GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK ÖLÇÜM TEORİSİ ÜZERİNDE TANIMLI OLAN BAZI BULANIK İNTEGRALLER

MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

VAKKAS ULUÇAY
TEMMUZ 2010

Bulanık Ölçüm Teorisi Üzerinde Tanımlı Olan Bazı Bulanık İntegraller

Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN

Vakkas ULUÇAY
Temmuz 2010

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Bulanık Ölçüm Teorisi Üzerinde Tanımlanan Bazı Bulanık İntegraller
Öğrencinin, Adı Soyadı: Vakkas ULUÇAY
Tez Savunma Tarihi: 26/07/2010

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ramazan KOÇ
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans/Doktora tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans/~~Doktora~~ tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans/~~Doktora~~ tezi olarak oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:	İmzası
Prof. Dr. Adil KILIÇ	
Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK	
Yrd. Doç. Dr. Ali BOZKURT	
Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN	
Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN	

ÖZET

BULANIK ÖLÇÜM TEORİSİ ÜZERİNDE TANIMLI OLAN BAZI BULANIK İNTEGRALLER

ULUÇAY, Vakkas

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN

Temmuz 2010, 64 sayfa

Bu tezde bulanık ölçüm üzerinde tanımlı olan bazı bulanık integraller incelenmiştir.

İlk bölümde bu çalışma ile ilgili ön bilgiler sunulmuştur. İkinci bölümde küme sınıflarının cebirsel yapıları üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde klasik ölçüm ve bulanık ölçümlerle ilgili temel tanım ve teoremler incelenmiştir. Dördüncü bölümde integral ve bulanık integrallerle ilgili temel tanım ve teoremlere, beşinci bölümde ölçüm ve integrallerle ilgili temel tanım ve önermelere yer verilmiştir.

Son bölümde ölçüm üzerinde tanımlı bazı bulanık integrallerin tanımları ve özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ölçüm, Bulanık Ölçüm, İntegral, Bulanık İntegral

ABSTRACT

SOME FUZZY INTEGRALS THAT DEFINED ON THE FUZZY MEASURE THEORY

ULUÇAY, Vakkas

M. Sc. Thesis, Math Department

Adviser: Assistant Professor Doctor Mehmet ŞAHİN

July 2010, 64 Pages

In this thesis some fuzzy integrals that defined on the fuzzy measure are studied.

The first section the preliminaries that are required in this thesis are presented. The second section focuses on the algebraic structures of classes of sets. In the third section the basic definitions and theorems related to classical measurement and fuzzy measures are studied. In the fourth section definitions and theorems about the integral and fuzzy integrals are included in. In the fifth section the concepts of measure and integration are studied.

In the last section definitions about some fuzzy integrals that defined on the fuzzy measure and their properties are studied.

Key Words: Measure, Fuzzy Measure, Integral, Fuzzy Integral.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince gösterdiği yol ve yöntemlerle desteğini esirgemeyen Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN ve sabırlarıyla destek olan kıymetli aileme, maddi manevi desteklerinden dolayı teşekkür ederim…

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER DİZİNİ

$f \circ g$	f ve g fonksiyonlarının bileşkesi
$E \Delta F$	E ve F kümelerinin simetrik farkı
μ	küme fonksiyonu
χ_A	A nın karakteristik fonksiyonu
$(\tilde{s})\int f d\mu$	μ ye göre X de f nin sipos integrali
$\oint f\, d\mu$	μ ye göre X de f nin bulanık (Sugeno) integrali
$\oint_A f\, d\mu$	μ ye göre A da f nin bulanık (Sugeno) integrali
$(C)\int_A f\, d\mu$	μ ye göre A da f nin Choguet integrali

ŞEKİLLER LİSTESİ **sayfa**

1. BÖLÜM

GENEL BİLGİLER

GİRİŞ

Ölçüm kavramı ilk olarak düzlemde bir doğru parçasının uzunluğunu hesaplamakla başlamıştır. Daha sonra bir dikdörtgenin alanı ölçüldü. Bundan sonra dikdörtgenlenebilen düzlemsel bölgelerin alanlarını bulma problemi ortaya atıldı. Bu problemle birlikte ölçüm kavramı ortaya çıktı.

A.L.Cauchy (1789–1857); integrali bir limitin toplamı olarak tanımlayan ilk matematikçi oldu. Daha sonra Riemann (1826–1865) Cauchy'nin çalışmalarını sürdürdü. Harnock (1883); trigonometrik seri teorisinde fonksiyonlar sınırsız olduğunda böyle fonksiyonların integrallerini toplayarak bulmaya çalışmıştır.

G.Peano (1858–1932) ve C.Jordan (1838-l922) integralleme üzerine çalıştılar. Bununla birlikte G.Cantor (1845-l918) integralle ölçüm arasındaki bağlantıyı sezinlemiştir. H.Lebesgue (1875–1941); İntegrale' Longuer Aire 1902 de yayınlanmış tezinde integralin yeni teorisini keşfetmiştir. Adına has integrali, yine adına has, Lebesgue ölçümüne bağlı olarak, Riemann integralinin genişletilmiş olarak tanımladı, sayısız örneklerle bunu ispat etti.

İntegral teorisine önemli bir katkı, W.H. Young (1863–1942) tarafından yapılmıştır. Bu ünlü matematikçi Lebesgue integral teorisini modernize etmiştir. F.Riesz (1880–1956), A.Denjoy (1884), J.Radon (1887-l956) ve daha birçok matematikçi Lebesgue integral teorisini geliştirmişlerdir.

1930'ların başlarında Polonyalı mantıkçı Jan Lukasiewicz ilk üç değerli mantık sistemini geliştirdi. 1930'larda kuantum filozofu Max Black, sürekli değerlere sahip mantığı, eleman düzeyinde kümelere uyguladı. Black, bulanık-küme üyelik fonksiyonlarından bahseden ilk kişi oldu.

Bulanık küme kavramı ilk olarak L.A Zadeh tarafından 1965 yılında "Fuzzy Sets" adlı çalışmasıyla birlikte ortaya atılmıştır. Bu çalışmayla birlikte "Fuzzy" kelimesini teknik terimlere dâhil etti. Ayrıca bu çalışma ile bilinen küme teorisi de genişletilmiştir [33].

Bulanık mantığın uygulama alanları çok geniştir. Sağladığı en büyük fayda ise "insana özgü tecrübe ile öğrenme" olayının kolayca modellenebilmesi ve belirsiz kavramların bile matematiksel olarak ifade edilmesine olanak tanımasıdır. Bu şekilde zor ve karışık Aristo mantığı yerine son 40 -45 yıldır geliştirilen bulanık mantık ile çok karmaşık sorunların çok basit şekilde çözülebileceğini gösterdi [6].

Bulanıklık, rastgelelikle aynı şey midir? Hayır, kısaca bulanıklık olaydaki belirsizliği ifade eder. Bir olayın olup-olmadığını değil hangi dereceye kadar olduğunu ölçer. Rastgelelik, olayın oluşumundaki kesin olmayışlığı ifade eder. Bir olayın olmadığı rastgeledir, yani olay olabilir de olmayabilir de. Hangi dereceye kadar olduğu ise bulanıklıktır. Bulanık genel olarak "gereklilik" olmasına rağmen, rastgelelik "tahminsel"dir [22].

Toplamsallık özelliği etkili ve uygun olabilir ancak çok keskindir ve esnek değildir. İşte bu noktada ölçümün toplamsallık özelliği daha zayıf bir şart olan monotonlukla yer değiştirmiştir. Toplamsallık özelliği göstermemesi bulanık ölçümlerin ana karakteristiğidir. Bu yüzden bazı kaynaklarda toplamsal olmayan ölçüm diye de isimlendirilir. "Bulanık İntegral" terimi ise bulanık ölçümlerin sonucu ile elde edilen integraller için kullanılan genel bir terimdir. Chouget İntegral, Sipos İntegral, Sugeno İntegral vb, bulanık integral biçimleri mevcuttur [10].

2.BÖLÜM

KÜME BİLGİLERİ

Ölçüm kavramı bir küme fonksiyonu olduğundan dolayı kümelerin cebirsel yapıları önemlidir. Bu bölümde üzerinde ölçüm kuramının tanımlanacağı küme sınıfları ve bu küme sınıflarının ürettikleri halkalar, cebirler ile bulanık kümeler ve bulanık kümeler üzerindeki cebirsel yapılar ile ilgili temel tanım ve teoremler verilerek, incelenmiştir. Bu bölümde küme sınıfları ile ilgili kısım [9,14,20,30] bulanık kümelerle ilgili kısım Zadeh'in [33] çalışmasından derlenmiştir.

2.1. Küme Sınıfları

Tanım 2.1.1. X kümesinin tüm alt kümeleri sınıfına *kuvvet kümesi* denir ve $P(X)$ ile gösterilir. $P(X)$ in alt kümelerine sınıf denir.

Tanım 2.1.2. Aşağıdaki şartları sağlayan boş kümeden farklı bir R sınıfına *halka* denir.

$$\forall E,F \in R \; ; \; E \cup F \in R \quad ve \quad E - F \in R$$

Önerme 2.1.1. Boş küme her halkanın elemanıdır.

Teorem 2.1.1. Her halka birleşim, kesişim ve simetrik fark işlemleri altında kapalıdır ve tersine arakesit ve simetrik fark işlemleri altında kapalı olan boş olmayan bir küme sınıfı bir halkadır.

İspat:

$$E \Delta F = (E-F) \cup (F-E) \quad ve \quad E \cap F = (E \cup F) - (E \Delta F)$$

bu şekilde birinci sonuç bulunur. Şimdi tersine

$$E \cup F = (E \Delta F) \Delta (E \cap F) \quad ve \quad E - F = (E \Delta F) \cap E$$

olup ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 2.1.2. Kesişim, fark ve ayrık kümelerin birleşimleri altında kapalı olan boş olmayan her küme sınıfı bir halkadır.

İspat: Teorem 2. 1. 1 ve aşağıdaki eşitlikten sonuç bulunur.

$$\boldsymbol{E \Delta F = \left[E-(E\cap F)\right]\cup\left[F-(E\cap F)\right]}$$

Örnek 2.1.1. $\boldsymbol{X}$ kümesinin sonlu bütün alt kümelerinin sınıfı bir halkadır.

Tanım 2.1.3. Aşağıdaki şartları sağlayan boş kümeden farklı bir $\boldsymbol{R}$ sınıfına *cebir* denir.

i. $\boldsymbol{\forall E,F \in R}$; $\boldsymbol{E\cup F\in R}$
ii. $\boldsymbol{\forall E \in R}$; $\boldsymbol{\overline{E}\in R}$

Teorem 2.1.3. Cebir, $\boldsymbol{X}$ kümesini içeren bir halkadır ve tersine $\boldsymbol{X}$ kümesini içeren bir halka, cebirdir.

İspat: $\boldsymbol{R}$ bir cebir olsun.

$$\boldsymbol{E-F = E\cap\overline{F} = \overline{\left(\overline{E}\cup F\right)}}$$

ve $\boldsymbol{E\in R}$ ise

$$\boldsymbol{X = E\cup\overline{E}\in R}$$

o halde teoremin birinci kısmı tamamlanmış olur. Tersine $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{X}$ kümesini içeren bir halka ise $\boldsymbol{\forall E\in R}$ için

$$\boldsymbol{\overline{E} = X - E\in R}$$

olduğundan teoremin ikinci kısmı da gösterilmiş olup ispat tamamlanır. ■

Örnek 2.1.2. Bütün sonlu kümeler ve onların tümleyenlerinin sınıfı bir cebirdir.

Tanım 2.1.4. $\boldsymbol{\varphi}$ boş olmayan bir sınıf aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\boldsymbol{\varphi}$ küme sınıfına *yarı halka* denir.

i. $\boldsymbol{\forall E,F\in\varphi}$; $\boldsymbol{E\cap F\in\varphi}$

ii. $\forall E \subset F \in \varphi$; $i = 1,2,3,...,n$ *için*

$$E = C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset ... \subset C_n = F$$

$$D_i = C_i - C_{i-1} \in \varphi$$

olacak biçimde φ nin içinde sonlu bir $\{C_0, C_1, C_2, ..., C_n\}$ küme sınıfı vardır. Her halka yarı halkadır ve boş küme her yarı halkanın bir elemanıdır.

Örnek 2.1.3. X kümesinin tek elemanlı tüm alt kümelerini ve boş kümeyi içeren küme sınıfı bir yarı halkadır.

Tanım 2.1.5. $\mathbb{F}$ boş olmayan bir küme sınıfı aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\mathbb{F}$ küme sınıfına σ - *halka* denir.

i. $\forall E, F \in \mathbb{F}$; $E - F \in \mathbb{F}$

ii. $\forall E_i \in \mathbb{F}$; $i = 1,2,3,...,$ $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathbb{F}$

Bir σ - halka sayılabilir birleşim altında kapalı olan bir halkadır.

Önerme 2.1.2. Bir σ - halka sayılabilir arakesit altında kapalıdır. Bundan dolayı $\mathbb{F}$ bir σ - halka ve $\{E_n\} \in \mathbb{F}$ bir küme dizisi ise;

$$\limsup_n E_n \in \mathbb{F} \qquad ve \qquad \liminf_n E_n \in \mathbb{F}$$

olur.

Örnek 2.1.4. Tüm sayılabilir kümelerin sınıfı bir σ - halkadır.

Tanım 2.1.6. X kümesini içeren bir σ - halkaya σ - cebiri denir.

Örnek 2.1.5. Tüm sayılabilir kümeler ve onların tümleyenlerinin sınıfı bir σ - cebirdir

Önerme 2.1.3. $\mathbb{F}$ bir σ - halka ise $\mathbb{F} \cup \{E : \bar{E} \in \mathbb{F}\}$ bir σ - cebirdir.

Tanım 2.1.7. Boş olmayan ve her $\{E_n\} \subset M$ monoton küme dizisi için eğer $\lim_n E_n \in M$ ise M küme sınıfına *monoton sınıf* denir.

Önerme 2.1.4. Bir σ - halka bir monoton sınıftır.

Önerme 2.1.5. Bir halka aynı zamanda bir monoton sınıf ise bu bir σ -halkadır.

Tanım 2.1.8. $\mathbb{F}_p$ boş olmayan bir sınıf ve T keyfi indeks kümesi olmak üzere

$\forall\{E_t : t\in T\}\subset \mathbb{F}_p$ için

$$\bigcup_t E_t \in \mathbb{F}_p \qquad \text{ve} \qquad \bigcap_t E_t \in \mathbb{F}_p$$

ise $\mathbb{F}_p$ sınıfına *düzenli sınıfı* denir.

