\geq 0} A_{qj}\binom{x}{j} \\ &= A_{q0}\binom{x}{0} + A_{q1}\binom{x}{1} + ... + A_{qq}\binom{x}{q} \\ &= A_{q0} + A_{q1}x + ... + A_{qq}\frac{x!}{(x-q)!q!} \\ &= A_{q0} + A_{q1}x + ... + A_{qq}\frac{(x-1)(x-2)...(x-q+1)}{q!} \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan

$$A_{qq} = q!$$

bulunur. Burada A_{qj} ler pozitif tamsayılar olup $q \geq 1$ ve $l_1 + l_2 + ... + l_j = q$ için;

$$A_{qj} = \sum_{l_k > 0} \frac{q!}{l_1! l_2! ... l_j!}$$

şeklinde verilir.

Bu ifadelerde yüksek kuvvetli terimlerin katsayılarının, bir toplam ile ifade edilebileceği görülür. (1.5) ifadesi (1.8) ile birlikte yüksek kuvvetli terim teoreminden elde edilebilir.

A_{qj} ifadesi, $x = l = 0,1,2,...$ ve $k \leq q$ için (1.8) de yazılarak sağlanır ve $(-1)^l \binom{k}{l}$ ile çarpımından sonra toplam şeklinde tanımlanır. Bu tanımdan,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} l^q &= \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} \sum_{j=0}^{q} A_{qj} \binom{l}{j} \\
&= \sum_{j=0}^{q} A_{qj} \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} \binom{l}{j} \\
&= \sum_{j=0}^{q} A_{qj} \sum_{j \leq l \leq k} (-1)^l \frac{k!}{l!(k-l)!} \frac{l!}{j!(l-j)!} \frac{(k-j)!}{(k-j)!} \\
&= \sum_{j=0}^{q} A_{qj} \frac{k!}{j!(k-j)!} \sum_{j \leq l \leq k} (-1)^l \frac{(k-j)!}{(l-j)!(k-l)!} \\
&= \sum_{j=0}^{k} A_{qj} \binom{k}{j} \sum_{j \leq l \leq k} (-1)^l \binom{k-j}{l-j}
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. İkinci eşitlikte $j = k$ için, içerdeki toplam $(-1)^k$ olarak alınabileceği görülür. Aksi takdirde

$$\sum_{j \leq l \leq k} (-1)^l \binom{k-j}{l-j} = (-1)^j \sum_{\lambda=0}^{k-j} (-1)^\lambda \binom{k-\lambda}{\lambda} = 0 \qquad (1.9)$$

olur. Böylece

$$\sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} l^q = (-1)^k A_{qk} \qquad (1.9.a)$$

elde edilir. Eğer bunu aşağıdaki formda yazarsak,

$$A_{qk} = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} (k-m)^q$$

x^q nun k - nıncı farkı olarak A_{qk} bulunur ve bunu

$$A_{qk} = \Delta^k x^q \big|_{x=0}$$

şeklinde ifade edilir. Burada Δ operatörü, $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ şeklindedir.

3.BÖLÜM

BERNOULLİ SAYILARI

p ve n pozitif tamsayılar olmak üzere, Bernoulli sayıları,

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^{n-1} k^p$$

denkleminden hesaplanabilir. Ayrıca Bernoulli sayıları,

$$\zeta(2p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}}$$

Riemann zeta sayılarının hesaplanması ve $\tan x$, $\tanh x$, $\frac{1}{sinx}$ gibi birçok fonksiyonun genişlemesinde ortaya çıkar. Belki en önemli sonuçlardan biri Euler-Maclaurin toplam formulüdür ki bu formül yavaş yaklaşan serilerin değişmesini hızlandırabilen ve devam eden Bernoulli sayılarıdır.

Böylece Jacob Bernoulli,

$$S_0(n) = n$$

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

$$S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = \frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30}$$

$$S_5(n) = \frac{1}{6}n^6 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 = \frac{n^2(2n^3-2n-1)(n-1)^2}{12}$$

olduğunu fark etti ve daha sonra Jacob Bernoulli deneysel olarak, $S_p(n)$ polinomlarının

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1}n^{p+1} - \frac{1}{2}n^p + \frac{p}{12}n^{p-1} + ... \qquad (2.1)$$

formuna sahip oluğunu gördü. (2.1) ifadesi ispatlanırsa;

p ve n pozitif tamsayı olmak üzere o zaman

$$(p+1)S_p(n) = (p+1)\sum_{k=0}^{n-1} k^p = \sum_{k=0}^{n-1} (p+1)k^p$$

yazılır. Buradan $k^p = \frac{1}{p+1}\left(B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k)\right)$ eşitliği kullanılırsa

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k)\right)$$

$$= B_{p+1}(1) - B_{p+1}(0) + ... + B_{p+1}(n) - B_{p+1}(n-1)$$

$$= B_{p+1}(n) - B_{p+1}(0)$$

ve dolayısıyla

$$S_p(n) = \frac{B_{p+1}(n) - B_{p+1}}{p+1}$$

elde edilir.

$p = 0$ *için*,

$$S_0(n) = \frac{B_1(n) - B_1}{1} = B_1(n) - B_1 = n$$

$p = 1$ *için*,

$$S_1(n) = \frac{B_2(n) - B_2}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

bulunur. $\left(1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{6}, 0, ...\right)$ Bernoulli sayıları ortaya çıkar ve bu sayılar p ye bağlı değillerdir. Genel olarak, $S_p(n)$ toplamları aşağıdaki formda yazılabilir.

