GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$B(r,s)$ VE $B(r,s)^{+}$ BANT MATRİSLERİNİN BAZI DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDEKİ SPEKTRUMLARI

MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

RAGIP BOZKURT
TEMMUZ 2010

$B(r,s)$ ve $B(r,s)^{+}$ Bant Matrislerinin Bazı Dizi Uzayları Üzerindeki Spektrumları

Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN

Ragıp BOZKURT
Temmuz 2010

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı : $B(r,s)$ ve $B(r,s)^{+}$ Bant Matrislerinin Bazı Dizi Uzayları Üzerindeki Spektrumları
Öğrencinin, Adı Soyadı: Ragıp BOZKURT
Tez Savunma Tarihi: : 30.07.2010

Prof. Dr. Ramazan KOÇ
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

İmzası

Doç. Dr. Hasan AKIN ....

Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN ....

Yrd. Doç. Dr. Abdullah KABLAN ....

ÖZET

$B(r,s)$ VE $B(r,s)^{+}$ BANT MATRİSLERİNİN BAZI DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDEKİ SPEKTRUMLARI

BOZKURT Ragıp
Yüksek Lisans Tezi, Matematik A.B.D.
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN
Temmuz 2010, 55 sayfa

Altı bölümden oluşan bu tez, bant matrislerinin bazı dizi uzayları üzerindeki spektrumu ile ilgilidir. Birinci bölümde; dizi uzayları, matris dönüşümleri ve belirli dizi uzayları üzerindeki matris dönüşümleriyle alakalı temel teoremler ispatsız olarak verildi.

İkinci bölümde; sınırlı lineer dönüşümler, spektrum ve fine (ince) spektrum kavramları verildi

Üçüncü bölümde; $B(r,s)$ bant matrisinin c_0 ve c dizi uzayları üzerindeki spektrumu ve fine spektrum kavramları incelendi.

Dördüncü bölümde; $B(r,s)$ bant matrisinin ℓ_1 ve bv dizi uzayları üzerindeki spektrumu ve fine spektrumu verildi.

Beşinci bölümde; $B(r,s)$ bant matrisinin ℓ_p ve bv_p dizi uzayları üzerindeki spektrumu ve fine spektrumu verildi.

Son bölümde; çalışmamızın orijinal kısmı olan, $B(r,s)^{+}$ bant matrisinin c_0 dizi uzayı üzerindeki spektrum ve fine spektrum incelendi.

Anahtar Kelimeler: Matris dönüşümü, spektrum, fine spektrum, Mercerian teoremi.

ABSTRACT

SPECTRUMS OF THE BAND MATRICES $B(r,s)$ AND $B(r,s)^{+}$ OVER SOME SEQUENCE SPACES

BOZKURT, Ragıp
M.Sc. in Mathematics
Supervisor: Asist. Prof. Kuddusi KAYADUMAN
July 2010, 55 pages

This thesis consists of six chapters, that is related to spectrum of the band matrices over some sequence spaces. In the first chapter, sequence spaces, matrix transformations and fundamental theorems concerning matrix transformations on certain sequence spaces were given without proof.

In the second chapter, bounded linear operators, spectrum and fine spectrum concepts were given

In the third chapter, spectrum and fine spectrum of the band matrix $B(r,s)$ over the sequence spaces c_0 and c are studied.

In the fourth chapter, spectrum and fine spectrum of the band matrix $B(r,s)$ over the sequence spaces ℓ_1 and bv are given.

In the fifth chapter, spectrum and fine spectrum of the band matrix $B(r,s)$ over the sequence spaces ℓ_p and bv_p are given.

In the final chapter, that is original part of our thesis, spectrum and fine spectrum of the band matrix $B(r,s)^{+}$ over the sequence space c_0 are studied.

Key Words: Matrix transformations, spectrum, fine spectrum, Mercerian theorem.

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren ve tezin hazırlanmasında gerekli maddi ve manevi imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, hiçbir zaman yakın ilgi ve alakalarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN' a minnet ve şükranla teşekkür etmeyi borç bilirim.

Gerekli bazı dökümanları temin etmemde yardımcı olan İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Doç. Dr. Bilal ALTAY' a ve yüksek lisans, doktora tezlerini gönderen Ankara Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Doç. Dr. Cafer COŞKUN' a da teşekkürlerimi sunmayı bir görev bilirim.

İÇİNDEKİLER

SEMBOL VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\left(A_n(x)\right)$	x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi
bs	Sınırlı seri oluşturan dizilerin uzayı
bv	Sınırlı salınımlı dizilerin uzayı
bv_0	Hem sınırlı salınımlı hem de sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
bv_p	p. kuvvetten sınırlı salınımlı dizilerin uzayı
$B(X,Y)$	X den Y uzayına sınırlı dönüşümlerin uzayı
$B(r,s)^+$	$B(r,s)$ bant matrisinin transpozu
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
c	Yakınsak dizilerin uzayı
c_A	A matrisinin yakınsaklık alanı
c_0	Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
$\oplus$	Direkt toplam
$D(T)$	T dönüşümünün tanım kümesi
I	Özdeşlik dönüşümü
ℓ_1	Mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı
ℓ_p	p. kuvvetten mutlak yakınsak seri oluşturan dizi uzayı
ℓ_∞	Sınırlı dizilerin uzayı
$L(X,Y)$	X den Y uzayına lineer dönüşümlerin uzayı
(X,Y)	X dizi uzayını Y dizi uzayı içine dönüştüren matrislerin sınıfı
$(X,Y;p)$	Toplamları ya da limitleri koruyan matrislerin sınıfı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$N(T)$	T dönüşümünün çekirdeği
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$R(T)$	T dönüşümünün görüntü kümesi

$\overline{R(T)}$	T dönüşümünün görüntü kümesinin kapanışı
$r_\sigma(T)$	T dönüşümünün spektral yarıçapı
$\rho(T)$	T dönüşümünün regüler değerlerinin kümesi
s	Kompleks ve reel terimli bütün dizilerin uzayı
$\sigma(T,X)$	X uzayındaki T dönüşümünün spektrum kümesi
$\sigma_c(T,X)$	X uzayındaki T dönüşümünün süreklilik spektrumu kümesi
$\sigma_p(T,X)$	X uzayındaki T dönüşümünün nokta spektrumu kümesi
$\sigma_r(T,X)$	X uzayındaki T dönüşümünün rezidü (kalıntı) spektrumu kümesi
T^{-1}	T dönüşümünün tersi
T^*	T dönüşümünün adjointi
T_α	T dönüşümünün α özdeğerine karşılık gelen dönüşümü
X^*	X uzayının duali
$\chi(A)$	Çarpımsal matris

GİRİŞ

$\mathbb{C}^n$ uzayında tanımlı bir T lineer dönüşümünün karakteristik değerleri $(T-\alpha I)$ ifadesinin determinantını sıfır yapan α kompleks sayılarıdır. Bu tür α değerlerine T dönüşümünün spektrum kümesi denir. Eğer α karakteristik kök değilse $\det(T-\alpha I)\neq 0$ olacağından $(T-\alpha I)$ dönüşümünün tersi mevcut olur.

Sonsuz boyutlu uzaylar üzerindeki dönüşümlerin spektrum tartışmaları oldukça karmaşık, ilginç ve dönüşümleri anlamada çok önemlidir. Dönüşümlerin spektral analizi, matematiksel fizikte önemli bir yere sahiptir. Örneğin; kuantum mekaniğindeki Hamilton dönüşümleri, Hilbert uzayında sınırlı olmayan bir self-adjoint dönüşümüdür. Hamilton dönüşümünün nokta spektrumu, sistemin sınır durumundaki enerji seviyesine karşılık gelir. Diğer spektrum çeşitleri, sistemin dağılım teorisinde önemli rol oynar [1].

Dizi uzayları üzerindeki dönüşümlerin spektrumu ile ilgili ilk çalışma, 1965 yılında Brown, Halmos ve Shields [2] tarafından birinci mertebeden Cesãro dönüşümünün, ℓ_2 Hilbert uzayı üzerindeki karakteristik değerlerini ve spektrum kümesini belirleyen çalışmadır. Daha sonra, Wenger [3], Rhoades [4], Reade [5], Gonzãlez [6], Akhmedov ve Başar [7] gibi yazarlar çeşitli dönüşümlerin spektrumu ile ilgilendiler. Bu yazarlardan farklı olarak, Sharma [8] ve [9] çalışmalarında matris sınıflarıyla ilgilenmiştir.

Son yıllarda fark matrisinin bazı dizi uzayları üzerinde çalışmalar yapılmıştır. De Malafosse [10], fark matrisini

$$\|s\|_{s_r}=\sup_{k\in N}\frac{|x_k|}{r^k},\quad (r>0)$$

normlu dizilerin s_r uzayında ele almıştır. Altay ve Başar [11] de c_0 ve c dizi uzaylarında, Akhmedov ve Başar [12] de ℓ_p dizi uzayında, Akhmedov ve Başar [13] de bv_p dizi uzayında fark matrsinin spektrumu ile ilgilendiler. Başar ve Altay [14] de matris dönüşümleri ve p. dereceden sınırlı salınımlı dizi uzayları üzerindeki spektrumu ile ilgilendiler. Ayrıca Altay ve Başar [15] de c_0 ve c dizi uzaylarında, Furkan, Bilgiç ve Kayaduman [16] da ℓ_1 ve bv dizi uzaylarında, Bilgiç ve Furkan [17] de ℓ_p ve bv_p dizi uzaylarında bant matrisinin spektrumunu incelemişlerdir.

Bu çalışmada [15], [16] ve [17] çalışmalardan faydalanarak spektrum ve fine spektrum kavramaları ele alındı. Ayrıca çalışmanın sonunda kullanılan bant matrisinin transpozu yardımıyla c_0 dizi uzayında spektrum kavramları da incelendi.

BÖLÜM 1

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tezin sonraki kısımlarında kullanılan dizi uzayları ve matris dönüşümleriyle ilgili temel tanım ve teoremler verildi.

1.1. Dizi Uzayları

Bu çalışma boyunca kompleks ve reel terimli bütün dizilerin uzayı s, yakınsak dizilerin uzayı c, sıfıra yakınsak dizilerin uzayı c_0, mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı ℓ_1, $1 < p < \infty$ olmak üzere p. kuvvetleri mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı ℓ_p, sınırlı dizilerin uzayı ℓ_∞, sınırlı salınımlı dizilerin uzayı bv, hem sınırlı salınımlı hem de sıfıra yakınsak dizilerin uzayı bv_0, p. dereceden sınırlı salınımlı dizilerin uzayı bv_p ve sınırlı seri oluşturan dizilerin uzayı ise bs ile gösterildi. Buna göre;

$$c = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k = r \text{ mevcut} \right\}$$

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k = 0 \right\}$$

$$\ell_1 = \left\{ x = (x_k) : \sum_k |x_k| < \infty \right\}$$

$$\ell_p = \left\{ x = (x_k) : \sum_k |x_k|^p < \infty \right\}, \ 1<\text{p}<\infty$$

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

$$bv = \left\{ x = (x_k) : \sum_k |x_k - x_{k+1}| < \infty \right\}$$

$$bv_0 = c_0 \cap bv$$

$$bv_p = \left\{ x = (x_k) : \sum_k |x_k - x_{k+1}|^p < \infty \right\}$$

ve

$$bs = \left\{ x = (x_k) : \sup_n \left| \sum_{k=0}^{n} x_k \right| < \infty \right\}$$

şeklinde ifade edilir [18].