Önerme 2.1.6. Düzenli sınıf bir monoton sınıftır.

Örnek 2.1.6. $X=[0,1]$ kapalı birim aralık olsun. $a\in[0,1]$ olmak üzere $[0,a)$ ya da $[0,a]$ biçimindeki tüm kümelerin sınıfı düzenli bir sınıftır.

Önerme 2.1.7. E sabit bir küme olsun. φ bir σ - halka ise (sırasıyla halka, yarı halka, monoton sınıf, düzenli sınıfı) $\varphi\cap E$ de σ - halkadır.

Teorem 2.1.4. φ bir küme sınıfı olsun. φ sınıfını kapsayan en küçük bir R_0 halkası vardır.

$$\forall R \textit{ ve } R_0\supset\varphi \textit{ için } R\supset\varphi \Rightarrow R\supset R_0$$

R_0, φ sınıfının ürettiği halka olarak adlandırılır ve $R(\varphi)$ ile gösterilir.

İspat: $P(X)$, φ sınıfını içeren bir halkadır. φ yi içeren halkaların kesişimi de yine φ yi içeren bir halkadır. Bu R_0 halkası ile gösterilir. R_0 ın tekliği aşikârdır. ■

Benzer şekilde φ nin ürettiği σ - halka, monoton sınıf ve düzenli sınıf için tanımlanıp sırasıyla $\mathbb{F}(\varphi)$, $M(\varphi)$, $\mathbb{F}_p(\varphi)$ ile gösterilebilir.

Örnek 2.1.8. X sonsuz bir küme olsun. φ bütün tek elemanlı kümelerin sınıfı ise R(φ) bütün sonlu kümelerin ve $\mathbb{F}(\varphi)$ bütün sayılabilir kümelerin sınıfıdır.

Örnek 2.1.9. X reel doğru olsun. φ tüm açık aralıkların sınıfı ise $M(\varphi)$ tüm açık aralıkların sınıfı ve $\mathbb{F}_p(\varphi) = P(X)$ dir.

Önerme 2.1.8. $\varphi_1 \subset \varphi_2$ ise $\mathbb{K}(\varphi_1) \subset \mathbb{K}(\varphi_2)$ dir. Burada $\mathbb{K}$ yerine R, M, $\mathbb{F}_p$ veya $\mathbb{F}$ den herhangi biri alınabilir.

Teorem 2.1.5. φ bir yarı halka olsun. $R(\varphi)$, φ deki bütün kümelerin sonlu, ayrık birleşimlerinin sınıfıdır.

Teorem 2.1.6. $\mathbb{F}(\varphi) = \mathbb{F}\,(R(\varphi))$.

İspat: İlk olarak $\varphi \subset R(\varphi)$ olduğundan Önerme 2. 1. 8 e göre;

$$\mathbb{F}(\varphi) \subset \mathbb{F}(R(\varphi))$$

İkinci olarak $\mathbb{F}(\varphi) \supset \varphi$ ve $\mathbb{F}(\varphi)$ bir halka olduğundan

$$\mathbb{F}(\varphi) \supset R(\varphi)$$

olur.

Ayrıca $\mathbb{F}(\varphi)$ bir σ- halka olduğundan,

$$\mathbb{F}(\varphi) \supset \mathbb{F}(R(\varphi))$$

olur. Böylece

$$\mathbb{F}(\varphi) = \mathbb{F}\,(R(\varphi))$$

bulunur. ■

Örnek 2.1.10. X reel doğru ve φ de Örnek 2.1.3 deki yarı halka olsun. Bu durumda $\mathbb{F}(\varphi)$ ye Borel cebiri denir ve "$\mathbb{B}$" ile gösterilir. $\mathbb{B}$ deki kümeler Borel kümesi olarak adlandırılır. $\mathbb{B}$ aynı zamanda sırasıyla tüm açık aralıkların sınıfı, tüm kapalı aralıkların sınıfı, tüm soldan açık sağdan kapalı aralıkların sınıfı, bütün soldan kapalı sağdan açık aralıkların sınıfı veya tüm aralıkların sınıfı tarafından üretilen bir σ-halkadır.

Teorem 2.1.7. φ bir küme sınıfı ise,

$$\mathbb{F}_p(\varphi)=\left\{\bigcup_{t\in T}\bigcap_{s\in S_t} E_s : E_s\in\varphi \quad S_t \text{ ve } T \text{ keyfi indeks kümeleri}\right\}$$

olur.

İspat: Eşitliğin sağ tarafını V ile gösterelim.

i. S_t ve T tek elemanlı olabileceklerinden $V\supset\varphi$

ii. Bileşke işleminin birleşme özelliğinden V, bileşke işlemine göre kapalıdır.

iii. φ deki kesişim ve birleşim işleminin yer değiştirebilmesinden ve kesişimin birleşme özelliğinden V, kesişim işlemine göre kapalıdır.

Bu yüzden V, φ yi içeren bir düzenli sınıftır ve $V\supset\mathbb{F}(\varphi)$.

Tersine φ yi içeren her düzenli sınıf V i de kapsar buradan $\mathbb{F}_p(\varphi)\supset V$.

Sonuç olarak

$$\mathbb{F}_p(\varphi)=V$$

bulunur. ■

Teorem 2.1.8. φ herhangi bir sınıf ve A herhangi bir küme ise,

$$\mathbb{F}(\varphi)\cap A=\mathbb{F}(\varphi\cap A)$$

dır.

Benzer şekilde halka, monoton sınıf ve düzenli sınıf içinde aynı ifade geçerlidir.

İspat: *i.* $\mathbb{F}(\varphi)\cap A$ bir σ -halkadır ve $\varphi\cap A$ yı kapsar, bu yüzden

$$\mathbb{F}(\varphi)\cap A\supset\mathbb{F}(\varphi\cap A)$$

olur.

ii. $V=\{E:E\cap A\in\mathbb{F}(\varphi\cap A),\, E\in\mathbb{F}(\varphi)\}$ olsun. V bir σ -halka ve $V\supset\varphi$ olur.

$V\supset\mathbb{F}(\varphi)$ olduğundan $\forall E\in\mathbb{F}(\varphi)$ için

$$E\cap A\in\mathbb{F}(\varphi\cap A)$$

olur. Buradan,

$$\mathbb{F}(\varphi)\cap A\subset\mathbb{F}(\varphi\cap A)$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\mathbb{F}(\varphi)\cap A=\mathbb{F}(\varphi\cap A)$$

elde edilir. ■

Örnek 2.1.11. $\mathbb{B}$ reel doğru üzerinde bir borel cebiri olsun. $\mathbb{B}\cap[0,1]$ birim aralık üzerindeki borel cebiri olarak adlandırılır. Bu, [0,1] deki tüm aralıkların sınıfı tarafından üretilen σ -halkadır.

Teorem 2.1.9. Eğer R bir halka ise $M(R)=\mathbb{F}(R)$ olur.

Sonuç 2.1.1. Bir halkayı kapsayan monoton sınıf, bu halkanın ürettiği σ -halkayı da kapsar.

2.2. Bulanık Kümeler

1965 yılına kadar matematikte, incelenen konuların (olayların) daha önce saptanmış olan kurallara kesin olarak uyup uymadığı incelenmiştir. Bu incelemeler de her zaman kendimize göre bir kesinlik aranmıştır. Araç olarak, düşünce sistemimizde, iki değerli mantık kullanılmıştır. Örneğin bir önerme için, daha önce saptanan kurallara uyuyorsa doğru, uymuyorsa yanlış denilmiştir. Buna karşın yaşadığımız evrende birçok olay vardır ki, bunlarla ilgili önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu ayırt etmek çoğu kez bizi güç durumda bırakabilir. Başka bir deyişle bizi yanılgıya düşürebilir. Örneğin elinizdeki elmanın bir parçasını ısırın ve şu soruyu sorun;"elimdeki nedir?" yanıt "elma" olacaktır. Bir parça daha alın ve yine aynı soruyu sorun. Yanıtınız belki yine "elma" olacaktır ama içinizden bu yanıtı biraz daha açmak geçecektir. Örneğin, "biraz yenmiş bir elma" gibi. Isırmaya ve soruyu sormaya devam edin. Öyle bir an gelecektir ki, elinizde tuttuğunuz, her neye benziyor ise, artık sadece "elma" sözcüğü ile açıklanamayacaktır. Yemeye devam edin. Sonunda elma yok olacak ve sorunun yanıtı da "hiçbir şey" olacaktır. Şimdi sorunuzu değiştirin, "elma ne zaman elma olmaktan çıktı? ". Bu soruya bir yanıt bulamayacaksınız. Burada verilen örnek, bulanık mantığın mantığını anlatan çok güzel bir örnektir.

Soruda, "ne zaman" sözcüğü, içerisinde bir kesinlik taşımaktadır. Yani yanıtın "5.ısırıktan sonra", ya da "elma yemeye başladıktan 5 dk. sonra" gibi, kesin bir şekilde ifade beklenmektedir.

Bulanık mantık, " elmadan, elma değile geçişi" bir derece meselesi olarak algılar, klasik mantık(Aristo mantığı) ise, kesin bir an ister [3].

Bu gözlemler ve çeşitli araştırmacılar, iki değerli mantığa dayanan bugünkü matematiğin kesinlik göstermeyen birçok olayları tam olarak açıklayamayacağı düşüncesini doğurmuştur. Bu durumu ilk kez 1965 yılında Zadeh yayınladığı "Fuzzy Sets" [33] , adlı makalesiyle ortaya koydu ve bulanık küme (Fuzzy set) kavramını tanıttı. Zadeh daha sonra bulanık kümelerle ilgili birçok çalışma yaptı [34-36].

2.3. Bulanık Küme Kavramı

Şimdiye kadar, bir kümenin belirtilmesini bu kümenin iyi tanımlanmış olması koşuluna bağladık. Başka bir deyişle, A kümesinin tanımlı olması için evrensel kümeden seçtiğimiz bir x elemanı A kümesinin elemanı mıdır? Sorusuna kesinlikle evet ya da hayır dememiz gerekirdi. Bunu $X \neq \varnothing$ bir küme olmak üzere, A kümesinin

$$\forall x \in X \;\; için \;\; \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

ile tanımlı $\mu_A : X \rightarrow \{0,1\}$ üyelik fonksiyonu ile ifade ediyorduk [17]. Zadeh'in [33] de ortaya koyduğu aşağıdaki tanıma göre $0 \leq r \leq 1$ olmak üzere $x \in X$ elemanı, A kümesinin üyelik derecesi r olan bir elemanı olmaktadır [21,24].

Tanım 2.3.1. $X = \{x : x \in X\}$ kümesi verilmiş olsun. $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \in [0,1]$ olmak üzere

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

kümesine X in A *bulanık kümesi* denir. μ_A fonksiyonuna A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu, $\mu_A(x)$ değerine x n üyelik derecesi (ya da değeri) ve $\mu_A(x)$ kümesine de A bulanık kümesine ait elemanların üyelik derecelerinin kümesi denir [33].

0 ve 1 sayıları [0,1] aralığının elemanları olduğundan her kümeyi bir bulanık küme olarak düşünebiliriz.

Eğer;

$$\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1$$

ise bulanık kümeye normal denir [18,19,32].

Tanım 2.3.2. Eğer her $x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ise $A \subset B$ denir.

Tanım 2.3.3. Bulanık kümelerde birleşme işlemi $A \cup B$, "$\vee$" verilen bulanık kümelerin en büyük işlemi olmak üzere aşağıdaki biçimde tanımlanır;

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \qquad \forall x \in X$$

Tanım 2.3.4. Bulanık kümelerde kesişim işlemi, $A \cap B$,"$\wedge$" verilen bulanık kümelerin en küçük işlemi olmak üzere aşağıdaki biçimde tanımlanır;

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \qquad \forall x \in X$$

Benzer biçimde eğer $\{A_t : t \in T\}$ bulanık kümelerinin bir sınıfı ise $\cup_{t \in T} A_t$ *ve* $\cap_{t \in T} A$ bulanık kümeleri de aynı üyelik fonksiyonları kullanılarak;

$$\sup_{t \in T} \mu_{A_t}(x) \text{ ve } \inf_{t \in T} \mu_{A_t}(x)$$

ile bulunur [37].

Tanım 2.3.5. A bir bulanık küme olsun. A nın tümleyeni $\bar{A}$, aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad \forall x \in X$$

Teorem 2.3.1. Bulanık kümelerde birleşim, kesişim ve tümleyen işlemleri aşağıdaki özelliklere sahiptir [4,38] ;

Tek kuvvet $A \cup A = A$

$A \cap A = A$

Değişme $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Tümleme $\bar{\bar{A}} = A$

Yutma $A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

Evrensel ve boş kümede yutma $A \cup X = X$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

Özdeşlik $A \cap X = A$

$A \cup \varnothing = A$

Birleşme $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Dağılma
$$B\cap\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)=\bigcup_{t\in T}(A_t\cap B)$$

$$B\cup\left(\bigcap_{t\in T}A_t\right)=\bigcap_{t\in T}(A_t\cup B)$$

De Morgan kuralı
$$\overline{\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)}=\bigcap_{t\in T}\bar{A}_t$$

$$\overline{\left(\bigcap_{t\in T}A_t\right)}=\bigcup_{t\in T}\bar{A}_t$$

Klasik kümelerde farklı olarak;

$$\mu_{A\cup\bar{A}}(x)\neq\mu_X(x)$$

$$\mu_{A\cap\bar{A}}(x)\neq\mu_{\varnothing}(x)$$

olabilir.

Örnek 2.3.1. X={a,b} ve A, B bulanık kümelerin üyelik fonksiyonları için bulanık küme işlemleri aşağıdaki gibi olur;

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0,3 & x=a\\ 0,8 & x=b\end{cases}$$

$$\mu_B(x)=\begin{cases}0,9 & x=a\\ 1 & x=b\end{cases}$$

$$\mu_{A\cup B}(x)=\begin{cases}0,9 & x=a\\ 1 & x=b\end{cases}$$

$$\mu_{A\cap B}(x)=\begin{cases}0,3 & x=a\\ 0,8 & x=b\end{cases}$$

$$\mu_{\bar{A}}(x)=\begin{cases}0,7 & x=a\\ 0,2 & x=b\end{cases}$$

$$\mu_{\bar{B}}(x)=\begin{cases}0,1 & x=a\\ 0 & x=b\end{cases}$$

$$\mu_{A\cup\bar{A}}(x)=\begin{cases}0,7 & x=a\\ 1 & x=b\end{cases}$$

$$\neq \mu_X(x)$$

$$\mu_{A\cap\bar{A}}(x)=\begin{cases}0,3 & x=a\\ 0 & x=b\end{cases}$$

$$\neq \mu_{\varnothing}(x)$$

Tanım 2.3.6. $A\in V(x)$ olsun. $\{x:\mu_A(x)>0\}$ klasik kümesi A *nın desteği* olarak isimlendirilir ve $\sup A$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.7. $A\in V(x)$ olsun. $\forall\alpha\in[0,1]$ için

$$\{x:\mu_A(x)\geq\alpha\} \quad ve \quad \{x:\mu_A(x)>\alpha\}$$

klasik kümelerine α - *kesim* ve *güçlü* α - *kesim* kümeleri denir ve sırasıyla A_α, A_{α^+} ile gösterilir [5].