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^{p} k^p = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k} B_k\, n^{p+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{p+1}\frac{(p+1)!}{(p+1-k)!k!} B_k\, n^{p+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \frac{B_k}{k!}\frac{p!}{(p+1-k)!} n^{p+1-k}$$

$$= \frac{B_0}{0!}\frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{B_1}{1!}n^p + \frac{B_2}{2!}pn^{n-1} + \frac{B_3}{3!}p(p-1)n^{p-2} + ... + \frac{B_p}{1!}n$$

B_k, Bernoulli sayıları p den bağımsızdır. Yukarıdaki tanımda Bernoulli sayılarından bazılarını bulalım.

$$B_0 = 1 \text{ , } B_1 = \frac{-1}{2} \text{ , } B_2 = \frac{1}{6} \text{ , } B_3 = 0 \text{ , ...}$$

Bu formül örneklerle açıklamak için kullanışsızdır. Örneğin $S_{10}(1000)$ i hesaplamak çok fazla zaman alacağından daha kullanışlı bir tanım verilecek olursa;

$$G(z)=\frac{z}{e^{z}-1}=\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{z^k}{k!}\quad,\qquad |z|<2\pi$$

ve buradan gerekli açılımlar yapılırsa

$$\frac{z}{e^{z}-1}=\frac{z}{\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+...\right)-1}=\frac{z}{z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+...}$$

bulunur. Burada polinom bölmesi yapılırsa

$$=\frac{z}{z\left(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+...\right)}=\left(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+...\right)^{-1}$$

$$=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{12}-\frac{z^4}{720}+...$$

elde edilir. Buradan Bernoulli sayılarının bazı değerleri,

$$B_0=1,\ B_1=\frac{-1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,\ B_4=\frac{-1}{30},\ B_5=0\ ,\ B_6=\frac{1}{42}\ ,\ B_7=0\ ,\ B_8=\frac{-1}{30}$$

olarak bulunur. Daha açık bir ifadeyle,

$$G(z)+\frac{z}{2}=\frac{z}{2}\left(\frac{2}{e^{z}-1}+1\right)=\frac{ze^{\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}}}{2e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}}=\frac{z}{2}\coth\frac{z}{2}$$

$$\frac{z}{2}\left(\frac{2}{e^{z}-1}+1\right)=G(z)+\frac{z}{2}$$

$$\frac{z}{e^{z}-1}=\frac{z}{e^{\frac{z}{2}}\left(e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}\right)}=\frac{ze^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}}=\frac{ze^{-\frac{z}{2}}}{2\sinh\frac{z}{2}}$$

$$=\frac{z}{2}\left(\frac{\cosh\frac{z}{2}-\sinh\frac{z}{2}}{\sinh\frac{z}{2}}\right)=\frac{z}{2}\coth\frac{z}{2}-\frac{z}{2}$$

Bulunur. Burada $\coth x$, hiperbolik fonksiyondur. $G(z)+\frac{z}{2}$ bir çift fonksiyon ve her $n \geq 1$ için B_{2n+1} Bernoulli sayıları sıfırdır. Dolayısıyla Bernoulli sayıları hiperbolik fonsiyon cinsinden yazılabilir.

3.1. Clause-Van Staudt Teoremi:

Aşağıda vereceğimiz, Karl Van Staudt $(1798-1867)$ tarafından 1840 yılında yayınlanan ve Bernoulli sayılarının kesirli bölümünün kolay hesaplanmasını sağlayan bu çok önemli teorem, aynı yıl bağımsız olarak Thomas tarafından da bulunmuştur. p asal sayı olmak üzere

$$-B_{2k} \equiv \sum_{p-1/2k} \frac{1}{p} \quad (\bmod 1)$$

şeklindedir.

İspat 3.1: p herhangi bir asal sayı olmak üzere,

$$W_k \equiv B_{2k} + \sum_{p\,asal\,ve\,\frac{p-1}{2k}} \frac{1}{p}$$

tanımlanır. Eğer $p-1$ sayısı $2k$ yı bölüyorsa, yani W_k nın yukarıdaki tanımındaki toplamda yer alıyorsa, o zaman

$$\begin{aligned} val_p(W_k) &= val_p\left(B_k + \frac{1}{q} + \sum_{p\,asal\,ve\,\frac{p-1}{2k}\,q\neq p} \frac{1}{p}\right) \\ &\geq \min\left\{ val_p\left(B_k + \frac{1}{q}\right), val_p\left(\sum_{p\,asal\,ve\,\frac{p-1}{2k}\,ve\,q\neq p} \frac{1}{p}\right)\right\} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

olur.

Eğer $p-1$ sayısı $2k$ yı bölmüyorsa, yani W_k nın yukarıdaki tanımdaki toplamda yer almıyorsa, o zaman

$$val_p(W_k) = val_p\left(B_k + \sum_{p\,asal\,ve\,\frac{p-1}{2k}} \frac{1}{p}\right)$$

$$\geq \min\left\{val_p\left(B_k\right), val_p\left(\sum_{p\, asal\, ve\, \frac{p-1}{2k}} \frac{1}{p}\right)\right\}$$

$$\geq 0$$

olur. Demek ki, p hangi asal sayı olursa olsun, $val_p\left(W_k\right) \geq 0$ dır. Bu da aynı zamanda $W_k \in \mathbb{Z}$ demektir.

$k > 1$ iken, $p = 2,3,...$ ve $p-1$, $2k$ yı bölen asal sayılar olduğuna dikkat edilmelidir. Bu teoremin doğruluğunu birkaç örnekle görelim.

$k = 1$ için;

$$-B_2 \equiv \sum_{p-1/2} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \pmod{1}$$

$$B_2 \equiv \frac{1}{6} \pmod{1}$$

$k = 5$ için;

$$-B_{10} \equiv \sum_{p-1/10} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{11} = \frac{61}{66} \pmod{1}$$

$$B_{10} \equiv \frac{5}{66} \pmod{1}$$

$k = 8$ için;

$$-B_{16} \equiv \sum_{p-1/16} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17} = \frac{47}{510} \pmod{1}$$

$$B_{16} \equiv \frac{460}{510} \pmod{1}$$

elde edilir.

4.BÖLÜM

BERNOULLİ POLİNOMLARI

Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonu,

$$F(x,t)=\frac{te^{xt}}{e^{t}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}\ ,\ |t|<2\pi \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır. Bernoulli polinomlarının açık ifadesi

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}$$

olarak verilir. Burada $n\geq 0$ için $B_n(x)$ Bernoulli polinomları ve B_k Bernoulli sayılarıdır. Bernoulli sayıları $B_n=B_n(0)$ şeklinde gösterilir. Dolayısıyla,

$$n\geq 2 \text{ için},\quad B_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\ ,$$

$$B_n(0)=B_n(1)\ ,\ B_0=1$$

eşitliği bulunur. Şimdi n ye değerler verip Bernoulli sayılarının bazılarını bulalım.