Tanım 1.1.1. X boş olmayan bir küme ve $\mathbb{C}$ kompleks sayıların cismi olsun.

$$+ : X \times X \to X$$

$$\bullet : \mathbb{C} \times X \to X$$

fonksiyonları eğer $x, y, z \in X$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için

1) $x + y = y + x,$

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

3) $x + a = x$ olacak şekilde bir $a \in X$ vardır,

4) $x + (-x) = a$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır,

5) $x.1 = x$,

6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y,$

7) $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x,$

8) $\lambda(\mu.x) = (\lambda.\mu)x,$

şartlarını sağlıyorsa X kümesine $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir *vektör uzayı* denir [18].

X, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde vektör uzayı ve $Y \subset X$ ise, Y kümesinin de X üzerinde tanımlanan $+$ ve $\bullet$ işlemleri altında vektör uzayı olması için $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $y_1, y_2 \in Y$ alındığında $\lambda y_1 + \lambda y_2 \in Y$ şartının sağlanması yeterlidir.

Tanım 1.1.2. X bir vektör uzayı ve $g : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu olsun. $\forall x, y \in X$ ve $\lambda_n \in \mathbb{C}$ için,

P1) $g(\theta) = 0,$

P2) $g(x) = g(-x),$

P3) $g(x + y) \leq g(x) + g(y),$

P4) $\lambda_n \to \lambda_0$ ve $x_n \to x_0$ olduğunda $g(\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0) \to 0,$

şartlarını sağlıyorsa, g fonksiyonuna X üzerinde bir *paranorm* ve (X, g) ikilisine de *paranormlu uzay* denir [18].

Tanım 1.1.3. X bir vektör uzayı ve $\|\,.\,\| : X \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ ve bütün λ skaleri için;

1) $\|x\| \geq 0$

2) $\|\theta\| = 0$

3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa, $\|\,.\,\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *yarı-norm* ve $(X, \|\,.\,\|)$ ikilisine de *yarı-normlu uzay* denir. Eğer $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ şartı sağlanıyorsa $\|\,.\,\|$ fonksiyonuna bir *norm*, $(X, \|\,.\,\|)$ ikilisine de *normlu uzay* denir [18].

Tanım 1.1.4. $(X, \|\,.\,\|)$ bir normlu uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $n_0 \leq n,\ m$ doğal sayısı varsa (x_n) dizisine bir *Cauchy dizisi* denir [19].

Tanım 1.1.5. Eğer $(X, \|\,.\,\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise X

normlu uzayına *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* denir [18].

Tanım 1.1.6. X boş olmayan bir küme $d : X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y, z \in X$ için;

M1) $d(x, y) > 0$,

M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

M3) $d(x, y) = d(y, x)$,

M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

şartlarını sağlayan d fonksiyonuna X üzerinde bir *metrik*, (X, d) ikilisine de bir *metrik* uzay denir [18].

Tanım 1.1.7. Bir (X, d) metrik uzayının alt kümesi S olmak üzere $\overline{S} = X$ oluyorsa S kümesine X de bir *yoğun küme* denir [18].

Tanım 1.1.8. $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \geq 0$, $b_1, b_2, b_3, ..., b_n \geq 0$ ve $p > 1$ olsun.

$$\left(\sum (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum (a_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum (b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$(k = 1, 2, 3, ..., n)$ eşitsizliğine *Minkowski eşitsizliği* denir [18].

1.2 Matris Dönüşümleri

Tanım 1.2.1. X ve Y, s uzayının iki alt uzayı ve $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks terimli bir sonsuz matris olsun. Bu durumda $x = (x_k) \in X$ ve her $n \geq 0$ için

$$y_n = A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k \tag{1.1}$$

mevcut ise yani (1.1) deki seri her n için yakınsak oluyorsa $Ax = A_n(x)$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir. Eğer her $x \in X$ için $y_n = A_n(x)$ dönüşüm dizisi mevcut ve $y \in Y$ ise $A = (a_{nk})$ matrisi X den Y içine bir matris dönüşümü tanımlar. X dizi uzayını *Y* içine dönüştüren bütün matrislerin sınıfı *(X,Y)* ile gösterilir ve eğer *A, X* den *Y* içine bir matris dönüşümü ise $A \in (X,Y)$ şeklinde ifade edilir. Toplamı ya da limiti koruyan matrislerin sınıfı ise *(X,Y;p)* ile gösterilir [18].

Tanım 1.2.2. $A \in (c,c)$ ise *A* ya *konservatif matris* ve $A \in (c,c;p)$ ise *A* ya *regüler matris* (ya da kısaca *regülerdir*) denir. O halde *A* matrisin regüler olması için gerekli ve yeterli şartlar aşağıda verildi [18].

Teorem 1.2.3. Bir *A* matrisinin regüler olması için gerekli ve yeterli şart

i) $\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$

ii) $\lim_n a_{nk} = 0 \quad (\text{her } k \text{ için})$

iii) $\lim_n \sum_k a_{nk} = 1$

olmasıdır [18].

(1.1) serisi her *n* için yakınsak olduğundan matris dönüşümlerinin lineer olduğu açıktır. X ve *Y* dizi uzayları üzerinde göz önüne alınan normlarla birlikte θ, X lineer uzayının sıfır elemanını göstermek üzere eğer,

$$\|A\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < \infty$$

ise *A* matris dönüşümü sınırlıdır denir ve $A \in B(X,Y)$ şeklinde gösterilir. Eğer *X*=*Y* ise *B(X,X)* yerine kısaca *B(X)* yazılır.

Tanım 1.2.4. $A = (a_{nk})$ sonsuz matris olmak üzere,

$$c_A = \{x = (x_k) : Ax \in c\}$$

kümesine A nın *yakınsaklık alanı* (*toplanabilirlik alanı*) denir ve eğer $c_A = c$ ise *A* matrisine *denktir* denir [18].

Tanım 1.2.5. $A \in B(c)$ olsun. $a_k = \lim_n a_{nk}$ olmak üzere her *k* için $a_k = 0$ ise *A* ya *çarpımsal matris*,

$$\chi(A) = \lim_n \sum_k a_{nk} - \sum_k a_k$$

sayısına A nın *karakteristiği* denir ve $\chi(A) \neq 0$ olacak biçimdeki A matrisine de *koregüler matris* denir. $x \in c$ için

$$\lim Ax = \chi(A) \lim x + \sum_k a_k x_k$$

olarak verilir [20].

Teorem 1.2.6. $A \in B(\ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty \tag{1.2}$$

olmasıdır [20].

Teorem 1.2.7. $A \in B(\ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|A\| = \sup_k \sum_n |a_{nk}| < \infty$$

olmasıdır [20].

Teorem 1.2.8. $A \in B(c_0)$ olması için gerek ve yeter şart

i) $\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$

ii) $\lim_n a_{nk} = 0$ (her k için)

şartlarını sağlamasıdır [20].

Teorem 1.2.9. (Kojima-Schur**)** $A \in B(c)$ olması için gerek ve yeter şart

i) $\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$

ii) $\lim_n \sum_{k=p} a_{nk} = a_p$ (her p için) şartlarını sağlamasıdır [18].

Lemma 1.2.10. $A \in B(c)$ olsun. Eğer *A* matrisi (1.2) şartını sağlayan bir A^{-1} tersine sahip bir matris ise $A^{-1} \in B(c)$ olur [20].

Teorem 1.2.11. $1 < p < \infty$ $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun. Her *n* ve *k* için $b_{nk} > 0$ olmak üzere

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| (b_{nk})^{\frac{1}{p}} < \infty$$

ve

$$\sup_k \sum_n |a_{nk}| (b_{nk})^{\frac{-1}{q}} < \infty$$

sağlanması durumunda $A \in B(\ell_p)$ olur [21].

Teorem 1.2.12. (Riesz-Thorin**)** $A \in B(\ell_\infty)$ olsun. Eğer $A \in B(\ell_p)$, ($1 \le p < \infty$) ve *q>p* ise $A \in B(\ell_q)$ olur [22].

Teorem 1.2.13. $A \in B(bv)$ olması için gerek ve yeter şart

(i) $\sup_m \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{m} \left(a_{n,k} - a_{n-1,k} \right) \right| < \infty$, (1.3)

(ii) $Ae \in bv$,

şartlarının sağlanmasıdır. Buradaki $e = (1,1,1,....)$ dir [20].

Teorem 1.2.14. $A \in B(bv_0)$ olması için gerek ve yeter şart (1.3) ifadesi ile birlikte her k için $\lim_n a_{nk} = 0$ özelliklerinin sağlanmasıdır [20].

BÖLÜM 2

SINIRLI LİNEER DÖNÜŞÜMLER, SPEKTRUM VE FİNE SPEKTRUM

Bu bölümde, sınırlı lineer dönüşümler ile birlikte spektrum ve fine spektrum kavramlarına yer verildi.

2.1 Sınırlı Lineer Dönüşümler

X ve Y, bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde normlu iki uzay ve $T : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{K}$ için

$$T(x+y) = T(x) + T(y)$$

$$T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

ya da buna denk olarak her $x, y \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

ise T dönüşümüne *lineer dönüşüm* denir. Burada T lineer dönüşümünün tanım kümesi $D(T)$, görüntü kümesi $R(T)$ ve çekirdeği $N(T)$ ile gösterilen uzaylar

$$D(T) = \{x \in X : \ T(x) \in Y\}$$

$$R(T) = \{y \in Y : \ \text{y}{=}T(x), x \in X\}$$

$$N(T) = \{x \in D(T) : \ T(x) = \theta\}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $T : X \to Y$ lineer dönüşümü her $x \in X$ için

$$\|Tx\| \ \leq \ M\|x\|$$

olacak biçimde bir $M>0$ sayısı varsa T dönüşümüne X den Y içine bir *sınırlı lineer dönüşüm* adı verilir. X den Y içine tanımlı lineer dönüşümlerin kümesi $L(X,Y)$ ve sınırlı lineer dönüşümlerin kümesi $B(X,Y)$ ile gösterilir. Özel olarak $X=Y$ ise $B(X,Y)$ yerine kısaca $B(X)$ yazılır. Burada T dönüşümünün normu

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

ile tanımlanır ve $B(X,Y)$ lineer uzayı bu norm ile tanımlanır. Y bir Banach uzayı ise $B(X,Y)$ de bir Banach uzayı olur.

Teorem 2.1.1. X bir Banach uzayı olsun. $B(X)$ de tersi mevcut olan elemanların kümesi $B(X)$ Banach uzayı içine düşer [23].