Tanım 2.3.8. $X=(-\infty,\infty)$ olsun. Eğer $\forall\alpha\in(0,1]$ için A_α bir sonlu kapalı aralık ise $A\in V(x)$ bulanık kümesine *bulanık sayı* denir. Eğer A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu $a,b\in R$ ve $b\geq 0$ olmak üzere;

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 0 & ,x<a-b \quad veya \quad x>a+b \\ (x-a+b)/b & ,a-b\le x<a \\ (a+b-x)/b & ,a\le x<a+b \\ 1 & ,x=a \end{cases}$$

ise A ya *üçgensel bulanık sayı* denir [7].

Her üçgensel bulanık sayı bir bulanık sayı, her reel sayı özel bir üçgensel bulanık sayı ve buradan her reel sayı aynı zamanda bulanık sayıdır.

Tanım 2.3.9. $X=(-\infty,\infty)$ olsun. Eğer $\forall x_1,x_2,x_3\in X$ için $x_1\le x_2\le x_3$

$$\mu_A(x_2)=\mu_A(x_1)\wedge\mu_A(x_3)$$

ise $A\in V(x)$ bulanık kümesine *konveks* denir [4].

Teorem 2.3.2. Her bulanık sayı $(-\infty,\infty)$ un konveks bulanık alt kümesidir ve bunların üyelik fonksiyonları üstten yarı süreklidir.

Tanım 2.3.10. A, B bulanık sayılar olsun. Bu durumda $A+B$, $A-B$, $A.B$, A/B aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mu_{A+B}(z)=\sup_{x+y=z}\left[\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)\right]$$

$$\mu_{A-B}(z)=\sup_{x-y=z}\left[\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)\right]$$

$$\mu_{A.B}(z)=\sup_{x.y=z}\left[\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)\right]$$

$$\mu_{A/B}(z)=\sup_{\frac{x}{y}=z,\,y\neq 0}\left[\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)\right]$$

3.BÖLÜM

ÖLÇÜM

Bu bölümde klasik anlamdaki ölçüm kavramı ve bulanık ölçümlerle ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir.

3.1.Klasik Ölçüm

Klasik anlamdaki ölçümler toplamsal ölçümler olarak da adlandırılırlar. Klasik ölçümlerle ilgili olarak genel tanım ve teoremler [2], [13], [20] kaynaklarından derlenmiştir.

Tanım 3.1.1. $\mathscr{C}, X$ kümesinin alt kümelerinden oluşan bir cebir ve μ, $\mathscr{C}$ cebirinde genişletilmiş reel değerli fonksiyon olsun. Aşağıdaki şartları sağlıyorsa μ ye *ölçüm* denir.

i. $\mu(\varnothing)=0$

ii. $\forall A\in\mathscr{C}$, $\mu(A)\geq 0$

iii. $\forall A_n\in\mathscr{C}$ ikişer ikişer ayrık küme dizisi ve $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{C}$ için

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\quad \text{(sayılabilir toplamsallık özelliği)}$$

eğer

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k}A_n\right)=\sum_{n=1}^{k}\mu(A_n)$$

alınırsa sonlu *toplamsallık özelliği* denir.

Önerme 3.1.1. μ, $\mathscr{C}$ cebiri üzerinde bir ölçüm olsun.

i. $A \subset B,\ A \in \mathscr{C}, B \in \mathscr{C}$ *için* $\mu(A) \le \mu(B)$

ii. Eğer $A_n \in \mathscr{C}$ $, 1 \le n < \infty$ *ve* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *için*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \text{(sayılabilir toplamsallık özelliği).}$$

İspat:

i. $B = A \cup (B - A)$; buradan $A_1 = A$, $A_2 = B - A$ **ve** $n > 2$ **için** $A_n = \varnothing$ ise μ nin sayılabilir toplamsallığından;

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \quad ve \quad \mu(B) \ge \mu(A)$$

olur.

ii. $n > 1$ *ve* $A_1 = B_1$ $B_n = A_n - \bigcup_{n=1}^{n-1} A_i$ olsun. $\forall n$ için;

$B_n \in \mathscr{C}$ $, B_n \subset A_n$ ve B_n ler ikişer ikişer ayrık kümeler ise

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{C}$$

buradan

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \qquad \blacksquare$$

Önerme 3.1.2. μ , $\mathscr{C}$ cebiri üzerinde bir ölçüm olsun.

i. Eğer $A_n \subset A_{n+1}$, $A_n \in \mathscr{C}$, $1 \le n < \infty$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{C}$ ise

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

ii. Eğer $A_n \supset A_{n+1}$ $A_n \in \mathscr{C}$, ise; $1 \le n < \infty$ $\mu(A_1) < \infty$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{C}$ ise

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$$

Ayrıca, $i.$) den sonlu toplamsal μ için sayılabilir toplamsallık bulunur.

3.2. Bulanık Ölçüm Metotları

Bulanık ölçümlerde üyelik fonksiyonlarından ziyade güven, olasılık ve benzerlik dereceleri önem taşır. Bu derece bir evrensel kümedeki aitliği belli olmayan bir elemanın, evrensel kümesinin bir alt kümesine olan aitliğinin derecesidir. Bu bölümde klasik kümeler üzerindeki bulanık ölçümler yüzeysel olarak incelenmiştir ve bulanık ölçümlerle ilgili çeşitli tanım ve teoremler verilmiştir. Bulanık ölçüm düşüncesi ilk olarak Sugeno [27,28] tarafından tasarlanmıştır.

3.3. Bulanık Ölçüm

$X \neq \varnothing$ bir küme, $\mathscr{C}$, X'in alt kümelerinin boştan farklı bir sınıfı ve

m: $\mathscr{C} \to [0,\infty]$ negatif olmayan, $\mathscr{C}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir küme fonksiyonu olsun. Bu durumda;

$$\sup_{x\in\varnothing}\{x : x\in[0,\infty]\}=0$$

$$\inf_{x\in\varnothing}\{x : x\in[0,\infty]\}=1$$

$\sum_{i\in\varnothing} A_i = 0$ (burada $\{A_i\}$ bir reel sayı dizisidir.) olarak alalım. [29,30].

Tanım 3.3.1. m: $\mathscr{C} \to [0,\infty]$bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bu m fonksiyonuna *bulanık ölçüm* denir. [25]

$i.\ m(\varnothing)=0$ $,\varnothing\in\mathscr{C}$ için

$ii.\ A\in\mathscr{C}\quad B\in\mathscr{C}\quad A\subset B$ ***için*** $m(A)\le m(B)$ (monotonluk şartı)

$iii.\ \forall n\in N\qquad \{A_n\}\subset\mathscr{C}$

$$A_1 \subset A_2 \subset ..., \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{C} \qquad \text{için}$$

$$\lim_n m(A_n) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \qquad \text{(üstten sürekli)}$$

iv. $\forall n \in N \quad \{A_n\} \subset \mathscr{C}$

$$A_1 \supset A_2 \supset ..., \quad m(A_1) < \infty \quad ve \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{C} \qquad \text{için}$$

$$\lim_n m(A_n) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \qquad \text{(alttan sürekli)}$$

Tanım 3.2.2. Eğer (X, $\mathscr{C}$) üzerinde Tanım 3.3.1. deki (i), (ii) ve (iii) koşulları sağlanıyorsa m' ye *üstten yarı sürekli bulanık ölçüm*; (i), (ii) ve (iv) koşulları sağlanıyorsa m'ye *alttan yarı sürekli bulanık ölçüm*; kısaca her ikisine birden *yarı sürekli bulanık ölçüm* denir.

Bundan başka $X \in \mathscr{C}$, $m(x)=1$ ise m bulanık ölçüm veya yarı sürekli bulanık ölçüm *normaldir* denir.

Genellikle m nün tanımlı olduğu $\mathscr{C}$ sınıfı olarak monoton sınıfı yarı halka, halka, cebir, σ-cebir, σ-halka, düzenli sınıf veya kuvvet kümesi göz önüne alınabilir. Eğer m , $(X,\mathbb{F})$ de bir bulanık ölçüm (veya yarı sürekli bulanık ölçüm) ise $(X,\mathbb{F},m)$ ye bir *bulanık ölçüm uzayı*(veya yarı sürekli bulanık ölçüm uzayı) denir.

Bir yarı halka üzerindeki bulanık ölçümde, klasik ölçümdeki toplamsallık yerine monotonluk, süreklilik ve boş kümede sıfır olma anlamına gelir.

Bunun yanında bulanık ölçüme toplamsal olmayan ölçüm de denir [31].

Örnek 3.3.1. μ, $(X,\mathbb{F})$ üzerinde tanımlı ve her $E \in \mathbb{F}$ için x_0, X kümesinde sabit bir nokta olmak üzere

$$\mu(E)=\begin{cases}1, & x_0 \in E\\ 0, & x_0 \notin E\end{cases}$$

biçiminde tanımlanan Dirac Ölçümü bir normal bulanık ölçümdür.

R, X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir cebir ve μ, (R,X) üzerinde tanımlı düzenli bir bulanık ölçüm (düzenli artan yarı sürekli bulanık ölçüm veya düzenli azalan yarı sürekli bulanık ölçüm) olsun. Eğer v, (R,X) de bir küme fonksiyonu ve

$$v(E)=1-\mu(\bar{E})$$

ise v düzgün bulanık ölçüme sırasıyla, düzenli artan yarı sürekli veya düzenli azalan yarı sürekli bulanık ölçüm) dür. v ye μ nün *iki yönlü(dual)* bulanık ölçümü denir[16,23,26].

4.BÖLÜM

İNTEGRAL

Bu bölümde integral konusunun önce klasik integral, sonra bulanık integralle ilgili tanım ve teoremler verilmiştir. Burada klasik integralle ilgili kısımlar [9,15] ve bulanık integralle ilgili kısım [11,12] çalışmalarında derlenmiştir.

4.1.Belirsiz İntegral Kavramı:

Türev konusu işlenirken şu sorunun cevabını araştırdık: $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi nedir? Bu soru kadar doğal olan bir başka soru da şudur: $y = f(x)$ fonksiyonu verildiğinde bu fonksiyonu türev kabul eden fonksiyon hangisidir? İşte bu sorunun cevabı bizi belirsiz integral kavramına götürür.

Bunu bir örnekle açıklayalım: $f(x) = 3x^2$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

Türevi $f(x) = 3x^2$ olan bir fonksiyon $F_0(x) = x^3$ dir. Ancak,

$$F_1(x) = x^3 + 1, \qquad F_2(x) = x^3 + 70, \qquad F_3(x) = x^3 + 20^{200}, ...$$

fonksiyonlarının da her birinin türevi $f(x) = 3x^2$ dir. Dolayısıyla verilen $y = f(x)$ fonksiyonunu türev kabul eden birden fazla fonksiyonun olduğu görülür. Bu fonksiyonları, c sabit olmak üzere;

$$F(x) = x^3 + c$$

şeklinde belirtiriz. İşte bu $F(x)=x^3+c$ fonksiyonlarına $f(x)=3x^2$ fonksiyonunun ilkelleri veya belirsiz integrali adı verilir. Bu örnekten sonra aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 4.1.1. $y=f(x)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $F'(x)=f(x)$ ise $F(x)+c$ ye $y=f(x)$ fonksiyonunun *belirsiz integrali* denir ve

$$\int f(x)dx = F(x)+c$$

olarak yazılır. Burada c ye integral sabiti, $f(x)$ e integrand ve dx diferansiyelindeki x e de integral değişkeni adı verilir.

Yukarıdaki açıklamalar ve tanımlar göz önüne alınırsa verilen $y=f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integrali şu sorunun cevabı olur: Hangi fonksiyonun türevi $y=f(x)$ dir?

4.2. Riemann Toplamı ve Belirli İntegralin Tanımı

Şimdi de [a,b] kapalı aralığında tanımlanan sınırlı bir f fonksiyonunu göz önüne alalım. [a,b] aralığının bölüntüsü $P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ olsun. Ayrıca,

$$x_0 \le z_1 \le x_1 \ , \ x_1 \le z_2 \le x_2 \ , \dots , x_{n-1} \le z_n \le x_n$$

olmak üzere $z_1, z_2, \dots, z_n$ noktalarını göz önüne alalım. Fonksiyonun bu noktalardaki değeri $f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_n)$ olmak üzere

$$f(z_1)\Delta x_1 + f(z_2)\Delta x_2 + \dots + f(z_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \dots (4.2.1)$$

toplamını teşkil edelim. f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sınırlı bir fonksiyon olduğundan her bir $f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_n)$ belirli bir reel sayıdır. Dolayısıyla **(4.2.1)** toplamı anlamlı olur. Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sınırlı olmazsa bir i için $f(z_i) \to \infty$ olabilir. Bu durumda yukarıdaki toplam ∞ olur. Bu bizim için istenilen bir netice değildir. Onun için verilen aralıkta fonksiyona yüklenilen sınırlılık şartı oldukça önemlidir.

Tanım 4.2.1. f, $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sınırlı bir fonksiyon ve $P\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ bu aralığın bir bölüntüsü olsun. Ayrıca,

$$x_0 \le z_1 \le x_1 \ , \ x_1 \le z_2 \le x_2 \ , \ \dots \ , x_{n-1} \le z_n \le x_n$$

olmak üzere $z_1, z_2, \dots, z_n$ noktalarını göz önüne alalım. Bu durumda,

$$R_n(f,P) = f(z_1)\Delta x_1 + f(z_2)\Delta x_2 + ... + f(z_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \qquad (4.2.2)$$

toplamına f fonksiyonunun $[a,b]$ kapalı aralığındaki *Riemann toplamı* denir.