$n=2$ için,

$$B_2=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}B_k$$

$$=B_0+2B_1+B_2$$

gerekli işlemler yapıldıktan sonra, $B_1=\frac{-1}{2}$ olarak bulunur.

$n=3$ için,

$$B_3=\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}B_k$$

$$=\binom{3}{0}B_0+\binom{3}{1}B_1+\binom{3}{2}B_2+\binom{3}{3}B_3$$

buradan $B_2=\frac{1}{6}$ olduğu bulunur.

$n=4$ için,

$$B_4=\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}B_k$$

$$=\binom{4}{0}B_0+\binom{4}{1}B_1+\binom{4}{2}B_2+\binom{4}{3}B_3+\binom{4}{4}B_4$$

ve buradan $B_3=0$ bulunur.

Benzer yolla $n=5$ için $B_4=\frac{-1}{30}$ bulunur.

Bulunan bu Bernoulli sayıları yardımıyla Bernoulli polinomları

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}$$

denkleminde;

$n=0$ için,

$$B_0(x)=1,$$

$n=1$ için,

$$B_1(x)=x-\frac{1}{2},$$

$n=2$ için,

$$B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6}$$

şeklinde bulunur. Bu şekilde devam ederek bütün Bernoulli polinomları bulunur. (4.1) de tanımlanan Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonunun özelliklerinden yararlanarak Bernoulli polinomlarının bazı özelliklerini verelim:

1) $x=0$ için, $F(0,t)=\dfrac{t}{e^t-1}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}$

bulunur. Buradan Bernoulli polinomları $x=0$ için, Bernoulli sayılarına eşit olur. Yani $B_n(0)=B_n$ dır.

2) $x=1$ için, $F(1,t)=\dfrac{te^t}{e^t-1}=\dfrac{t}{1-e^{-t}}=\dfrac{-t}{e^{-t}-1}=F(0,-t)$

bulunur. Bu eşitlikten;

$$B_n(1)=(-1)^n B_n(0)=(-1)^n B_n$$

bağıntısı elde edilir.

3) Üreteç fonksiyonun ikinci değişkene göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial}{\partial t}F(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{te^{xt}}{e^t-1}\right)=\frac{t^2e^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{`}(x)\frac{t^n}{n!} \tag{4.2}$$

bulunur ve buradan,

$$\frac{t^2e^{xt}}{e^t-1}=tF(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!} \tag{4.3}$$

elde edilir. (4.2) ve (4.3) eşitliklerinin $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları eşitlenerek

$$nB_{n-1}(x)=B_n^{`}(x)$$

bulunur.

4) $F(x,-t)=\frac{-t}{e^{-t}-1}e^{-xt}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_n(x)\frac{t^n}{n!}$

Burada gerekli cebirsel işlem yapıldıktan sonra,

$$\frac{t}{e^t-1}e^{t(1-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(1-x)\frac{t^n}{n!}=F(1-x,t)$$

elde edilir. $F(x,-t)=F(1-x,t)$ eşitliği ortaya çıkar ve buradan

$$B_n(1-x)=(-1)^n B_n(x)$$

bağıntısı elde edilir.

5) $B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}$

$$\begin{aligned}
B_n(x+1)-B_n(x)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\left((x+1)^{n-k}-x^{n-k}\right)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\left\{x^{n-k}+\binom{n-k}{1}x^{n-k-1}+\ldots+1-x^{n-k}\right\}\\
&=\sum_{k=0}^{n}B_k\left\{\binom{n}{k+1}\binom{k+1}{k}x^{n-k-1}+\binom{n}{k+2}\binom{k+2}{k}x^{n-k-2}+\ldots+\binom{n}{k}\right\}\\
&=B_0\left\{\binom{n}{1}\binom{1}{0}x^{n-1}+\binom{n}{2}\binom{2}{0}x^{n-2}+\ldots+\binom{n}{0}\right\}\\
&\quad+B_1\left\{\binom{n}{2}\binom{2}{1}x^{n-2}+\binom{n}{3}\binom{3}{0}x^{n-3}+\ldots+\binom{n}{1}\right\}+\ldots
\end{aligned}$$

$$=\left\{\binom{n}{1}x^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}+\ldots+1\right\}-\left\{\binom{n}{2}x^{n-2}+\binom{n}{3}\frac{3}{2}x^{n-3}+\ldots+\frac{n}{2}\right\}$$

$$+\ldots+\left\{\binom{n}{3}\frac{1}{2}x^{n-3}+\ldots+\frac{n(n-1)}{12}\right\}$$

$$=x^{n-1}\binom{n}{1}+x^{n-2}\binom{n}{2}(1-1)+x^{n-3}\binom{n}{3}\left(1-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)+\ldots$$

$$=nx^{n-1}$$

6) $(-1)^n B_n(-x)=B_n(x)+nx^{n-1}$.

$B_n(1-x)=(-1)^n B_n(x)$ bağıntısında x yerine $x+1$ yazarsak

$$B_n(-x)=(-1)^n B_n(x+1)$$

elde edilir ve $B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}$ eşitliği kullanılarak,

$$(-1)^n B_n(-x)=B_n(x)+nx^{n-1}$$

sonucuna ulaşılır.

7) $n\in\mathbb{N}$ için $B_n\left(\frac{1}{2}\right)=\left(2^{1-n}-1\right)B_n$

dır. Rabbe teoreminden [8],

$$\sum_{r=0}^{m-1}B_n\left(\frac{x+r}{m}\right)=m^{1-n}B_n(x)$$

$m=2$ ve $x=0$ alınırsa

$$B_n\left(\frac{1}{2}\right)=\left(2^{1-n}-1\right)B_n$$

bulunur.

5.BÖLÜM

q-BERNOULLİ SAYILARI VE POLİNOMLARI

1924 yılında Nörlund ve daha sonrada Carlitz q-Bernoulli sayıları üzerinde çalışmıştır. Bu sayılara başlamadan önce Quantum calculus' ün iki çeşiti olan q-calculus ve h-calculus ün tanımlarını verelim.

