GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY n-NORMLU UZAYLAR
VE
BU UZAYLARDA BAZI SONUÇLAR

MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHMET KIR
AĞUSTOS 2010

Fuzzy n-Normlu Lineer Uzaylar
ve
Bu Uzaylarda Bazı Sonuçlar

Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Mehmet KIR
Ağustos 2010

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Fuzzy n-Normlu Uzaylar ve Bu Uzaylarda Bazı Sonuçlar
Öğrencinin, Adı Soyadı: Mehmet KIR
Tez Savunma Tarihi: 04.08.2010

Prof. Dr. Ramazan KOÇ
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:	İmza
Prof. Dr. Adil KILIÇ	
Doç. Dr. Metin Bedir	
Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ	

ÖZET

FUZZY n-NORMLU LİNEER UZAYLAR VE BU UZAYLARDA BAZI SONUÇLAR

KIR, Mehmet

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Ağustos 2010, 63 sayfa

Bu çalışmada fuzzy normlu uzaylar, fuzzy metrik uzaylar, fuzzy 2-normlu, fuzzy 2-metrik ve fuzzy n-normlu uzaylar hakkında bilgiler verilecek ve bu uzaylarda yaklaşım incelenecektir.

Ayrıca bu çalışmada reel değerli φ fonksiyonu yardımıyla tanımlanan $\varphi-n$ normlu uzayları tanımlanacak ve buna bağlı olarak fuzzy $\varphi-n$ normlu uzayları oluşturulacak ve bu uzaylarda bazı sonuçlar verilecektir.

Anahtar kelimeler: 2-norm, n-norm, φ fonksiyonu, fuzzy norm, fuzzy metrik, fuzzy 2-normlu uzay, fuzzy n-normlu lineer uzay.

ABSTRACT

FUZZY n-NORMED LINEAR SPACES AND SOME RESULTS IN THESE SPACES

Mehmet KIR

M.Sc.in Depertment of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

August 2010, pages 63

In this study, it will be given information about the concept of fuzzy metric spaces, fuzzy normed spaces, fuzzy 2-norm, fuzzy n-norm, and be investigated the approximation in these spaces.

Also in this study *fuzzy* φ*-n-normed lineer spaces* will be introduced produced from φ*-n-norm*, by φ *function* which is defined on real numbers.

Key Words : 2-norm, n-norm, φ function, fuzzy norm, fuzzy metric, fuzzy 2-normed spaces, fuzzy n-normed linear speces.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde her anlamda bana destek olan ve katkılarda bulunan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ' e saygı ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET……………………………………………………………………………i

ABSTRACT………………………………………………………………………ii

TEŞEKKÜR……………………………………………………………………..iii

İÇİNDEKİLER………………………………………….……………………….iv

1.BÖLÜM

TEMEL BİLGİLER

1.1. Lineer Uzaylar……………………………………………...……...….…1

1.2. Bulanık Mantık..………………………………………......…….….…6

2.BÖLÜM

FUZZY METRİK VE FUZZY NORMLU UZAYLAR

2.1. Fuzzy Metrik Uzaylar ve Bu Uzaylarda Yaklaşım……………...……….9

2.2. Fuzzy Normlu Uzaylar ve Bu Uzaylarda Yaklaşım.......………......…....17

3.BÖLÜM

FUZZY 2-METRİK VE FUZZY 2-NORMLU UZAYLAR

3.1. Fuzzy 2-Metrik Uzaylar ve Özellikleri…………………….………...30

3.2. Fuzzy 2-Normlu Uzaylar ve Özellikleri…….…………………..……35

4.BÖLÜM

FUZZY $\varphi-$NORMLU LİNEER UZAYLAR

4.1. Fuzzy φ-2-Normlu Lineer Uzaylar ve Özellikleri…………………......39

4.2. Fuzzy φ -n-Normlu Lineer Uzaylar ve Özellikler..…….……...……...45

5.BÖLÜM

$\alpha - n -$NORMLU LİNEER UZAYLARDA EN İYİ YAKLAŞIM

5.1. $\alpha - n -$Normlu Lineer Uzaylarda En İyi Yaklaşım……………...…..52

6.BÖLÜM

SONUÇ..61

KAYNAKLAR...62

1.BÖLÜM

TEMEL BİLGİLER

Giriş

Fuzzy kümelerini ilk olarak Lütfi Zadeh 1965 de tanımladı. Daha sonra Sugeno Zadeh'in tanımladığı bu kümeler üzerine fuzzy ölçümlerini tanımladı ve ilerleyen tarihlerde daha birçok matematikçi fuzzy kümeleriyle ilgilendiler ve bazı sonuçlar elde ettiler [1].

Bununla beraber 1964 de Alman matematikçi S. Gahler 2-norm kavramını ve 2-normlu uzayları tanımlayıp üzerine bazı sonuçlar verdi [2]. Gahler'den sonra A. Misiak, S. S. Kim, Y. J. Cho, R. Malceski, Gunawan, Mashadi gibi isimler 2-norm kavramını n-norm kavramına genişleterek n-normlu uzaylar ve bu uzaylar üzerinde çeşitli sonuçlar elde ettiler [3,4].

S. C. Cheng, J. N. Mordeson , T. Bag, S. K. Samanta gibi matematikçiler 1974'lerde lineer uzaylar üzerine fuzzy norm tanımladılar [5]. Son yıllarda AL. Narayanan ve S. Vijayabalaji fuzzy n-normlu lineer uzaylar ve bu uzaylarda yaklaşım üzerine çalıştılar [6].

Ioan Golet reel değerli bir φ fonksiyonu tanımlayıp buna bağlı olarak φ normlu uzaylar ve bu uzaylardan elde edilebilecek fuzzy φ normlu uzayları tanımladı [7].

Bu çalışmada yukarıda geçen tüm kavramlar tanımlanıp incelenecektir. Daha sonra Ioan Golet'in tanımladığı φ fonksiyonu yardımıyla fuzzy n-normlu uzaylar kurulup bu uzaylarda bazı sonuçlar verilecektir.

Son olarak 5.Bölümde de $\alpha - n -$normlu lineer uzaylar tanımlanıp bu uzaylar üzerinde yaklaşım incelenmiştir [8].

1.1 Lineer Uzaylar

Tanım 1.1.1: boş olmayan bir küme ve , reel veya karmaşık sayılar cismi olsun.

içinde toplama , dönüşümü ile ve içinde çarpma , dönüşümü ile tanımlayalım. Eğer bu dönüşümler her ve her için,

1) ,

2) ,

3) için olacak biçimde bir vardır,

4) için olacak biçimde bir vardır,

5)

6)

7)

8)

koşullarını sağlıyorsa, kümesine cismi üzerinde *lineer uzay* denir.

Tanım 1.1.2: Bir X lineer uzayının boş olmayan bir Y alt kümesi verilsin.

Eğer $\forall x, y \in Y$ ve $\forall \alpha \in K$ için $x + y \in Y$ $\alpha x \in Y$

oluyorsa Y kümesine X lineer uzayının bir *alt uzayı* denir.

Tanım 1.1.3: Sayı cisimleri aynı olan iki lineer uzay X ile Y ve $\mathrm{T}: X \to Y$ bir fonksiyon olsun.

Eğer $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in K$ için

a) $T(x+y)=T(x)+T(y)$

b) $T(\alpha x)=\alpha T(x)$

ise T fonksiyonuna *lineer dönüşüm* denir.

Tanım 1.1.4: ve normlu uzaylar ve

$T: X \to Y$ lineer bir dönüşüm olsun.

Eğer için olacak biçimde bir sabiti varsa

dönüşümüne *sınırlı lineer dönüşüm* denir.

Yukarıdaki şartı sağlayan sayılarının en büyük alt sınırına *nin normu*

denir. Yani,

dir.

Tanım 1.1.5: normlu uzayında bir dizi olsun.

a) için ise olacak biçimde bir doğal sayısı varsa dizisine *yakınsak dizi* denir.

b) için olacak biçimde doğal sayısı var ise dizisine *Cauchy dizisi* denir.

c) normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya *Banach uzayı* denir.

Tanım 1.1.6: ile birer normlu uzay ve lineer bir dönüşüm olsun.

Eğer bu dönüşümü normu koruyorsa yani;

için

oluyorsa dönüşümüne *lineer eşmetrel dönüşüm* denir.

Bu eşmetrel dönüşüm birebirdir.

Eğer bu dönüşüm ayrıca örten ise bu dönüşümüne *lineer eşmetrel eşyapı dönüşümü* adı verilir ve bu durumda ve uzaylarına *eşmetrel eşyapılı normlu uzaylar* denir.

Ayrıca lineer eşyapı dönüşümü süreklidir.

Tanım 1.1.7: Boş olmayan bir kümesi verilsin.

foksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise ye kümesi üzerinde bir metrik ve ikilisine *metrik uzay* denir.

için

için $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

$\forall x,y,z \in X$ için $d(x,y) \le d(x,z)+d(x,y)$ (üçgen eşitsizliği)

Tanım 1.1.8: metrik uzayında bir dizi ve olsun.

$\forall \varepsilon > 0$ için $n_0 \le n$ iken $d(x_n,x) < \varepsilon$ olacak biçimde doğal sayısı varsa (x_n) dizisi x noktasına *yakınsaktır* denir ve (x_n) dizisine *yakınsak dizi* denir.

Tanım 1.1.9: (X,d) metrik uzayında (x_n) bir dizi olsun

$\forall \varepsilon > 0$ için $n_0 \le n,m$ iken $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ olacak biçimde n_0 doğal sayısı var ise (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 1.1.10: (X,d) metrik uzayı ile $x_0 \in X$ ve $r > 0$ sayısı verilsin.

$B(x_0,r) = \{x \in X : d(x_0,x) < r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı *açık yuvar* denir.

$B[x_0,r] = \{x \in X : d(x_0,x) \le r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı *kapalı yuvar* denir.

$S(x_0,r) = \{x \in X : d(x_0,x) = r\}$ kümesine de x_0 merkezli r yarıçaplı *yuvar yüzeyi* denir.

(X,d) metrik uzayının bir G alt kümesi verilsin.

Eğer G kümesinin her x noktası için $B(x,r) \subset G$ olacak biçimde $r > 0$ sayısı var ise G kümesine *açık küme* denir.

(X,d) metrik uzayının tümleyeni açık olan bir K kümesine de *kapalı küme* denir.

Tanım 1.1.11: (X,d_1) ve (Y,d_2) metrik uzaylar olsun.

$x_0 \in X$ ve X uzayında Y uzayının içine bir fonksiyon f olsun.

Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $d_1(x, x_0) < \delta$ iken $d_2\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$

Ya da $f\big(B(x_0, \delta)\big) \subset B\big(f(x_0), \varepsilon\big)$ olacak biçimde $\delta > 0$ sayısı var ise f fonksiyonuna x_0 *noktasında süreklidir* denir.

Önerme1.1.1: (X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzaylar olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart ;

$$x_n \to x_0 \text{ iken } f(x_n) \to f(x_0)$$

olmasıdır.

Önerme 1.1.2: (X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzaylar olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart $G \subset Y$ açık alt kümesi için $f^{-1}(G) \subset X$ in açık olmasıdır.

Tanım 1.1.12: boştan farklı herhangi bir küme olsun ve fonksiyonu $X \times X \times X$ üzerinde reel değerli bir fonksiyon olsun.

birbirinden farklı için $d(x, y, z) \neq 0$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır.

$d(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x, y, z$ den en az ikisi eşittir.

$d(x, y, z) = d(x, z, y) = d(y, z, x) \quad \forall x, y, z \in X$

$d(x, y, z) \leq d(x, y, w) + d(x, w, z) + d(w, y, z) \quad \forall\, x, y, z, w \in X$

şartları sağlandığında ye *2-metrik* denir ve (X, d) ikilisine de *2-metrik uzay* denir.

2-metrik uzaya örnek olarak $X = \square^{3}$ olmak üzere “$d(x, y, z) =: x, y, z$ noktalarının oluşturduğu üçgensel bölgenin alanı ” şeklinde tanımlanabilir.

Ya da formül olarak $X = \mathbb{R}^3$ ve $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3)$

olmak üzere $d(x, y, z) = \left| x_1(y_2 z_3 - z_2 y_3) - x_2(y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1) \right|$

şeklinde tanımlanan $X = \mathbb{R}^3$ üzerinde 2-metrik belirtir.

1.2 Bulanık Mantık

Geleneksel küme teorisinde kesin sınırlı küme kavramı kullanılır. Bu kavram bir nesnenin bir kümenin elemanı olması ya da olmaması gibi iki seçenekli bir mantığa dayanmaktadır.

Bulanık küme kavramı 1960'ların ortasında Zadeh'in klasik sistem kuramının matematiksel yöntemlerini gerçek dünyadaki özellikle insanları içeren kısmen karmaşık sistemlerle uğraşırken yetersiz kalmasından hoşnut kalmayışından doğdu.

Zadeh, niteliklerin ikili üyelik fonksiyonuyla ifade edildiği klasik kümeler yerine, dereceli üyelik fonksiyonuyla ifade edildiği bulanık kümeler tanımlanmasını önerdi.

Bir çeşit çok değerli küme kuramı olan bulanık küme kuramı, belirsizliğin bir çeşit formülleştirilmesidir. Bulanık kümedeki her birey, klasik çift değerli kuramında olduğu gibi üye ya da üye değil olarak değil bir dereceye kadar üye olarak görülür.

Bulanık küme değişik üyelik derecesinde öğeleri olan bir topluluktur. Klasik küme teorisindeki siyah-beyaz ikili üyelik kavramını kısmi üyelik kavramına genelleştirir. Burada 0 değeri üye olmamayı 1 değeri tam üye olmayı belirtirken $(0,1)$ arası değerler de kısmi üyelik kavramına karşılık gelir.