$z_1, z_2, \ \dots \ , z_n$ noktaları değiştiği zaman bazı fonksiyonlar için $f(z_1), f(z_2), ..., f(z_n)$ değerleri de değişebileceğinden (4.2.2) toplamı da değişebilir. (4.2.2) toplamının $R_n(f,P)$ ile göstermemizin nedeni bu toplamın P bölüntüsüne ve f fonksiyonu ile bağlı olarak değiştiğini vurgulamaktadır.

Tanım 4.2.2. f, $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sınırlı bir fonksiyon ve $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ bu aralığın bir bölüntüsü olsun. Ayrıca,

$$x_0 \le z_1 \le x_1 \ , \ x_1 \le z_2 \le x_2 \ , \ \dots \ , \ x_{n-1} \le z_n \le x_n$$

olmak üzere $z_1, z_2, ..., z_n$ noktalarını göz önüne alalım. Bu durumda

$$S = \lim_{\|P\| \to 0} R_n(f,P) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \qquad (4.2.3)$$

limiti varsa f fonksiyonunun $[a,b]$ kapalı aralığında (Riemann anlamında) *belirli integrali* vardır denir ve $\int_a^b f(x)dx$ ile gösterilir. Bu semboldeki "a" ya integalin alt sınırı, "b" ye de integralin üst sınırı adı verilir.

Bu tanıma göre;

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i$$

olur. Buradaki limitin z_i noktalarına bağlı olarak değişmeyeceğini vurgulayalım.

Belirli integralin tanımı daha önce gördüğümüz belirsiz integral göz önüne alındığında, bizi biraz şaşırtmaktadır. Belirli integral dediğimiz aslında özel bir limittir. Belirli integrali göstermek için kullandığımız

$$\int_a^b f(x)dx$$

sadece bir semboldür.

4.3.Bulanık İntegraller

Bu bölümde $X \in \mathbb{F}$ iken $(X,\mathbb{F})$ ölçülebilir uzay, $\mu : \mathbb{F} \to [0,\infty]$ bulanık ölçüm ve $\mathbb{F}$, $(X,\mathbb{F})$ üzerinde tanımlı negatif olmayan bütün sonlu ölçülebilir fonksiyonların sınıfı olduğunu kabul edelim. Verilen herhangi bir $f \in \mathbb{F}$ için, $\alpha \in [0,\infty]$ iken

$$F_\alpha = \{x \mid f(x) \geq \alpha\}, \qquad F_{\alpha^+} = \{x \mid f(x) > \alpha\}$$

yazalım. F_α ve F_{α^+} kümeleri sırasıyla bir α - kesim ve f nin bir güçlü α - kesimi olsun.

Bu bölümde f fonksiyonunun değer kümesini $[0,\infty)$ kabul ettiğimiz için,

$$\inf_{x \in \emptyset} f(x) = \infty$$

elde ederiz.

Tanım 4.3.1. $A \in F$ ve $f \in F$ olsun. μ ye göre A üzerinde f nin bulanık integrali

$$\oint_A f d\mu$$

ile gösterilir ve

$$\oint_A f d\mu = \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \left[\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)\right]$$

ile tanımlanır. $A = X$ olduğunda bulanık integral

$$\oint f d\mu$$

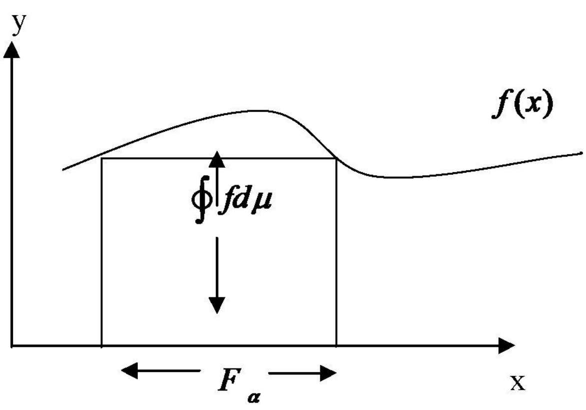
ile gösterilebilir.

Literatürde bazen bulanık integral sugeno integrali olarak da anılır.

Bundan sonrası için $\oint_A f d\mu$ iken $A \in F$ ve $f \in F$ olduğunu göstersin. Eğer $X = (-\infty, \infty)$, F Borel cisim B, μ Lebesugue ölçüm ve $f : X \to [0, \infty)$ bir tek model sürekli fonksiyon ise $\oint f d\mu$ nim geometrik anlamı $f(x)$ eğrisi ve x-ekseni arasındaki en geniş karenin kenar uzunluğudur.(şekil 4.3.1)

Ön teorem 4.3.1.

(1) F_α ve F_{α^+} her ikisi de α ye göre artmaz ve $\alpha < \beta$ iken $F_{\alpha^+} \supset F_\beta$ dir.



Şekil 4.3.1. Özel durumlar altında bulanık integrallerin geometrik yorumu

(2) $$\lim_{\beta \to \alpha^-} F_\beta = \lim_{\beta \to \alpha^-} F_{\beta^+}$$

$$= F_\alpha$$

$$\supset F_{\alpha^+}$$

$$= \lim_{\beta \to \alpha^+} F_\beta$$

$$= \lim_{\beta \to \alpha^+} F_{\beta^+}$$

İspat:

(1)açıktır.

(2)Önerme şu gerçeklere dayanmaktadır:

$$\bigcap_{\beta<\alpha} \{x \mid f(x) \geq \beta\} = \bigcap_{\beta<\alpha} \{x \mid f(x) > \beta\}$$

$$= \{x \mid f(x) \geq \alpha\}$$

$$\supset \{x \mid f(x) > \alpha\}$$

$$= \bigcup_{\beta>\alpha} \{x \mid f(x) \geq \beta\}$$

$$= \bigcup_{\beta>\alpha} \{x \mid f(x) > \beta\} \qquad \blacksquare$$

Teorem 4.3.1. $F(f)$, f ile oluşturulan bir δ-cebiri, f ölçülebilir olacak şekilde en küçük δ- cebiri olduğunda

$$\int_A f d\mu = \sup_{\alpha \in [0,\infty)} \left[\alpha \wedge \mu\left(A \cap F_\alpha\right)\right]$$

$$= \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \left[\alpha \wedge \mu\left(A \cap F_{\alpha^+}\right)\right]$$

$$= \sup_{\alpha \in [0,\infty)} \left[\alpha \wedge \mu\left(A \cap F_{\alpha^+}\right)\right]$$

$$= \sup_{E \in F(f)} \left[\inf_{x \in E} f(x) \wedge \mu(A \cap E)\right]$$

$$= \sup_{E \in F} \left[\left(\inf_{x \in E} f(x)\right) \wedge \mu(A \cap E)\right]$$

dir.

İspat: (1) $\alpha = \infty$ için $F_\alpha = F_{\alpha^+} = \varnothing$ olduğundan

$$\int_A f d\mu = \sup_{\alpha\in[0,\infty)} \left[\alpha \wedge \mu\left(A \cap F_\alpha\right)\right]$$

ve

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty]} \left[\alpha \wedge \mu\left(A \cap F_{\alpha^+}\right)\right] = \sup_{[0,\infty)} \left[\alpha \wedge \mu\left(A \cap F_{\alpha^+}\right)\right]$$

olduğu açıktır.

(2) $$\sup_{\alpha\in[0,\infty)} \left[\alpha \wedge \mu\left(A \cap F_\alpha\right)\right] = \sup_{\alpha\in[0,\infty)} \left[\alpha \wedge \mu\left(A \cap F_{\alpha^+}\right)\right]$$

olduğunu ispatlayalım. Diğer taraftan Ön teorem 4.3.1 den ve μ'nün monotonluğu ile herhangi bir $\alpha \in [0,\infty)$ için

$$\mu\left(A \cap F_\alpha\right) \geq \mu\left(A \cap F_{\alpha^+}\right)$$

elde ederiz. Böylece

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty)} \left[\alpha \wedge \mu\left(A \cap F_\alpha\right)\right] = \sup_{\alpha\in[0,\infty)} \left[\alpha \wedge \mu\left(A \cap F_{\alpha^+}\right)\right]$$

olur. Diğer taraftan, herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $\alpha \in (0,\infty)$ için $\alpha' \in \left((\alpha-\varepsilon) \vee 0, \alpha\right)$ alırsak

$$\alpha \wedge \mu\left(A \cap F_\alpha\right) \leq \left(\alpha' + \varepsilon\right) \wedge \mu\left(A \cap F_{\alpha^+}\right)$$

elde ederiz. Buradan:

$$\begin{aligned}
\sup_{\alpha\in[0,\infty)} \left[\alpha \wedge \mu\left(A \cap F_\alpha\right)\right] &= \sup_{\alpha\in(0,\infty)} \left[\alpha \wedge \mu\left(A \cap F_\alpha\right)\right] \\
&\leq \sup_{\alpha'\in(0,\infty)} \left[\left(\alpha' + \varepsilon\right) \wedge \mu\left(A \cap F_{\alpha'^+}\right)\right] \\
&\leq \sup_{\alpha'\in(0,\infty)} \left[\alpha' \wedge \mu\left(A \cap F_{\alpha'^+}\right)\right] + \varepsilon \\
&= \sup_{\alpha'\in[0,\infty)} \left[\alpha \wedge \mu\left(A \cap F_{\alpha^+}\right)\right] + \varepsilon
\end{aligned}$$

elde ederiz. ε keyfi olarak sıfıra yakın olabileceğinde

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty)}\left[\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)\right]\le\sup_{\alpha\in[0,\infty)}\left[\alpha\wedge\mu\left(A\cap F_{\alpha^+}\right)\right]$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty)}\left[\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)\right]=\sup_{\alpha\in[0,\infty)}\left[\alpha\wedge\mu\left(A\cap F_{\alpha^+}\right)\right]$$

olur. Geriye

$$\int_A fd\mu=\sup_{E\in F(f)}\left[\inf_{x\in E}f(x)\wedge\mu(A\cap E)\right]$$

$$=\sup_{E\in F}\left[\left(\inf_{x\in E}f(x)\right)\wedge\mu(A\cap E)\right]$$

olduğunu ispatlamak kalır.

İlk olarak herhangi bir $\alpha\in[0,\infty]$ için $\inf_{\alpha\in f_\alpha} f(x)\ge\alpha$ olduğundan $F_\alpha\in F(f)$ olduğuna dikkat edersek,

$$\left[\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)\right]\le\sup_{E\in F(f)}\left[\inf_{x\in E}f(x)\wedge\mu(A\cap E)\right]$$

elde ederiz ve böylece

$$\int_A fd\mu=\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\left[\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)\right]$$

$$\le\sup_{E\in F(f)}\left[\inf_{x\in E}f(x)\wedge\mu(A\cap E)\right]$$

olur. Sonra, f F-ölçülebilir olduğundan $F(f)\subset F$ ve böylece

$$\sup_{E\in F(f)}\left[\inf_{x\in E}f(x)\wedge\mu(A\cap E)\right]\le\sup_{E\in F}\left[\left(\inf_{x\in E}f(x)\right)\wedge\mu(A\cap E)\right]$$

olur.

Son olarak herhangi bir $E\in F$ için eğer $\alpha'=\inf_{\alpha\in E}f(x)$ alırsak $E\in F_{\alpha'}$ olur.

Burada μ nün monotonluğu ile

$$\mu(A \cap E) \leq \mu(A \cap F_{\alpha'})$$

olur ve bu yüzden herhangi bir $E \in F$ için,

$$\left[\inf_{x \in E} f(x)\right] \wedge \mu(A \cap E) \leq \alpha' \wedge \mu(A \cap F_{\alpha'})$$

$$\leq \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \left[\alpha \wedge \mu\left(A \cap F_{\alpha}\right)\right]$$

$$= \int_A f d\mu$$

olur. Sonuç olarak

$$\sup_{E \in F} \left[\left(\inf_{x \in E} f(x)\right) \wedge \mu(A \cap E)\right] \leq \int_A f d\mu$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Verilen herhangi bir (X,F,μ), $f \in F$ ve $A \in F$ için bulanık integral hesaplamasını kolaylaştırmak için

$$\Gamma = \left\{\alpha \mid \alpha \in [0,\infty], \mu\left(A \cap F_{\alpha}\right) > \left(A \cap F_{\beta}\right) \text{ herhangi bir } \beta > \alpha\right\}$$

yazarız.

$$\int_A f d\mu = \sup_{\alpha \in \Gamma} \left[\alpha \wedge \mu\left(A \cap F_{\alpha}\right)\right]$$

olduğunu göstermek kolaydır.

Örnek 4.3.1. Herhangi bir $E \in F$ için, $X = \{a,b,c\}$, $F = P(x)$ olsun.

μ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\mu(E) = \begin{cases} |E|, & E \neq \{a,b\} \\ 3, & E = \{a,b\} \end{cases}$$

ve

$$f(x)=\begin{cases} 3 \ , & x=a \quad ise \\ 2{,}5 \ , & x=b \quad ise \\ 2 \ , & x=c \quad ise \end{cases}$$

olsun. O zaman

$$\oint_E fd_\mu = \left[3\wedge\mu(\{a\})\right]\vee\left[2{,}5\wedge\mu(\{a,b\})\right]\vee\left(2\wedge\mu(x)\right)$$

$$=1\vee 2{,}5\vee 2$$

$$=2{,}5$$

dir.

Örnek 4.3.2. $X=[0,1]$, F X deki bütün Borel kümelerinin sınıfı m lebesgue ölçüm olmak üzere $\mu=m^2$, $f(x)=\frac{x}{2}$ olsun

$$F_\alpha=\{x: f(x)\geq\alpha\}=[2\alpha,1]$$

elde ederiz.

$\Gamma=[0,\frac{1}{2})$ olduğundan sadece $\alpha\in[0,\frac{1}{2})$ olduğunu düşünmemiz gerekir. Böylece

$$\oint fd_\mu = \sup_{\alpha\in[0,\frac{1}{2})}\left[\alpha\wedge\mu(F_\alpha)\right]$$

$$= \sup_{\alpha\in[0,\frac{1}{2})}\left[\alpha\wedge(1-2\alpha)^2\right]$$

elde ederiz.

Bu ifade de, $\alpha\in[0,\frac{1}{2})$ iken $(1-2\alpha)^2$ α nın sürekli azalan fonksiyonudur. Buradan, en küçük üst sınır $\alpha=(1-2\alpha)^2$ eşitliğinin çözümünden biri olan noktada yani $\alpha=\frac{1}{4}$ de kabul edilecektir. Sonuç olarak

$$\oint fd_\mu = \frac{1}{4}$$

elde ederiz.