Tanım 5.1: $f(x)$ herhangi bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun q- diferansiyeli

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x)$$

ve h- diferansiyeli

$$d_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımlardan yararlanarak $d_q x = (q-1)x$ ve $d_h x = h$ olduğu görülür. Bilinen diferansiyelden q- diferansiyelinin farkı, iki fonksiyonun çarpımının diferansiyelinde simetrik olmamasıdır. Yani,

$$\begin{aligned} d_q\left(f(x)g(x)\right) &= f(qx)g(qx) - f(x)g(x) \\ &= f(qx)g(qx) - f(qx)g(x) \\ &\quad + f(qx)g(x) - f(x)g(x) \\ &= f(qx)d_q g(x) + g(x)d_q f(x) \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$d_h\left(f(x)g(x)\right) = f(x+h)d_h g(x) + g(x)d_h f(x)$$

q ve h quantum türevleri tanımlanır.

Tanım 5.2: f nin q-türevi ve h-türevi sırasıyla;

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}$$

$$D_h f(x) = \frac{d_h f(x)}{d_h x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

tanımlanır. Eğer f türevlenebilirse,

$$\lim_{q \to 1} D_q f(x) = \lim_{h \to 0} D_h f(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

yazılır. Her a ve b sabitleri için D_q ve D_h;

$$D_q\big(af(x) + bg(x)\big) = aD_q f(x) + bD_q g(x)$$

$$D_h\big(af(x) + bg(x)\big) = aD_h f(x) + bD_h g(x)$$

lineer özelliklerine sahiptir.

Örnek 5.2.1: $f(x) = x^n$ in q- ve h-türevini hesaplayalım.
n bir pozitif tamsayı olmak üzere, tanımdan,

$$D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n - 1}{q-1} x^{n-1}$$

ve

$$D_h x^n = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h + \ldots + h^{n-1}$$

elde edilir. $\frac{q^n - 1}{q-1}$ bölümü oldukça sık görüldüğünden, aşağıdaki gösterimle tanımlayalım;

$$n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } [n] = \frac{q^n - 1}{q-1} = q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + 1$$

ve dolayısıyla

$$D_q x^n = [n] x^{n-1}$$

olur. Bu da x^n nin bilinen türevine benzerdir.

$$q \to 1 \text{ iken, } [n] = q^{n-1} + \ldots + 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 = n\,.$$

bulunur.

n tamsayısı, bilinen calculus da yapıldığı gibi q-calculus de aynı rolü oynar. Diğer yandan, $D_h x^n$ ifadesinin anlaşılması daha zordur. x^n, q- calculus da daha kolay anlaşılır bir fonksiyondur. Ancak h-calculus için aynı şeyi söylemek mümkün olmayabilir. Bu nedenle burada daha çok q-calculus ile ilgilenilecektir. Şimdi $f(x)$ ve $g(x)$' in bölüm ve çarpımının q-türevlerini hesaplayalım.

$$d_q\left(f(x)g(x)\right)=\frac{d_q\left(f(x)g(x)\right)}{(q-1)x}$$
$$=\frac{f(qx)d_qg(x)+g(x)d_qf(x)}{(q-1)x}$$

ve buradan

$$D_q\left(f(x)g(x)\right)=f(qx)D_qg(x)+g(x)D_qf(x) \qquad (5.1)$$

simetriden f ve g yer değiştirilirse

$$D_q\left(f(x)g(x)\right)=g(qx)D_qf(x)+f(x)D_qg(x) \qquad (5.2)$$

bulunur. Bulunan (5.2) ifadesi (5.1) ifadesine eşittir. Eğer (5.1) ifadesi diferensiyellenebiliyorsa

$$g(x)\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)$$

yazılır ve her iki tarafın q - türevi alınırsa

$$g(qx)D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)+\frac{f(x)}{g(x)}D_qg(x)=D_qf(x)$$

bulunur ve böylece bölümün q - türevi;

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)D_qf(x)-f(x)D_qg(x)}{g(x)g(qx)} \qquad (5.3)$$

olarak elde edilir, eğer (5.2) ifadesi kullanılsaydı

$$g(x)D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)+\frac{f(qx)}{g(qx)}D_qg(x)=D_qf(x)$$

ve dolayısıyla

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(qx)D_qf(x)-f(qx)D_qg(x)}{g(x)g(qx)} \qquad (5.4)$$

bulunurdu.

q -diferansiyelinin, bölüm ve çarpım kuralını verdikten sonra zincir kuralının quantum versiyonuna bakalım. Bununla birlikte q -türevler için genel zincir kuralı yoktur. α ve β sabit ve $u = u(x) = \alpha x^{\beta}$ olmak üzere $f(u(x))$ şeklindeki bir fonksiyonu zincir kuralının nasıl uygulandığını görelim:

$$\begin{aligned} D_q\left[f(u(x))\right] &= D_q\left[f(\alpha x^{\beta})\right] \\ &= \frac{f(\alpha q^{\beta} x^{\beta}) - f(\alpha x^{\beta})}{qx - x} \\ &= \frac{f(\alpha q^{\beta} x^{\beta}) - f(\alpha x^{\beta})}{\alpha q^{\beta} x^{\beta} - \alpha x^{\beta}} \cdot \frac{\alpha q^{\beta} x^{\beta} - \alpha x^{\beta}}{qx - x} \\ &= \frac{f(q^{\beta} u) - f(u)}{q^{\beta} u - u} \cdot \frac{u(qx) - u(x)}{qx - x} \end{aligned}$$

ve buradan

$$D_q f(u(x)) = \left(D_{q^{\beta}} f\right)(u(x)) D_q u(x)$$

elde edilir. Fakat $u(x)$ fonksiyonu için genel bir zincir kuralı vermek mümkün değildir. Örneğin, $u(x) = x + x^2$ veya $u(x) = \sin x$ için genel bir zincir kuralı yazılamaz. Çünkü $u(qx)$ ifadesi u nun terimleri cinsinden ifade edilemez.