Gündelik yaşantımızda bulanık küme kavramı ile oldukça sık karşılaşırız. Örnek olarak , evli çiftlerin oluşturduğu küme bir klasik küme olarak ifade edilebilir. Ancak mutlu evli çiftlerin oluşturduğu küme bulanık bir küme olacaktır. Aynı şekilde bir üniversiteden mezun olan öğrencilerin oluşturduğu küme klasik küme belirtirken aynı üniversiteden iyi derece ile mezun olan öğrencilerin oluşturduğu küme bulanık küme belirtir [9].

Tanım 1.2.1: U evrensel küme olsun.

$\tilde{A} = \left\{ \left(x, \mu_{\tilde{A}}(x) \right) : x \in U,\ \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1] \right\}$ kümesine *fuzzy kümesi* denir.

Görüldüğü gibi $\tilde{A}$ sıralı çiftlerden oluşan iki değişkenli bir bağıntı olarak tanımlanmaktadır. Burada $\mu_{\tilde{A}}$ fonksiyonuna üyelik fonksiyonu denir.

Tanım 1.2.2: $\wp(X)$, X kümesinin kuvvet kümesi olmak üzere

$g : \wp(X) \to [0,1]$ bir fonksiyon olsun.

Aşağıdaki şartları sağlayan g fonksiyonuna *fuzzy ölçümü* denir.

) $g(\varnothing) = 0$ ve $g(X) = 1$,

) $\forall A, B \in \wp(X)$ için $A \subseteq B$ ise $g(A) \leq g(B)$,

) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \wp(X)$ artan (veya azalan) dizisi için

$\lim\limits_{n\to\infty} g(A_n) = g\left(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\right).$

Tanım 1.2.3: Bir bulanık alt kümede üyelik derecesi 1 e eşit olan elemanlara *öz* denir.

Tanım 1.2.4: Bir bulanık alt kümenin tüm elemanlarını içeren aralığa *dayanak* ve üyelik dereceleri 1 veya 0 olmayanların oluşturduğu kısımlara ise *üyelik fonksiyonunun sınırları* veya *geniş bölgeleri* denir.

$\mu_A(x) = 1 \to$ öz , $\quad 0 < \mu_A(x) < 1 \to$ *sınırlar*, $\quad \mu_A(x) > 0 \to$ *dayanak*

olarak adlandırılır.

Tanım 1.2.5: Üyelik değeri α değerinden az olmayan üyelerden oluşan kümeye A kümesinin α *kesim kümesi* denir.

$A_\alpha = \{ x \in E : \mu_A(x) \geq \alpha \}$

Burada $\geq$ yerine $>$ olursa buna *güçlü* α *kesim kümesi* denir.

Örnek 1.2.1: Yaşları verilen insanların kümesi olarak,

$E = \{5,\ 15,\ 25,\ 35,\ 45,\ 55,\ 65,\ 75,\ 85\}$ alalım. Bulanık kümeleri bebek, genç, yetişkin, olarak sınıflandıralım ve bunların üyelik dereceleri aşağıdaki tablodaki gibi olsun [9].

Tablo 1.2.1: Bulanık kümelere örnek tablo,

Yaş(eleman)	Bebek	Genç	Yetişkin	Yaşlı
5	0.0	0.0	0.0	0.0
15	0.0	0.2	0.1	0.0
25	0.0	1.0	0.9	0.0
35	0.0	0.8	1.0	0.0
45	0.0	0.4	1.0	0.1
55	0.0	0.1	1.0	0.2
65	0.0	0.0	1.0	0.6
75	0.0	0.0	1.0	1.0
85	0.0	0.0	1.0	1.0

Tabloya göre ;

Genç bulanık kümesinin dayanağı *dayanak(genç)*=$\{15,\ 25,\ 35,\ 45,\ 55\}$ olup klasik kümedir.

$\alpha = 0.2$ için Genç bulanık kümesinin α kesim kümesi $G_{0.2}$ olsun

$G_{0.2} = \{12,\ 25,\ 35,\ 45\}$ ve $G_{0.2}$ nin elemanları 0.2 ve daha fazla olasılıkla gençtir.

$\alpha = 0.1$ için yaşlı bulanık α kesim kümesi $Y_{0.1}$ olsun

$Y_{0.1} = \{45,\ 55,\ 65,\ 75,\ 85\}$

2.BÖLÜM

FUZZY METRİK UZAYLAR VE FUZZY NORMLU UZAYLAR

2.1 Fuzzy Metrik Uzaylar ve Bu Uzaylarda Yaklaşım

Tanım 2.1.1: $*:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$ şeklinde tanımlanan $*$ işlemi aşağıdaki şartları sağlar ise $*$ işlemine *sürekli* $t-norm$ denir.

) $\forall a,b\in[0,1]$ için $a*b=b*a$

) $a*1=a$, $0*0=0$

) $\forall$ $a\leq c$, $b\leq d$ ve $a,b,c,d\in[0,1]$ için $a*b\leq c*d$ olmalıdır.

Örnek 2.1.1: $a*b=a.b$ işlemi bir sürekli *t-norm* belirtir.

Çözüm:

t_1) $a.b=b.a$ olduğundan $a*b=b*a$ dır.

t_2) $a*1=a.1=a$, $0*0=0$

t_3) $c=a+x$, $d=b+y$ $x,y\in[0,1]$ olsun.

$$c*d=(a+x).(b+y)=a.b+a.y+x.b+x.y$$

$$=a*b+z\ ,\ \mathrm{z}\in[0,1]$$

olur. Böylece

$$c*d\geq a*b$$

olduğu görülür.

Örnek 2.1.2: $a*b=\min\{a,b\}$ bir sürekli *t-norm* belirtir.

Çözüm:

t$_1$) $a*b=\min\{a,b\}=\min\{b,a\}=b*a$

t$_2$) $a*1=\min\{a,1\}=\begin{cases} a \ , & a=1 \\ a \ , & 0\le a<1 \end{cases}$ ve $0*0=\min\{0,0\}=0$

t$_3$) $c=a+x,\ \ d=b+y\ \ x,y\in[0,1]$ olsun

$$c*d=\min\{c,d\}=\min\{a+x,b+y\}\ge\min\{a,b\}$$

Buradan $c*d\ge a*b$ olur.

Ayrıca $a*b=\max\{a+b-1,0\}$ işlemi de bir sürekli *t-norm* belirtir.

Tanım 2.1.2: X keyfi bir küme, $*$ sürekli $t-norm$ ve M de $X\times X\times(0,\infty)$ üzerinde fuzzy kümesi olsun.

) $\forall\ t>0$ ve $x,y\in X$ için $M(x,y,t)>0$

) $M(x,y,t)=1\Leftrightarrow x=y$

) $M(x,y,t)=M(y,x,t)$

) $\forall\ t,s>0,\ M(x,y,t)*M(y,z,s)\le M(x,z,t+s)$

) $M(x,y,.):(0,\infty)\to[0,1]$ sürekli

şartları sağlandığında $(X,M,*)$ üçlüsüne *fuzzy metrik uzay* denir.

Burada $a*b=\min\{a,b\}$ seçilirse

) $\forall\ t,s>0,\ M(x,z,t+s)\ge\min\{M(x,y,t),M(y,z,s)\}$

şeklinde olur.

Önerme 2.1.1: $*$ işlemi sürekli olduğundan ve $fm_4)$ şartından

$$\lim_{t\to\infty} M(x,y,t)=1$$

olur.

Tanım 2.1.3: $(X,M,*)$ *fuzzy metrik* uzayında $\{x_n\}$ bir dizi olsun. $0<\varepsilon<0$ ve $t>0$ için $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n,m \geq n_0$ olmak üzere

$M(x_n,x_m,t)>1-\varepsilon$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Diğer bir ifade ile $p>0$ tamsayısı için $\lim_{n\to\infty} M(x_{n+p},x_n,t)=1$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 2.1.4: $(X,M,*)$ *fuzzy metrik* uzayında $\{x_n\}$ bir dizi ve $x\in X$ olsun. $\lim_{n\to\infty} M(x_n,x,t)=1$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine *yakınsak dizi* denir ve $x_n\to x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.5: Bir *fuzzy metrik* uzayında her *Cauchy* dizisi yakınsak ise bu uzaya *tam fuzzy metrik* uzay denir.

Örnek 2.1.3: (X,d) bir metrik uzay ve $a*b=\min\{a,b\}$ veya $a*b=a.b$ olmak üzere ,

$M(x,y,t)=\dfrac{t}{t+d(x,y)}$ seçilirse $(X,M,*)$ üçlüsü *fuzzy metrik* uzaydır ve bu uzaya d metriği tarafından elde edilen *standart fuzzy metrik uzayı* denir.

Çözüm:

$fm_1)$ $\forall t>0$, $M(x,y,t)=\dfrac{t}{t+d(x,y)}>0$

$fm_2)$ $M(x,y,t)=1$ olması için,

$$\frac{t}{t+d(x,y)}=1$$

olmalıdır. Böylece

$$d(x,y)=0$$

olur. Buradan $x=y$

elde edilir.

$fm_3)$ $d(x,y)=d(y,x)$ olduğundan,

$$M(x,y,t)=M(y,x,t)$$

olur.

$fm_4)$ $a*b=\min\{a,b\}$ alalım

$M(x,z,t+s)\geq \min\{M(x,y,t),M(y,z,s)\}$ olduğunu gösterelim.

Eğer $M(x,y,t)\geq M(y,z,s)$ kabul edilirse,

$$\Rightarrow \frac{t}{t+d(x,y)}\geq \frac{s}{s+d(y,z)}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{t+d(x,y)}-\frac{s}{s+d(y,z)}\geq 0$$

$$t.(s+d(y,z))-s.(t+d(x,y))\geq 0$$

olur. Ayrıca,

$$M(x,z,t+s)\geq \frac{t+s}{t+s+d(x,z)}$$

$$\geq \frac{t+s}{t+s+d(x,y)+d(y,z)}$$

dir.

$$M(x,z,t+s)-M(y,z,t)=\frac{t+s}{t+s+d(x,y)+d(y,z)}-\frac{s}{s+d(y,z)}$$

$$=\frac{t.\left(s+d(y,z)\right)-s.\left(t+d(x,y)\right)}{\left(t+s+d(x,y)+d(y,z)\right).\left(s+d(y,z)\right)}\geq 0$$

bulunur. Böylece

$$M(x,z,t+s)\geq M(y,z,s)$$

elde edilir. Aynı şekilde,

$$M(y,z,s)\geq M(x,y,t)$$

kabul edilirse,

$$M(x,z,t+s)\geq M(x,y,t)$$

bulunur. Yani her durumda

$$M(x,z,t+s)\geq \min\{M(x,y,t),M(y,z,s)\}$$

dır.

fm_5) $d(x,y)$ metriği sürekli olduğundan $M(x,y,.):(0,\infty)\rightarrow[0,1]$ süreklidir.

Lemma 2.1.1: $(X,M,*)$ fuzzy metrik uzay olmak üzere $M(x,y,.)$ metriği azalmayandır.

İspat: $t<s$ ve $x,y\in X$ olsun.

$$M(x,y,t)=M(x,y,t)*1$$

$$=M(x,y,t)*M(x,x,s-t)$$

$$\leq M(x,y,s)$$

böylece

$$M(x,y,t) \le M(x,y,s)$$

olur.

Örnek 2.1.4: X reel sayılar kümesi ve $\forall t>0$ için,

$M(x,y,t) = e^{-\frac{|x-y|}{t}}$ olmak üzere M fuzzy metiğidir.

Çözüm:

$fm_1)$ tanımdan $\forall t>0$, $M(x,y,t)>0$ olduğu aşikardır.

$fm_2)$ $M(x,y,t)=1$

$$\Leftrightarrow |x-y|=0$$

$$\Leftrightarrow x=y$$

$fm_3)$ $|x-y|=|y-x|$ olduğundan

$$M(x,y,t)=M(x,y,t)$$

dir.

$fm_4)$ $M(x,y,t) \ge M(y,z,s)$ olsun. Buradan

$$\frac{|x-y|}{t} \le \frac{|y-z|}{s}$$

bulunur. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$s.|x-y|-t.|y-z| \le 0$$

elde edilir. Ayrıca,

$$M(x,z,t+s) = e^{-\frac{|x-z|}{t+s}}$$

olmak üzere ve

$$\frac{|x-z|}{t+s} < \frac{|x-y|+|y-z|}{t+s}$$

olduğundan

$$\frac{|x-y|+|y-z|}{t+s} - \frac{|y-z|}{s} = \frac{s.|x-y|-t.|y-z|}{s.(t+s)} \le 0$$

$$M(x,z,t+s) - M(y,z,s) \ge 0$$

olduğu görülür.

Bu da $M(x,z,t+s) \ge M(y,z,s)$ olduğunu gösterir.

Eğer $M(y,z,s) \ge M(x,y,t)$ olduğu kabul edilirse benzer şekilde

$$M(x,z,t+s) \ge M(x,y,t)$$

olur. Böylece her durumda

$$M(x,z,t+s) \ge \min\{M(x,y,t), M(y,z,s)\}$$

olduğu görülür.

fm_5) Üstel fonksiyon ve mutlak değer fonksiyonu sürekli olduğundan M süreklidir.

Lemma 2.1.2: $(X,M,*)$ fuzzy metrik uzayında (y_n) bir dizi olsun.

Eğer $M(y_{n+2}, y_{n+1}, q.t) \ge M(y_{n+1}, y_n, t)$ olacak biçimde $q \in (0,1)$ sayısı var ise (y_n) X de *Cauchy* dizisidir.