4.4. Bulanık İntegrallerin Özellikleri

Aşağıdaki teorem bulanık integrallerin temel özelliklerini vermektedir.

Teorem 4.4.1.

(1) Eğer $\mu(a)=0$ ise herhangi bir $f \in F$ için $\oint_A f d_\mu = 0$ dır.

(2) Eğer $\oint_A f d_\mu = 0$ ise $\mu(A \cap \{x : f(x) > 0\}) = 0$ dır.

(3) Eğer $f_1 \le f_2$ ise $\oint_A f_1 d_\mu \le \oint_A f_2 d_\mu$ dır.

(4) X_A A nın karakteristik fonksiyonu iken $\oint_A f d_\mu = \oint_A f X_A d_\mu$ dır.

(5)Herhangi bir sabit $a \in [0,\infty)$ için $\oint_A a d_\mu = a \wedge \mu(A)$ dır.

(6) Herhangi bir sabit $a \in [0,\infty)$ için $\oint_A (f+a) d_\mu \le \oint_A f d_\mu + \oint_A a d_\mu$ dir.

İspat: Sadece (2) ve (6) yi ispatlayacağız, diğerleri bulanık integrallerin tanımından hemen elde edilebilirler.

(2) nin ispatında olmayana ergi metodunu kullanacağız,

$$\mu(A \cap \{x : f(x) > 0\}) = c > 0$$

olduğunu varsayalım.

$$A \cap \{x : f(x) \ge 1/n\} \nearrow A \cap \{x : f(x) > 0\}$$

olduğundan μ nün alttan sürekliliğini kullanarak

$$\lim_n \mu\left(A \cap \{x : f(x) \ge 1/n\}\right) = c$$

elde ederiz.

Böylece,

$$\mu\left(A\cap F_{1/n_0}\right)=\mu\left(A\cap\left\{x: f(x)\geq 1/n_0\right\}\right)\geq\frac{c}{2}$$

olacak şekilde n_0 vardır. Sonuç olarak,

$$\oint_A f d_\mu=\sup_{E\in[0,\infty]}\left[\alpha\wedge\mu\left(A\cap F_{\alpha^+}\right)\right]\geq\frac{1}{n_0}\wedge\frac{c}{2}>0$$

elde ederiz. Bu $\oint_A f d_\mu=0$ oluşu ile çelişir.

(6) için Teorem 4.4.1. den

$$\oint_A (f+a)d_\mu=\sup_{E\in F}\left[\inf_{X\in E}\left[f(x)+a\right]\right]\wedge\mu(A\cap E)$$

$$\leq\sup_{E\in F}\left[\left[\inf_{X\in E}\left[f(x)\right]\right]\wedge\mu(A\cap E)\right]+\left[a\wedge\mu(A\cap E)\right]$$

$$\leq\sup_{E\in F}\left[\left[\inf_{X\in E}\left[f(x)\right]\right]\wedge\mu(A\cap E)\right]+\left[a\wedge\mu(A)\right]$$

$$=\sup_{E\in F}\left[\left[\inf_{X\in E}\left[f(x)\right]\right]\wedge\mu(A\cap E)\right]+\left[a\wedge\mu(A)\right]$$

$$=\oint_A f d_\mu+\oint_A a d_\mu$$

elde ederiz. ■

Sonuç Teorem 4.4.1.

(7) Eğer $A\supset B$ ise $\oint_A f d_\mu\geq\oint_B f d_\mu$

(8) $\oint_A (f_1\vee f_2)d_\mu\geq\oint_A f_1 d_\mu\vee\oint_A f_2 d_\mu$

(9) $\oint_A (f_1 \wedge f_2) d_\mu \geq \oint_A f_1 d_\mu \wedge \oint_A f_2 d_\mu$

(10) $\oint_{A\cup B} f d_\mu \geq \oint_A f d_\mu \vee \oint_B f d_\mu$

(11) $\oint_{A\cap B} f d_\mu \leq \oint_A f d_\mu \wedge \oint_B f d_\mu$

dir.

İspat: Özellik (7) Teorem 4.4.1. deki özellik (3) ve (4) den elde edilebilir. Özellik (8) ve (9), (3) den gelir. Özellik (10) ve (11), (7) den hemen görülebilir.

Özellik (1) - (4) (ve bu yüzden (7)-(11)) klasik Lebesgue integrali özelliklerine benzemektedir, fakat (5) ve (6) klasik olanlardan bir dereceye kadar farklıdır. Şunu da belirlemeliyiz ki genel de Bulanık integral, Lebesgue integralinin sahip olduğu bazı önemli özelliklere sahip değildir. Örneğin, Lebesgue integrali lineerlik özelliğine sahiptir. Yani,

$$\oint_A (f_1 + f_2) d_\mu = \oint_A f_1 d_\mu + \oint_A f_2 d_\mu$$

ve

$$\int_A a f d_\mu = a \int_A f d_\mu$$

dür. Fakat Bulanık integral lineerlik özelliğine sahip değildir. Bunu aşağıdaki örnekte görebiliriz. ■

Örnek 4.4.1. $X = [0,1]$, F, X (açıkçası $\mathbf{B} \cap [0,1]$) deki bütün Borel kümelerinin sınıfı ve μ Lebesgue ölçüm olsun. Herhangi bir $x \in \mathbf{X}$ ve $a = \frac{1}{2}$ için $f(x) = x$ alalım. O zaman

$$\oint a f d_\mu = \oint \frac{x}{2} d_\mu = \frac{1}{3}$$

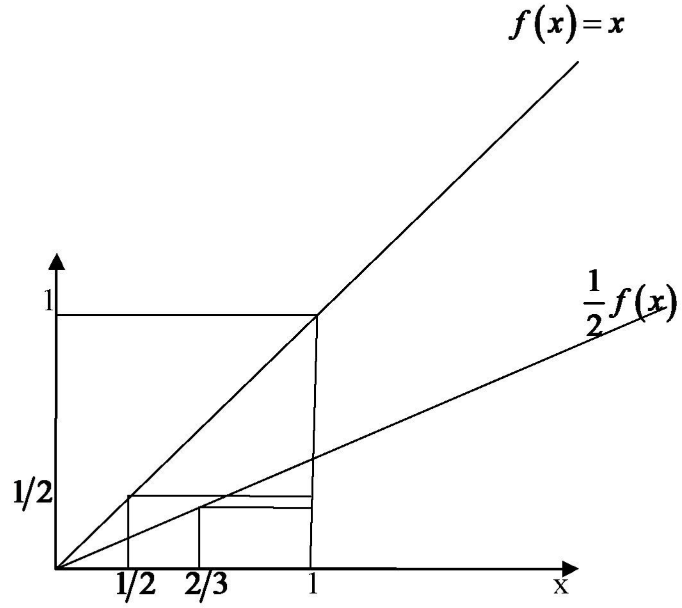
ve

$$a \oint f d_\mu = \frac{1}{2} \oint x d_\mu = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

elde ederiz. Sonuç olarak

$$\oint afd_\mu \neq a\oint fd_\mu$$

elde ederiz.(şekil 4.4.1.)



Şekil: 4.4.1. Örnek 4.4.1.nin grafiği

Ön Teorem 4.4.1. $A\in F$, $a\in[0,\infty]$, $f_1\in F$ ve $f_2\in F$ olsun. A üzerinde $|f_1-f_2|\leq a$ ise

$$\left|\oint_A f_1 d_\mu - \oint_A f_2 d_\mu\right| \leq a$$

elde ederiz.

İspat: A üzerinde $f_1\leq f_2+a$ olduğundan bulanık integralin (Teorem 4.4.1.) (3), (5) ve (6) özelliklerini kullanarak

$$\oint_A f_1 d_\mu \leq \oint_A (f_2+a) d_\mu$$

$$\leq \oint_A f_2 d_\mu + \oint_A a d_\mu$$

$$=\oint_A f_2 d_\mu + [a \wedge \mu(A)]$$

$$\leq \oint_A f_2 d_\mu + a$$

elde ederiz.

Benzer şekilde A üzerinde $f_2 \leq f_1 + a$ dan

$$\oint_A f_2 d_\mu \leq \oint_A f_1 d_\mu + a$$

elde ederiz. Sonuç olarak

$$\left| \oint_A f_1 d_\mu - \oint_A f_2 d_\mu \right| \leq a$$

elde ederiz. ■

Ön Teorem 4.4.2. Herhangi bir $\alpha \in [0,\infty]$ için

$$\oint_A f d_\mu \leq \alpha \vee \mu(A \cap F_{\alpha^+}) \leq \mu(A \cap F_\alpha)$$

dır.

İspat: Herhangi bir $\alpha \in [0,\infty]$için Teorem 4.4.1. ve Ön Teorem 4.4.1. i kullanarak,

$$\oint_A f d_\mu = \sup_{\alpha' \in [0,\alpha]} \left[\alpha' \wedge \mu(A \cap F_{\alpha'^+})\right] \vee \sup_{\alpha' \in [\alpha,\infty]} \left[\alpha' \wedge \mu(A \cap F_{\alpha'^+})\right]$$

$$\leq \sup_{\alpha' \in [0,\alpha]} \alpha' \vee \sup_{\alpha' \in [\alpha,\infty]} \mu(A \cap F_{\alpha'^+})$$

$$\leq \alpha \vee \mu(A \cap F_{\alpha'^+})$$

$$\leq \alpha \vee \mu(A \cap F_\alpha)$$

elde ederiz. ■

4.4.3.Ön Teorem: Herhangi bir $\alpha \in [0,\infty)$ için $\oint_A f d_\mu = \infty$ ancak ve ancak $\mu(A \cap F_\alpha) = \infty$ dur.

İspat: $\Leftarrow$ $\oint_A f d_\mu = \infty$ ise Ön Teorem 4.4.2 den

$$\alpha \vee \mu(A \cap F_\alpha) = \infty$$

olur. Böylece $\alpha \in [0,\infty)$ ise,

$$\mu(A \cap F_\alpha) = \infty$$

dur.

$\Rightarrow$ Tanım 4.3.1'den hemen çıkar. ■

Ön Teorem 4.4.5. Herhangi bir $\alpha \in [0,\infty)$ için,

(1) Herhangi bir $\beta < \alpha \Leftarrow \mu(A \cap F_\beta) \geq \alpha$ için,

$$\oint_A f d_\mu \geq \alpha \Leftrightarrow \mu(A \cap F_\beta) \geq \alpha$$

dır ;

$$\mu(A \cap F_\beta) < \alpha \Rightarrow \mu(A \cap F_\alpha) < \alpha \Rightarrow \mu(A \cap F_{\alpha^+}) < \alpha$$

olacak şekilde $\beta < \alpha$ vardır $\Leftrightarrow \oint_A f d_\mu < \alpha$ dır.

(2) $\oint_A f d_\mu \leq \alpha \Leftrightarrow \mu(A \cap F_{\alpha^+}) \leq \alpha \Leftarrow \mu(A \cap F_\alpha) \leq \alpha$;

$$\oint_A f d_\mu > \alpha \Leftrightarrow \mu(A \cap F_{\alpha^+}) > \alpha \Rightarrow \mu(A \cap F_\alpha) > \alpha$$

(3) $\oint_A f d_\mu = \alpha \Leftrightarrow$ herhangi bir $\beta < \alpha$ için,

$$\mu(A \cap F_\beta) \geq \alpha \geq \mu(A \cap F_{\alpha^+}) \Leftarrow \mu(A \cap F_\alpha) = \alpha$$

dır. $\mu(A)<\infty$ olduğunda

(4) $\oint_A fd_\mu \geq \alpha \Leftrightarrow \mu(A\cap F_\alpha)\geq \alpha$

(5) $\oint_A fd_\mu = \alpha \Leftrightarrow \mu(A\cap F_\alpha)\geq \alpha \geq \mu(A\cap F_{\alpha^+})$

elde ederiz.

İspat :(1) sadece $\alpha\in(0,\infty)$ durumunu düşünmemiz yeterlidir. Herhangi bir $\beta<\alpha$ için, $\mu(A\cap F_\beta)\geq\alpha$ ise,

$$\begin{aligned}
\oint_A fd_\mu &= \sup_{\beta\in[0,\infty)}\left[\beta\wedge\mu(A\cap F_\beta)\right] \\
&\geq \sup_{\beta\in[0,\alpha)}\left[\beta\wedge\mu(A\cap F_\beta)\right] \\
&\geq \sup_{\beta\in[0,\alpha)}\left[\beta\wedge\alpha\right] \\
&\geq \sup_{\beta\in[0,\alpha)}\beta \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

dır.

Tersine , $\mu(A\cap F_\beta)<\alpha$ olacak şekilde $\beta<\alpha$ varsa, Ön Teorem 4.4.2'den

$$\oint_A fd_\mu \leq \beta\vee\mu(A\cap F_\beta)<\alpha$$

dır. Böylece (1) 'deki denklik bağıntısını ispatladık. Diğer gerektirme bağıntılarını Ön Teorem 4.4.1. ve μ nün monotonluğundan çıkar.

(2) $\mu(A\cap F_{\alpha^+})\leq\alpha$ ise Ön Teorem 4.4.2. den

$$\oint_A fd_\mu \leq \alpha\vee\mu(A\cap F_{\alpha^+})=\alpha$$

dır .Tersine Ön Teorem 4.4.1. ve μ nün alttan sürekliliğinden,

$$\lim_{\beta \to \alpha^+} \mu\left(A \cap F_\beta\right) = \mu\left(A \cap F_{\alpha^+}\right)$$

elde ederiz.

Eğer $\mu\left(A \cap F_{\alpha^+}\right) > \alpha$ ise $\mu\left(A \cap F_{\alpha_0}\right) > \alpha$ olacak şekilde $\alpha_0 > \alpha$ vardır. Böylece Tanım 4.3.1. den

$$\oint_A f d_\mu \geq \alpha_0 \wedge \mu\left(A \cap F_{\alpha_0}\right) > \alpha$$

elde ederiz. Böylece (2) deki denklik bağıntısını ispatlamış olduk, kalan özellikler (1) yolla ispatlanabilir.

(3) Bu özellik (1) ve (2) nin birleştirilmesiyle hemen elde edilebilir.

(4) $\mu(A) < \infty$ iken

$$\lim_{\beta \to \alpha^-} \mu\left(A \cap F_\beta\right) = \mu\left(A \cap F_\alpha\right)$$

elde ederiz. Böylece herhangi bir $\beta < \alpha$ için, $\mu\left(A \cap F_{\alpha_0}\right) \geq \alpha$ ancak ve ancak $\mu\left(A \cap F_\beta\right) \geq \alpha$ dır.