5.1. Polinomlar için Genelleştirilmiş Taylor Formülü

Bilinen calculuste, herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun tüm türevleri $x = a$ da analitiktir. Eğer $f(x)$, $x = a$ noktası civarında kuvvet serisi gibi ifade edilebiliyorsa Taylor teoremi bir kuvvet serisini

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}$$

olarak tanıtır. e^x in Taylor açılımı, kompleks sayılar ve kare matrisin üssünü tanımlamada kullanılır. Taylor formülünün q -benzerini formüle edelim. Fakat bunu yapmadan önce aşağıdaki durumu ele alalım:

Teorem 5.1.1: a herhangi bir sayı ve D, polinomlar üzerinde bir lineer operatör olmak üzere $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots\}$ polinomlar dizisi aşağıdaki 3 koşulu sağlasın.

a) $\forall n \geq 1$ için $P_0(a) = 1$ dir,

b) $derP_n = n$;

c) $\forall n \geq 1$ ve $P(1) = 0$ için $DP_n(x) = P_{n-1}(x)$, o zaman, N. dereceden her $f(x)$ polinomu

$$f(x)=\sum_{n=0}^{N}\left(D^{n}f\right)(a)P_{n}(x)$$

genelleştirilmiş Taylor formülüne sahiptir.

İspat: V , N den daha büyük dereceden polinomların uzayı ve $\dim V=N+1$ olsun. $\left\{P_{0}(x),P_{1}(x),...,P_{N}(x)\right\}$ polinomları lineer bağımsızdır. Çünkü (b) koşulundan polinomların derecesi kesin artandır. Buradan V için bir taban oluşturulursa, $\forall f\in V$ polinomu

$$f(x)=\sum_{k=0}^{N}c_{k}P_{k}(x)$$

şeklindeki ifade edilir. Bazı tek c_k sabitleri için ve $x=a$ alınarak (a) koşulu kullanılırsa $c_0=f(a)$ elde edilir. Çünkü $x=a$ ve $k=0$ için

$$f(a)=\sum_{k=0}^{a}c_{0}P_{0}(a)\Rightarrow c_{0}=f(a)$$

olur. O halde D lineer operatörüyle yukarıdaki eşitliğin n defa türevi alınırsa ve $1\leq n\leq N_n$ olmak üzere (b) ve (c) koşulları kullanılırsa

$$\left(D^{n}f\right)(x)=\sum_{k=n}^{N}c_{k}D^{n}P_{k}(x)=\sum_{k=n}^{N}c_{k}P_{k-n}(x)$$

elde edilir. Buradan $x=a$ alınır ve (a) koşulları kullanılırsa

$$c_{n}=\left(D^{n}f\right)(a)\qquad 0\leq n\leq N$$

bulunur.

5.2 $(x-a)^n$ nin q-analoğu ve Binomun q-türevleri

Daha önceki kısımda bahsedildiği gibi, D_q , polinomlar uzayı üzerinde lineer bir operatördür.

$D\equiv D_q$ için $n!$ nin aşağıdaki q-analoğu na ihtiyacımız var;

$$[n]!=\begin{cases}1 & ;n=0\\ [n][n-1]...1 & ;n=1,2,...\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $D\equiv D_q$ ile Teorem5.1.1 in üç koşulunu sağlayan $\left\{P_{0}(x),P_{1}(x),P_{2}(x),...\right\}$ polinomlar dizisini oluşturalım. Eğer $a=0$ ise

$$P_n(x)=\frac{x^n}{[n]!}$$

seçebiliriz. Çünkü,

(a) $n\geq 1$ için $P_0(0)=1,\ P_n(0)=0$

(b) $derP_n=n$,

(c) $n\geq 1$ için

$$D_qP_n(x)=\frac{D_qx^n}{[n]!}=\frac{[n]x^{n-1}}{[n]!}=\frac{x^{n-1}}{[n-1]!}=P_{n-1}(x)$$

dır. Eğer $a\neq 0$ ise, $P_n(x)=\dfrac{(x-a)^n}{[n]!}$ dir. Örneğin;

$$D_q\frac{(x-a)^2}{[2]!}=(x-a)$$

dır. Şimdi ilk birkaç $P_n(x)$ polinomunu bulalım ve genel formülünü yazalım.

$$P_0'(x)=1,\ D_qP_1(x)=1 \text{ ve } P_1(a)=0$$

olması için

$$P_1(x)=x-a$$

almalıyız.

$$D_qP_2(x)=x-a$$

olması için

$$P_2(x)=\frac{x^2}{[2]}-ax-\frac{a^2}{[2]}+a^2=\frac{(x-a)(x-qa)}{[2]}$$

olmalıdır. Benzer şekilde

$$P_3(x)=\frac{(x-a)(x-qa)(x-q^2a)}{[2][3]}$$

olur ve böylece devam eder.

Tanım 5.2.1: Özel olarak $x=0$ için

$$q(q\beta+1)^m-\beta^m=\begin{cases}1, & m=1\\ 0, & m>1\end{cases}$$

dir. Bu tanım kullanılarak birkaç q-Bernoulli sayısını bulalım.

$m=1$ için;

$$q(q\beta+1)-\beta_1=1$$
$$q^2\beta_1+q-\beta_1=1$$
$$(q^2-1)\beta_1=1-q$$
$$\beta_1=\frac{1-q}{1-q^2}=\frac{1}{\dfrac{q^2-1}{1-q}}=-\frac{1}{[2]}$$

$m=2$ için;

$$q(q\beta+1)^2-\beta_2=0$$
$$q\left(q^2\beta_2+2q\beta_1+1\right)-\beta_2=0$$
$$q^3\beta_2+2q^2\beta_1+q-\beta_2=0$$

elde edilir. Buradan da gerekli cebirsel işlem yapılırsa $\beta_2=\dfrac{q}{[2][3]}$ bulunur.

6.BÖLÜM

BERNOULLİ VE q-BERNOULLİ POLİNOMLARINA YENİ BİR YAKLAŞIM

q-Bernoulli sayıları, Tanım 5.1.1 de tanımlanmıştı. Burada $\lim_{q\to 1}\beta_{n,q} = B_n$ ve B_n Bernoulli sayısıdır.