İspat:

$\forall t > 0$ ve $q \in (0,1)$ için

$$M(y_2, y_3, q.t) \ge M(y_1, y_2, t) \ge M\left(y_0, y_1, t/q\right)$$

veya

$$M(y_2, y_3, t) \geq M\left(y_0, y_1, t/q^2\right)$$

bu şekilde devam edilirse

$$M(y_{n+1}, y_{n+2}, t) \geq M\left(y_1, y_2, t/q^n\right)$$

olur . Böylece $p > 0$ tamsayısı için,

$$M(y_n, y_{n+p}, t) \geq M\left(y_n, y_{n+1}, t/p\right) * \overbrace{............}^{p-\tan e} * M\left(y_{n+p-1}, y_{n+p}, t/p\right)$$

$$\geq M\left(y_1, y_2, t/p.q^{n-1}\right) * \overbrace{................}^{p-\tan e} * M\left(y_1, y_2, t/p.q^{n+p-2}\right)$$

buradan limit alınırsa ,

$$\lim_{n\to\infty} M(y_n, y_{n+p}, t) \geq 1 * \overbrace{............}^{p-\tan e} * 1 \geq 1$$

olur. Bu da (y_n) nin X de *Cauchy* dizisi olduğunu gösterir.

Tanım 2.1.6: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve $x \in X$,

olmak üzere

$$B(x,r,t) = \{y \in X : M(x,y,t) > 1-r\}$$

kümesine *açık yuvar* denir. Böylece $A \subset X$ kümesi ,

$\forall x \in A$, $\exists r \in (0,1)$, $B(x,y,t) \subseteq A$

oluyorsa A kümesine *açık küme* denir.

Tanım 2.1.7: kümesi $(X, M, *)$ uzayının boştan farklı bir alt kümesi olsun.

A kümesi ile X kümesi arasındaki uzaklık,

için $M(A,x,t) = \sup\{M(y,x,t) : y \in A\}$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$P_A^t(x)=\{y\in A: M(A,x,t)=M(y,x,t)\}$$

olmak üzere $P_A^t(x)$ kümesinin her bir elemanına *x in A kümesindeki t-en iyi yaklaşığı* denir.

Tanım 2.1.8: $(X,M,*)$ uzayının boştan farklı herhangi alt kümesi için

$$P_A(x)=\{g\in G: M(g,x,t)=M(G,x,t)\ \ \forall t>0\}$$ olmak üzere

$P_A(x)\neq\varnothing$ oluyorsa alt kümesine *fuzzy proximinal* denir.

Lemma 2.1.3: Her *fuzzy proximinal* altküme kapalıdır.

İspat: G, $(X,M,*)$ fuzzy metrik uzayının fuzzy proximinal altkümesi olsun ve $\forall t>0$, $x\in\bar{G}$ için $M(G,x,t)=1$ dir.

Eğer $g_0\in P_G(x)$ ise $x=g$ olur. O halde G kapalıdır.

2.2 Fuzzy Normlu Uzaylar ve Bu Uzaylarda Yaklaşım

Tanım 2.2.1: X lineer uzay $*$ sürekli t-norm ve N $X\times(0,\infty)$ üzerinde bir fuzzy kümesi

$\forall x,y\in X\ \ \forall t,s>0$ için

) $N(x,t)>0$

) $N(x,t)=1\Leftrightarrow x=0$

) $N(cx,t)=N\left(x,\dfrac{t}{|c|}\right)$

) $N(x,t)*N(y,s)\leq N(x+y,t+s)$

) $N(x,.):(0,\infty)\to[0,1]$ sürekli ve $\lim_{t\to\infty} N(x,t)=1$ şartları sağlandığında

N ye *fuzzy norm* $(X,N,*)$ üçlüsüne *fuzzy normlu uzay* denir.

Eğer $a*b=\min\{a,b\}$ seçilirse) koşulu

$$N(x+y,t+s)\geq \min\{N(x,t),N(y,s)\}$$

şeklinde olur.

Lemma 2.2.1: $(X,N,*)$ *fuzzy normlu* uzay olsun.

i) $N(x,t)$ t - ye bağlı olarak azalmayandır.

ii) $N(x-y,t)=N(y-x,t)$

İspat:

i) $t<s$, $k=s-t$ olsun.

$$N(x,t)=N(x,t)*1$$

$$=N(x,t)*N(0,k)\leq N(x,t+k)$$

$$=N(x,s)$$

$$N(x,t)\leq N(x,s)$$

ii) $N(x-y,t)=N((-1)(y-x),t)$

$$=N\left(y-x,\frac{t}{|-1|}\right)=N(y-x,t)$$

Lemma 2.2.2: $(X,N,*)$ bir fuzzy normlu uzay olsun.

$M(x,y,t)=N(x-y,t)$ şeklinde tanımlandığında M X üzerinde fuzzy metrik olur.

Bu metriğe N tarafından elde edilen metrik denir.

İspat:

$fm_1)$ $\forall t>0,\quad M(x,y,t)=N(x-y,t)>0$

$fm_2)$ $M(x,y,t)=1$

$$\Leftrightarrow N(x-y,t)=1$$

$$\Leftrightarrow x-y=0$$

$$\Leftrightarrow x=y$$

olur.

$fm_3)$ $N(x-y,t)=N(y-x,t)$ olduğundan

$$M(x,y,t)=M(y,x,t)$$

$fm_4)$ $M(x,z,t+s)=N(x-z,t+s)$

$$=N(x-y+y-z,t+s)$$

$$\geq N(x-y,t)*N(y-z,s)$$

$$=M(x,y,t)*M(y,z,s)$$

böylece

$$M(x,z,t+s)\geq M(x,y,t)*M(y,z,s)$$

olur.

$fm_5)$ N sürekli olduğundan M süreklidir.

Lemma 2.2.3: $(X, N, *)$ fuzzy normlu uzay olsun.

M de N normundan elde edilen fuzzy metrik olmak üzere

i) $M(x+z, y+z, t) = M(x, y, t)$

ii) $M(cx, cy, t) = M\left(x, y, \dfrac{t}{|c|}\right)$

dir.

İspat:

i) $M(x+z, y+z, t) = N(x+z-(y+z),\ t)$

$$= N(x-y, t)$$

$$= M(x, y, t)$$

ii) $M(cx, cy, t) = N(cx - cy, t)$

$$= N\left(x-y, \frac{t}{|c|}\right) = M\left(x, y, \frac{t}{|c|}\right)$$

Örnek 2.2.1: $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$ aşikar metrik uzayı olmak üzere , $a * b = a.b$ olsun.

$N(x,t) = \dfrac{t}{t+|x|}$ bir fuzzy normdur.

Çözüm:

$fn_1)$ $N(x,t) > 0$

$fn_2)$ $N(x,t) = 1$

$$\Leftrightarrow |x| = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$fn_3)\ N(cx,t)=\dfrac{t}{t+|cx|}$

$$=\frac{t}{t+|c||x|}=\frac{t/|c|}{t/|c|+|x|}$$

$$=N\left(x,\frac{t}{|c|}\right)$$

$fn_4)\ N(x+y,t+s)-N(x,t).N(y,s)\ =\dfrac{t+s}{t+s|x+y|}-\dfrac{t.s}{(t+|x|).(s+|y|)}$

$$\geq\frac{t+s}{t+s+|x|+|y|}-\frac{t.s}{(t+|x|).(s+|y|)}$$

gerekli işlemler yapılırsa ,

$$t^2.|y|+t.|x|.|y|+s^2.|x|+s.|x|.|y|\geq 0 \text{ olur.}$$

Böylece $N(x+y,t+s)\geq N(x,t).N(y,s)$ olur.

$fn_5)\ |.|$ Mutlak değer fonksiyonu sürekli olduğundan,

$N(x,t)$ süreklidir ve $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{t+|x|}=1$ dir.

Örnek 2.2.2: $(X,\|\,.\,\|)$ normlu lineer uzay ve

$a*b=\min\{a,b\}$ olsun.

$N(x,t)=\dfrac{k.t^n}{k.t^n+m.\|x\|}$ $\quad k,m,n\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere

$(X,N,*)$ fuzzy normlu lineer uzaydır.

Çözüm: $k=m=n=1$ seçildiğinde örnek 2.2.1 deki gibi çözüm yapılabilir.

$n=1$ ve $k,m\in \mathbb{R}^+$ durumunu inceleyelim. Yani

$N(x,t)=\dfrac{k.t}{k.t+m.\|x\|}$ ifadesinin fuzzy norm olduğunu gösterelim.

$fn_1)$, $fn_2)$, $fn_3)$, $fn_5)$ şartlarının sağlandığı kolayca görülebilir.

$fn_4)$ şartını inceleyelim.

Eğer $N(x,s)\geq N(y,t)$ kabul edilirse

$$\frac{k.s}{k.s+m.\|x\|}-\frac{k.t}{k.t+\|y\|}\geq 0$$

Böylece $k.m.s\|y\|-k.t.m\|x\|\geq 0$ olur.

$$N(x+y,t+s)=\frac{k.(t+s)}{k.(t+s)+m.\|x+y\|}$$

$$\geq \frac{k.(t+s)}{k.(t+s)+m.\|x\|+m.\|y\|}$$

Ayrıca,

$$\frac{k.(t+s)}{k.(t+s)+m.(\|x\|+\|y\|)}-\frac{k.t}{k.t+\|y\|}=\frac{k.s.m.\|y\|-k.t.m.\|x\|}{\left(k.(t+s)+m.(\|x\|+\|y\|)\right).(k.t+\|y\|)}\geq 0$$

elde edilir.

Bu da $N(x+y,t+s)\geq N(y,t)$ olduğunu gösterir.

Eğer $N(y,t)\geq N(x,s)$ kabul edilirse,

benzer şekilde $N(x+y,t+s)\geq N(x,s)$ olur.

Böylece her iki durumda da,

$$N(x+y,t+s)\geq \min\{N(y,t),N(x.s)\}$$

elde edilir.

Örnek 2.2.3: $(X,\|.\|)$ normlu uzay olsun $a*b=a.b$, $x\in X$, $t>0$ olmak üzere

$N(x,t)=\left(\exp\frac{\|x\|}{t}\right)^{-1}$ ifadesi bir fuzzy norm belirtir.

Çözüm:

$fn_1)$ $N(x,t)>0$

$fn_2)$ $N(x,t)=1$

$$\Leftrightarrow \|x\|=0$$

$$\Leftrightarrow x=0$$

$fn_3)$ $\frac{\|cx\|}{t}=\frac{|c|.\|x\|}{t}=\frac{\|x\|}{t/|c|}$ olduğundan $N(cx,t)=N\left(x,\frac{t}{|c|}\right)$ olur.

$fn_4)$ $N(x+y,t+s)\geq N(x,t).N(y,s)$ olduğunu göstermek için

$N(x+y,t+s)-N(x,t).N(y,s)\geq 0$ olduğunu göstermeliyiz.

Norm özelliğinden $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ olduğundan

$$\frac{\|x\|}{t}+\frac{\|y\|}{s}-\frac{\|x+y\|}{t+s}\geq\frac{\|x\|}{t}+\frac{\|y\|}{s}-\frac{\|x\|}{t+s}-\frac{\|y\|}{t+s}\geq 0$$

olur.

$$N(x+y,t+s)-N(x,y).N(y,s)=\frac{e^{\frac{\|x\|}{t}+\frac{\|y\|}{s}}-e^{\frac{\|x+y\|}{t+s}}}{e^{\frac{\|x+y\|}{t+s}}.e^{\frac{\|x\|}{t}+\frac{\|y\|}{s}}}$$ ve $$\frac{\|x\|}{t}+\frac{\|y\|}{s}-\frac{\|x+y\|}{t+s}\geq 0$$

olduğundan

$$N(x+y,t+s)-N(x,t).N(y,s)\geq 0$$

olur.

fn_5) Üstel fonksiyon sürekli olmasından

$N(x,.):(0,\infty)\to[0,1]$ sürekli ve $\lim_{t\to\infty} N(x,t)=1$

Teorem 2.2.1: $(X,N,*)$ fuzzy normlu uzay ,ayrıca

fn_6) $\forall t>0$, $N(x,t)>0$ $\forall t>0$ öyle ki $x=0$,

özelliği sağlansın.

$\|x\|_\alpha=\inf\{t:N(x,t)\geq\alpha\}$ $\alpha\in(0,1)$ olmak üzere

$\{\|\ .\ \|_\alpha:\alpha\in(0,1)\}$ ailesi X üzerindeki fuzzy normuna karşılık gelen artan normlar ailesidir.

Bu ailenin her bir elemanına X üzerinde denir.

İspat: İlk olarak $\|\ .\ \|_\alpha$ nin X üzerinde norm olduğunu gösterelim. Daha sonra α 'ya bağlı olarak artan olduğunu gösterelim.

n_1) $\|x\|_\alpha=0$

$$\Rightarrow \inf\{t:N(x,t)\geq\alpha\}=0$$

$N(x,t)\geq\alpha>0$, fn_6) özelliğinden $x=0$ olur.

Ayrıca,

$x=0$ olursa fn_2) özelliğinden

$$N(x,t)=1$$

olur. Böylece

$$\inf\{t:N(x,t)\geq\alpha\}=0$$

$$\|x\|_\alpha = 0$$

elde edilir.