Bu yüzden (4), (1) den hemen çıkar.

(4) Benzer şekilde bu özellik (3) den de hemen çıkar. ■

Klasik ölçüm teorisin de, iki ölçülebilir fonksiyon f_1 ve f_2 h.h.h. (hemen hemen heryerde) eşit ise bu fonksiyonların integralleri de eşittir.

Bulanık ölçüm uzayı üzerindeki bulanık integraller için bu doğru mudur? Aşağıdaki örnek de görüldüğü gibi cevabı hayırdır.

Örnek 4.4.2. $X = \{0,1\}$, $F = P(X)$

$$\mu(E) = \begin{cases} 1, & E = E \\ 0, & E \neq X \end{cases}$$

olsun. Eğer

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$$f_2(x)=1$$

ise h.h.h. $f_1=f_2$ dir. Fakat

$$\oint_A f_1 d_\mu = 0 \qquad \text{ve} \qquad \oint_A f_2 d_\mu = 1$$

dır. Bununla beraber bulanık integraller için önemli bir teorem elde ederiz.

Teorem 4.4.2. h.h.h. $f_1=f_2$ ve

$$\oint f_1 d_\mu = \oint f_2 d_\mu$$

ancak ve ancak μ sıfır- toplamsaldır.

İspat: $\Rightarrow$ μ sıfır toplamsal ise,

$$\mu(\{x: f_1(x)\neq f_2(x)\})=0$$

dan herhangi bir $\alpha\in[0,\infty]$ için,

$$\mu(\{x: f_2(x)\geq\alpha\})\leq\mu(\{x: f_1(x)\geq\alpha\})\cup\{x: f_1(x)\neq f_2(x)\}$$

$$=\mu(\{x: f_1(x)\geq\alpha\})$$

olduğunu biliyoruz. Karşıt eşitsizlik de sağlanır. Böylece herhangi bir $\alpha\in[0,\infty]$ için,

$$\mu(\{x: f_1(x)\geq\alpha\})=\mu(\{x: f_2(x)\geq\alpha\})$$

elde ederiz ve bu yüzden Tanım 4.4.1. den

$$\oint f_1 d_\mu = \oint f_2 d_\mu$$

elde ederiz.

$\Leftarrow$ Herhangi bir $E \in F$, $\mu(F)=0$ ile $F \in F$ için, $\mu(E)=\infty$ ise, μ nün monotonluğu ile

$$\mu(E \cup F)=\infty=\mu(E)$$

dir. Şimdi $\mu(E)<\infty$ olduğunu varsayalım ve $\mu(E \cup F)=\mu(E)$ olduğunu göstermek için çelişki ile bir ispat kullanalım. Eğer bu doğru değil ise [yani eğer $\mu(E \cup F)>\mu(E)$ ise], $\alpha \in (\mu(E \cup F), \mu(E))$ alalım ve

$$f_1(x)=\begin{cases} a, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases} a, & x \in E \cup F \\ 0, & x \notin E \cup F \end{cases}$$

ise

$$\mu\{x : f_1(x) \neq f_2(x)\}=\mu(F-E) \leq \mu(F)=0$$

dır. Yani

$$\text{h.h.h.} \qquad f_1=f_2$$

dir.

Böylece

$$\oint f_1 d_\mu = \oint f_2 d_\mu$$

sağlanmalıdır. Fakat şimdi

$$\oint f_1 d_\mu = a \wedge \mu(E)=\mu(E)$$

ve

$$\oint f_2 d_\mu = a \wedge \mu(E \cup F)=a \neq \mu(E)$$

elde ederiz. Böylece bir çelişki elde ederiz. ■

Sonuç 4.4.2. Eğer μ sıfır toplamsal ise, A üzerinde h.h.h. $f_1 = f_2$ olduğunda

$$\oint_{A\cup B} fd_\mu = \oint_A fd_\mu$$

dür.

İspat: A üzerinde h.h.h. $f_1 = f_2$ ise h.h.h. $f_1.X_A = f_2.X_A$ dır. Teorem 4.4.2. ve Teorem 4.4.1.den sonucu elde ederiz. ■

Sonuç 4.4.3. Eğer μ sıfır toplamsal ise, herhangi bir $f \in F$ için, $A \in F$, $\mu(B) = 0$ ile $B \in F$ olduğunda,

$$\oint_{A\cup B} fd_\mu = \oint_A fd_\mu$$

dır.

İspat: Sonuç

$$\text{h.h.h } f.X_{A\cup B} = f.X_A$$

dan hemen çıkar.

Benzer şekilde p.h.h.h. $f_1 = f_2$ olduğunda

$$\oint f_1 d_\mu = \oint f_2 d_\mu$$

olan bir sonuç elde edebiliriz. ■

4.5. Bulanık İntegrallerle Tanımlanan Bazı Bulanık Ölçümler

Bu kesimde verilen bir bulanık ölçüme göre verilen ölçülebilir fonksiyonun bulanık integralini kullanarak bir bulanık ölçümü nasıl tanımlayacağımızdan bahsedeceğiz. Bu kısım [11,12] de derlenmiştir.

Teorem 4.5.1. (X, F, μ) bulanık ölçüm uzayı ve $f \in F$ olsun. (X, F) üzerinde herhangi bir $A \in F$ alt yarı sürekli bulanık ölçüm için v küme fonksiyonu

$$v(A) = \oint_A f d_\mu$$

ile tanımlanır. Ayrıca , μ sonlu ise (X, F) üzerinde v sonlu bulanık ölçümdür.

İspat: Teorem 4.4.1. den $v(\varnothing) = 0$ ve v nin monoton olduğunu biliyoruz. Böylece v nin alttan sürekli olduğunu ispatlamamız gerekir.

$\{E_n\}$ F içinde artan küme dizisi, $E_n \nearrow E \in F$ olsun. O zaman

$$f.X_{E_n} \searrow f.X_E$$

elde ederiz. Ön Teorem 4.4.4. den

$$\lim_n v(E_n) = \lim_n \oint_{E_n} f d_\mu$$

$$= \lim_n \oint_{E_n} f X_{E_n} d_\mu$$

$$= \oint f X_E d_\mu$$

$$= \oint_E f d_\mu$$

$$= v(E)$$

elde ederiz. Ayrıca, μ nün sonlu olduğunu varsayalım $E_n \searrow E \in F$ olmak üzere F içinde verilen herhangi bir küme dizisi $\{E_n\}$ için,

$$f.X_{E_n} \searrow f.X_E$$

ve Ön Teorem 4.4.4. den ayrıca

$$\lim_n v(E_n) = v(E)$$

elde ederiz. Yani v üstten süreklidir. Sonuç olarak v bir bulanık ölçümdür.

$$v(\varnothing)=\oint_{\varnothing} f(x)d_{\mu}=0$$

ifadesinden v nin sonlu olduğu görülür. ■

Aşağıdaki örnek v küme fonksiyonun üstten sürekli olmayabileceğini gösterir.

Örnek 4.5.1. $X=[0,\infty), F$ $[0,\infty)$ içindeki Borel kümelerinin sınıfı μ Lebesgue ölçüm, $f(x)\equiv 1$ olsun. $E_n=[n,\infty), n=1,2,3,...$ alırsak $n=1,2,3,...$ için $E_n \searrow 0$ ve

$$v(E_n)=\oint_{E_n} f(x)d_{\mu}$$

$$=\oint_{[0,\infty)} 1d_{\mu}=1$$

elde ederiz, fakat

$$v(\varnothing)=\oint_{\varnothing} f(x)d_{\mu}=0$$

dır. Bu yüzden v üstten sürekli değildir.

v nin μ ye göre mutlak sürekli olup-olmadığını sormak doğaldır. Genel olarak konuşursak, maalesef cevap hayırdır. Bunu aşağıdaki örnekte görebiliriz.

Örnek 4.5.2. $X=\{a,b\}$ $F=P(x)$ ve

$$\mu(E)=\begin{cases}0, & E=\varnothing\\ 1, & \textbf{diğerleri}\end{cases}$$

ile μ, (X,F) üzerinde bir bulanık ölçüm olsun.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=a\\ 1, & x=b\end{cases}$$

alırsak herhangi bir $E\in F$ için

$$v(E)=\oint_{E} fd_{\mu}$$

ifadesi ile bir v bulanık ölçüm elde ederiz. Şimdi herhangi bir $\varepsilon=\frac{1}{2}>0$ için, $F=X$, $E=\{a\}$ alalım. $F\supset E$ ve herhangi bir pozitif sayı $\delta>0$ dan küçük olan $\mu(F)-\mu(E)=0$ a rağmen

$$\begin{aligned} v(F)-v(E) &= \oint f d_\mu - \oint_{\{a\}} f d_\mu \\ &= 1-0 \\ &= 1 \\ &> \varepsilon \end{aligned}$$

olur. μ ye göre mutlak sürekli değildir.

Bununla beraber, mutlak süreklilik kavramından daha zayıf bir kavram olan zayıf mutlak süreklilik kavramını tanıtırsak, yukarıda bahsedilen soru hakkında pozitif cevap elde ederiz.

Tanım 4.5.1. μ ve v, φ üzerinde iki bulanık ölçüm olsunlar. Eğer herhangi bir $\varepsilon>0$ için $E\in\varphi$ ve $v(E)<\delta$ olduğunda $\mu(E)<\infty$ olacak şekilde $\delta>0$ varsa μ ye v ye göre *zayıf süreklidir* denir ve $\mu \overset{\approx}{\ll} v$ ile gösterilir.

Eğer μ ve v (X,F) üzerinde iki bulanık ölçüm ise $\mu\ll v$ iken $\mu \overset{\approx}{\ll} v$ olacağı açıktır. Daha önce verilen mutlak süreklilik gibi, zayıf mutlak süreklilik de klasik ölçüm teorisin de verilen mutlak süreklilik kavramının bir genellemesidir.

Teorem 4.5.2. (X,F,μ) sonlu bulanık ölçüm uzayı $f\in F$ olsun. Eğer herhangi bir $E\in F$ için v;

$$v(E)=\oint f d_\mu$$

ile tanımlanırsa, $v \overset{\approx}{\ll} \mu$ dir.

İspat: Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\varepsilon = \delta$ alalım. Böylece $\mu(E) < \varepsilon = \delta$ ile herhangi bir $E \in F$ için,

$$v(E) = \oint_E f d_\mu \leq \mu(E) < \varepsilon$$

elde ederiz. Yani $v \overset{\approx}{\ll} \mu$ dir.

5. BÖLÜM

ÖLÇÜM VE İNTEGRAL

5.1. Küme Fonksiyonları

Bu bölüm de küme fonksiyonları ile ilgili tanım ve teoremler [12] de derlenmiştir.

Tanım 5.1.1 ξ fonksiyonu kümeler ailesi üzerinde *küme fonksiyonu* diye adlandırılır. ξ, 2^x üzerinde tanımlı bir küme fonksiyonu olsun.

i. ξ küme fonksiyonu X in A ve B ayrık alt kümelerinin her çifti için toplamsal ise

$$\xi(A \cup B) = \xi(A) + \xi(B)$$

dir.

ii. X in A ve B alt kümelerinin her çifti için $A \subset B$ olacak şekilde

$$\xi(A) \leq \xi(B)$$

ise ξ küme fonksiyonu monotondur.

iii. ξ küme fonksiyonu normalleştirilmiş ise

$$\min\{\xi(A) : A \subset X\} = 0 \quad \text{ve} \quad \max\{\xi(A) : A \subset X\} = 1$$

ξ toplamsal ise $\xi(\varnothing) = \xi(\varnothing) + \xi(\varnothing)$ olduğundan $\xi(\varnothing) = \varnothing$ dır. Negatif olmayan toplamsal küme fonksiyonu monotondur. ξ negatif olmayan ve toplamsal ise $A \subset B \subset X$ ise

$$B / A = \{x : x \in B, x \notin A\}, \ \xi(B / A) \geq 0$$

olduğunda

$$\xi(B)=\xi(A\cup(B/A))=\xi(A)+\xi(B/A)\geq\xi(A)$$

dır. X sonlu bir küme olduğunda 2^x üzerinde ξ toplamsal küme fonksiyonu için

$$\xi(A)=\sum_{x\in A}\xi(\{x\})$$

dır.

Tanım 5.1.2. ξ, 2^x üzerinde tanımlı bir küme fonksiyonu ve $A\subset X$ olsun. A ya ξ nın ξ_A kısıtlaması;

$$\xi_A(B)=\xi(A\cap B) \qquad \forall B\subset X$$

olarak tanımlıdır.

ξ nın ξ_A kısıtlaması, ξ ile aynı özelliklere sahiptir. ξ toplamsal ise (ya monoton ya da negatif olmayan) ξ_A toplamsaldır.

5.1.3 Tanım: ξ küme fonksiyonu $\xi(\varnothing)=0$ olacak şekilde 2^x üzerinde tanımlıdır. Onun eşlenik $\bar{\xi}$ küme fonksiyonu ve A **nın tümleyeni** A^c için

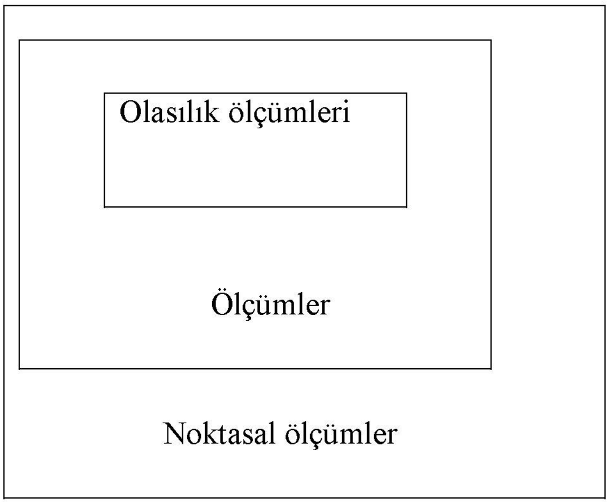
$$\bar{\xi}(A)=\xi(X)-\xi(A^c) \qquad \forall A\subset X$$

olarak tanımlıdır. Bu tanımdan $\xi(\varnothing)=0$ dır. $\xi(\varnothing)=0$ ise $\bar{\xi}(X)=\xi(X)$ ve bundan dolayı $\bar{\bar{\xi}}=\xi$ dır. ξ monoton ise $\bar{\xi}$ monotondur. ξ normalleştirilmiş ve monoton, onun eşleniği $\bar{\xi}$ olunca ξ iki yönlü (dualdir)denir.