Tanım 2.1.2 X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde normlu bir uzay ve $T\in B(X)$ olsun. X^*, X uzayının sürekli dualini göstersin. $X^*=B(X,\mathbb{K})$ olmak üzere, her $x\in X$ ve $f\in X^*$ için

$$T^*:X^*\to X^*$$

$$\left(T^*f\right)x=f(Tx)$$

biçiminde tanımlanan T^* dönüşümüne T nin *adjointi* denir [19].

Teorem 2.1.3. X bir normlu uzay ve $T\in B(X)$ olsun. Bu durumda $T^*\in B\left(X^*\right)$ olup $\|T\|=\left\|T^*\right\|$ dır [23].

Teorem 2.1.4. Eğer T ve T^* dönüşümünün tersi mevcut ise $\left(T^{-1}\right)^*=\left(T^*\right)^{-1}$ olur [24].

Teorem 2.1.5. X bir normlu uzay ve $T\in B(X)$ olsun. Bu durumda T^{-1} dönüşümünün mevcut olması için gerek ve yeter şart T^* adjoint dönüşümünün örten olmasıdır [24].

Teorem 2.1.6. X normlu bir uzay ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda T nin X de yoğun bir görüntü kümesine sahip olması için gerek ve yeter şart T^* ifadesinin bire-bir olmasıdır [24].

2.2. Spektrum

Bu kısımda X i , $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde normlu bir lineer uzay olarak göz önüne alındı. θ ile X lineer uzayı sıfır elemanı ve I ile X den X içine tanımlı özdeşlik dönüşümü gösterildi. Bunun yanı sıra T_α dönüşümü $T_\alpha = (T - \alpha I)$ şeklinde tanımlandı.

Tanım 2.2.1. $X \neq \{\theta\}$ ve $T \in B(X)$ olsun. Eğer $(T - \alpha I)^{-1}$ mevcut, sınırlı ve X de yoğun bir küme üzerinde tanımlı ise $\alpha \in \mathbb{C}$ sayısına T nin bir *regüler değeri* denir. T nin bütün regüler değerlerinin oluşturduğu kümeye T nin *resolventi* denir ve bu küme $\rho(T)$ ile gösterilir. Buna göre

$$\rho(T, X) = \left\{ \alpha \in \mathbb{C} : \overline{R(T - \alpha I)} = X \text{ , } (T - \alpha I)^{-1} \textit{ mevcut ve sürekli} \right\}$$

olur. Ayrıca burada $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ kümesine de T nin *spektrumu* adı verilir. O halde eğer $\alpha \in \sigma(T)$ ise

i) $(T - \alpha I)^{-1}$ mevcut,

ii) $(T - \alpha I)^{-1}$ sınırlı,

iii) $(T - \alpha I)^{-1}$ X de yoğun bir küme üzerinde tanımlı

özelliklerinden en az biri gerçeklenmez.

Eğer bir T sınırlı lineer dönüşümü birden fazla normlu lineer uzay üzerinde göz önüne alınıyorsa, göz önüne alındığı X normlu lineer uzayını belirtmek için $\rho(T)$ yerine $\rho(T, X)$ ve $\sigma(T)$ yerine $\sigma(T, X)$ yazılır [19].

Tanım 2.2.2. $T : X \to X$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer $Tx = \alpha x$ olacak biçimde X

de bir $x \neq \theta$ elemanı varsa α kompleks sayısına T nin bir *özdeğeri* ve $x \in X$ elemanına da T nin bir *özvektörü* denir [19].

Tanım 2.2.3. X in $\{x \in X : Tx = \theta\}$ alt kümesine T nin *çekirdeği* denir ve $Çek(T)$ ya da $N(T)$ ile gösterilir [19].

Tanım 2.2.2 gereğince "α kompleks sayısının T nin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter şart $T - \alpha I$ dönüşümünün bire-bir olmamasıdır" önermesi doğrudur. Gerçektende $\alpha \in \mathbb{C}$, T için bir özdeğer ise $Tx = \alpha x$ olacak biçimde X de bir $x \neq \theta$ elemanı vardır. Buna göre $Tx = \alpha x$ ise $(T - \alpha I)x = \theta$ olur. $x \in Çek(T - \alpha I)$ ve $x \neq \theta$ olduğundan $(T - \alpha I)$ dönüşümü bire-bir olmaz. Aynı yöntemlerle tersini göstermek zor değildir. Ayrıca buradan şu sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.4. $X \neq \theta$ ve $T \in B(X)$ olsun. O halde $\alpha \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı T nin bir özdeğeri ise $\alpha \in \sigma(T)$ olur [19].

Ayrıca spektrum kavramı kendi içerisinde nokta spektrumu, süreklilik spektrumu ve rezidü (kalıntı) spektrumu olmak üzere 3 kısma ayrılır.

Tanım 2.2.5. T_α^{-1} dönüşümünün mevcut olmadığı durumlardaki $\alpha \in \mathbb{C}$ kompleks sayılarının oluşturduğu kümeye *nokta spektrum* kümesi denir ve $\sigma_p(T, X)$ ile gösterilir. Ayrıca buradaki $\alpha \in \sigma_p(T, X)$ elemanı T dönüşümünün özdeğeridir [19].

Tanım 2.2.6. T_α^{-1} dönüşümünün mevcut, sınırsız ve görüntü kümesinin yoğun olduğu $\alpha \in \mathbb{C}$ kompleks sayılarının oluşturduğu kümeye *süreklilik spektrumu* denir ve bu küme $\sigma_c(T, X)$ ile gösterilir [19].

Tanım 2.2.7. T_α^{-1} mevcut (sınırlı veya sınırsız) olduğu fakat T_α^{-1} dönüşümünün X de yoğun olmadığı $\alpha \in \mathbb{C}$ kompleks sayılarının oluşturduğu kümeye *rezidü spektrumu* denir.

Rezidü spektrum kümesi $\sigma_r(T, X)$ ile gösterilir [19].

Yukarıdaki tanımlar göz önüne alındığında

$$\mathbb{C} = \rho(T) \cup \sigma(T)$$

$$= \rho(T) \cup \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$$

ayrık kümelerin birleşiminin çalışılan uzayı verdiği de açıkça görülür.

X sonlu boyutlu bir normlu uzay ve $T : X \to X$ lineer dönüşümü sınırlı bir dönüşüm olmak üzere ve T^{-1} ters dönüşümünün mevcut olması için gerek ve yeter şart T nin bire-bir olmasıdır. O halde şu önemli sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.8. $X \neq \{\theta\}$ sonlu boyutlu normlu bir uzay ve $T : X \to X$ lineer bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\sigma_p(T) = \sigma(T)$ dir [25].
Elde edilen bu sonuç aşağıdaki örnekle de kolayca görülmektedir

Örnek 2.2.9. $T : \ell_2 \to \ell_2$

$$x \to Tx : (x_0, x_1, ...) = (0, x_0, x_1, ...)$$

biçiminde tanımlanan T dönüşümü göz önüne alınsın. Tanım gereğince T lineer ve

$$\|Tx\| = \left(\sum_k |x_k|^2 \right)^{1/2} = \|x\|$$

olduğundan sınırlı yani $T \in B(\ell_2)$ dir. Ayrıca T dönüşümünün bire-bir olduğu da açıktır. Dolayısıyla $\alpha = 0 \notin \sigma_p(T)$ dir. Ancak $x_0 = 0$ olacak biçimdeki bütün $x = (x_k) \in \ell_2$ elemanları T nin görüntü uzayının elemanı olmadığından T^{-1} in tanım kümesi ℓ_2 de yoğun değildir. O halde $\alpha = 0$ değeri T nin bir regüler değeri değildir yani $\alpha = 0 \in \sigma_p(T)$ dir [25].

Tanım 2.2.10. $X \neq \{\theta\}$ ve $T \in B(X)$ olsun.

$$r_\sigma(T) = \sup\{|\alpha| : \alpha \in \sigma(T)\}$$

sayısına T nin *spektral yarıçapı* denir. Eğer X bir Banach uzayı ise

$$r_\sigma(T)=\lim_n \left\|T^n\right\|^{1/n}$$

şeklinde ifade edilir. Buna göre $\alpha\in\sigma(T)$ ise $|\alpha|\le r(T)\le\|T\|$ yazılır [23].

Teorem 2.2.11. $X\neq\{\theta\}$ ve $T\in B(X)$ olsun. Bu durumda $\sigma(T^*)\subset\sigma(T)$ olur. Eğer X bir Banach uzayı ise $\sigma(T^*)=\sigma(T)$ olur [23].

Ancak $\sigma_p(T)$ ile $\sigma_p(T^*)$ arasında her zaman Teorem 2.2.11 deki gibi bir karşılaştırma yapılamamaktadır.

2.3. Fine (İnce) Spektrum

X bir Banach uzayı ve $T\in B(X)$ olsun. T nin görüntü kümesi $R(T)$ ve $R(T)$ nin X içindeki kapanışı $\overline{R(T)}$ ile gösterilsin. Bu durumda $R(T)$ için

I. $R(T)=X$

II. $R(T)\neq X$ ancak $\overline{R(T)}=X$

III. $\overline{R(T)}\neq X$

ve $R(T)$ üzerinde göz önüne alınan T^{-1} için

1. T^{-1} mevcut ve sınırlı

2. T^{-1} mevcut ancak sınırlı değil

3. T^{-1} mevcut değil

durumları vardır.

Ayrıca burada $T_\alpha=(T-\alpha I)$ dönüşümündeki $\alpha\in\mathbb{C}$ elemanının T_α ve T_α^{-1} ifadeleri için;

I. T_α örten

II. $R(T_\alpha) \neq \overline{R(T_\alpha)} = X$

III. $\overline{R(T_\alpha)} \neq X$

ve

1. T_α dönüşümü bire-bir ve T_α^{-1} ters dönüşümü sürekli

2. T_α dönüşümü bire-bir ve T_α^{-1} ters dönüşümü süreksiz

3. T_α dönüşümü bire-bir değildir

durumları da mevcuttur.

Yukarıdaki incelemeler birlikte göz önüne alınırsa; I_1, I_2, I_3, II_1, II_2, II_3, III_1, III_2, III_3 olmak üzere dokuz farklı durum ortaya çıkar. Eğer burada α sayısı $T_\alpha \in \mathrm{I}_1$ veya $T_\alpha \in \mathrm{II}_1$ olacak biçimde bir kompleks sayı ise $\alpha \in \rho(T)$ ve diğer durumlarda ise $\alpha \in \sigma(T)$ olur. Örneğin, $T \in \mathrm{I}_1$ ise $R(T) = X$ ve T^{-1} mevcut ve sınırlıdır, $T \in \mathrm{III}_2$ ise $\overline{R(T)} \neq X$ ve T^{-1}, $R(T)$ üzerinde mevcut ancak sınırlı değildir. Bunun yanı sıra dönüşüm II_2 durumunda ise $R(T) \neq \overline{R(T)} = X$ ve T^{-1} mevcut fakat sürekli olmadığı anlamı da ortaya çıkar. Buradan da kısaca $\alpha \in \mathrm{II}_2\sigma(T)$ yazılır. Bu incelemelere *fine spektrum* denir [24].