$n_2)$ $\|cx\|_\alpha = \inf\{s : N(cx,s) \geq \alpha\}$

$$= \inf\left\{s : N\left(x, \frac{s}{|c|}\right) \geq \alpha\right\} \quad , \quad t = \frac{s}{|c|}$$

$$= \inf\{t.|c| : N(x,t) \geq \alpha\}$$

$$= |c|.\inf\{t : N(x,t) \geq \alpha\}$$

$$= |c|.\|x\|_\alpha$$

$n_3)$ $\|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha = \inf\{t : N(x,t) \geq \alpha\} + \inf\{s : N(x,s) \geq \alpha\}$

$$= \inf\{t+s : N(x,t) \geq \alpha,\ N(x,s) \geq \alpha\}$$

$\geq \inf\{t+s : N(x+y,t+s) \geq \alpha\}$ ve $t+s=r$ değişken değiştirilirse

$$\|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha \geq \inf\{r : N(x+y,r) \geq \alpha\}$$

olur. Böylece

$$\|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha \geq \|x+y\|_\alpha$$

olur.

Şimdi de yukarıda tanımladığımız ailenin artan normlar ailesi olduğunu gösterelim.

Bunun için $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ olsun.

$$\|x\|_{\alpha_1} = \inf\{t : N(x,t) \geq \alpha_1\} \text{ ve } \|x\|_{\alpha_2} = \inf\{t : N(x,t) \geq \alpha_2\}$$

$\alpha_1 < \alpha_2$ olduğundan

$$\{t : N(x,t) \geq \alpha_2\} \subset \{t : N(x,t) \geq \alpha_1\} \text{ olur.}$$

Her tarafın infimumu alınırsa,

$$\inf\{t : N(x,t) \geq \alpha_2\} \geq \inf\{t : N(x,t) \geq \alpha_1\}$$

$$\|x\|_{\alpha_2} \geq \|x\|_{\alpha_1}$$

olur.

Tanım 2.2.2: $(X, N, *)$ fuzzy normlu uzay ve $0 < r < 1$ olsun.

$B(x,r,t) = \{y \in X : N(x-y,t) \geq 1-r\}$ kümesine x merkezli r çaplı *açık yuvar* denir.

$B[x,r,t] = \{y \in X : N(x-y,t) \geq 1-r\}$ kümesine de x merkezli r çaplı *kapalı yuvar* denir.

Tanım 2.2.3: $(X, N, *)$ fuzzy normlu uzayında (x_n) bir dizi olsun.

$\lim\limits_{n\to\infty} N(x_n - x_m, t) = 1$ ise (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} N(x_n - x, t) = 1$ olacak şekilde $x \in X$ varsa (x_n) dizisine *yakınsak dizi* denir.

Lemma 2.2.3: $(X, N, *)$ fuzzy normlu uzay

a) $(x, y) \to x + y$ işlemi süreklidir.

b) $(\alpha, y) \to \alpha x$ işlemi süreklidir.

İspat: a) $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ yakınsak dizilerini seçelim

$$N(x_n + y_n - (x+y), t) \geq N\left(x_n - x, \frac{t}{2}\right) * N\left(y_n - y, \frac{t}{2}\right)$$

$n \to \infty$ iken limit alınırsa,

$$N\left(x_n+y_n-(x+y),t\right)\geq N\left(x_n-x,\frac{t}{2}\right)*N\left(y_n-y,\frac{t}{2}\right)\to 1 \text{ olur.}$$

O halde,

$(x,y)\to x+y$ işlemi süreklidir.

b) $x_n\to x$ ve, $\alpha_n\to\alpha$ $\alpha_n\neq 0$ olmak üzere

$$N(\alpha_n x_n-\alpha x,t)=N\left(\alpha_n(x_n-x)+x(\alpha_n-\alpha),t\right)$$

$$\geq N\left(\alpha_n(x_n-x),\frac{t}{2}\right)*N\left(x(\alpha_n-\alpha),\frac{t}{2}\right)$$

$n\to\infty$ iken limit alınırsa,

$x_n-x\to 0$ ve $\alpha_n\to\alpha$ olduğundan

$$N(\alpha_n.x_n-\alpha x,t)\geq N\left(0,{}^{t}\!/_{2}\right)*N\left(0,{}^{t}\!/_{2}\right)=1$$

olur.

Tanım 2.2.4: A kümesi $(X,N,*)$ fuzzy normlu uzayının bir alt kümesi olsun. $x\in X$ ve $t>0$ için

$d(A,x,t)=\sup\{N(y-x,t):y\in A\}$ olmak üzere

$N(y_0-x,t)=d(A,x,t)$ oluyorsa $y_0\in A$ elemanına x-in A kümesindeki *t-en iyi yaklaşığı* denir.

Tanım 2.2.5: A kümesi $(X,N,*)$ fuzzy normlu uzayının boştan farklı altkümesi olsun.

$x\in X$, $t>0$ olmak üzere x-*in* A daki t-en iyi yaklaşıklarının kümesi $P_A^t(x)$ ile göstereceğiz. Yani,

$$P_A^t(x)=\{y\in A:d(A,x,t)=N(y-x,t)\}$$

dir.

Eğer $x \in X$ in en az bir tane $t-$*en iyi yaklaşığı* A kümesinde var ise A ya $t-$*proximinal küme* denir.

Teorem 2.2.2: $(X,N,*)$ fuzzy normlu uzayının boş kümeden farklı bir A altkümesi için,

a) $\forall x,y \in X$ ve $t>0$ için $d(A+y,x+y,t)=d(A,x,t)$ dır.

b) $P_A^t(x+y)=P_A^t(x)+y$

c) $\alpha \in \mathbb{R}-\{0\}$ olmak üzere $d(\alpha A,\alpha x,t)=d\left(A,x,\frac{t}{|\alpha|}\right)$ dır.

d) $\alpha \in \mathbb{R}-\{0\}$ olmak üzere $P_{\alpha A}^{|\alpha|.t}(\alpha x)=\alpha.P_A^t(x)$ dır.

İspat:

a) $d(A+y,x+y,t)=\sup\{N(z+y-(x+y),t): z\in A\}$

$$=\sup\{N(z-x,t): z\in A\}$$

$$=d(A,x,t)$$

b) $y_0 \in P_A^t(x+y)$ ise a) seçeneğini kullanarak

$y_0 \in P_{A+t}^t(x+y)$

$\Leftrightarrow y_0 \in A+y$ ve $d(A+y,x+y,t)=N(x+y-y_0,t)=N((y_0-y)-x,t)$

$\Leftrightarrow y_0-y\in A$ ve $y_0-y\in P_A^t(x)$

$\Leftrightarrow y_0 \in P_A^t(x)+y$

c) $d(\alpha A,\alpha x,t)=\sup\{N(\alpha z-\alpha x,t): z\in A\}$

$$= \sup\left\{ N\left(\alpha\left(z-x\right),t\right) : z \in A \right\}$$

$$= \sup\left\{ N\left(z-x, \frac{t}{|\alpha|} \right) : z \in A \right\}$$

$$= d\left(A, x, \frac{t}{|\alpha|} \right)$$

d) c) seçeneğinden faydalanarak

$$y_0 \in P_{\alpha A}^{|\alpha|.t}\left(\alpha x\right)$$

$$\Leftrightarrow y_0 \in \alpha A \text{ ve } d\left(\alpha A, \alpha x, |\alpha|.t\right) = N\left(y_0 - \alpha x, |\alpha|.t\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_0}{\alpha} \in A \text{ ve } N\left(\frac{y_0}{|\alpha|} - x, t \right) = d\left(A, x, t\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_0}{\alpha} \in P_A^t\left(x\right)$$

$$\Leftrightarrow y_0 \in \alpha . P_A^t\left(x\right)$$

dır.

3.BÖLÜM

FUZZY 2-METRİK VE FUZZY 2-NORMLU UZAYLAR

3.1 Fuzzy 2-Metrik Uzaylar ve Özellikleri

Tanım 3.1.1: $*:[0,1]\times[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ olmak üzere

) $*(a,1,1)=a$, $*(0,0,0)=0$

) $*(a,b,c)=*(a,c,b)=*(b,c,a)$

) $a_1 \geq a_2$, $b_2 \geq b_1$, $c_2 \geq c_1$ olmak üzere $*(a_1,b_1,c_1)\geq *(a_2,b_2,c_2)$

) $*(*(a,b,c),d,e)=*(a,*(b,c,d),e)=*(a,b,*(c,d,e))$

şartlarını sağlar ise $*$ işlemine *2-sürekli t-norm* denir.

Tanım 3.1.2: X herhangi bir küme $*$ *sürekli 2-t-norm* ve M $X\times X\times X\times[0,\infty)$ üzerinde bir fuzzy kümesi

) $M(x,y,a,0)=0$

) $t>0$, $M(x,y,a,t)=1$, $\Leftrightarrow$ x,y,a dan en az ikisi eşit

) $M(x,y,a,t)=M(y,a,x,t)=M(a,y,x,t)$

) $\forall x,y,z,a\in X$, $r,s,t>0$ için

$$M(x,y,a,r+s+t)\geq M(x,y,z,r)*M(x,z,a,s)*M(z,y,a,t)$$

) $M(x,y,a,.):[0,\infty)\to[0,1]$ soldan sürekli ve $\lim_{t\to\infty} M(x,y,a,t)=1$

şartları sağlanırsa $(X, M, *)$ üçlüsüne *fuzzy 2-metrik uzay* denir .

Örnek 3.1.1: $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ kümesi ve bu küme üzerinde

$$d(x,y,z) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y = z \text{ ve } \{x,y,z\} = \{1,2,3\} \\ \frac{1}{2} & , \quad \textit{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde *2-metrik tanımlansın*.

Ayrıca $t \in [0, \infty)$, $a * b * c = a.b.c$ *sürekli t-norm* olsun.

$$M(x,y,z,t) = \begin{cases} 0 & , \quad t = 0 \\ \dfrac{t}{t + d(x,y,t)} & , \quad t > 0, x, y, z \in X \end{cases}$$

olmak üzere $(X, M, *)$ *fuzzy 2-metrik* uzaydır.

Çözüm:

$2fm_1)$ $M(x,y,z,0) = 0$

$2fm_2)$ $M(x,y,z,t) = 1$

$$\Leftrightarrow d(x,y,z) = 0$$

$\Leftrightarrow x, y, z$ den en az ikisinin eşit olmasıdır.

$2fm_3)$ $d(x,y,z) = d(y,x,z) = d(z,x,y)$ olduğundan

$$M(x,y,z,t) = M(y,x,z,t) = M(z,x,y,t)$$

$2fm_4)$ $\left(r + \frac{1}{2}\right).\left(t + \frac{1}{2}\right).(r + s + t) \geq r.s.t\left\{(r + s + t) + \frac{1}{2}\right\}$ olduğundan

$$\frac{r + s + t}{r + s + t + \frac{1}{2}} \geq \frac{r.s.t}{\left(r + \frac{1}{2}\right).\left(s + \frac{1}{2}\right).\left(t + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\frac{r+s+t}{(r+s+t)+\frac{1}{2}} \geq \frac{r}{\left(r+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{s}{\left(s+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)}$$

$$M(x,y,a,r+s+t) \geq M(x,y,z,r) * M(x,z,a,s) * M(z,y,a,t)$$

$2fm_5)$ $M(x,y,z,.):[0,\infty) \to [0,1]$ soldan sürekli ve $\lim_{t\to\infty} M(x,y,z,t)=1$

Bu örnekten görüldüğü gibi her 2-metrik uzaydan bir *fuzzy 2-metrik uzay* elde edilebilir. Bu fuzzy uzayına *standart fuzzy 2-metrik uzay* denir.

Tanım 3.1.3: $(X,M,*)$ fuzzy 2-metrik uzayında (x_n) bir dizi olsun.

$$\forall t>0, \quad \lim_{n\to\infty} M(x_n,x,z,t)=1$$

olacak şekilde $x \in X$ varsa (x_n) dizisine *yakınsak dizi* denir.

Tanım 3.1.4: $(X,M,*)$ fuzzy 2-metrik uzayında (x_n) bir dizi

$\forall t>0$ için $\lim_{n,m\to\infty} M(x_n,x_m,z,t)=1$ oluyorsa (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 3.1.5: $(X,M,*)$ fuzzy 2-metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise $(X,M,*)$ uzayına *tam uzay* denir.

Lemma 3.1.1: $(X,M,*)$ tam fuzzy 2-metrik uzayında (y_n) bir dizi olsun.

$$M(y_n,y_{n+1},a,\alpha t) \geq M(y_{n-1},y_n,a,t)$$

olacak biçimde $\alpha \in (0,1)$ var ise (y_n) dizisi X kümesinde bir noktaya yakınsar.

İspat: $\forall t>0$ için $2fm_4)$ şartından

$$M(y_m,y_n,a,t) \geq M\left(y_m,y_n,y_{n+1},\frac{t}{3}\right) * M\left(y_{n+1},y_n a,\frac{t}{3}\right)$$

$$*M\left(y_m,y_{n+1},y_{n+2},\frac{t}{3^2}\right)*M\left(y_{n+2},y_{n+1},a,\frac{t}{3^2}\right)\ldots$$

$$*M\left(y_{m-1},y_{m-2},a,\frac{t}{3^{m-n-1}}\right)*M\left(y_m,y_{n+1},y_{n+2},\frac{t}{3^2}\right)*M\left(y_m,y_m,a,\frac{t}{3^{m-n}}\right)$$

$$*M\left(y_m,y_n,a,t\right)\geq\prod_{k=0}^{m-n-2}M\left(y_{n+k},y_{n+k+1},y_m,\, t/3^{k+1}\right)*\prod_{k=0}^{m-n-2}M\left(y_{n+k},y_{n+k+1},a,\, t/3^{k+1}\right)$$

Böylece $M\left(y_n,y_{n+1},a,\alpha t\right)\geq M\left(y_{n-1},y_n,a,t\right)$ eşitsizliğinden

$$M\left(y_m,y_n,a,t\right)\geq\prod_{k=0}^{m-n-2}M\left(y_k,y_{k+1},y_m,\, t/3^{k+1}.\alpha^n\right)*\prod_{k=0}^{m-n-1}M\left(y_k,y_{k+1},a,\, t/3^{k+1}.\alpha^n\right)$$

dır.