$\mathbb{N}$ doğal sayısı, $q \in \mathbb{C}$ ve $|q| < 1$ için, q-Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonu;

$$F_q(t,x) = -t\sum_{l=0}^{\infty} q^l e^{[x+l]t} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n,q}(x)\frac{t^n}{n!} \tag{6.1}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan

$$\lim_{q\to 1} F_q(t,x) = \frac{t}{e^t - 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}, \qquad |t| < 2\pi$$

elde edilir. Burada $x = 0$ alınırsa $n.$dereceden q-Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonları

$$F_q(t) = F_q(t,0) = -t\sum_{l=0}^{\infty} q^l e^{[l]t} = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_{n,q}\frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Burada $x = 1$ alınırsa

$$F_q(t,1) = -t\sum_{l=0}^{\infty} q^l e^t e^{q[l]t} = e^t F_q(qt)$$

elde edilir. Ayrıca

$$qF_q(t,1) - F_q(t) = qe^t F_q(qt) - F_q(t)$$

$$= q\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^l}{l!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} q^m \beta_{m,q}\frac{t^m}{m!}\right) - \sum_{n=0}^{\infty}\beta_{n,q}\frac{t^n}{n!}$$

$$qF_q(t,1)-F_q(t)=1 \tag{6.3}$$

bulunur. (6.2) ve (6.3) den

$$\beta_{0,q}=1 \;\text{ ve }\; \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}q^{l+1}\beta_{l,q}-\beta_{l,q}=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n>0\end{cases}$$

sonucu elde edilir.

Teorem 6.1: $n\in\mathbb{N}$ için

$$\beta_{0,q}=1 \;\text{ ve }\; q(q\beta+1)^n-\beta_{n,q}=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n>0\end{cases}$$

dır. Burada genellikle β_n, β^n ile gösterilir.

(6.1) eşitliği kullanılırsa

$$F_q(t,x)=e^{[x]_q t}F_q(q^x t)$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}[x]^n\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^{nx}\beta_{n,q}\frac{t^n}{n!}\right)$$

bulunur. Burada Cauchy çarpımı yapılırsa,

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}q^{lx}\beta_{l,q}[x]^{n-l}\frac{t^n}{l!(n-l)!}$$

elde edilir. Toplam içindeki ifade $n!$ ile çarpılıp bölünürse,

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{l!(n-l)!}q^{lx}\beta_{l,q}[x]^{n-l}\frac{t^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}q^{lx}\beta_{l,q}[x]^{n-l}\right)\frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Bulunan bu ifadeyi aşağıdaki teoremle verelim.

Teorem 6.2: $n\in\mathbb{N}$ için

$$\beta_{n,q}(x)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}q^{lx}\beta_{l,q}[x]^{n-l}.$$

Teorem 6.2 ifadesi ve (6.1) kullanılarak

$$F_q(t,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(t\sum_{m=0}^{\infty}q^m[m]^n\right)\frac{t^n}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(1-q)^n}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(-1)^l\frac{l+1}{[l+1]}\right)\frac{t^n}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{n,q}\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir.

Sonuç 6.2: $n\in\mathbb{N}$ için,

$$\beta_{n,q}=\frac{1}{(1-q)^n}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(-1)^l\frac{l+1}{[l+1]}$$

dır.

χ Dirichlet karakteri olmak üzere, q-Bernoulli polinomlarının χ karakteri üzerindeki ilişkisi

$$F_{q,\chi}(x,t)=-t\sum_{l=0}^{\infty}\chi(l)q^l e^{[x+l]t}=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{n,\chi,q}(x)\frac{t^n}{n!}$$

şeklinde tanımlanır.

$x=0$ için; $\beta_{n,\chi,q}\left(=\beta_{n,\chi,q}(0)\right)$, χ karakteri üzerinde genelleştirilmiş q-Bernoulli sayısıdır. Böylece χ karakteri üzerinde genelleştirilmiş q-Bernoulli polinomunun üreteç fonksiyonu;

$$F_{q,\chi}(t)=-t\sum_{m=0}^{\infty}\chi(m)q^m e^{[m]t}=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{n,\chi,q}\frac{t^n}{n!}$$

şeklinde tanımlanır.

$s\in\mathbb{C}$ için (6.1) eşitliğine Mellin dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}F_q(-t,x)t^{s-2}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{[x+n]^s}$$

$s\in\mathbb{C}$ için ve $x\neq 0,-1,-2,...$ zeta fonksiyonu;

$$\zeta^*(s,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{[x+n]^s}$$

olarak tanımlanır. $\zeta^*(s,x)$ kompleks düzlemde analitik fonksiyondur. $q-$Bernoulli polinomlarına zeta fonksiyonuyla yaklaşım;

$$-n\zeta^*(1-n,x)=\beta_{n,q}(x)$$

şeklindedir. Bu metotla;

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty} F_{q,\chi}(-t,x)t^{s-2}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\chi(n)q^n}{[n+x]^s}$$

denklemi elde edilir.

$s\in\mathbb{C}$ için Dirichlet tipi $q-l$ fonksiyonu $x\neq 0,-1,-2,...$ olmak üzere

$$l_q(s,x|\chi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\chi(n)q^n}{[n+x]^s}$$

şeklinde tanımlanır. χ karakteri üzerinde genelleştirilmiş q-Bernoulli polinomlarına Dirichlet tipi $q-l$ fonksiyonuyla yaklaşım;

$$-nl_q(1-n,x|\chi)=\beta_{n,\chi,q}(x)$$

ifadesi verilir.

$\mathbb{Z}_p$, p-adik rasyonel sayılar halkasını gösterir. p sabit tek asal sayı ve $(p,d)=1$ olmak üzere,

$$X=X_d=\lim_{\overleftarrow{N}}\mathbb{Z}/dp^N\mathbb{Z} \text{ ve } X_1=\mathbb{Z}_p$$

dır. $a\in\mathbb{Z}$ ve $0\leq a<dp^N$ olur.

$$\mu_q(a+dp^N\mathbb{Z}_p)=\frac{q^a}{[dp^N]}$$

şeklinde tanımlı olup, $q\to 1$ için $\mu_1(a+dp^N Z_p)=\frac{1}{dp^N}$ bulunur. Bulunan bu ölçü yardımıyla;