BÖLÜM 3

$B(r,s)$ DÖNÜŞÜMÜNÜN c_o VE c DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDEKİ SPEKTRUMU

Bu bölümde $B(r,s)$ dönüşümünün spektrumu, fine spektrumu, rezidü spektrumu, süreklilik spektrumu ve nokta spektrumu kavramları c_o ve c dizi uzaylarında incelendi. Son olarakta Mercerian Teoremi verildi. Ayrıca bu tezde kullanılan $B(r,s)$ dönüşümü $r,\ s\in\mathbb{R}$ ve $s\neq 0$ olmak üzere

$$B(r,s)=\begin{bmatrix} r & 0 & 0 & \cdots \\ s & r & 0 & \cdots \\ 0 & s & r & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

3.1. c_o ve c Dizi Uzaylarında Spektrum

Lemma 3.1.1. $B(r,s):c\to c$ ifadesi sınırlı bir dönüşüm olup bu dönüşümün normu

$$\left\|B(r,s)\right\|_{(c:c)}=|r|+|s|$$

dir [15].

Lemma 3.1.2. $B(r,s):c_0\to c_0$ ifadesi sınırlı bir dönüşüm olup bu dönüşümün normu

$$\left\|B(r,s)\right\|_{(c:c)}=\left\|B(r,s)\right\|_{(c_0:c_0)}=|r|+|s|$$

şeklindedir [15].

Teorem 3.1.3. $\sigma\left(B(r,s),c_0\right)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:\ |\alpha-r|\le|s|\right\}$ [15].

İspat: Bu teoremin ispatında ilk önce $|\alpha-r|>|s|$ için $\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}$ dönüşümünün mevcut ve $\left(c_0:c_0\right)$ sınıfına ait olduğu ve sonrada $B(r,s)$ dönüşümünün $|\alpha-r|\le|s|$ için $\left(c_0:c_0\right)$ sınıfına ait olmadığını göstermek yeterlidir.

O halde $\alpha\notin\ \sigma\left(B(r,s),c_0\right)$ olsun. $\left(B(r,s)-\alpha I\right)$ üçgensel matris olduğundan $\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}$ mevcut ve bu ters dönüşüm $\left(B(r,s)-\alpha I\right)x=y$ denkleminin çözümünden elde edilir. Bu ters dönüşümün $k\le n$ için n. satır k. sütunda genel terimi

$$\frac{(-s)^{n-k}}{(r-\alpha)^{n-k+1}} \tag{3.1}$$

şeklinde olur. Aksi takdirde yani $k>n$ için ters dönüşümün genel terimi sıfır olur. Buradan

$$\left\|\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}\right\|_{(c_0:c_0)}=\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{(-s)^{n-k}}{(r-\alpha)^{n-k+1}}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{r-\alpha}\right|\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{s}{r-\alpha}\right|^{k}<\infty \tag{3.2}$$

elde edilir. Bu ise $\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}\in\left(c_0:c_0\right)$ olduğunu gösterir.

Şimdi $\alpha\in\ \sigma\left(B(r,s),c_0\right)$ olsun. Bu durumda $\alpha\ne r$ ve $\alpha=r$ durumları ortaya çıkar.

1) $\alpha\in\ \sigma\left(B(r,s),c_0\right)$ ve $\alpha\ne r$ olsun. Burada $B(r,s)-\alpha I$ üçgensel matris olduğu için $\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}$ mevcuttur. (3.2) den

$$\left\|\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}\right\|_{(c_0:c_0)}=\infty \tag{3.3}$$

olduğu görülür. O halde $\alpha \in \sigma\left(B(r,s),c_0\right)$ olması durumunda $\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}$ ters dönüşümünün $B\left(c_0\right)$ de olmadığı görülür.

2) $\alpha \in \sigma\left(B(r,s),c_0\right)$ ve $\alpha = r$ olsun. Bu durumda $\left(B(r,s)-\alpha I\right) = B(0,s)$ matrisi

$$B(0,s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ s & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & s & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

şekildeki gibi bir gösterime sahip olur. $\overline{R\left(B(0,s)\right)} \neq c_0$ olduğundan $B(0,s)$ ifadesinin tersi mevcut olmaz ve dolayısıyla da ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.4. $\sigma_p\left(B(r,s),c_0\right) = \varnothing$ [15].

İspat: c_0 uzayında $x \neq \theta = (0,0,0,\ldots)$ dizisi için $B(r,s)x = \alpha x$ olsun. Bu lineer denklemden

$$\begin{aligned} rx_0 &= \alpha x_0, \\ sx_0 + rx_1 &= \alpha x_1, \\ sx_1 + rx_2 &= \alpha x_2, \\ &\vdots \\ sx_k + rx_{k+1} &= ax_{k+1} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.5}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünden $x = (x_n)$ dizisinin x_{n_0} ilk teriminin sıfırdan farklı olması durumunda $\alpha = r$ olur ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$x_{n_0+k} = 0 \tag{3.6}$$

olacağından bu $x_{n_0} \neq 0$ kabulu ile çelişir. O halde $x \neq \theta$ için $B(r,s)x = \alpha x$ lineer denklemini sağlayan α değeri mevcut olmadığından $\sigma_p\left(B(r,s),c_0\right) = \varnothing$ olur.

$T: c_0 \to c_0$ dönüşümü A matrisiyle sınırlı bir lineer dönüşüm teşkil ediyorsa, T^* da A matrisinin A^t transpozesi yardımıyla tanımlanan adjoint dönüşümü teşkil eder ve $T^{*}: c_0^{*} \to c_0^{*}$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca c_0 ın c_0^{*} dual uzayı $\|x\| = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|$ ile ℓ_1 Banach uzayına izometrik olarak izomorf olur.

Teorem 3.1.5. $\sigma_p\left(B(r,s)^{*}, c_0^{*}\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| < |s|\}$ [15].

İspat: $c_0^{*} \cong \ell_1$ uzayında $x \neq \theta$ için $B(r,s)^{*} x = \alpha x$ denklemi göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} rx_0 + sx_1 &= \alpha x_0, \\ rx_1 + sx_2 &= \alpha x_1, \\ rx_2 + sx_3 &= \alpha x_2, \\ &\vdots \\ rx_k + sx_{k+1} &= \alpha x_k, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.7}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümünden x dizisinin genel terimi

$$x_n = \left(\frac{\alpha - r}{s}\right)^{n} x_0 \tag{3.8}$$

şeklinde olur. O halde $x \in \ell_1$ olması için gerek ve yeter şart $|\alpha - r| < |s|$ olmasıdır. Bu da istenen olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.6. $\sigma_r\left(B(r,s), c_0\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| < |s|\}$ [15].

İspat: $B(r,s) - \alpha I$ dönüşümünün bir tersinin mevcut ve $|\alpha - r| < |s|$ için $\overline{R\left(B(r,s) - \alpha I\right)} \neq c_0$ olduğu gösterildiği takdirde istenilenler elde edilir.

$\alpha \neq r$ için $B(r,s) - \alpha I$ üçgensel olduğundan tersi mevcuttur. $\alpha = r$ olması durumunda $B(r,s) - \alpha I$ bire-bir olduğundan $B(r,s) - \alpha I$ dönüşümünün bir tersi vardır. Ancak $B(r,s)^{*} - \alpha I$ dönüşümü Teorem 3.1.5 ten dolayı bire-bir değildir. Böylece Teorem 2.2.6 dikkate alındığında $\overline{R\left(B(r,s) - \alpha I\right)} \neq c_0$ olduğu görülür.

Teorem 3.1.7. $\sigma_c\left(B(r,s),c_0\right)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:|\alpha-r|=|s|\right\}$ [15].

İspat: Süreklilik spektrumu tanımından dolayı $\alpha\in\sigma_c\left(B(r,s),c_0\right)$ olması durumunda $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümünün tersinin mevcut ve

$$\overline{R\left(B(r,s)-\alpha I\right)}=c_0, \tag{3.9}$$

olduğu gösterilirse istenilenlere ulaşılır.

Eğer $\alpha\neq r$ ise $B(r,s)-\alpha I$ üçgensel ve tersi mevcut olur. Böylece Teorem 3.1.5 ten $B(r,s)^*-\alpha I$ bire-bir ve Teorem 2.2.6 dan (3.9) olduğu elde edilir.

Aşağıdaki iki teoremin ispatı Teorem 3.1.3 ve Teorem 3.1.4 e benzer olduğundan ispatları verilmedi.

Teorem 3.1.8. $\sigma\left(B(r,s),c\right)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:|\alpha-r|\leq|s|\right\}$ [15].

Teorem 3.1.9. $\sigma_p\left(B(r,s),c\right)=\varnothing$ [15].

Eğer $T:c\to c$ dönüşümü A matrisiyle sınırlı bir matris dönüşümü temsil ediyorsa, $T^*:c^*\to c^*$ dönüşümü $\mathbb{C}\oplus\ell_1$ üzerinde

$$\begin{bmatrix}\chi & 0\\ b & A^t\end{bmatrix} \tag{3.10}$$

şeklinde bir matris temsiline sahip olur. Bu matris gösterimindeki χ ve b elemanları

$$\chi=\lim_n\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}-\sum_{k=0}^{\infty}\lim_n a_{nk} \quad \text{ve} \quad b=\lim_n a_{nk}$$

şeklindedir. O halde $B(r,s):c\to c$ için $B(r,s)^*\in B(\ell_1)$ matrisi

$$B(r,s)^*=\begin{bmatrix}r+s & 0\\ 0 & B(r,s)^t\end{bmatrix} \tag{3.11}$$

olur.

Teorem 3.1.10. $\sigma_p\left(B(r,s)^*, c^*\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| < |s|\} \cup \{r+s\}$ [15].

İspat: ℓ_1 de $x \neq \theta$ için $B(r,s)^* x = \alpha x$ olsun. O halde lineer denklemden

$$\begin{aligned}
(r+s)x_0 &= \alpha x_0, \\
rx_1 + sx_2 &= \alpha x_1, \\
rx_2 + sx_3 &= \alpha x_2, \\
&\vdots \\
rx_k + sx_{k+1} &= \alpha x_k, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.12}$$

denklem sistemi elde edilir. Sistemin çözümünden

$$x_n = \left(\frac{\alpha - r}{s}\right)^{n-1} x_1 \qquad (n \geq 2). \tag{3.13}$$

olur.

Eğer $x_0 \neq 0$ ise $\alpha = r+s$ olur. Böylece $\alpha = r+s$ ifadesi $x = (x_0, 0, 0, \ldots)$ özvektörünün bir özdeğeri olduğu görülür. Eğer $\alpha \neq r+s$ ise $x_0 = 0$ olur ve (3.13) de $x \in \ell_1$ olması için gerek ve yeter şart $|\alpha - r| < |s|$ olmasıdır. Bu da istenedir.