$2fm_5)$ özelliğinden $\lim\limits_{m,n\to\infty}M\left(y_m,y_n,a,t\right)\geq 1*1\ldots*1=1$

Bu da $\left(y_n\right)$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

X tam olduğundan $\left(y_n\right)$ dizisi yakınsaktır.

Teorem 3.1.1: $\left(X,M,*\right)$ tam fuzzy 2-metrik uzay ve

$f,g:X\to X$ fonksiyonlar olsun.

a) $g\left(X\right)\subseteq f\left(X\right)$,

b) f sürekli ,

c) $\forall x,y,a\in X$ ve $0<\alpha<1$, $M\left(gx,gy,a,\alpha t\right)\geq M\left(fx,fy,a,t\right)$

şartları altında f ve g fonksiyonları *genel sabit noktaya sahiptirler* (*common fixed point*)

İspat : $x_0\in X$ a) şıkkından $y_1=fx_1=gx_0$ olacak şekilde $x_1\in X$ vardır ve $\left(X,M,*\right)$ tam olduğundan $y_n=fx_n=gx_{n-1}$ olacak şekilde $\left(x_n\right)$ dizisi vardır.

Yine $(X,M,*)$ tam olduğundan

$$M(y_n, y_{n+1}, a, t) = M(gx_{n-1}, gx_n, a, t)$$

$$\geq M\left(fx_{n-1}, fx_n, a, t/\alpha\right) = M\left(y_{n-1}, y_n, a, t/\alpha\right)$$

Bir önceki Lemma 3.1.1 den (y_n) Cauchy dizisi ve X tam olmasından

$y_n = fx_n = gx_{n-1} \to y$ olur f sürekliliğinden $\{gfx_n\} \to gy$ ve $gfx_n = fgx_n$ olur.

Böylece $fgx_n \to fy$ olur ve limitin tekliğinden $fy = gy$ olur.

Ayrıca $ffy = fgy$ ve

$$M(gy, ggy, a, t) \geq M\left(fy, fgy, a, t/\alpha\right)$$

$$\geq M\left(gy, ggy, a, t/\alpha\right) \geq \ldots \geq M\left(gy, ggy, a, t/\alpha^n\right) \text{ olur.}$$

$2fm_2)$ ve $2fm_5)$ şartlarından $gy = ggy$

$\Rightarrow gy = ggy = fgy$

Bu da gy nin f ve g foksiyonlarının sabit noktası olduğunu gösterir.

Teklik: f ve g fonksiyonlarının y ve z şeklinde iki tane sabit noktası olsun. Bunların birbirine eşit olduklarını gösterelim:

$$1 \geq M(y, z, a, t) \geq M(gy, gz, a, t)$$

$$\geq M\left(fy, fz, a, t/\alpha\right)$$

$$= M\left(y, z, a, t/\alpha\right) \geq \ldots \geq M\left(y, z, a, t/\alpha^n\right)$$

$\xrightarrow{n\to\infty} 1$ olur.

Böylece $y = z$ dır.

3.2 Fuzzy 2-Normlu Uzaylar ve Özellikleri

Tanım 3.2.1: $\|.,.\|: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlar ise X kümesi üzerinde 2-*norm* olarak adlandırılır ve $(X, \|.,.\|)$ ikilisine 2-*normlu uzay* denir.

$\|x_1, x_2\| = 0 \Leftrightarrow x_1, x_2$ lineer bağımlı

$\forall\, x_1, x_2 \in X$ için $\|x_1, x_2\| = \|x_2, x_1\|$

$\|\alpha x_1, x_2\| = |\alpha| . \|x_1, x_2\| \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$\forall\, x_1, x_2, x_3 \in X$ için $\|x_1, x_2 + x_3\| \leq \|x_1, x_2\| + \|x_1, x_3\|$

Tanım 3.2.2: L R cismi üzerinde boyutu birden büyük lineer bir uzay olsun.

$N : L \times L \times [0, \infty)$ fonksiyonu $\forall x, y, z \in L$ ve $s, t \in [0, \infty)$ için

$N(x, y, 0) = 0$

$N(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x$ ve y lineer bağımlı.

$N(x, y, t) = N(y, x, t)$

$N(x + y, z, t + s) \geq N(x, z, t) * N(y, z, s)$

$N(\alpha x, y, t) = N\left(x, y, {}^{t}\!/\!{}_{|\alpha|}\right) \quad \alpha \neq 0$

$N(x, y, .) : [0, \infty) \to [0, 1]$ soldan sürekli

şartları sağlanırsa $(L, N, *)$ uzayına *fuzzy 2-normlu uzay* denir.

Tanımdan görülebileceği gibi $N(x, y, .)$ t ye bağlı olarak azalmayan bir fonksiyondur.

Ayrıca aşağıdaki örnekle görüleceği gibi her *2-normlu* uzaydan *fuzzy 2-normlu uzay* elde edilebilir.

Örnek 3.2.1: $\left(L,\|.,.\|\right)$ 2-normlu lineer uzay olsun ve $a*b=\min\{a,b\}$ olmak üzere

$N(x,y,t)=\dfrac{t}{t+\|x,y\|}$ fuzzy 2-norm dur ve $(L,N,*)$ üçlüsü de fuzzy 2-normlu uzaydır.

$2fn_1)$ $N(x,y,0)=0$

$2fn_2)$ $N(x,y,t)=1$

$$\Leftrightarrow \|x,y\|=0$$

$\Leftrightarrow$ x ile y lineer bağımlıdır.

$2fn_3)$ $\|x,y\|=\|y,x\|$ olduğundan

$$N(x,y,t)=N(y,x,t)$$

dır.

$2fn_4)$ $a*b=\min\{a,b\}$ olmak üzere

$$N(x+y,z,t+s)\geq \min\{N(x,z,t),N(y,z,s)\}$$

olduğunu gösterelim.

$$N(x+y,z,t+s)=\frac{t+s}{t+s+\|x+y,z\|}\geq\frac{t+s}{t+s+\|x,z\|+\|y,z\|}$$

$$N(x,z,t)\geq N(y,z,s)$$

olsun.

$$\frac{t}{t+\|x,z\|}-\frac{s}{s+\|y,z\|}\geq 0$$

gerekli işlemler yapılırsa,

$$t.\left(s+\|y,z\|\right)-s.\left(t+\|x,y\|\right)\geq 0$$

elde edilir.

$$N\left(x+y,z,t+s\right)-N\left(y,z,s\right)$$

ifadesini ele alalım

$$\frac{t+s}{t+s+\|x,z\|+\|y,z\|}-\frac{s}{s+\|y,z\|}=\frac{t.\left(s+\|y,z\|\right)-s.\left(t+\|x,y\|\right)}{\left(t+s+\|x,z\|+\|y,z\|+\left(s+\|y,z\|\right)\right)}\geq 0$$

böylece

$$N\left(x+y,z,t+s\right)\geq N\left(y,z,s\right)$$

olur. Benzer şekilde,

$$N\left(y,z,s\right)\geq N\left(x,z,t\right)$$

olursa

$$N\left(x+y,z,t+s\right)\geq N\left(y,z,s\right)$$

olur . Böylece her durumda da

$$N\left(x+y,z,t+s\right)\geq \min\left\{N\left(x,z,t\right),N\left(y,z,s\right)\right\}$$

$2\,fn_5)$ $N\left(cx,z,t\right) \;=\frac{t}{t+\|cx,y\|}=\frac{t}{t+c\|x,y\|}$

$$=\frac{t/c}{t/|c|+\|x,y\|}=N\left(x,z,\frac{t}{|c|}\right)\quad (c\neq 0)$$

olur.

$2fn_6)$ $N(x,y,.):[0,\infty)\to[0,1]$ soldan süreklidir.

Tanım 3.2.3: $(L,N,*)$ fuzzy 2-normlu uzayında (x_n) bir dizi olsun ve $a\in L$, $t>0$

a) $\lim_{n\to\infty} N(x_n - x, a, t) = 1$ olacak şekilde $x\in L$ elemanı var ise (x_n) dizisi yakınsaktır denir.

b) $\lim_{n\to\infty} N(x_{n+p} - x_n, a, t) = 1$ $p>0$ oluyorsa (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

c) $(L,N,*)$ fuzzy 2-normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise $(L,N,*)$ uzayına *tam fuzzy 2-normlu* uzay denir.

4.BÖLÜM

FUZZY $\varphi -$ NORMLU UZAYLAR

4.1 Fuzzy $\varphi - 2$ Normlu Lineer Uzaylar ve Özellikleri

Tanım 4.1.1: $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

1) $\forall t > 0$ için $\varphi(-t) = \varphi(t)$

2) $\varphi(1) = 1$

3) φ fonksiyonu $(0, \infty)$ üzerinde kesin artan

4) $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \varphi(\alpha) = \infty$ ve $\lim\limits_{\alpha \to 0} \varphi(\alpha) = 0$

Bu fonksiyonlara örnek olarak aşağıdaki fonksiyonlar verilebilir.

$$\varphi(\alpha) = |\alpha|, \qquad \varphi(\alpha) = |\alpha|^p \;\; p \in \mathbb{R}^+,$$

$$\varphi(\alpha) = \frac{2.\alpha^{2n}}{|\alpha| + 1} \;\; n \in \mathbb{N}^+$$

Tanım 4.1.2: $\|.,.\| : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlar ise X kümesi üzerinde φ-2-*norm* belirtir ve $(X, \|.,.\|)$ ikilisine φ-2-*normlu uzay* denir.

$\|x_1, x_2\| = 0 \Leftrightarrow x_1, x_2$ lineer bağımlı

$\forall\, x_1, x_2 \in X$ için $\|x_1, x_2\| = \|x_2, x_1\|$

$\|\alpha x_1, x_2\| = |\varphi(\alpha)| . \|x_1, x_2\| \;\; \alpha \in \mathbb{R}$

$\forall\, x_1, x_2, x_3 \in X$ için $\|x_1, x_2 + x_3\| \le \|x_1, x_2\| + \|x_1, x_3\|$

Burada $\varphi(\alpha)=|\alpha|$ seçilirse S.Gahler'in [2] tanımladığı 2-norm elde edilir.

Tanım 4.1.3: $*:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ fonksiyonu birleşme, değişme özelliklerine sahip olup, aynı zamanda azalmayan birimi 1 ise bu fonksiyona *t-norm* denir.

Fuzzy uzaylarında en çok kullanılan t-norm örnekleri şunlardır.

$$a*b=\min\{a,b\},\ a*b=\max\{a+b-1,0\},\ a*b=a.b$$

Tanım 4.1.4 : $\circ:[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonu birleşme, değişme özelliklerine sahip olup ve aynı zamanda azalmayan ve birimi 0 olan bir işlem olsun.

Bu tür işlemlere örnek olarak

$$\circ(s,t)=t+s\ ,\ \circ(s,t)=\max\{s,t\}\ ,\ \circ(s,t)=\left(s^n+t^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

verilebilir.

Tanım 4.1.5: X boyutu birden büyük ya da eşit reel vektör uzayı olsun.

$$N:X\times X\times[0,\infty)\to[0,1]$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlar ise N fonksiyonuna X üzerinde fuzzy φ-2-norm denir.

$\forall\, x,y,z\in X$ ve $s,t\in[0,\infty)$ için

$$N(x,y,0)=0$$

$N(x,y,t)=1\Leftrightarrow$ x ve y lineer bağımlı

$\forall t>0$ için $N(x,y,t)=N(y,x,t)$

$$N(x+y,z,t\circ s)\geq N(x,z,t)*N(y,z,s)$$

$N(x,y,.):[0,\infty)\to[0,1]$ soldan sürekli

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0, \; N(\alpha x, y, t) = N\left(x, y, \frac{t}{\varphi(\alpha)}\right)$$

$(X, N, *)$ üçlüsüne $"\circ"$ operatörü altında *fuzzy* φ-2- *normlu uzay* denir.

$$\circ(a,b) = a+b$$

alınırsa $(X, N, *)$ üçlüsüne *fuzzy* φ-2- *normlu uzay* denir.

$$\circ(a,b) = \max(a,b)$$

alınırsa $(X, N, *)$ üçlüsüne *non-Archimedean* fuzzy φ-2- normlu uzay denir.

Aşağıdaki örnek her φ-2- normlu uzaydan *fuzzy* φ-2- *normlu uzay* elde edilebileceğini göstermektedir. Bu uzaya *standart fuzzy* φ-2- *normlu uzay* denir.

Örnek 4.1.1: $(X, \|.,.\|)$ φ-2- normlu uzay olsun. $t-norm$ olarak $a*b = \min\{a,b\}$ veya $a*b = a.b$ seçilsin. $\forall x, y \in X$ ve $\forall t > 0$ için,

$$N(x, y, t) = \frac{t}{t + \|x, y\|}$$

olmak üzere $(X, \|.,.\|, *)$ üçlüsü fuzzy φ-2- normlu uzaydır.

Çözüm:

f_1) $N(x, y, 0) = 0$

f_2) $N(x, y, t) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{t + \|x, y\|} = 1$$

$$\Leftrightarrow \|x, y\| = 0$$

$\Leftrightarrow$ x ve y lineer bağımlıdır.

$f_3)$ $\|x,y\| = \|y,x\|$ olduğundan

$$N(x,y,t) = N(y,x,t)$$

dir.