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)d\mu_q(x)&=\lim_{N\to\infty}\sum_{x=0}^{dp^N-1} f(x)\mu_q(x+dp^N\mathbb{Z}_p)\\&=\lim_{N\to\infty}\sum_{x=0}^{dp^N-1} f(x)\frac{q^x}{[dp^N]}\\&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{[dp^N]}\sum_{x=0}^{dp^N-1} f(x)q^x\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadeye p-adik q-integral denir. Bu integralde, q=1 için,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)d\mu_1(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{dp^N}\sum_{x=0}^{dp^N-1} f(x)$$

elde edilir ve burada $f(x)=x^k$ alınırsa

$$\int_{\mathbb{Z}_p} x^k d\mu_1(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{p^N} \sum_{x=0}^{p^N-1} x^k$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{p^N}\left(1^k + 2^k + \ldots + \left(p^N-1\right)^k\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{p^N} \int_0^{p^N} B_k(x)\,dx$$

bulunur. $B_k'(x)=kB_{k-1}(x)$ özelliğinden yaralanılırsa

$$\int_{\mathbb{Z}_p} x^k d\mu_1(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{p^N}\frac{1}{k+1} \int_0^{p^N} B_{k+1}'(x)dx$$

$$= \frac{1}{k+1} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{p^N}\left(B_{k+1}\left(p^N\right) - B_{k+1}(0)\right)$$

elde edilir. $\lim\limits_{N\to\infty} p^N = 0$ olduğundan $\frac{0}{0}$ belirsizliği ortaya çıkar. Buradan L' Hospital kuralı uygulanırsa ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa;

$$\int_{\mathbb{Z}_p} x^k d\mu_1(x) = \frac{1}{k+1} \lim_{N\to\infty} \frac{(k+1)B_k\left(p^N\right)p^N \ln p}{p^N \ln p}$$

$$= \lim_{N\to\infty} B_k\left(p^N\right) = B_k(0) = B_k$$

elde edilir. Sonuç olarak ;

$$\int_{\mathbb{Z}_p} x^k d\mu_1(x) = B_k$$

bulunur. Benzer şekilde $f(x)=(x+y)^k$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p} (x+y)^k\, d\mu_1(y) = B_k(x)$$

eşitliği elde edilir.

p -adik q -integralle Bernoulli polinomlarına yaklaşım;

$$\int_{\mathbb{Z}_p} (x+y)^k\, d\mu_1(y) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{dp^N} \sum_{x=0}^{dp^N-1} (x+y)^k$$

şeklinde verilir. Burada $y=a+dy$ eşitliği kullanılırsa,

$$B_k(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{dp^N}\sum_{a=0}^{d-1}\sum_{x=0}^{p^N-1}(x+a+dy)^k$$
$$=\frac{1}{d}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{p^N}\sum_{a=0}^{d-1}\sum_{x=0}^{p^N-1}d^k\left(\frac{x+a}{d}+y\right)^k$$
$$=d^{k-1}\sum_{a=0}^{d-1}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{p^N}\sum_{x=0}^{p^N-1}\left(\frac{x+a}{d}+y\right)^k$$
$$=d^{k-1}\sum_{a=0}^{d-1}\int_{\mathbb{Z}_p}\left(\frac{x+a}{d}+y\right)^k d\mu_1(y)$$

bulunur ve buradan

$$B_k(x)=d^{k-1}\sum_{a=0}^{d-1}\int_{\mathbb{Z}_p}\left(\frac{x+a}{d}+y\right)^k d\mu_1(y)$$

elde edilir. Böylece Bernoulli polinomlarına yaklaşım tanımlanmış olur.

Sonuç 6.2' nin ispatı için,

$$\int_{\mathbb{Z}_p}[x]^n d\mu_q(x)=\frac{1}{(1-q)^n}\int_{\mathbb{Z}_p}(1-q^x)^n d\mu_q(x)$$
$$=\frac{1}{(1-q)^n}\int_{\mathbb{Z}_p}\left[\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(-1)^l q^{lx}\right]d\mu_q(x)$$
$$=\frac{1}{(1-q)^n}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(-1)^l\int_{\mathbb{Z}_p}q^{lx}d\mu_q(x)$$

bulunur. Burada öncelikle $\int_{\mathbb{Z}_p} q^{lx}d\mu_q(x)$ integralini hesaplayalım.

$$\int_{\mathbb{Z}_p} q^{lx}d\mu_q(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\left[p^N\right]}\sum_{x=0}^{p^N-1}q^{lx}q^x$$
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\left[p^N\right]}\sum_{x=0}^{p^N-1}\left(q^{l+1}\right)^x$$
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\left[p^N\right]}\frac{1-\left(q^{l+1}\right)^{p^N}}{1-q^{l+1}}$$
$$=\frac{1-q}{1-q^{p^N}}\frac{1-\left(q^{l+1}\right)^{p^N}}{1-q^{l+1}}$$
$$=\frac{1}{[l+1]}\lim_{N\to\infty}\frac{1-\left(q^{l+1}\right)^{p^N}}{1-q^{p^N}}$$

elde edilir. $N\to\infty$ için $\frac{0}{0}$ belirsizliği olduğundan L' Hospital kuralı uygulanırsa,

$$=\frac{1}{[l+1]}\lim_{N\to\infty}\frac{(l+1)\left(q^{l+1}\right)^{p^N}p^N\ln p\ln q}{q^{p^N}p^N\ln p\ln q}$$

bulunur ve buradan

$$\int_{\mathbb{Z}_p}q^{lx}d\mu_q(x)=\frac{l+1}{[l+1]}$$

ve sonuç olarak

$$\beta_{n,q}=\int_{\mathbb{Z}_p}[x]^n d\mu_q(x)=\frac{1}{(1-q)^n}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(-1)^l\frac{l+1}{[l+1]}$$

elde edilir.

Şimdi de, $1^k+2^k+...+(n-1)^k$ toplamı, yaklaşım teorisinde önemli bir yere sahip olan Bernstein polinomları ile sayılar teorisinde önemli bir yere sahip olan Bernoulli sayıları cinsinden yazılacak ve bu toplamın q-versiyonu, q-Bernstein polinomları ile ikinci stirling sayıları cinsinden ifade edilecektir.

Sonuç 6.3: $k\in N, m\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

$$S_k(n)=1^k+2^k+...+(n-1)^k=\sum_{s=1}^{n-1}s^k$$

şeklindeki toplamın Bernoulli sayıları ve Bernstein polinomları cinsinden ifadesi;

$$S_k(n)=\frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k}B_lB_{l,k+1}(1-n)(1-n)^{-l}$$

ile verilir.