5.2.Ölçümler

Tanım 5.2.1. X üzerindeki ölçüm, 2^x üzerinde tanımlı negatif olmayan toplamsal küme fonksiyonudur. Normalleştirilmiş ölçüm *olasılık ölçümü* diye de adlandırılır. X üzerindeki noktasal ölçüm, 2^x üzerinde tanımlı toplamsal küme fonksiyonudur.

Bir olasılık ölçümü ölçümdür ve bir ölçüm de noktasal ölçümdür.(şekil 5.2.1) $\boldsymbol{P}$ küme fonksiyonu olasılık ölçümdür $\Leftrightarrow \boldsymbol{P}$ küme fonksiyonu $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})=1$ olacak şekilde ölçümdür.



Şekil 5.2.1. $\boldsymbol{X}$ üzerindeki olasılık ölçümler ailesi noktasal ölçümler ve ölçümdürler.

Kümelerin büyüklük ölçümleri bir ölçümdür. Kümenin elemanlarının sayısı kümelerin büyüklük ölçümünün bir çeşididir.

Örnek 5.2.1. $\boldsymbol{X}$ sonlu bir kümedir. $\boldsymbol{m_c}$ küme fonksiyonu $|\boldsymbol{A}|$, $\boldsymbol{A}$ nın elemanlarının sayısı

$$\boldsymbol{m_c}(\boldsymbol{A})=|\boldsymbol{A}|$$

olarak tanımlı ise $\boldsymbol{X}$ üzerinde bir ölçümdür. $\boldsymbol{X}$ üzerindeki bu ölçüm sayılabilir ölçüm diye de adlandırılır.

Kütle ve hacim aynı zamanda kümelerin büyüklüğü sayılabilir. Genellikle büyüklük negatif olmayandır. Büyüklüğün negatif değerlerini söyleyerek imgeleyebiliriz. Elektriğin niceliği büyüklük olarak dikkate alınabilir.

Örnek 5.2.2. $\boldsymbol{X}$ nesnelerin sonlu kümesi olsun.

i. Her $\boldsymbol{x}$ nesnesinin hacmi $\boldsymbol{V_x}$ $\boldsymbol{cm^3}$ dür. $\boldsymbol{V}:\boldsymbol{2^x}\rightarrow\boldsymbol{R_+}$ küme fonksiyonu $\boldsymbol{X}$ in her $\boldsymbol{A}$ altkümesinin hacim ölçümleri;

$$V(A)=\sum_{x\in A} v_x$$

X üzerinde ölçümdür.

ii. Her x nesnesinin kütlesi $m_x g$ dır. $M:2^x \to R_+$ küme fonksiyonu X in her A altkümesinin küme ölçümleri;

$$M(A)=\sum_{x\in A} m_x$$

X üzerinde ölçümdür.

iii. Her x nesnesi q_x coulombsla birlikte elektriksel alandır. $Q:2^x \to R_+$ küme fonksiyonu X in her A altkümesinin elektriksel nicelik ölçümleri;

$$Q(A)=\sum_{x\in A} q_x$$

X üzerinde noktasal ölçümdür.

Olasılık ölçümünü kümelerin büyüklüğü olarak da dikkate alabiliriz.

Örnek 5.2.3. Bir zar atıldığı yerde durumları göz önüne alalım ve üst yüzündeki sayıları gözlemleyelim. $X=\{1,2,3,4,5,6\}$ olası sonuçlar kümesidir. $P:2^x \to R_+$ küme fonksiyonu X in her A altkümesinin olasılık ölçümleri bir olasılık ölçümüdür. Zar tarafsız ve doğru ise $\forall x\in X$ için

$$P(x)=\frac{1}{6}$$

dır. Aşağıdaki özel bir ölçümdür.

Örnek 5.2.4. x_0, X in bir elemanı olsun. δ_{x_0} küme fonksiyonu

$$\delta_{x_0}(A)=\begin{cases}1 & x_0\in A\\ 0 & x_0\notin A\end{cases}$$

tanımlı iken X üzerinde ölçümdür. x_0 üzerinde odaktır. X üzerinde *Dirac ölçüm* diye adlandırılır.

Tanım 5.2.2. $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{X}$ üzerinde noktasal ölçüm olsun. $\boldsymbol{X}$ in $\boldsymbol{N}$ altkümesi $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{N}$ iken $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{M}) = \mathbf{0}$ ise $\boldsymbol{m}$ - *boş küme* diye adlandırılır.

Örnek 5.2.5 (Örnek 5.2.2 den) $\boldsymbol{X}$ in $\boldsymbol{A}$ alt kümesi bir $\boldsymbol{\varnothing}$- boş küme ancak ve ancak $\boldsymbol{A}$ nın elemanlarının tümü elektriksel alanda değildir.

Örnek 5.2.6. (Örnek 5.2.4. den) $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{X}$ in $\boldsymbol{A}$ alt kümesi $\boldsymbol{\delta_{x_0}}$ -boş kümedir ancak ve ancak $\boldsymbol{x_0} \notin \boldsymbol{A}$ dır.

Aşağıdaki Önerme 5.2.1. ile boş kümenin özelliklerini gösterelim.

Önerme 5.2.1. $\boldsymbol{m}$ bir noktasal ölçüm olsun.

i. .Boş olmayan bir küme boş kümedir.

ii. Boş kümenin ölçümü sıfırdır.

iii. $\boldsymbol{m}$ negatif olmayan bir ölçüm ise boş kümenin ölçümü sıfırdır.

iv. Bir boş kümenin alt kümesi de boş kümedir.

v. Boş kümenin birleşimleri de boş kümedir.

vi. $\boldsymbol{N}$ kümesi boştur $\Leftrightarrow \mu(A \cup M) = \mu(A) \qquad \forall M \subset N, A \subset X$

$$\Leftrightarrow \mu(A / M) = \mu(A) \qquad \forall M \subset N, A \subset X$$

$$\Leftrightarrow \mu(A \Delta M) = \mu(A) \qquad \forall M \subset N, A \subset X$$

$$A \Delta B = (A / B) \cup (B / A) = (A \cup B) / (A \cap B)$$

dir.

Tanım 5.2.3. $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{X}$ üzerinde noktasal ölçüm olsun. $\boldsymbol{f}$ bir fonksiyon ve $\boldsymbol{F}$ de boştan farklı bir küme olsun. $\boldsymbol{F}$ üzerinde $\boldsymbol{f}$ nin essential sup ve essential inf sırasıyla

$$\underset{x \in F}{ess\,\mathbf{sup}}(x) = \mathbf{min}\left\{r : \left\{x \in F : f(x) > r\right\} \textbf{kümesi m-boştur}\right\}$$

ve

$$\underset{x\in F}{ess\,\mathbf{in}}\, f(x) = \max\{r : \{x \in F : f(x) < r\}\text{kümesi m-boştur.}\}$$

olarak tanımlanırlar. $\underset{x\in F}{ess\,\mathbf{sup}}(x)$ ve $\underset{x\in F}{ess\,\mathbf{in}}\, f(x)$ ile gösterilir.

Yukarıda tanımlanan X in ürettiği durumlardan biri farz edelim sonlu küme olmasın. Eğer X sonlu küme ise $ess\,\mathbf{sup}$ ve $ess\,\mathbf{inf}$

$$\underset{x\in F}{ess\,\mathbf{sup}}\, f(x) = \max\{f(x) : x \in F, \{x\}\text{tek elemamlı küme boş değildir}\}$$

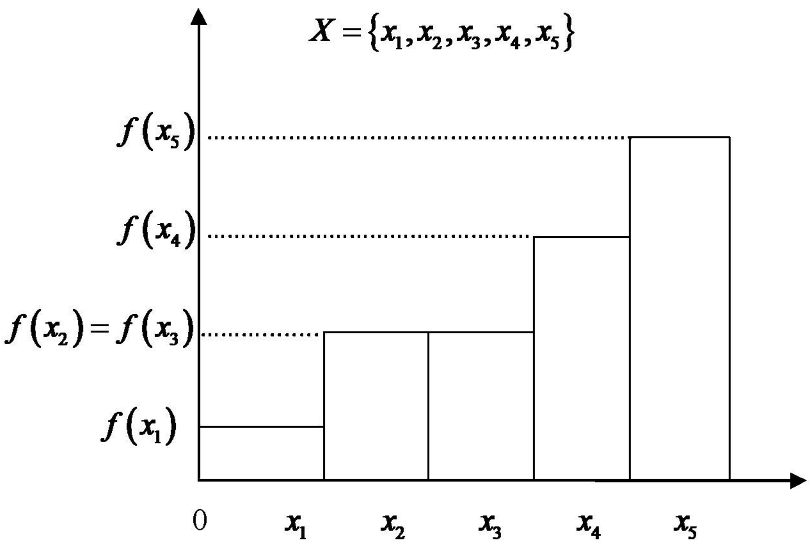
$$\underset{x\in F}{ess\ \mathbf{inf}}\, f(x) = \min\{f(x) : x \in F, \{x\}\text{tek elemamlı küme boş değildir}\}$$

olarak tanımlanabilirler.

O halde essential sup ve essential inf sırasıyla essential max ve essential min diye adlandırılabilir.

5.3.İntegral

Tanım 5.3.1. ***m, X*** üzerinde noktasal ölçüm ve f bir fonksiyon olsun.



Şekil 5.3.1. f nin grafiği (Not: X sonlu kümedir.)

$\boldsymbol{m}$ ile birlikte f nin integrali $\int f(x)dm(x)$ $\left(ya\ da\ \int fdm\right)$

$$\int fdm = \sum_{x\in X} f(x)m(\{x\})$$

olarak tanımlanır.

$A \subset X$ olsun. A üzerinde $\int_A fdm$ $\left(ya\ da\ \int f(x)dm(x)\right)$

$$\int_A fdm = \int f1_A dm$$

olarak tanımlıdır.

$1_A, A$ nın karakteristik fonksiyonu

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

açıkça

$$\int_X fdm = \int fdm$$

ve

$$\int_A fdm = \sum_{x\in A} f(x)m(\{x\}) = \int fdm_A$$

dır.

Örnek 5.3.1 (Örnek 5.2.1. den) m_C, X üzerinde sürekli bir ölçüm olsun. $\forall A \subset X$ ve X üzerindeki her f fonksiyonu

$$\int_A fdm_C = \sum_{x\in A} f(x)$$

dir.

Örnek 5.3.2. (Örnek 5.2.2. den) Her $x \in X$ için yoğunluğu $f(x)$ $g/_{cm^3}$ olsun. v nin f integrali X in toplam kütlesine eşittir. Bundan başka $\forall A \subset X$ için

$$M(A) = \int_A f dv$$

dir.

P olasılık ölçümünün f integrali f nin beklenen değeri diye adlandırılır ve $E(f:P)$, $E_p(f)$ ya da $E(f)$ ile gösterilir.

Örnek 5.3.4. (Örnek 5.2.4 den) $x_0 \in X$ ve δ_{x_0}, Dirac ölçümün x_0 odağı olsun. X üzerindeki her f fonksiyonu

$$\int f d\delta_{x_0} = f(x_0)$$

dır.

Önerme 5.3.1. m, X üzerinde noktasal ölçüm olsun. X üzerinde $a, b, a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ reel sayılar, f *ve* g fonksiyon ve $A, A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, X in altkümeleri olsun.

$i. \int (af + bg) dm = a \int f dm + b \int g dm$

$ii. \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} dm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i)$

özellikle

$$\int 1_A dm = m_A$$

dır.

iii. m ölçüm ve $f \leq g$ ise

$$\int f dm \leq \int g dm$$

iv. N bir boş küme ve $\forall x \notin N$ için $f(x) = g(x)$ ise

$$\int fdm = \int gdm$$

Yukarıdaki önermenin ii. maddesi bu notla X üzerindeki her fonksiyon için gösterilebilir.

Not:

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$$

Örneğin ;

$$f = \sum_{x \in X} f(x) 1_{\{x\}} \tag{5.3.1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{\{x: f(x) = a_i\}} \tag{5.3.2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) 1_{\{x: f(x) \geq a_i\}} \tag{5.3.3}$$

$\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, f nin değer kümesi $\{f(x) : x \in X\}$,$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq, ..., \leq a_n$ ve $a_0 = 0$ dır.

(5.3.1) olarak temsil edilen f fonksiyonu önerme 5.3.1 den verildi.

(5.3.3) integrali;

$$\int fdm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(\{x : f(x = a_i)\})$$

dir.

5.3.3 integrali;

$$\int fdm = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) m_{\{x: f(x) \geq a_i\}}$$

dir.

6.BÖLÜM

ÖLÇÜM ÜZERİNDE TANIMLI OLAN BAZI İNTEGRALLER

Bulanık integraller, farklı bulanık ölçümlerin sonucu ile elde edilen integraller için kullanılan genel bir terimdir. Choquet İntegral, Sipos İntegral, Sugeno İntegral ve t-conorm İntegral diye isimlendirilen birçok bulanık integral biçimleri mevcuttur [8,11,12].

Bulanık İntegral, çok kriterli bir ortamda bulanık ölçüme dayalı olarak yapılan bir bilgi toplama, bilgi birleştirme ve kaynaştırma işlemidir. Kısacası bulanık integral, uzman görüşüne dayalı olarak bir karar mekanizmasıdır. Genelde uzman görüşünü ifade eden bulanık ölçümün en önemli karakteristiği doğrusal olmamasıdır. Bu nedenle klasik birleştirme operatörlerine göre daha esnek ve etkili sonuçlar vermektedir.

Bu kavram Bulanık küme teorisi alanına 1974 yılında Michio Sugeno ve Karar teorisi alanına 1982 yılında David Schmeidler tarafından sunulmuştur. Ulrich Höhle, 1982 yılında ilk defa Choquet İntegralini bulanık küme teorisi alanına sunmuştur.

“ Choquet İntegral”, en doğal ve en sade bulanık integral tipi diye anılmaktadır [1]. Choquet İntegral de olmayan normalizasyon ve kriterlerin etkileşimi işin içerisine katıldığında bunun “Sugeno İntegral” olduğu hemen akla gelen ilk şeydir. Zaten bu iki temel tipin dışındakiler, büyük oranda bu biçimlere benzemekle birlikte bazı değişiklikler ile oluşmuşlardır.

Burada Choquet İntegral, Sipos İntegral ve Sugeno İntegral tanımları ve özellikleri incelenmiştir.