$f_4)$ $a * b = \min\{a,b\}$ ve $\circ(a,b) = a+b$

alarak

$$N(x+y,z,t+s) \geq \min\{N(x,z,t), N(y,z,s)\}$$

olduğunu gösterelim.

$$N(x+y,z,t+s) = \frac{t+s}{t+s+\|x+y,z\|} \geq \frac{t+s}{t+s+\|x,z\|+\|y,z\|}$$

Eğer $N(x,z,t) \geq N(y,z,s)$ olduğu kabul edilirse,

$$\frac{t}{t+\|x,z\|} - \frac{s}{s+\|y,z\|} \geq 0$$

gerekli işlemler yapıldığında,

$$t.(s+\|y,z\|) - s.(t+\|x,y\|) \geq 0$$

elde edilir.

$$N(x+y,z,t+s) - N(y,z,s)$$

ifadesini ele alalım,

$$\frac{t+s}{t+s+\|x,z\|+\|y,z\|} - \frac{s}{s+\|y,z\|} = \frac{t.(s+\|y,z\|) - s.(t+\|x,y\|)}{(t+s+\|x,z\|+\|y,z\|+(s+\|y,z\|))} \geq 0$$

böylece

$$N(x+y,z,t+s) \geq N(y,z,s)$$

olur.

Eğer $N(y,z,s) \geq N(x,z,t)$ olduğu kabul edilirse, benzer şekilde,

$$N(x+y,z,t+s) \geq N(y,z,s)$$

olur. Böylece her durumda da

$$N(x+y,z,t+s) \geq \min\{N(x,z,t), N(y,z,s)\}$$

olur.

f_5) $N(x,z,t) = \dfrac{t}{t+\|x,y\|}$ soldan sürekli

f_6) $N(cx,z,t) = \dfrac{t}{t+\|cx,y\|} = \dfrac{t}{t+\varphi(c)\|x,y\|}$

$$= \frac{t/\varphi(c)}{t/\varphi(c)+\|x,y\|} = N\left(x,z,\frac{t}{\varphi(c)}\right)$$

olur. $(c \neq 0)$

Tanım 4.1.6: $(X,N,*)$ bir fuzzy φ-2- normlu lineer uzay olsun

a) $\{x_n\}$ X de bir dizi olmak üzere $\lim_{n\to\infty} N(x_n - x, a, t) = 1$ $\forall t>0$ $a \in X$ olacak şekilde $x \in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisine X de *yakınsak dizi* denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ile gösterilir.

b) $\{x_n\}$ X de bir dizi olmak üzere,

$\forall t > 0$ ve $a \in X$ için $\lim_{n\to\infty} N(x_{n+p} - x_n, a, t) = 1$ olacak şekilde $p > 0$ varsa $\{x_n\}$ dizisine X de *Cauchy dizisi* denir.

c) Bir fuzzy φ-2- normlu uzayda her *Cauchy* dizisi yakınsak bir dizi ise bu uzaya *tam fuzzy φ-2- normlu uzay* denir. $\forall t > 0$ $a \in X$

Teorem 4.1.1: $(X,N,*)$ t-norm altında bir fuzzy φ-2- normlu uzay olsun.

$M : X\times X\times X\times[0,\infty)\to[0,1]$

$$M(x,y,z,t)=N(y-x,z-x,t)$$

olmak üzere $(X,M,*)$ üçlüsü bir fuzzy 2-metrik uzaydır.

İspat:

m_1) $M(x,y,z,0)=N(y-x,z-x,0)=0$

m_2) $M(x,y,z,t)=1\Leftrightarrow N(y-x,z-x,t)=1$

$$\Leftrightarrow y-x \text{ ile } z-x \text{ lineer bağımlı}$$

$$\Leftrightarrow y-x= z-x$$

$$\Leftrightarrow y=z$$

bu da x,y,z den en az ikisinin eşit olduğunu gösterir.

m_3) $M(x,y,z,t)=N(y-x,z-x,t)$

$$M(x,z,y,t)=N(z-x,y-x,t)=N(y-x,z-x,t)$$

olur. Aynı şekilde

$$M(y,z,x,t)=N(y-x,z-x,t)$$

olur. Böylece

$$M(x,y,z,t)=M(x,z,y,t)=M(y,z,x,t)$$

elde edilir.

m_4) $M(x,y,z,t+r+s)=N(y-x,z-x,t+r+s)$

$$\geq N(y-x,z-x,t)*N\left(y-x,z^{'}-z,z-x,r+s\right)$$

$$\geq N(y-x,z-x,t)*N\left(y-z^{'},z-x,r\right)*N\left(z^{'}-x,z-x,s\right)$$

$$=M\left(x,y,z^{'},t\right)*M\left(z^{'},y,z,r\right)*M\left(x,z^{'},z,s\right)$$

olur.

m_5) $M(x,y,z,.)=N(y-x,z-x,.)$ soldan süreklidir.

m_6) $\lim_{t\to\infty} M(x,y,z,t)=\lim_{t\to\infty} N(y-x,z-x,t)=1$ olur.

4.2 Fuzzy $\varphi-n$ Normlu Lineer Uzaylar ve Özellikleri

Tanım 4.2.1: $BoyutX \geq n,\ n\in\mathbb{N}_+$ ve X reel vektör uzayı olsun. $\|.,...,.\|:X^n\to\mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlar ise $\|.,...,.\|$ fonsiyonuna φ-n-*norn* $(X,\|.,...,.\|)$ ikilisine de φ-n-nornlu *lineer uzay* denir.

$\|x_1,...,x_n\|=0 \Leftrightarrow x_1,...,x_n$ lineer bağımlı

$\|x_1,...,x_n\|$ permütasyon altında değişmeli

$\|x_1,...,\alpha x_n\|=\varphi(\alpha).\|x_1,...,x_n\|,\ \alpha\in\mathbb{R}$

$\|x_1,...,x_n+x^{'}_n\|\leq\|x_1,...,x_n\|+\|x_1,...,x^{'}_n\|$

$\varphi(\alpha)=|\alpha|$ seçildiğinde Gunawan ve Mashadi'nin [6] tanımladığı $n-norm$ elde edilir.

Tanım 4.2.2: X reel F cismi üzerinde lineer uzay olsun ve $\underbrace{X\times...\times X}_{n}\times\mathbb{R}$ nin bir fuzzy alt kümesi N, $N:\underbrace{X\times...\times X}_{n}\times\mathbb{R}\to[0,1]$ aşağıdaki şartları sağlar ise N ifadesine X üzerinde bir fuzzy $\varphi-n-norm$ (X,N) ikilisine fuzzy φ-n-*normlu uzay* denir.

$\forall t \leq 0$ için $N(x_1,...,x_n,t)=0$

$\forall t > 0$ $N(x_1,...,x_n,t)=1 \Leftrightarrow x_1,...,x_n$ lineer bağımlı

$N(x_1,...,x_n,t)$ permütasyon altında değişmeli

$$N(x_1,...,cx_n,t) = N\left(x_1,...,x_n,\frac{t}{\varphi(c)}\right) \; c \neq 0 \; c \in F$$

$$N(x_1,...,x_n + x'_n, s+t) \geq \min\left\{N(x_1,...,x_n,s), N(x_1,...,x'_n,t)\right\}$$

$N(x_1,...,x_n,.)$ azalmayan ve $\lim\limits_{t\to\infty} N(x_1,...,x_n,t)=1$

$\varphi(\alpha)=|\alpha|$ seçildiğinde , Narayanan ve Vijayabalaji'nin [6] tanımladığı *fuzzy* $n-norm$ elde edilir.

Aşağıdaki örnekten görülebileceği gibi her uzaydan fuzzy uzay elde edilebilir. Bu uzaya uzayın *standart fuzzy uzayı* denir.

Örnek 4.2.1:$(X.\|.,...,.\|)$ lineer uzay olsun.

$$N(x_1,x_2,...,x_n,t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t+\|x_1.,...,x_n\|} & , \quad t>0 \\ 0 & , \quad t \leq 0 \end{cases}$$

olmak üzere (X,N) fuzzy lineer uzaydır.

Çözüm:

F_1) $\forall t < 0$ için tanım gereği $N(x_1,...,x_n,t)=0$

F_2) $\forall t > 0$ için $N(x_1,...,x_n,t)=1$

$$\Leftrightarrow \|x_1,...,x_n\|=0$$

$$\Leftrightarrow x_1,...,x_n \text{ lineer bağımlıdır.}$$

$F_3)$ $\|x_1,...,x_n\|$ permütasyon altında değişmeli olduğundan

$N(x_1,...,x_n,t)$ ifadesi de permütasyon altında değişmelidir.

$F_4)$ $\forall t>0\ c\neq 0\ c\in$ □

$$N(x_1,...,cx_n,t)=\frac{t}{t+\|x_1,...,cx_n\|}$$

$$=\frac{t}{t+\varphi(c)\|x_1,...,x_n\|}$$

$F_5)$ $N(x_1,...,x_n+x'_n,s+t)\geq \min\{N(x_1,...,x_n,s),N(x_1,...,x'_n,t)\}$

olduğunu gösterelim.

a) $s+t<0$ olursa

i) $t>0,\ s<0$ ise $0\geq \min\{0,0^+\}$ sağlanır,

ii) $t<0, s<0$ ise $0\geq \min\{0,0\}$ sağlanır,

b) $s=t=0$ olsun $0\geq \min\{0,0\}$ sağlanır,

c) $s+t>0$ olursa

$s>0,\ t>0$ durumunu inceleyelim:

$$N(x_1,...x_n+x'_n,s+t)=\frac{s+t}{s+t+\|x_1,...x_n+x'_n\|}$$

$$\geq \frac{s+t}{s+t+\|x_1,...,x_n\|+\|x_1,...,x'_n\|}$$

Eğer $N(x_1,...,x_n,s)\geq N(x_1,...,x'_n,t)$ kabul edilirse,

$$\frac{s}{s+\|x_1,...,x_n\|}-\frac{t}{t+\|x_1,...,x'_n\|}\geq 0 \text{ dır.}$$

paydalar eşitlenip gerekli işlemler yapılırsa,

$$s.\left(t+\left\|x_1,...,x'_n\right\|\right)-t.\left(s+\left\|x_1,...,x_n\right\|\right)\geq 0$$

olur.

$$\frac{s+t}{s+t+\left\|x_1,...,x_n\right\|+\left\|x_1,...,x'_n\right\|}-\frac{t}{t+\left\|x_1,...,x'_n\right\|}$$ ifadesini ele alalım;

$$=\frac{s.\left(t+\left\|x_1,...,x'_n\right\|\right)-t.\left(s+\left\|x_1,...,x_n\right\|\right)}{\left(s+t+\left\|x_1,...,x_n\right\|+\left\|x_1,...,x'_n\right\|\right).\left(t+\left\|x_1,...,x'_n\right\|\right)}\geq 0$$

olur. Böylece

$$N\left(x_1,...x_n+x'_n,s+t\right)\geq N\left(x_1,...,x'_n,t\right)$$

olur .

Eğer $N\left(x_1,...,x'_n,t\right)\geq N\left(x_1,...,x_n,s\right)$ olursa benzer şekilde

$$N\left(x_1,...x_n+x'_n,s+t\right)\geq N\left(x_1,...,x_n,s\right)$$

olduğu görülür. Bu da her durumda

$$N\left(x_1,...,x_n+x'_n,s+t\right)\geq \min\left\{N\left(x_1,...,x_n,s\right),N\left(x_1,...,x'_n,t\right)\right\}$$

olduğunu gösterir.

F_6) $N\left(x_1,...,x_n,.\right)$ azalmayan olduğunu gösterelim $t_2>t_1$ ise

$$\frac{t_2}{t_2+\left\|x_1,...,x_n\right\|}-\frac{t_1}{t_1+\left\|x_1,...,x_n\right\|}$$

$$=\frac{\left\|x_1,...,x_n\right\|+\left(t_2-t_1\right)}{\left(t_2+\left\|x_1,...,x_n\right\|\right).\left(t_1+\left\|x_1,...,x_n\right\|\right)}\geq 0$$

olur.

$$N\left(x_1,...,x_n,t_2\right)\geq N\left(x_1,...,x_n,t_1\right)$$

olur. Dolayısıyla N artandır.

Ayrıca,

$$\lim_{t\to\infty} N\left(x_1,...,x_n,t\right)=1$$

şeklindedir.

Teorem 4.2.1: (X,N) fuzzy φ-$n-$normlu lineer uzayı

$$\forall t>0\,,\, N\left(x_1,x_2,...,x_3,t\right)\geq 0 \text{ öyle ki, } x_1,x_2,...,x_n \text{ lineer bağımlı,}$$

$$\left\|x_1,...,x_n\right\|_{\varphi(\alpha)}=\inf\left\{t:N(x_1,x_2,...,x_n,t)\geq\varphi(\alpha)\;\;\alpha\in(0,1)\right\}$$

olmak üzere $\left\{\left\|.,...,.\right\|_{\varphi(\alpha)}:\alpha\in(0,1)\right\}$ kümesi X üzerinde artan $\varphi-n-$normlar ailesidir.