Teorem 3.1.11. $\sigma_r\left(B(r,s), c\right) = \sigma_p\left(B(r,s)^*, c^*\right)$ [15].

İspat: Teorem 3.1.6 nın ispatındaki benzer ifadelerden elde edilir.

Teorem 3.1.12. $\sigma_c\left(B(r,s), c\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| = |s|\} \setminus \{r+s\}$ [15].

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 3.1.7 nin ispatına benzer olarak $\alpha \neq r+s$ olması durumunda $|\alpha - r| = |s|$ olacağından istenilenler bulunur.

Teorem 3.1.13. $\sigma\left(B(r,s), \ell_\infty\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \leq |s|\}$ [15].

İspat: Cartlidge [22] de A, c üzerinde sınırlı bir matris dönüşümü ise $\sigma(A,c)=\sigma(A,\ell_\infty)$ dir. Böylece $A=B(r,s)$ alınması durumunda Teorem 3.1.8 den ispat kolayca görülür.

3.2. c_0 ve c Dizi Uzaylarında Fine Spektrum

Bu kısımda ise bu uzaylar üzerindeki fine spektrum kavramları ve bunlarla ilgili teoremler verildi.

Teorem 3.2.1. $|\alpha-r|<|s|$ eşitsizliğinde eğer $\alpha=r$ alınırsa $\left(B(r,s)-\alpha I\right)\in \mathrm{III}_1\sigma\left(B(r,s),c_0\right)$ olur [15].

İspat: $\alpha=r$ için $B(r,s)-\alpha I=B(0,s)$ olduğundan Teorem 3.1.7 den $B(0,s)\in \mathrm{III}_1$ veya $\mathrm{B}(0,s)\in \mathrm{III}_2$ olur. Şimdi $B(0,s)$ dönüşümünün sınırlı bir terse sahip olduğunu göstermek için $B(0,s)$ nin alttan sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. O halde $x\in c_0$ için

$$\|B(0,s)x\|\geq\frac{|s|}{2}\|x\|, \tag{3.14}$$

olduğu kolayca görülür. $B(0,s)$ alttan sınırlı olduğundan $\left(B(r,s)-\alpha I\right)\in \mathrm{III}_1$ dir.

Teorem 3.2.2. $|\alpha-r|<|s|$ eşitsizliğinde eğer $\alpha\neq r$ ve $\alpha\in\sigma_r\left(B(r,s),c_0\right)$ alınırsa $\left(B(r,s)-\alpha I\right)\in \mathrm{III}_2\sigma\left(B(r,s),c_0\right)$ olur [15].

İspat: Teorem 3.1.6 dan $B(r,s)-\alpha I\in$ III_1 veya $\in \mathrm{III}_2$ dir. Böylece (3.2) den $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümünün tersi süreksiz ve $B(r,s)-\alpha I$ sınırsız bir terse sahip olur. Bu da istenendir.

Teorem 3.2.3. $|\alpha-r|<|s|$ eşitsizliğinde $\alpha\in\sigma_c\left(B(r,s),c_0\right)$ alınması durumunda $\left(B(r,s)-\alpha I\right)\in \mathrm{II}_2\sigma\left(B(r,s),c_0\right)$ olur [15].

İspat: (3.2) dikkate alındığında $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümünün tersi süreksiz ve sınırsız olur. Teorem 3.1.5 ten $B(r,s)^{*}-\alpha I$ bire-bir ve Teorem 2.2.6 dan $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümü yoğun bir değer kümesine sahip olur. $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümünün örten olmadığını göstermek için $\left(B(r,s)-\alpha I\right)x=y$ denkleminde $y\in c_0$ olmak üzere $x_n \notin c_0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Böylece $y=(1,0,0,0,\ldots)\in c_0$ için $x_n=\left(\dfrac{s}{\alpha-r}\right)^n.\dfrac{1}{\alpha-r}$ olur. $x\notin c_0$ olduğundan $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümü örten değildir.

Ayrıca $B(r,s)$ dönüşümünün c uzayı üzerindeki fine spektrumu c_0 uzayındaki fine spektruma benzer olduğundan aşağıdaki teoremler ispatsız olarak verildi.

Teorem 3.2.4. $|\alpha-r|>|s|$ eşitsizliğinde $\alpha\notin\sigma\left(B(r,s),c\right)$ ise $\left(B(r,s)-\alpha I\right)\in \mathrm{I}_1$ olur [15].

Teorem 3.2.5. $|\alpha-r|<|s|$ eşitsizliğinde $\alpha=r$ olması durumunda $\left(B(r,s)-\alpha I\right)\in$ $\mathrm{III}_1\ \sigma\left(B(r,s),c\right)$ olur [15].

Teorem 3.2.6. $|\alpha-r|<|s|$ eşitsizliğinde $\alpha\in\sigma_c\left(B(r,s),c\right)$ alınırsa $\left(B(r,s)-\alpha I\right)\in$ $\mathrm{II}_2\sigma\left(B(r,s),c\right)$ olur [15].

Teorem 3.2.7. $|\alpha-r|<|s|$ eşitsizliğinde $\alpha\in\sigma_r\left(B(r,s),c\right)\setminus\{r\}$ kabul edilirse $\left(B(r,s)-\alpha I\right)\in\mathrm{III}_2\sigma\left(B(r,s),c\right)$ olur [15].

Mercerian teoremi olarakta bilinen aşağıdaki teorem $B(r,s)$ dönüşümü ile spektrum arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

Teorem 3.2.8. $|\alpha(1-r)+r|>|s(1-\alpha)|$ eşitsizliğini sağlayan α kompleks değeri için $A=\alpha I+(1-\alpha)B(r,s)$ matrisinin yakınsaklık alanı c uzayı olur [15].

İspat: Eğer $\alpha = 1$ ise A=I olacağından ispat için bir şey gerekmez. O halde $\alpha \neq 1$ olması durumunda Teorem 3.1.8 den ve α nın seçiminden dolayı $B(r,s) - [\alpha/(\alpha-1)]I$ dönüşümü $B(c)$ de bir terse sahip olur. Böylece A matrisinin tersi

$$A^{-1} = \frac{1}{1-\alpha}\left(B(r,s) - \frac{\alpha}{\alpha-1}I\right)^{-1} \in B(c) \tag{3.15}$$

dir.

Buradan A matrisi üçgensel ve $B(c)$ de olduğundan A^{-1} konservatif matris yani $c_A = c$ olmasıdır.

BÖLÜM 4

$B(r,s)$ DÖNÜŞÜMÜNÜN ℓ_1 VE bv DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDEKİ SPEKTRUMU

Bu bölümde Furkan, Bilgiç ve Kayaduman [16] çalışmalarından faydalanarak $B(r,s)$ dönüşümünün spektrumu, fine spektrumu, nokta spektrumu, süreklilik spektrumu ve rezidü spektrumu kavramları ℓ_1 ve bv dizi uzayları üzerinde incelenip bunlarla ilgili teoremler verildi.

4.1. ℓ_1 ve bv Dizi Uzaylarında Spektrum

Aşağıda lemmalar spektrumla ilgili teoremlerin ispatında kulanıldığından ispatsız olarak verildi.

Lemma 4.1.1. $B(r,s):\ell_1 \to \ell_1$ ifadesi sınırlı bir dönüşüm olup bu dönüşümün normu

$$\|B(r,s)\|_{(\ell_1,\ell_1)} = |r| + |s|$$

dir [16].

Lemma 4.1.2. $B(r,s):bv \to bv$ ifadesi sınırlı bir dönüşüm olup bu dönüşümün normu

$$\|B(r,s)\|_{(\ell_1,\ell_1)} = \|B(r,s)\|_{(bv,bv)}$$

dir [16].

Teorem 4.1.3. $\sigma\big(B(r,s),\ell_1\big) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \le |s|\}$ [16].

İspat: Bu teoremin ispatında ilk önce $\alpha \notin \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \leq |s|\}$ için $(B(r,s)-\alpha I)^{-1}$ dönüşümünün mevcut ve $(\ell_1 : \ell_1)$ sınıfına ait olduğu yani resolvent kümesi gösterildikten sonra $(B(r,s)-\alpha I)$ dönüşümünün $\alpha \in \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \leq |s|\}$ için $(\ell_1 : \ell_1)$ sınıfına ait olmadığı yani spektrum kümesinin gösterilmesi ispat için yeterlidir.

O halde $\alpha \notin \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \leq |s|\}$ olsun. $s \neq 0$ için $r \neq \alpha$ olacağından $B(r,s)-\alpha I$ üçgensel ve tersi mevcut olur. $(B(r,s)-\alpha I)x = y$ denkleminin çözümünden $(B(r,s)-\alpha I)^{-1}$ dönüşümüne ulaşılır. Bu ters dönüşümün $k \leq n$ için *n*. satır k. sutunda genel terimi

$$\frac{(-s)^{n-k}}{(r-\alpha)^{n-k+1}}$$

şeklinde olur. Aksi takdirde yani $k > n$ için bu dönüşüm sıfır olur. Buradan dönüşümün tersi

$$(B(r,s)-\alpha I)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(r-\alpha)} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{-s}{(r-\alpha)^2} & \frac{1}{(r-\alpha)} & 0 & \cdots \\ \frac{s^2}{(r-\alpha)^3} & \frac{-s}{(r-\alpha)^2} & \frac{1}{(r-\alpha)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

olur. Böylece

$$\left\| (B(r,s)-\alpha I)^{-1} \right\|_{(\ell_1,\ell_1)} = \sup_k \sum_{n=k}^{\infty} \left| \frac{s}{r-\alpha} \right|^{n-k} \left| \frac{1}{r-\alpha} \right| = \left| \frac{1}{r-\alpha} \right| \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{s}{r-\alpha} \right|^{n} < \infty \qquad (4.1)$$

sonucuna ulaşılır. Buradan da $(B(r,s)-\alpha I)^{-1} \in (\ell_1, \ell_1)$ ve $\sigma(B(r,s), \ell_1)$ $\subseteq \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \leq |s|\}$ olduğu ortaya çıkar.

Eğer $\alpha \in \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \leq |s|\}$ ise $\alpha \neq r$ ve $\alpha = r$ durumları ortaya çıkar.

1) $\alpha \in \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \leq |s|\}$ ve $\alpha \neq r$ olsun. Bu durumda $B(r,s) - \alpha I$ üçgensel olduğu için $(B(r,s) - \alpha I)^{-1}$ mevcut ve (4.1) den

$$\left\| (B(r,s) - \alpha I)^{-1} \right\|_{(\ell_1, \ell_1)} = \infty$$

olur ki bu $(B(r,s) - \alpha I)^{-1}$ dönüşümünün $B(\ell_1)$ de olmadığını gösterir.