6.1. Choquet İntegral

Choquet İntegral klasik integralin gelişmiş halidir ve en doğal bulanık integral biçimidir. Bu bulanık integral tipinde önce hipotezi destekleme oranları (h değerleri) sıralanır. x-ekseni, özellikleri veya göz önüne alınan kriterleri ve y-ekseni ise x-eksenindeki özelliğe veya kritere göre hipotezi destekleme oranını göstermektedir. (x=kriter veya özellik, $h(x)$=hipotezi destekleme oranı). Dolaysıyla Choquet İntegral sonucu bulunan alan, tüm kriterler göz önüne alınarak hipotezin ne kadar doğru olacağını gösterir. (Eğer h değerleri $[0,1]$ aralığında normalize edilmiş ise yine $[0,1]$aralığında sonuç verecektir.) [10].

Tanım 6.1.1. μ, X üzerinde monoton olmayan bir bulanık ölçüm ve f ise aynı şekilde X üzerinde tanımlı olan $a_1 \le a_2 \le a_3 \le,...,\le a_n$ olmak üzere $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$ aralığında bir fonksiyon olsun. Choquet İntegral; $(c)\int f(x)d\mu(x)$ veya kısaca $(c)\int fd\mu$ ile gösterilir ve denklem aşağıdaki gibi hesaplanır [11,12].

$$(c)\int fd\mu = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\mu\{x : f(x) \ge a_i\}, a_0 = 0$$

dır.

Yukarıda görüldüğü gibi $a_4 \ge a_3 \ge a_2 \ge a_1 \ge a_0 = 0$ dır ve tüm değerleri pozitiftir. Yani tüm kriterlere göre f hipotezi farklı oranlarda olmakla birlikte pozitif (olumlu) desteklenmektedir. Eğer f değerleri için negatif eksende söz konusu olursa bazı kriterlere göre f hipotezi olumsuz görülüyor demektir. Anlatıldığı gibi negatif değerleri de içeren bulanık integral biçimi "Sipos İntegral" dir. Choquet İntegralde olduğu gibi pozitif ve negatif değerlerin bulanık integral değerleri hesaplanır ve sonra birbirinde çıkarılır.

Aşağıdaki Önerme 6.1.1.de Choquet İntegralinin özellikleri verilmiştir.

Önerme 6.1.1. f *ve* g , X üzerinde birer fonksiyon ve $A \subset X$ olsun.

i. $(c)\int 1_A d\mu = \mu_A$

ii. μ bir bulanık ölçüm ve $f \le g$ ise

$$(c)\int fd\mu \le (c)\int gd\mu$$

iii. a negatif olmayan bir reel sayı ve b bir reel sayı ise

$$(c)\int(af+b)d\mu = a(c)\int fd\mu + b\mu(x)$$

iv. $(c)\int -fd\mu = -(c)\int fd\bar{\mu}$

v. $(c)\int(-f)d\mu = -(c)\int fd\mu$

X üzerinde bütün f fonksiyonları için gerek ve yeter şart $\mu = \bar{\mu}$ olmasıdır.

vi. $(c)\int fd\mu = (c)\int f^{+}d\mu - (c)\int f^{-}d\mu$

$$f^{+}(x) = \max\{f(x),0\} \quad \text{ve} \quad f^{-}(x) = \max\{-f(x),0\}$$

dır.

vii. a bir reel sayı ise

$$a(c)\int fd(a\mu) = a(c)\int fd\mu$$

viii. $\mu \le v$ $\mu(x) = v(x)$ olacak şekilde μ **ve** v, X üzerinde bulanık ölçümler ise X üzerinde tüm fonksiyonlar için

$$(c)\int fd\mu \le (c)\int fdv$$

ix. N bir boş küme ve $\forall x \notin N$ için $f(x) = g(x)$ ise

$$(c)\int fd\mu = (c)\int gd\mu$$

6.2.Sipos İntegral

Tanım 6.2.1. μ, X üzerinde monoton olmayan bir bulanık ölçüm ve X ile birlikte tanım kümesi $\{a_1,a_2,a_3,\dots,a_m,b_1,b_2,\dots,b_n\}$, $b_n \le b_{n-1} \le,\dots,\le b_1 \le 0 \le a_1 \le a_2 \le,\dots,\le a_m$ olan f fonksiyonu olsun. f ile birlikte μ nün Sipos İntegrali;

$$(\tilde{s})\int f(x)d\mu(x) \quad \text{(ya da } (\tilde{s})\int fd\mu\text{)}$$

$$(\tilde{s})\int f d\mu = \sum_{i=1}^{m}(a_i - a_{i-1})\mu\{x : f(x) \geq a_i\} + \sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1})\mu\{x : f(x) \leq b_i\}, a_0 = b_0 = 0$$

dır. Sipos İntegrali aşağıdaki özelliklere sahiptir [11,12].

Önerme 6.2.1. a bir negatif olmayan reel sayı f *ve* g, X üzerinde birer fonksiyon ve $A \subset X$ olsun.

i. f negatif olmayan bir fonksiyon ise

$$(\tilde{s})\int f d\mu = (c)\int f d\mu$$

özellikle

$$(\tilde{s})\int 1_A d\mu = \mu(A)$$

dır.

ii. μ bir bulanık ölçüm ve $f \leq g$ ise

$$(\tilde{s})\int f d\mu \leq (\tilde{s})\int g d\mu$$

iii. $(\tilde{s})\int af d\mu = a(\tilde{s})\int f d\mu$

özellikle

$$(\tilde{s})\int (-f) d\mu = -(\tilde{s})\int f d\mu$$

iv. $(\tilde{s})\int f d\mu = (\tilde{s})\int f^{+} d\mu - (\tilde{s})\int f^{-} d\mu$

$$f^{+}(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{ve} \quad f^{-}(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

v. $(\tilde{s})\int f d(a\mu) = a(\tilde{s})\int f d\mu$

vi. N bir boş küme ve $\forall x \notin N$ için $f(x) = g(x)$ ise

$$(\tilde{s})\int f d\mu = (\tilde{s})\int g d\mu$$

6.3 Sugeno İntegral

Sugeno İntegralinin en önemli özelliği; özellik veya kriterlerin birbirleriyle etkileşimlerini baz almasıdır [11,12].

Tanım 6.3.1. μ, X üzerinde normal bulanık ölçüm ve f, X ile birlikte tanım kümesi $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ $0 \le a_1 \le a_2 \le, ..., \le a_n \le 1$, olan bir fonksiyon olsun. f ile μ nün gösterimiyle Sugeno İntegrali;

$$\oint f(x) \circ \mu(x) \qquad (\text{ ya da } \oint f \circ \mu)$$

$$\oint f \circ \mu = \bigvee_{i=1}^{n} \left[a_i \wedge \mu\{x : f(x) \ge a_i\} \right]$$

olarak tanımlıdır.

Sugeno İntegrali aşağıdaki özelliklere sahiptir.

Önerme 6.3.2. μ ve v normal bulanık ölçüm, f *ve* g X den $[0,1]$ e fonksiyonlar $A \subset X$ ve $a \in [0,1]$ olsun.

i. $\oint 1_A \circ \mu = \mu(A)$

ii. $f \le g$ ise

$$\oint f \circ \mu \le \oint g \circ \mu$$

iii. $\oint (a \vee f) \circ \mu = a \vee \left(\oint f \circ \mu \right)$

iv. $\left| \oint f \circ \mu - (c)\int f d\mu \right| \le \frac{1}{4}$

v. μ bir $0-1$ bulanık ölçüm ise

$$\oint f \circ \mu = (c)\int f d\mu$$

vi. $\mu \le v$ ise

$$\oint f \circ \mu \leq \oint f \circ v$$

vii. $\oint f \circ (\mu \vee v) = \left(\oint f \circ \mu\right) \vee \left(\oint f \circ v\right)$

viii. N bir boş küme ve $\forall x \notin N$ için $f(x) = g(x)$ ise

$$\oint f \circ \mu = \oint g \circ \mu$$

7.BÖLÜM

SONUÇLAR

Bu çalışma boyunca görüldüğü gibi çeşitli bulanık ölçümler üzerinde bulanık integrallerin farklı tanımları yapılmıştır.

Buradan da görüldüğü gibi klasik integral Riemann toplamı üzerinde, bulanık integraller ise farklı ölçümler üzerinde tanımlanmıştır. Bulanık ölçüm üzerinde çalışmalar yapan bazı araştırmacılar bu çalışmalar sonucu; monoton olmayan bulanık ölçüm üzerinde Choquet ve Sipos bulanık integrallerini ve normal bulanık ölçüm üzerinde Sugeno bulanık integrali gibi… Farklı bulanık integralleri tanımlamışlardır.

Sonuç olarak tanımlanan bulanık integraller, bulanık ölçüm üzerinde tanımlanmış ve özellik olarak birkaç özellik dışında burada tanımlanan bulanık integraller aynı özelliklere sahiptir.

KAYNAKLAR

[1] Auephanwiriyakul S.,Keller J.M.,Gader P.D.,(2002*), "Generalized Choquet Fuzzy İntegral Fusion"*,İnformation Fusion,**3**,69-85

[2] Balcı M., (2000), *Reel Analiz*, Ankara, Balcı Yayınları

[3] Bart Kosko.,(1993) *Fuzzy Thinking: The New Science of Fuzzy Logic*, New York: Hyperion.

[4] Baykal N., Timur B.,(2004), *Bulanık Mantık İlke ve Temelleri*, Bıçakçılar Kitabevi, Matematik dizisi no:1

[5] Bojadziev G.,ve Bojadziev M.M.,(1995), *Fuzzy Set, Fuzzy Logic Application Application and Theory* Vol.**5**,world scientific, London

[6] Bozkurt E., Fuzzy Logic

http://www.turkmekatronik.com/mforum/index.php./topic,3321msg6207.html#msg6207

[7] Civalek Ö.,(1999) *Dairesel Plakların Nöro-Fuzzy Tekniği ile Analizi*, Dokuz Eylül Üni. Mühendislik Fakültesi, Fen ve Mühendislik Dergisi cilt 1 sy:**2**

[8] Denneberg D.,(1999), *Non-addivite Measure and İntegral, basic concept and their role for applications*, in: Grabisch M., Murofushi T., Sugeno M., Eds., *Fuzzy Measure and İntegrals: Theory and Applications*, Springer-Verlag

[9] Dönmez A.,(2001), *Reel Analiz*, Ankara, Seçkin Yayıncılık

[10] Duman E.,(2003), *Gerçek Zamanlı Bulanık İntegral ve Uygulamaları*,Fırat Üni.,Fen Bilimleri Enst.

[11] Grabisch M.,(2000), *Fuzzy Measure and İntegral: Theory and Applications* (Studies Fuzziness and soft Computing), Physica-Verlag, New York 476s.

[12] Grabisch M., Murofushi T., Sugeno M.,(2000), *Fuzzy Measure and İntegrals: Theory and Applications*, Springer-Verla

[13] Halmos P.R.,(1967), *Measure Theory* , New York, Van Nostrand

[14] Kahyaoğlu S.,(2008), *Bulanık Ölçümler Teorisinde Caratheodory Genişleme Teoremi*, Gaziantep Üni.,Fen Bilimleri Enst.

[15] Kamali M., Kadıoğlu E.,(1999), *Genel Matematik*, (2. Baskı) Erzurum, Bakanlar Matbaacılık

[16] Karataş S.,(2004), *Fuzzy Ölçüm Metotları*,Gaziosmanpaşa Üni. Fen Bilimleri Enst.

[17] Klir G.J.,and Floger T.A.(1998), *Fuzzy Set*, Uncertainly and İnformation Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

[18] Kosko B.,(1992), *Neural Networks and Fuzzy Systems.*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

[19] Lee C.C.,(Mar/April,1990), *Fuzzy Logic in Control Systems: Fuzzy Logic Controller*. Parts 1 and 2,IEEE Trans. Syst. Man. Cybernet. **20**, 2, 404–435

[20] Mukherja A., and Pothoven K.,(1984), *Real and Functionaly Analysis Part A. Real Analysis*(2.ed) Universty of Florida: Plenum Press-New York and London.

[21] Munakata T.,Jani Y.,(1994), *Fuzzy Systems*: An Overview,Communications of the ACM vol.**37**,No:3

[22] MuraTh, Bulanık Mantık (Fuzzy Logic) nedir? http://www.kontrolkalemi.com/forum/bulanık-mantık-fuzzy-logic/3068-bulanık mantık-fuzzy-logic-nedir.html

[23] Nguyen H.T.,and Walker E.A.(2000), *A First Course İn Fuzzy Logic*,Boca Raton London, New York

[24] Oberguggenberger M.,(2004), İntroductory remaks: Mathematical models of Uncertainly ZAMM.Z,Angew.Math.Mech.**84**.No:10–11/ www.zamm-journal.org

[25] Pap E., Biljana P.Mihailvic,(2005), A representation of a comonote –v-addivite and monotone functional by two Sugeno İntegrals, *Fuzzy and Systems*

[26] Prade H., (1980), *Fuzzy Set And Systems*, Academic Press New York

[27] Sugeno M.,(1977) *Theory of Fuzzy İntegrals and Its Applications*. Ph. D. Dissertation. Tokyo: Institute of Technology

[28] Sugeno M.,(1977) , *Fuzzy Measure and İntegrals*: A survey,In: Gupta M.M., Saridis G.N., Gaines B.R.,(Eds.) Fuzzy Automata and Decision Processes., North-Holland, Amsterdam and New York, 89–102

[29] Şahin M.,(2004), *Genelleştirilmiş* $\sigma -$*cebirleri ve Genel Bulanık Ölçümler*, Trabzon.

[30] Wang Z.and Klir G.J.,(1992), *Fuzzy Measure and Theory*, New York, Plenum Press

[31] Liu X.,(1992), “Entropy,distance measure and similarity measure of fuzzy set and their relations”,*Fuzzy Sets and Systems* **52**(3):305–308

[32] Terano T., Asai K.and Sugeno M.,(1992), *Fuzzy Systems Theory and Its Applications*. Academic Press. San Diego, Calif.

[33] Zadeh L.A.,(1965), Fuzzy Sets, *Information and Control*,**8**,338-353

[34] Zadeh L.A.,(1968), Probability Measure of Fuzzy Events: *J.Math.Anal.Appl*.,**23**,421-427

[35] Zadeh L.A.,(1968), Fuzzy Algorithms,*ibid*,**12**,94-102

[36] Zadeh L.A.,(1971), Quentitave Fuzzy Semantics, *Information Sciences*,**3**,159-176

[37] Zadeh L.A.,(1973),Qutline of a new approach to the analysis of complex systems and decision process. *IEEE. Trans. Syst. Man Cybernet SME*–3,28–44

[38] Zimmermann H.J.(1985) *Fuzzy Set Theory –and Its Applications.* Kluwer,Boston