İspat:

n_1) $\left\|x_1,...,x_n\right\|_{\varphi(\alpha)}=0$

$$\Rightarrow\inf\left\{t:N(x_1,x_2,...,x_n,t)\geq\varphi(\alpha)\;\;\alpha\in(0,1)\right\}=0$$

n_2) $N(x_1,x_2,...,x_n,t)$ permütasyon altında değişmeli olduğundan

$\left\|x_1,...,x_n\right\|_{\varphi(\alpha)}$ permütasyon altında değişmelidir.

n_3) $\left\|x_1,...,cx_n\right\|_{\varphi(\alpha)}=\inf\left\{s:N(x_1,x_2,...,cx_n,s)\geq\varphi(\alpha)\;\;\alpha\in(0,1)\right\}$

$$=\inf\left\{s:N(x_1,x_2,...,x_n,\frac{s}{\varphi(c)})\geq\varphi(\alpha)\;\;\alpha\in(0,1)\right\}$$

$\dfrac{s}{\varphi(c)}=t$ olsun ,

$$\left\|x_1,...,cx_n\right\|_{\varphi(\alpha)}=\inf\left\{t.\varphi(c):N(x_1,x_2,...,x_n,t)\geq\varphi(\alpha)\;\;\alpha\in(0,1)\right\}$$

$$=\varphi(c)\inf\left\{t:N(x_1,x_2,...,x_n,t)\geq\varphi(\alpha)\;\;\alpha\in(0,1)\right\}$$

$$=\varphi(c).\left\|x_1,...,x_n\right\|_{\varphi(\alpha)}$$

Ayrıca $c=0$ alındığında

$$\left\|x_1,...,cx_n\right\|_{\varphi(\alpha)}=\left\|x_1,...,0\right\|_{\varphi(\alpha)}=0.\left\|x_1,...,x_n\right\|_{\varphi(\alpha)}$$

n_4) Normun üçgen eşitsizliği

$$\left\|x_1,...,x_n\right\|_{\varphi(\alpha)}+\left\|x_1,...,x'_n\right\|_{\varphi(\alpha)}$$

$$=\inf\left\{t:N(x_1,x_2,...,x_n,t)\geq\varphi(\alpha)\right\}+\inf\left\{s:N(x_1,x_2,...,x'_n,s)\geq\varphi(\alpha)\right\}$$

$$=\inf\left\{t+s:N(x_1,x_2,...,x_n,t)\geq\varphi(\alpha)\ ,N(x_1,x_2,...,x'_n,s)\geq\varphi(\alpha),\alpha\in(0,1)\right\}$$

$$\geq\inf\left\{r:N(x_1,x_2,...,x_n+x'_n,r)\geq\varphi(\alpha)\ \ \alpha\in(0,1)\right\}\ \ r=t+s$$

$$=\left\|x_1,...,x_n+x'_n\right\|_{\varphi(\alpha)}$$

Böylece

$$\left\|x_1,...,x_n+x'_n\right\|_{\varphi(\alpha)}\leq\left\|x_1,...,x_n\right\|_{\varphi(\alpha)}+\left\|x_1,...,x'_n\right\|_{\varphi(\alpha)}$$

dır.

Şimdi $\left\|x_1,...,x_n\right\|_{\varphi(\alpha)}$ artanlığını gösterelim $0<\alpha_1<\alpha_2<1$ olsun φ fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde kesin artan olduğundan

$$0<\varphi(\alpha_1)<\varphi(\alpha_2)<1$$

olur.

$$\left\|x_1,...,x_n\right\|_{\varphi(\alpha_1)}=\inf\left\{t:N(x_1,x_2,...,x_n,t)\geq\varphi(\alpha_1)\ \ \alpha_1\in(0,1)\right\}$$

$$\left\|x_1,...,x_n\right\|_{\varphi(\alpha_2)}=\inf\left\{t:N(x_1,x_2,...,x_n,t)\geq\varphi(\alpha_2),\ \ \alpha_2\in(0,1)\right\}$$

$\varphi(\alpha_1)<\varphi(\alpha_2)$ olduğundan

$$\{t : N(x_1, x_2, ..., x_n, t) \geq \varphi(\alpha_2)\ \} \subset \{t : N(x_1, x_2, ..., x_n, t) \geq \varphi(\alpha_1)\}$$

$$\{t : N(x_1, x_2, ..., x_n, t) \geq \varphi(\alpha_2)\} \geq \inf \{t : N(x_1, x_2, ..., x_n, t) \geq \varphi(\alpha_2)\ \}$$

O halde

$$\|x_1, ..., x_n\|_{\varphi(\alpha_2)} \geq \|x_1, ..., x_n\|_{\varphi(\alpha_1)}$$

olur.

5.BÖLÜM

$\alpha-n-$NORMLU UZAYLARDA EN İYİ YAKLAŞIM

Bu bölümde Bölüm 4.2 de tanımlanan kavramların $\varphi(\alpha)=|\alpha|$ alınması durumunda oluşan yeni ifadeleri ve bu ifadeler üzerinde bazı sonuçlar verilecektir.

Ayrıca $\alpha-n-$normlu uzaylar tanımlanıp bu uzaylar üzerinde yaklaşım incelenecektir [8].

Tanım 5.1: $BoyutX \geq n,\ n\in\mathbb{N}^+$ ve X reel vektör uzayı olsun.

$\|.,...,.\|: X^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlar ise $\|.,...,.\|$ fonsiyonuna $n-norm$ $(X,\|.,...,.\|)$ ikilisine de *$n-normlu$ lineer uzay* denir.

$\|x_1,...,x_n\|=0 \Leftrightarrow x_1,...,x_n$ lineer bağımlı

$\|x_1,...,x_n\|$ permütasyon altında değişmeli

$\|x_1,...,\alpha x_n\|=|\alpha|.\|x_1,...,x_n\|,\ \alpha\in\mathbb{R}$

$\|x_1,...,x_n+x'_n\|\leq\|x_1,...,x_n\|+\|x_1,...,x'_n\|$

Tanım 5.2: X reel F cismi üzerinde lineer uzay olsun ve $\underbrace{X\times...\times X}_{n}\times\mathbb{R}$ nin bir fuzzy alt kümesi N, $N:\underbrace{X\times...\times X}_{n}\times\mathbb{R}\to[0,1]$

$\forall t\leq 0$ için $N(x_1,...,x_n,t)=0$,

$\forall t>0$ $N(x_1,...,x_n,t)=1 \Leftrightarrow x_1,...,x_n$ lineer bağımlı,

$N(x_1,...,x_n,t)$ permütasyon altında değişmeli,

$$\left(x_1,...,cx_n,t\right)=N\left(x_1,...,x_n,\frac{t}{|c|}\right)\ c\neq 0\ c\in \mathrm{F},$$

$$N\left(x_1,...,x_n+x'_n,s+t\right)\geq \min\left\{N\left(x_1,...,x_n,s\right),N\left(x_1,...,x'_n,t\right)\right\},$$

$N\left(x_1,...,x_n,.\right)$ azalmayan ve $\lim\limits_{t\to\infty}N\left(x_1,...,x_n,t\right)=1$,

şartları sağlar ise N ye X üzerinde bir *fuzzy n-norm* ve $\left(X,N\right)$ ikilisine de *fuzzy n-normlu uzay* denir.

Örnek 5.1: $\left(X.\|.,...,.\|\right)$ *n-normlu lineer uzay* olsun

$$N(x_1,x_2,...,x_n,t)=\begin{cases}\dfrac{t}{t+\|x_1.,...,x_n\|}, & t>0\\ 0, & t\leq 0\end{cases}$$

olmak üzere $\left(X,N\right)$ fuzzy n-normlu lineer uzaydır.

Çözüm:

Örnek 4.2.1 in çözümünden yararlanılarak benzer şekilde yapılır.

Teorem 5.1: (X,N) *fuzzy n-normlu* lineer uzayı

$N(x_1,x_2,...,x_n,t)\ \geq 0\ \forall t>0$ öyleki $x_1,x_2,...,x_n$ lineer bağımlı,

şartını sağlasın.

$$\|x_1,...,x_n\|_\alpha=\inf\left\{t:N(x_1,x_2,...,x_n,t)\geq\alpha,\ \alpha\in(0,1)\right\}$$

olmak üzere $\left\{\|.,...,.\|_\alpha:\alpha\in(0,1)\right\}$ kümesi X üzerinde artan normlar ailesidir. Bu ailenin her bir elemanına fuzzy $n-$normuna karşılık gelen ve $\left(X,\|.,...,.\|_\alpha\right)$ ikilisine de uzay denir.

İspat:

$n_1)$ $\|x_1,...,x_n\|_\alpha = 0$

$$\Rightarrow \inf\{t : N(x_1, x_2,..., x_n, t) \geq \alpha,\ \alpha \in (0,1)\}$$

$n_2)$ $N(x_1, x_2,..., x_n, t)$ permütasyon altında değişmeli olduğundan

$\|x_1,...,x_n\|_\alpha$ permütasyon altında değişmelidir.

$n_3)$ $\|x_1,...,cx_n\|_\alpha = \inf\{s : N(x_1, x_2,..., cx_n, s) \geq \alpha,\ \alpha \in (0,1)\}$, $c \neq 0$

$$= \inf\left\{ s : N(x_1, x_2,..., x_n, \frac{s}{|c|}) \geq \alpha,\ \alpha \in (0,1) \right\}$$

$\frac{s}{|c|} = t$ olsun ,

$$\|x_1,...,cx_n\|_\alpha = \inf\{t.|c| : N(x_1, x_2,..., x_n, t) \geq \alpha,\ \alpha \in (0,1)\}$$

$$= |c| \inf\{t : N(x_1, x_2,..., x_n, t) \geq \alpha,\ \alpha \in (0,1)\}$$

$$= |c|.\|x_1,...,x_n\|_{\varphi(\alpha)}$$

Ayrıca $c = 0$ alındığında

$$\|x_1,...,cx_n\|_\alpha = \|x_1,...,0\|_\alpha = 0.\|x_1,...,x_n\|_\alpha$$

$n_4)$Normun üçgen eşitsizliği $\alpha \in (0,1)$ için

$\|x_1,...,x_n\|_\alpha + \|x_1,...,x'_n\|_\alpha$

$$= \inf\{t : N(x_1, x_2,..., x_n, t) \geq \alpha\} + \inf\{s : N(x_1, x_2,..., x'_n, s) \geq \alpha\}$$

$$= \inf\{t + s : N(x_1, x_2,..., x_n, t) \geq \alpha,\ N(x_1, x_2,..., x'_n, s) \geq \alpha\}$$

$$\geq \inf\{r : N(x_1, x_2,..., x_n + x'_n, r) \geq \alpha,\ \alpha \in (0,1)\} \quad r = t + s$$

$$=\left\|x_1,\ldots,x_n+x'_n\right\|_\alpha$$

böylece

$$\left\|x_1,\ldots,x_n+x'_n\right\|_\alpha\leq\left\|x_1,\ldots,x_n\right\|_\alpha+\left\|x_1,\ldots,x'_n\right\|_\alpha$$

dır.

Şimdi $\left\|x_1,\ldots,x_n\right\|_\alpha$ artanlığını gösterelim $0<\alpha_1<\alpha_2<1$ olsun .

$$\left\|x_1,\ldots,x_n\right\|_{\alpha_1}=\inf\left\{t:N(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)\geq\alpha_1,\ \alpha_1\in(0,1)\right\}$$

$$\left\|x_1,\ldots,x_n\right\|_{\alpha_2}=\inf\left\{t:N(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)\geq\alpha_2,\ \alpha_2\in(0,1)\right\}$$

$0<\alpha_1<\alpha_2<1$ olduğundan

$$\left\{t:N(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)\geq\alpha_2\right\}\subset\left\{t:N(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)\geq\alpha_1\right\}$$

$$\inf\left\{t:N(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)\geq\alpha_2\right\}\geq\inf\left\{t:N(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)\geq\alpha_2\right\}$$

o halde

$$\left\|x_1,\ldots,x_n\right\|_{\alpha_2}\geq\left\|x_1,\ldots,x_n\right\|_{\alpha_1}$$

olur.

Tanım 5.3: $\left(X,\left\|.,\ldots,.\right\|_\alpha\right)$ $\alpha-n$ normlu uzay olsun.

G boş kümeden farklı X kümesinin keyfi bir alt kümesi ve olsun.

Her $x_1,x_2,\ldots,x_n$ $x,x_0\in X$ seçiminden bağımsız olmak üzere

$$d_{x_2,x_3,\ldots,x_n}\left(x,G\right)=\inf_{g\in G}\left\|x-g,x_2,x_3,\ldots,x_n\right\|_\alpha$$

şeklinde tanımlanır ve

$$d_{x_2,x_3,\ldots,x_n}\left(x,G\right)\leq\left\|x-x_0,x_2,x_3,\ldots,x_n\right\|+d_{x_2,x_3,\ldots,x_n}\left(x_o,G\right)$$

Tanım 5.4: Her $G \subset X$ ve $x_0 \in X$ olmak üzere,

$$D_{x_2,x_3,...,x_n}(x_0,G)$$

$$=\left\{x \in X : d_{x_2,x_3,...,x_n}(x,G) = \|x - x_0, x_2, x_3, ..., x_n\|_\alpha + d_{x_2,x_3,...,x_n}(x_0,G)\right\}$$

Tanım 5.5: G boş kümeden farklı X kümesinin keyfi bir alt kümesi ve olsun.

$\forall\, x_1, x_2, ..., x_n$ $\quad x \in X$ ve $x_0 \in G$ seçiminden bağımsız olmak üzere

$$P_{G,x_2,x_3,...,x_n}(x) = \left\{g_0 \in G : \|x - g_0, x_2, x_3, ..., x_n\|_\alpha = d_{x_2,x_3,...,x_n}(x,G)\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca,

$$P^{-1}_{G,x_2,x_3,...,x_n}(x_0) = \left\{x \in X : \|x - x_0, x_2, x_3, ..., x_n\|_\alpha = d_{x_2,x_3,...,x_n}(x,G)\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi de tanımlanan bu kümeler üzerine bazı sonuçlar verelim.