2) $\alpha \in \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \leq |s|\}$ ve $\alpha = r$ olsun. Bu durumda $(B(r,s) - \alpha I) = B(0,s)$ olur ve bu matris

$$B(0,s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ s & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & s & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

şelinde gösterilir. $B(0,s)x = \theta$ denkeleminin çözümünden $x = \theta$ olacağından $B(0,s) : \ell_1 \to \ell_1$ dönüşümü bire-bir olur fakat örten olmaz. Böylece $B(0,s)$ matrisinin tersi mevcut olmadığından $\{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \leq |s|\} \subseteq \sigma(B(r,s), \ell_1)$ elde edilir. Bu da $\sigma(B(r,s), \ell_1) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \leq |s|\}$ olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.4. $\sigma_p(B(r,s), \ell_1) = \phi$ [16].

İspat: ℓ_1 uzayında $x \neq \theta = (0,0,0,...)$ için $B(r,s)x = \alpha x$ denklemi göz önüne alındığında

$$\left.\begin{aligned} rx_0 &= \alpha x_0 \\ sx_0 + rx_1 &= \alpha x_1 \\ sx_1 + rx_2 &= \alpha x_2 \\ &\vdots \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemine ulaşılır. $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi x_t alındığında $\alpha = r$ olur. Buradan da sistemin çözümünden

$$sx_t + rx_{t+1} = \alpha x_{t+1}$$

bulunur. $B(r,s)$ dönüşümünden $s \neq 0$ olduğu dikkate alınırsa yukarıdaki eşitlikten $sx_t = 0$ ve $x_t = 0$ bulunur. Bu durum yukarıdaki $x_t \neq 0$ kabulü ile çeliştiği için $B(r,s)x = \alpha x$ denklemini sağlayan α değeri mevcut olmaz ve $\sigma\left(B(r,s), \ell_1\right) = \phi$ olur.

$T : \ell_1 \to \ell_1$ dönüşümü A matrisiyle sınırlı bir lineer dönüşüm teşkil ediyorsa, $T^* : \ell_1^* \to \ell_1^*$ dönüşümü de A matrisinin A^t transpozesi yardımıyla tanımlanan adjoint dönüşümünü teşkil eder. Burada ℓ_1 uzayının duali ℓ_∞ uzayına

$$\|x\| = \sup_k |x_k|$$

normu ile izomorf olur.

Teorem 4.1.5. $\sigma_p\left(B(r,s)^*, \ell_1^*\right) = \left\{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \leq |s|\right\}$ [16].

İspat: $\ell_1^* \cong \ell_\infty$ uzayında $x \neq \theta$ için $B(r,s)^* x = \alpha x$ denklemi göz önüne alındığında bu lineer denklemden

$$\left.\begin{aligned} rx_0 + sx_1 &= \alpha x_0 \\ rx_1 + sx_2 &= \alpha x_1 \\ rx_2 + sx_3 &= \alpha x_2 \\ &\vdots \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Lineer denklem sistemi çözümünden x dizisinin genel terimi

$$x_n = \left(\frac{\alpha - r}{s}\right)^n x_0$$

şeklindedir. Burada $x = (x_n) \in \ell_1^*$ olması için gerek ve yeter şart $|\alpha - r| \leq |s|$ olmasıdır ki bu da istenendir.

Teorem 4.1.6. $\sigma_r\left(B(r,s), \ell_1\right) = \left\{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \leq |s|\right\}$ [16].

İspat: $\{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \le |s|\}$ için ilk önce $B(r,s) - \alpha I$ dönüşümünün bir tersinin mevcut olduğu gösterildikten sonra $\overline{R(B(r,s)-\alpha I)} \ne \ell_1$ olduğunun gösterilmesi ispat için yeterlidir.

$\alpha \ne r$ için $B(r,s) - \alpha I$ dönüşümü üçgensel olduğundan tersi mevcuttur ve $\alpha = r$ için $B(r,s) - \alpha I$ dönüşümü bire-bir olduğundan bir tersi vardır. $B(r,s)^* - \alpha I$ dönüşümü Teorem 4.1.5 ten dolayı bire-bir değildir. Teorem 2.2.6 göz önüne alındığında $\overline{R(B(r,s)-\alpha I)} \ne \ell_1$ ifadesi açıkça görülür.

Teorem 4.1.7. $\sigma_c(B(r,s), \ell_1) = \phi$ [16].

İspat: Teorem 4.1.4 ten $\sigma_p(B(r,s), \ell_1) = \phi$ dir. Ayrıca $\sigma(B(r,s), \ell_1)$ kümesi de $\sigma_p(B(r,s), \ell_1)$, $\sigma_r(B(r,s), \ell_1)$ ve $\sigma_c(B(r,s), \ell_1)$ kümelerinin ayrık birleşimi olduğundan $\sigma_c(B(r,s), \ell_1) = \phi$ olduğu kolayca görülür.

Teorem 4.1.8. $\sigma(B(r,s), bv) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \le |s|\}$ [16].

İspat: Teorem 4.1.3 teki gibi ilk önce $\alpha \notin \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \le |s|\}$ olsun. $s \ne 0$ olduğundan $r \ne \alpha$ elde edilir. O halde $B(r,s) - \alpha I$ üçgensel olup bir tersi de mevcuttur.

$$(B(r,s) - \alpha I)x = y \tag{4.2}$$

denkleminin çözümünden

$$(B(r,s)-\alpha I)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(r-\alpha)} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{-s}{(r-\alpha)^2} & \frac{1}{(r-\alpha)} & 0 & \cdots \\ \frac{s^2}{(r-\alpha)^3} & \frac{-s}{(r-\alpha)^2} & \frac{1}{(r-\alpha)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklinde bir $\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}$ ters dönüşümüne ulaşılır. Buradan $|s|<|r-\alpha|$ eşitsizliği için

$$\left\|\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}\right\|_{(bv,bv)} = \left|\frac{1}{r-\alpha}\right| \sum_n \left|\frac{s}{r-\alpha}\right|^n < \infty \tag{4.3}$$

elde edilir. Bu da $\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1} \in (bv,bv)$ ve $\sigma\left(B(r,s),bv\right) \subseteq \left\{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \leq |s|\right\}$ olduğu sonucunu verir.

Şimdi de $\alpha \in \left\{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \leq |s|\right\}$ olsun. O halde burada $\alpha \neq r$ olması durumunda $B(r,s)-\alpha I$ üçgensel ve dolayısıyla bir terse sahip olur. (4.3) ten

$$\left\|\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}\right\|_{(bv,bv)} = \infty$$

olur ki bu da $\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}$ dönüşümünün $B(bv)$ de olmadığını gösterir.

Eğer burada $\alpha = r$ alınırsa Teorem 4.1.3 ün ispatındaki benzer düşünceyle $B(r,s)-\alpha I = B(0,s)$ dönüşümünün tersinin olmadığı görülür. Böylece $\left\{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \leq |s|\right\} \subseteq \sigma\left(B(r,s),bv\right)$ olduğu elde edilir ve ispat biter.

Teorem 4.1.9. $\sigma_p\left(B(r,s),bv\right) = \phi$ [16].

İspat: bv uzayında $x \neq \theta = (0,0,0,...)$ için $B(r,s)x = \alpha x$ olsun. O halde $B(r,s)x = \alpha x$ denkleminden

$$\left.\begin{aligned} rx_0 &= \alpha x_0 \\ sx_0 + rx_1 &= \alpha x_1 \\ sx_1 + rx_2 &= \alpha x_2 \\ &\vdots \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi bulunur. $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi x_t olarak alınırsa $\alpha = r$ ve denklem sisteminden

$$sx_t + rx_{t+1} = \alpha x_{t+1}$$

elde edilir. Burada $sx_t = 0$ olduğu açıktır. $s \neq 0$ olduğundan $x_t = 0$ olmalıdır. Bu da $x_t \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $\sigma\left(B(r,s),\ell_1\right) = \phi$ olur.

Eğer $T: bv \to bv$ dönüşümü $A = (a_{nk})$ matrisi ile sınırlı bir matris dönüşümü teşkil ediyorsa $\mathbb{C} \oplus bs$ üzerindeki $T^*: bv^* \to bv^*$ ifadesi

$$\begin{bmatrix} \overline{\chi} & v_0 - \overline{\chi} & v_1 - \overline{\chi} & v_2 - \overline{\chi} & \cdots \\ a_0 & a_{00} - a_0 & a_{10} - a_0 & a_{20} - a_0 & \cdots \\ a_1 & a_{01} - a_1 & a_{11} - a_1 & a_{21} - a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklinde bir matris formuna sahip olur ve bu matrisin elemanları

$$\overline{\chi} = \lim_{n\to\infty} \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv}, \qquad a_n = \lim_{k\to\infty} a_{kn}, \qquad v_k = P_k\left(T(\delta)\right),$$

şeklinde ifade elde edilir. Burada $\delta = (1,1,1,...)$ ve P_k her bir $k \in \mathbb{N}$ için k. dereceden koordinat fonksiyonudur. $B(r,s): bv \to bv$ için $B(r,s)^* \in B(\mathbb{C} \oplus bs)$ matrisi

$$B(r,s)^* = \begin{bmatrix} r+s & -s & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & r & s & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & r & s & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & r & s & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

formunu alır.

Teorem 4.1.10. $\sigma_p\left(B(r,s)^*, bv^*\right) = \left\{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \leq |s|\right\}$ [16].

İspat: $x \neq \theta \in bv^* = \mathbb{C} \oplus bs$ için $B(r,s)^* x = \alpha x$ olsun. $B(r,s)^* x = \alpha x$ lineer denkleminden

$$\left.\begin{aligned} (r+s)x_0 - sx_1 &= \alpha x_0 \\ rx_1 + sx_2 &= \alpha x_1 \\ rx_2 + sx_3 &= \alpha x_2 \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

denklem sistemi elde edilir. Lineer denklem sistemi çözümü yardımıyla

$$x_n = \left(\frac{\alpha - r}{s}\right)^{n-1} \left(\frac{r-\alpha}{s} + 1\right) x_0 ; \qquad (n \geq 1) \tag{4.5}$$

x dizisi bulunur.

Eğer $\frac{(\alpha - r)}{s} = 1$ yani $\alpha = r + s$ olursa $s \neq 0$ olacağından $x_1 = 0,\ \ x_2 = 0$,..., $x_n = 0,...$ olur. Böylece $x = (x_0, 0, 0, ...)$ vektörü $\alpha = r + s$ ifadesinin bir özvektörü olur.

Eğer $\frac{(\alpha - r)}{s} \neq 1$ ise $x \in \mathbb{C} \oplus bs$ olması için gerek ve yeter şart

$$\left|\frac{r-\alpha}{s} + 1\right| \sup_n \frac{1 - \left(\frac{\alpha - r}{s}\right)^n}{1 - \left(\frac{\alpha - r}{s}\right)} < \infty$$

sağlanmasıdır ki bu da $|\alpha - r| \leq |s|$ olmasıyla mümkündür. Bu da isteneni verdiğinden ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.11. $\sigma_r\left(B(r,s), bv\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \leq |s|\}$ [16].