$k=1$ için bu toplam;

$$1+2+...+(m-1)=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{1}B_lB_{l,2}(1-m).(1-m)^{-l}$$
$$=\frac{n(n-1)}{2}$$

$k=2$ ve $k=3$ için aynı toplam sırasıyla, $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ ve $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$ şeklinde bulunur.

Sonuç 6.4: Sonuç 6.3 deki toplamın Bernstein polinomları ve Beta fonksiyonu cinsinden ifadesi;

$$S_k(n)=(n+1)\beta(k+1,n-k+1)\sum_{m=0}^{n-1}B_{k,n}(m)(1-m)^{k-n}$$

şeklinde verilir.

Sonuç 6.5: $k\in\mathbb{N}$ **,** $n\in\mathbb{Z}^{+}$ olmak üzere;

$$S_k(q;n)=\sum_{s=1}^{n-1}[s]^k$$

şeklindeki toplamın q-Bernstein tipi polinomu cinsinden ifadesi,

$$\begin{aligned}S_k(q;n)&=[1]^k+[2]^k+\dots+[n-1]^k\\&=k\beta(k,n-k+1)\sum_{j=1}^{n-1}Y_n(k;x;q)\left(q^{-j}\left(1-[j]\right)\right)^{k-n}\end{aligned}$$

şeklinde verilir. Buradan

$$\lim_{q\to1}S_k(q;n)=S_k(n)$$

elde edilir.

Sonuç 6.6: Sonuç 6.5 deki $S_k(q;n)$ toplamının q-Bernstein tipi polinomu ve ikinci Stirling sayıları cinsinden eşitliği;

$$S_q(k,n)=\frac{(-1)^{k-n}k!}{n!}\sum_{s=0}^{n-1}Y_n(k,s;q)\,D_{k,n}^{-1}(s;q)$$

şeklinde verilir. Burada

$$D_{k,n}(s;q)=\sum_{m,l\geq0}\binom{n-k+l-1}{s}\frac{q^kS(m,n-k)\left((1-s)\log q\right)^m}{m!}$$

dır.

7. BÖLÜM

SONUÇ VE TARTIŞMA

1. ve 2. Bölümde çalışmamızda faydalanacağımız gerekli ön bilgiler verildi. 3.Bölümde Bernoulli sayıları farklı yöntem ve teorem ile elde edildi. 4. Bölüm ve 5. Bölümde sırasıyla Bernoulli sayıları ve polinomları, q-Bernoulli sayıları ve polinomları elde edildi. Ayrıca Bernoulli sayı ve polinomlarının üreteç fonksiyonları kullanılarak bazı özellikler verilip ispatlandı.

6. Bölümde ise Bernoulli ve özellikle q-Bernoulli polinomlarının, p-adik q-integraline, Dirichlet q-l fonksiyonuna yeni bir yaklaşımı verildi. Ayrıca yaklaşımda önemli bir yeri olan Bernstein polinomlarının ve sayılar teorisinde önemli bir yeri olan Bernoulli polinomlarının birbirleri ile bağlantısı verildi.

Sonlu toplam, Bernstein polinomu ve Bernoulli sayısı ile ifade edildi. Bu sonlu toplamın q-versiyonu, q-Bernstein polinomu ve ikinci Stirling sayıları cinsinden ilişkisi kuruldu.

1) Quantum calculus ta önemli bir yeri olan q-Bernoulli sayı ve polinomlarının elde edilen yeni bir yaklaşımı fizikte nasıl bir etki oluşturacağı araştırılabilir.

2) Elde edilen sonlu toplam yaklaşım teorisinde yer alan Bernstein polinomları cinsinden yazılması sayılar teorisinde nasıl bir önem arz edecek?

3) Bernstein polinomlarının diğer tip polinomları ile ilişkisi araştırılabilir.

4) p-adik q-ölçüm tıpta ciğer kanserlerinde habis hücrelerin belirlenmesinde kullanılır, (Su ve Qiu 2008). p-adik q-ölçüm yardımıyla diğer bilim dallarındaki uygulamaları araştırılabilir.

5) p-adik q-ölçümü yardımıyla Bernstein polinomları ve q-Bernstein polinomları tanımlanabilir mi? Sorusu üzerinde çalışılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Açıkgöz, M. and Aracı, S., (2010). A study on the integral of the product of several Bernstein polynomials, *IST Transactions of Applied Mathematics-Modeling and Simulation*, Vol.1, No. 1(2), ISSN 1913-8342, pp. 10-14.

[2] Açıkgöz, M. and Aracı, S. (2010). On the generating function of Bernstein polynomials, Accepted to *AIP* on March 2010 for ICNAAM 2010.

[3] Açıkgöz, M. and Aracı, S., (2010). The relations between Bernoulli, Bernstein and Euler polynomials, Accepted to *AIP* on March 2010 for ICNAAM 2010.

[4] Açıkgöz, M. and Şimşek, Y., (2010). A New generating function of q -Bernstein type polynomials and their interpolation function, *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 769095, 12 pages, doi: 10.1155/2010/769095.01-313.

[5] Açıkgöz, M. and Şimsek, Y., (2009). On multiple interpolation functions of the Norlund-type q -Euler polynomials. *Abstract Applied Analysis*, Article, ID 382574, 14 pages.

[6] Kac, V., P, Cheung, (2001). *Quantum Calculus*. Springer, 128 p.

[7] Kim, T., (2005). A New Approach to q - Zeta Function, *Adv. Study Contemp. Math*. 11 (2) 157-162.

[8] Nesin, A., (2009). *Matematik Dünyası,* sayı III-IV.

[9] Pascal, S.and Gourdon, X., Introduction On Bernoulli's Numbers.

[10] Phillips, G. M., (2009). A survey of results on the q -Bernstein polynomials, *IMA Journal of Numerical Analysis Advance Access* published online on June 23, 1-12, doi:10.1093/imanum/drn088.

[11] Phillips, G. M., (1997). Bernstein polynomials based on the q -integers, The heritage of P. L. Chebyshev: a Festschrift in honor of the 70th birthday of T. J. Rivlin, *Annals of Numerical Math.* 1-4, 511-518.

[12] Rademacher, H., (1973). *Topics in analytic number theory.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.