Teorem 5.2: $x \in D_{x_2,x_3,...,x_n}(x_0,G)$ ve $y \in D_{x_2,x_3,...,x_n}(x,G)$ için,

i) $\|y - x_0, x_2, ..., x_n\|_\alpha = \|y - x, x_2, x_3, ..., x_n\|_\alpha + \|x - x_0, x_2, x_3, ..., x_n\|_\alpha$,

ii) $y - x + x_0 \in D_{x_2,x_3,...,x_n}(x_0,G)$

İspat:

i) $x \in D_{x_2,x_3,...,x_n}(x_0,G)$ ve $y \in D_{x_2,x_3,...,x_n}(x,G)$ olduğundan tanım 5.4 den,

$$d_{x_2,x_3,...,x_n}(x,G) = \|x - x_0, x_2, x_3, ..., x_n\|_\alpha + d_{x_2,x_3,...,x_n}(x_0,G)$$

$$d_{x_2,x_3,...,x_n}(y,G) = \|y - x, x_2, x_3, ..., x_n\|_\alpha + d_{x_2,x_3,...,x_n}(x,G)$$

olur.

$$\|y-x_0,x_2,x_3,...,x_n\|_\alpha=\|y-x_0-x+x,x_2,x_3,...,x_n\|_\alpha$$

$$=\|(y-x)+(x-x_0),x_2,x_3,...,x_n\|_\alpha$$

$$\leq\|y-x,x_2,x_3,...,x_n\|+\|x-x_0,x_2,x_3,...,x_n\|_\alpha$$

$$=\left(d_{x_2,x_3,...,x_n}(y,G)-d_{x_2,x_3,...,x_n}(x,G)\right)$$

$$+\left(d_{x_2,x_3,...,x_n}(x,G)-d_{x_2,x_3,...,x_n}(x_0,G)\right)$$

$$=d_{x_2,x_3,...,x_n}(y,G)-d_{x_2,x_3,...,x_n}(x_0,G)$$

$$\leq\|y-x_0,x_2,x_3,...,x_n\|_\alpha$$

Böylece ,

$$\|y-x_0,x_2,x_3,...,x_n\|_\alpha\leq\|y-x,x_2,x_3,...,x_n\|_\alpha+\|x-x_0,x_2,x_3,...,x_n\|_\alpha$$

$$\leq\|y-x_0,x_2,...,x_n\|_\alpha$$

$$\|y-x_0,x_2,...,x_n\|_\alpha=\|y-x,x_2,x_3,...,x_n\|_\alpha+\|x-x_0,x_2,x_3,...,x_n\|_\alpha,$$

ii) Metrik tanımından

$$d_{x_2,x_3,...,x_n}(y-x+x_0,G)$$

$$\geq d_{x_2,x_3,...,x_n}(y,G)-\|y-(y-x+x_0),x_2,x_3,..,x_n\|_\alpha$$

$$=d_{x_2,x_3,...,x_n}(y,G)-\|x-x_0,x_2,x_3,...,x_n\|_\alpha$$

$$\left(\|y-x,x_2,x_3,...,x_n\|_\alpha+d_{x_2,x_3,...,x_n}(x,G)\right)-\|x-x_0,x_2,x_3,...,x_n\|_\alpha$$

$$=\|y-x,x_2,x_3,...,x_n\|_\alpha+\left(\|x-x_0,x_2,x_3,...,x_n\|_\alpha+d_{x_2,x_3,...,x_n}(x_0,G)\right)$$

$$=\|y-x,x_2,x_3,...,x_n\|_\alpha+d_{x_2,x_3,...,x_n}(x_0,G)$$

$$=\left\|\left(y-x+x_0\right)-x_0,x_2,x_3,....,x_n\right\|_\alpha+d_{x_2,x_3,...,x_n}\left(x_0,G\right)$$

Tanım 5.3 den

$$d_{x_2,x_3,...,x_n}\left(y-x+x_0,G\right)=\left\|\left(y-x+x_0\right)-x_0,x_2,x_3,...,x_n\right\|_\alpha+d_{x_2,x_3,...,x_n}\left(x_0,G\right)$$

bu da

$$y-x+x_0\in D_{x_2,x_3,...,x_n}\left(x_0,G\right)$$

olduğunu gösterir.

Teorem 5.3: $x\in D_{x_2,x_3,...,x_n}\left(x_0,G\right)$ ise

i) $\left[x_0,x\right]=\left\{\lambda x_0+\left(1-\lambda\right)x:\ 0\le\lambda\le 1\right\}\subset D_{x_2,x_3,...,x_n}\left(x_0,G\right)$,

ii) $D_{x_2,x_3,...,x_n}\left(x,G\right)\subset D_{x_2,x_3,...,x_n}\left(x_0,G\right)$.

İspat: i) $0\le\lambda\le 1$ olmak üzere $y=\lambda x_0+\left(1-\lambda\right)x$ olsun.

$$\begin{aligned}d_{x_2,x_3,...,x_n}\left(y,G\right)&\\ &\ge d_{x_2,x_3,...,x_n}\left(x,G\right)-\left\|x-y,x_2,x_3,...,x_n\right\|_\alpha\\ &=\left\|x-x_0,x_2,x_3,...,x_n\right\|_\alpha+d_{x_2,x_3,...,x_n}\left(x_0,G\right)-\left\|x-y,x_2,x_3,...,x_n\right\|_\alpha\\ &=\left\|y-x_0,x_2,x_3,...,x_n\right\|_\alpha+d_{x_2,x_3,...,x_n}\left(x_0,G\right)\end{aligned}$$

tanım 5.3 den

$d_{x_2,x_3,...,x_n}\left(y,G\right)=\left\|y-x_0,x_2,x_3,...,x_n\right\|_\alpha+d_{x_2,x_3,...,x_n}\left(x_0,G\right)$ olur.

Bu da $y\in D_{x_2,x_3,...,x_n}\left(x_0,G\right)$ demektir.

ii) $y\in D_{x_2,x_3,...,x_n}\left(x,G\right)$ olsun. Tanım 5.4 ve Teorem 5.2(i) den,

$$d_{x_2,x_3,\dots,x_n}(y,G)=\|y-x,x_2,x_3,\dots,x_n\|_\alpha+d_{x_2,x_3,\dots,x_n}(x,G)$$

$$=\|y-x,x_2,x_3,\dots,x_n\|_\alpha+\left(\|x-x_0,x_2,x_3,\dots,x_n\|_\alpha+d_{x_2,x_3,\dots,x_n}(x_0,G)\right)$$

$$=\|y-x_0,x_2,x_3,\dots,x_n\|_\alpha+d_{x_2,x_3,\dots,x_n}(x_0,G),$$

dır. Bu $y\in D_{x_2,x_3,\dots,x_n}(x_0,G)$ demektir.

Teorem 5.4:

i) $\forall\, x\in D_{x_2,x_3,\dots,x_n}(x_0,G)$ için,

$$P_{G,x_2,x_3,\dots x_n}(x_0)\subset P_{G,x_2,x_3,\dots x_n}(x)$$

ii) $\forall\, x_0\in\overline{G}$ için,

$$D_{x_2,x_3,\dots,x_n}(x_0,G)=P^{-1}{}_{G,x_2,x_3,\dots,x_n}(x_0)$$

İspat: i) $x\in D_{x_2,x_3,\dots,x_n}(x_0,G)$ ve $g\in P_{G,x_2,x_3,\dots x_n}(x_0)$ olsun.

$d_{x_2,x_3,\dots,x_n}(x,G)$

$$=\|x-x_0,x_2,x_3,\dots,x_n\|_\alpha+d_{x_2,x_3,\dots,x_n}(x_0,G)$$

$$=\|x-x_0,x_2,x_3,\dots,x_n\|_\alpha+\|x-g_0,x_2,x_3,\dots,x_n\|_\alpha$$

Teorem 5.2 (i) den,

$$d_{x_2,x_3,\dots,x_n}(x,G)=\|x-g_0,x_2,x_3,\dots,x_n\|_\alpha .$$

şeklindedir. Böylece,

$$g_0\in P_{G,x_2,x_3,\dots x_n}(x_0)$$

olur .

O halde $P_{G,x_2,x_3,\dots x_n}(x_0)\subset P_{G,x_2,x_3,\dots x_n}(x)$ dır.

ii) $x_0 \in \bar{G}$ ve $x \in D_{x_2,x_3,\ldots,x_n}(x_0,G)$ olsun.

$d_{x_2,x_3,\ldots,x_n}(x,G)$

$$=\left\|x-x_0,x_2,x_3,\ldots,x_n\right\|_\alpha + d_{x_2,x_3,\ldots,x_n}(x_0,G)$$

$$=\left\|x-x_0,x_2,x_3,\ldots,x_n\right\|_\alpha,\ x_0 \in \bar{G},$$

Bu da $x \in P^{-1}{}_{G,x_2,x_3,\ldots,x_n}(x_0)$ demektir.

Böylece $P_{G,x_2,x_3,\ldots x_n}(x_0) \subset P_{G,x_2,x_3,\ldots x_n}(x)$ olur.

Tersine ,

$$x \in P^{-1}{}_{G,x_2,x_3,\ldots,x_n}(x_0)$$

olsun.

$$x_0 \in P^{-1}{}_{G,x_2,x_3,\ldots,x_n}(x_0)$$

olur.

$$x_0 \in \bar{G} \text{ ve } d_{x_2,x_3,\ldots,x_n}(x_0,G)=0$$

olduğundan,

$$d_{x_2,x_3,\ldots,x_n}(x,G)=\left\|x-x_0,x_2,x_3,\ldots,x_n\right\|_\alpha + d_{x_2,x_3,\ldots,x_n}(x_0,G)$$

olur.

Böylece $x \in D_{x_2,x_3,\ldots x_n}(x_0,G)$ ve $P^{-1}{}_{G,x_2,x_3,\ldots,x_n}(x_0) \subset D_{x_2,x_3,\ldots,x_n}(x_0,G)$

olur. O halde,

$$D_{x_2,x_3,\ldots,x_n}(x_0,G)=P^{-1}{}_{G,x_2,x_3,\ldots,x_n}(x_0)$$

dır.

6.BÖLÜM

SONUÇLAR

S.Gahler'in 2-norm kavramını tanımlaması ve L. Zadeh'in fuzzy kümelerini tanımlaması matematik biliminin gelişmesinde çok büyük katkılar sağlamıştır.

Bu tezde fuzzy kümeleri, fuzzy norm, fuzzy metrik, fuzzy 2-metrik, fuzzy 2-norm, fuzzy n-norm gibi kavramlar verilecek bu kavramların oluşturduğu uzaylar üzerinde yaklaşım üzerine bazı sonuçlar verilmiştir.

Ayrıca bu çalışmada Ioan Golet'in φ fonksiyonu yardımıyla tanımladığı $\varphi-2-norm$ tanımı verilerek fuzzy $\varphi-2$ normlu uzaylar tanımlandı. Bu uzaylar Bölüm 4.2 de n-normlu uzaylara genişletilerek bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Bölüm 5 de fuzzy $\varphi-2-$normlu uzayların genişletilmesiyle elde ettiğimiz fuzzy $\varphi-n-$normlu uzayların bir özel hali olan fuzzy n-normlu uzaylar ele alınmış ve bu uzaylar üzerinde yaklaşım incelenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Zadeh, L., (1968), Probability measure of fuzzy events, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol.**23**, no.2.

[2] Gahler, S., (1964), Lineare 2-normierte raume, *Math. Nachr*. , **28**, 1-43.

[3] Freese R. W., Cho Y. J., (2001), *Geometry of linear 2-normed spaces*, Nova Science Puplisher, Inc., Hauppauge, New-York.

[4] Gunawan, H., and Mashadi M., (2001), On n-normed spaces, *Int. J.Math.Sci.***27,** no.10, 631-639.

[5] Samanta T. K., (2008), Finite dimensional intuitionistic fuzzy normed linear space, *[math GM), arXiv*:0804. Vol.**1,** 1645.

[6] Narayanan, A. and Vijayabalaji, S., (2005), Fuzzy n-normed linear space, *international of Mathematics and Matematical Sciences*, :**24**, 3963-3977.

[7] Golet, I.,(2009), On generalized fuzzy normed space, *International Mathematical Forum*, **4**, no.25, 1237-1242.

[8] Vijayabalaji S., and Thillaigovindan N., (2008), Best approximation sets in $\alpha - n$ normed space corresponding to instuitionistic fuzzy $n -$ normed linear space, *Iranian Journal of fuzzy systems*, Vol.**5**, no.3, pp. 57-69.

[9] Beyan, Timur & Baykal, Nazife, (2004), *Bulanık Mantık İlke ve Temelleri*, Bıçaklar Yayınevi, no:**4**.

[10] Efe, H., (2007), Round fuzzy metric spaces, *International Mathematical Forum*, **2**, no. 35, 1717-1721.

[11] Rezapur, Sh. and Sadeqi I., (2004), Fuzzy approximation in fuzzy metric space, *The Aligarh Bull of Maths*. Vol**. 23**, no. 1-2.

[12] Sharma Sushil, (2002), On fuzzy Metric space, *Southeast Asia Bulletin of Mathematics***, 26**: 133-145.

[13] Saadati, R. and Vaezpour,S., M., (2005), Some results on fuzzy Banach spaces, *J., Appl. Math and Computing*, Vol**. 17**, no. 1-2, pp. 475-484.

[14] Vaezpour S.M. and Karami F., (2008), t-Best approximation in fuzzy normed spaces, *Iranian Journal of fuzzy systems,* Vol.**5**, no.2, pp.93-9.

[15] Kumar Sanjay, (2008), Common Fixed point Theorem in Fuzzy 2-metric spaces, *Universitatea Dın B Studll Şı Cercetári Ştiintifice, seria: Matematicá* Nr.**18**, page. 111-116.

[16] Elumalai S., Cho Y.J., (1997), Best approximation sets in linear 2-normed space, *Comm. Korea Math.Soc*.**12**, no.3, 619-629.