İspat: Rezidü spektrumunun tanımı gereğince $B(r,s) - \alpha I$ dönüşümünün tersinin mevcut ve görüntü kümesinin yoğun olmadığı gösterildiğinde istenilenler elde edilir.

$\alpha \neq r$ için $B(r,s) - \alpha I$ dönüşümü üçgensel olduğundan tersi mevcuttur ve $\alpha = r$ için $B(r,s) - \alpha I$ dönüşümü bire-bir olduğundan bir tersi mevcuttur. $B(r,s)^* - \alpha I$ dönüşümü Teorem 4.1.5 ten dolayı bire-bir değildir. Teorem 2.2.6 göz önüne alındığında $\overline{R\left(B(r,s) - \alpha I\right)} \neq bv$ olur.

Teorem 4.1.12. $\sigma_c\left(B(r,s), bv\right) = \phi$ [16].

İspat: Teorem 4.1.7 deki benzer düşünceyle ispat kolayca görülür.

4.2. ℓ_1 ve bv Dizi Uzaylarında Fine Spektrum

Bu bölümde $B(r,s)$ dönüşümü yardımıyla ℓ_1 ve bv dizi uzaylarında fine spektrumu kavramları ve $B(r,s)$ dönüşümünün resolvent kümesinin sınıfının hesaplanması ile ilgili teoremler verildi.

Teorem 4.2.1. $|\alpha - r| < |s|$ eşitsizliğinde eğer $\alpha = r$ alındığında $(B(r,s) - \alpha I) \in \mathrm{III}_1$ $\sigma(B(r,s), \ell_1)$ olur [16].

İspat: $\alpha = r$ ve Teorem 4.1.5 ile Teorem 2.2.6 dikkate alındığında $B(r,s) - \alpha I \in \mathrm{III}$ olur. Diğer taraftan $\alpha = r$ ve Teorem 4.1.4 de göz önüne alındığında $B(r,s) - \alpha I$ dönüşümü $\sigma_p(B(r,s), \ell_1)$ kümesinde mevcut olmaz ve buradan da $B(r,s) - rI$ dönüşümünün bir terse sahip olduğu görülür. Böylece $(B(r,s) - rI) \in \mathrm{III}_{1\cup 2}$ elde edilir.

$(B(r,s) - rI)$ dönüşümünün 1 şartını sağladığını göstermek için Teorem 2.2.5 yardımıyla $B(r,s)^* - rI = B(0,s)^*$ dönüşümünün örten olduğunu göstermek yeterlidir. $y = (y_n) \in \ell_\infty$ için $B(0,s)^* x = y$ denkleminde $x = (x_n) \in \ell_\infty$ olacak şekilde bir dizi elde edilirse $B(0,s)^*$ örten olur. O halde $B(0,s)^* x = y$ denkleminden

$$x_n = \frac{1}{s} y_{n-1}$$

ifadesi elde edilir ki bu da $B(0,s)^*$ dönüşümünün örten olduğunu gösterir.

Teorem 4.2.2. $|\alpha - r| < |s|$ eşitsizliğinde eğer $\alpha \neq r$ ve $\alpha \in \sigma_r(B(r,s), \ell_1)$ alınırsa $(B(r,s) - \alpha I) \in$ $\mathrm{III}_2 \sigma(B(r,s), \ell_1)$ olur [16].

İspat: $\alpha \neq r$ olduğundan $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümü üçgensel olup bir terse sahiptir. (4. 1) den $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümünün tersi süreksiz olduğundan $\left(B(r,s)-\alpha I\right)$ dönüşümü fine spektrumun 2 şartını sağlar. Teorem 4.1.5 ten $B(r,s)^{*}-\alpha I$ dönüşümü bire-bir değildir. Böylece Teorem 2.2.6 dan $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümü yoğun bir değer kümesine sahip olmadığından $\left(B(r,s)-\alpha I\right) \in \mathrm{III}$ olur.

Teorem 4.2.3. $|\alpha - r| > |s|$ eşitsizliğini sağlayan α lar için $\left(B(r,s)-\alpha I\right) \in \mathrm{I}_1$ olur [16].

İspat: $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümünün bire-bir örten olduğu ve bu dönüşümün $|\alpha - r| > |s|$ eşitsizliğini sağlayan α lar için tersinin sürekli olduğu gösterilecektir. $s \neq 0$ için $\alpha \neq r$ elde edilir ve $B(r,s)-\alpha I$ üçgensel olur. Bu durumda $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümünün bir tersinin mevcut olduğu görülür. (4.1) den $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümünün tersi mevcut ve süreklidir. $y \in \ell_1$ ve $x = (x_n)$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = \frac{1}{r-\alpha}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-s}{r-\alpha}\right)^{n-k} y_k = \left(\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1} y\right)_n$$

şeklinde tanımlansın. $\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}$ dönüşümü (ℓ_1, ℓ_1) de olduğundan (4.1) ile $x \in \ell_1$ sonucuna ulaşılır. Böylece $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümünün örten olduğu bulunur.

Teorem 4.2.4. $|\alpha - r| < |s|$ eşitsizliğinde eğer $\alpha = r$ ise $\left(B(r,s)-\alpha I\right) \in \mathrm{III}_1 \sigma\left(B(r,s), bv\right)$ olur [16].

İspat: Teorem 4.1.10 ve Teorem 2.2.6 dikkate alındığında $\alpha = r$ için $\left(B(r,s)-\alpha I\right) \in \mathrm{III}$ olur. Ayrıca Teorem 4.1.9 yardımıyla $\alpha = r$ için $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümü $\sigma_p\left(B(r,s), bv\right)$ kümesinde değildir. Böylece $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümü bir terse sahip ve $\left(B(r,s)-rI\right) \in \mathrm{III}_{1\cup 2}$ olur.

$\left(B(r,s)-rI\right)$ dönüşümünün fine spektruma ait 1 şartını sağladığını göstermek için Teorem 2.2.5 ten $B(r,s)^{*}-rI \;=B(0,s)^{*}$ dönüşümünün örten olduğunu göstermek yeterlidir. $y=(y_n)\in\mathbb{C}\oplus bs$ için $B(0,s)^{*}x=y$ denkleminde $x=(x_n)\in\mathbb{C}\oplus bs$ elde edildiği takdirde $B(0,s)^{*}$ örten olduğu gösterilmiş olur. Bunun için $B(0,s)^{*}x=y$ denkleminin çözümünden $x_0=\frac{1}{s}y_0$ ve

$$x_n=\frac{1}{s}y_{n-1} \qquad (n\geq 2)$$

olur. Buradan da $x_1=0$ olacağından $B(0,s)^{*}$ dönüşümü örten olur.

Teorem 4.2.5. $|\alpha-r|<|s|$ eşitsizliğinde $\alpha\neq r$ ve $\alpha\in\sigma_r\left(B(r,s),bv\right)$ alınırsa $\left(B(r,s)-\alpha I\right)\in \mathrm{III}_2\sigma\left(B(r,s),bv\right)$ olur [16].

İspat: $\alpha\neq r$ olduğundan $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümü üçgensel ve bir terse sahip olur. (4.3) ten $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümünün tersi süreksiz ve $\left(B(r,s)-\alpha I\right)$ dönüşümü fine spektrumun 2 şartını sağlayan bir dönüşüm olur. Teorem 4.1.10 dan $B(r,s)^{*}-\alpha I$ dönüşümü bire-bir değil ve Teorem 2.2.6 dan $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümü yoğun bir değer kümesine sahip olmaz. Böylece $B(r,s)-\alpha I\in \mathrm{III}$ elde edilir.

BÖLÜM 5

$B(r,s)$ DÖNÜŞÜMÜNÜN ℓ_p VE bv_p DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDEKİ SPEKTRUMU

Bu bölüm Bilgiç ve Furkan [17] çalışmaları olan $B(r,s)$ dönüşümünün spektrumu, fine spektrumu, nokta spektrumu, süreklilik spektrumu ve rezidü spektrumu kavramlarının

$$\ell_p = \left\{ x = (x_k) \in s : \sum_k |x_k|^p < \infty \right\}, \qquad (1 < p < \infty)$$

ve

$$bv_p = \left\{ x = (x_k) \in s : \sum_k |x_k - x_{k-1}|^p < \infty \right\}, \qquad (1 < p < \infty)$$

uzayları üzerinde incelenmesi ile ilgilidir.

5.1. ℓ_p ve bv_p Dizi Uzaylarında Spektrum

Aşağıdaki lemmalar spektrum kavramını anlamada ve incelemede kolaylık sağladığı için ispatsız olarak verildi.

Lemma 5.1.1. $a = (a_k)$ dizilerini içeren d_1 ve d_q uzaylarının normu

$$\|a\|_{d_1} = \sup_{n,k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=k}^{n} a_j \right| < \infty$$

ve

$$\|a\|_{d_q} = \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k \left| \sum_{j=k}^{n} a_j \right|^q \right)^{1/q} < \infty \qquad (1 < q < \infty)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{bv_1\}^*$ ve $\{bv_q\}^*$ dual uzayları sırasıyla d_1 ve d_q uzaylarına izometrik olarak izomorftur [13].

Lemma 5.1.2. $\{bv_p\}$ uzayında her $k \in \mathbb{N}$ için

$$b_n^{(k)} = \begin{cases} 0, & n < k \\ 1, & n \geq k \end{cases}; \quad k, n \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanan $b^{(k)} = \left\{b_n^{(k)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ şeklindeki dizisi bv_p uzayının bir tabanıdır. Ayrıca $x \in bv_p$ dizisi her $k \in \mathbb{N}$ için

$$x = \sum_k \lambda_k b^{(k)}, \qquad \lambda_k = x_k - x_{k-1}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [14].

Teorem 5.1.3. $B(r,s): \ell_p \to \ell_p$ sınırlı lineer dönüşümü

$$\left(|r|^p + |s|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\|B(r,s)\right\|_{\ell_p} \leq |r| + |s|$$

eşitsizliğini sağlar [17].

İspat: $B(r,s)$ dönüşümünün lineerliği açıktır. ℓ_p uzayında $e^{(0)} = (1,0,0,...)$ dizisini alınırsa

$$B(r,s)e^{(0)} = (r,s,0,0,...)$$

olur. ℓ_p uzayında bu dönüşümün normu göz önüne alındığında

$$\frac{\left\|B(r,s)e^{(0)}\right\|_{\ell_p}}{\left\|e^{(0)}\right\|_{\ell_p}} = \left(|r|^p + |s|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitliği elde edilir ki her *p>1* için

$$\left(|r|^p + |s|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\|B(r,s)\right\| \tag{5.1}$$

eşitsizliği bulunur. Şimdi $x=(x_k)\in \ell_p$ olsun. Minkowski's eşitsizliği ve $x_{-1}=0$ ifadeleri dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
\left\|B(r,s)x\right\|_{\ell_p} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|sx_{k-1}+rx_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|sx_{k-1}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|rx_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\left|s\right|^p\sum_{k=0}^{\infty}\left|x_{k-1}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\left|r\right|^p\sum_{k=0}^{\infty}\left|x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\left|s\right|+\left|r\right|\right)\left\|x\right\|_{\ell_p}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buadan da

$$\left\|B(r,s)\right\|_{\ell_p} \le \left|r\right|+\left|s\right| \tag{5.2}$$

eşitsizliğine ulaşılır. (5.1) ve (5.2) eşitsizlikleri birleştirilirse istenilen sonuç elde edilir ve ispat biter.

Lemma 5.1.4. $1<p<\infty$ ve $A\in(\ell_\infty,\ell_\infty)\cap(\ell_1,\ell_1)$ olsun. O halde $A\in(\ell_p,\ell_p)$ olur [26].

İspat: Hölder eşitsizliği ile

$$\begin{aligned}
\left|\sum a_{nk}x_k\right| &\le \sum_k \left|a_{nk}\right|^{1/p}\left|a_{nk}\right|^{1/q}\left|x_k\right| \\
&\le \left(\sum_k \left|a_{nk}\right|\left|x_k\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_k \left|a_{nk}\right|^{1/q}\right)
\end{aligned}$$

olur. Burada $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ dir. Ayrıca

$$\left|\sum_k a_{nk}x_k\right|^p \le \left(\sum_k \left|a_{nk}\right|\left|x_k\right|^p\right)\left(\sum_k \left|a_{nk}\right|\right)^{p/q}$$

dir. O halde

$$\|Ax\|^p = \sum_n \left|\sum_k a_{nk} x_k\right|^p \leq \sum_n \sum_k |a_{nk}| |x_k|^p \|A\|_\infty^{p/q}$$

$$\leq \|A\|_\infty^{p/q} \sum_k |x_k|^p \sum_n |a_{nk}|$$

$$\leq \|A\|_\infty^{p/q} \|x\|^p \|A\|_1$$

olur ki bu durumda $A \in (\ell_\infty, \ell_\infty) \cap (\ell_1, \ell_1)$ dir. Buradan da $A \in (\ell_p, \ell_p)$ olur.

Teorem 5.1.5. $\sigma(B(r,s), \ell_p) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \leq |s|\}$ [17].

İspat: Bu teoremin ispatında resolvent kümesi ve bu kümeye ait özellikler ile spektrum kümesi gösterildiği takdirde istenilenler elde edilir.

Şimdi $\alpha \notin \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \leq |s|\}$ olsun. $s \neq 0$ olduğundan $\alpha \neq r$ ve $B(r,s) - \alpha I$ dönüşümü üçgensel olur. Dolayısıyla $(B(r,s) - \alpha I)^{-1}$ dönüşümü de mevcut olur. $y = (y_k) \in \ell_p$ için $(B(r,s) - \alpha I)x = y$ denkleminin çözümünden $(B(r,s) - \alpha I)^{-1}$ dönüşümünün $k \leq n$ için *n*. satır *k*. sütundaki genel terimi

$$\frac{(-s)^{n-k}}{(r-\alpha)^{n-k+1}}$$

bulunur. Ayrıca burada *k>n* için üst üçgensel matris olacağından dönüşümün genel terimi sıfır olur. O halde $(B(r,s) - \alpha I)^{-1}$ ters dönüşümü

$$(B(r,s) - \alpha I)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(r-\alpha)} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{-s}{(r-\alpha)^2} & \frac{1}{(r-\alpha)} & 0 & \cdots \\ \frac{s^2}{(r-\alpha)^3} & \frac{-s}{(r-\alpha)^2} & \frac{1}{(r-\alpha)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Böylece

$$\left\|\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}\right\|_{(\ell_1,\ell_1)} = \sup_k \sum_{n=k}^{\infty}\left|\frac{s}{r-\alpha}\right|^{n-k}\left|\frac{1}{r-\alpha}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{r-\alpha}\right|\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{s}{r-\alpha}\right|^{n}<\infty \tag{5.3}$$

olur. Buradan da $\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}\in(\ell_1,\ell_1)$ ifadesi elde edilir ki buradan da

$$\left\|\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}\right\|_{(\ell_\infty,\ell_\infty)}<\infty$$

olur. Buradan da $\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}\in(\ell_\infty,\ell_\infty)\cap(\ell_1,\ell_1)$ olduğu görülür. Lemma 5.1.4 ten $\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}\in(\ell_p,\ell_p)$ olur. Bu da $\sigma\left(B(r,s),\ell_p\right)\subseteq\{\alpha\in\mathbb{C}:|\alpha-r|\le|s|\}$ olması demektir.

Şimdi de $\alpha\in\{\alpha\in\mathbb{C}:|\alpha-r|\le|s|\}$ ile $\alpha\ne r$ ve $\alpha=r$ durumları ele alınırsa iki durum çıkar.

1) $\alpha\in\{\alpha\in\mathbb{C}:|\alpha-r|\le|s|\}$ ve $\alpha\ne r$ olsun. Bu durumda $B(r,s)-\alpha I$ üçgensel olduğundan $\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}$ mevcut olur. $y=(1,0,0,...)\in\ell_p$ dizisi için $\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}$ ters dönüşümünün genel terimi olan $x_k=\dfrac{(-s)^k}{(r-\alpha)^{k+1}}$ dizisi $|s|\ge|\alpha-r|$ için ℓ_p de olmadığından $\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}$ dönüşümü de ℓ_p de değildir.

2) $\alpha\in\{\alpha\in\mathbb{C}:|\alpha-r|\le|s|\}$ ve $\alpha=r$ olsun. Bu durumda $\left(B(r,s)-\alpha I\right)=B(0,s)$ dönüşümü

$$B(0,s)=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots\\ s&0&0&\cdots\\ 0&s&0&\cdots\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{bmatrix}$$

şeklinde olur. $B(0,s)x=\theta$ denkleminden $x=\theta$ olduğundan $B(0,s):\ell_p \to \ell_p$ dönüşümü bire-birdir fakat örten değildir. Böylece tersinin olması da mümkün değildir. O halde $\{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \le |s|\} \subseteq \sigma(B(r,s),\ell_p)$ olur.

ℓ_p, ℓ_p^* uzaylarında $\sigma_p(B(r,s),\ell_p)$ ve $\sigma_p(B(r,s)^*,\ell_p^*)$ nokta spektrumlarının farklı anlamlara geldiği aşağıdaki iki teoremde gösterildi.

Teorem 5.1.6. $\sigma_p(B(r,s),\ell_p)=\phi$ [17].

İspat: ℓ_p uzayında $x \ne \theta = (0,0,0,...)$ için $B(r,s)x=\alpha x$ denklemini göz önüne alalım. Bu denklemden

$$\left.\begin{aligned} rx_0 &= \alpha x_0 \\ sx_0 + rx_1 &= \alpha x_1 \\ sx_1 + rx_2 &= \alpha x_2 \\ &\vdots \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Lineer denklem sisteminin çözümünden $x=(x_k)$ dizisinin x_t ilk terimi sıfırdan farklı alınırsa $\alpha = r$ ve denklem sisteminden

$$sx_t + rx_{t+1} = \alpha x_{t+1}$$

ve $sx_t = 0$ olur. $B(r,s)$ dönüşümünün tanımından $s \ne 0$ olduğundan $x_t = 0$ dır. Bu da $x_t \ne 0$ oluşuyla çeliştiğinden $\sigma_p(B(r,s),\ell_p)=\phi$ olur.

Teorem 5.1.7. $\sigma_p(B(r,s)^*,\ell_p^*)=\{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| < |s|\}$ [17].

İspat: $p^{-1}+q^{-1}=1$ olmak üzere $x \ne \theta \in \ell_p^* \cong \ell_q$ için $B(r,s)^* x = \alpha x$ olsun. O halde $B(r,s)^* x = \alpha x$ lineer denkleminden

$$\left.\begin{aligned} rx_0 + sx_1 &= \alpha x_0 \\ rx_1 + sx_2 &= \alpha x_1 \\ rx_2 + sx_3 &= \alpha x_2 \\ &\vdots \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan da x dizisinin genel terimi

$$x_n = \left(\frac{\alpha - r}{s}\right)^n x_0$$

dir.

$x = (x_k) \in \ell_p^{\,*}$ olması için gerek ve yeter şart $|\alpha - r| < |s|$ olmasıdır. Buradan da $\sigma_p\left(B(r,s)^*, \ell_p^{\,*}\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| < |s|\}$ olur.

Teorem 5.1.8. $\sigma_r\left(B(r,s), \ell_p\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| < |s|\}$ [17].

İspat: Bu teoremin ispatı için $B(r,s) - \alpha I$ dönüşümünün bir terse sahip olduğu gösterildikten sonra $|\alpha - r| < |s|$ eşitsizliğindeki α için $\overline{R\left(B(r,s) - \alpha I\right)} \neq \ell_p$ olduğu gösterilecektir. $\alpha \neq r$ için $B(r,s) - \alpha I$ dönüşümü üçgensel olup bir terse sahiptir. $\alpha = r$ için $B(r,s) - \alpha I$ dönüşümü bire-bir olduğundan tersi mevcuttur. Fakat $B(r,s)^* - \alpha I$ dönüşümü Teorem 5.1.7 den dolayı bire-bir değildir. Ayrıca Teorem 2.2.6 dan $B(r,s) - \alpha I$ dönüşümünün değer kümesi ℓ_p de yoğun olmadığından ispat tamamlanır.

Teorem 5.1.9. $\sigma_c\left(B(r,s), \ell_p\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| = |s|\}$ [17].

İspat: $\sigma_p\left(B(r,s), \ell_p\right) = \phi$ olduğundan ve $\sigma\left(B(r,s), \ell_p\right)$ kümesi de $\sigma_p\left(B(r,s), \ell_p\right)$, $\sigma_r\left(B(r,s), \ell_p\right)$ ve $\sigma_c\left(B(r,s), \ell_p\right)$ kümelerinin ayrık birleşimi ile elde edildiğinden $\sigma_c\left(B(r,s), \ell_p\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| = |s|\}$ olur.

Teorem 5.1.10. $B(r,s) \in B(bv_p)$ [17].

İspat: $B(r,s)$ dönüşümünün lineerliği açıktır. Şimdi her $x = (x_k) \in bv_p$ olsun. Minkowski's eşitsizliği ve negatif indisli dizi teriminin $x_{-k} = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\left\|B(r,s)x\right\|_{bv_p}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|rx_k-sx_{k-1}-(rx_{k-1}-sx_{k-2})\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|r(x_k-x_{k-1})-s(x_{k-1}-x_{k-2})\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left(|r|^p\sum_{k=0}^{\infty}\left|(x_k-x_{k-1})\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(|s|^p\sum_{k=0}^{\infty}\left|(x_{k-1}-x_{k-2})\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=(|s|+|r|)\left\|x\right\|_{bv_p}$$

bulunur. Buradan da

$$\left\|B(r,s)\right\|_{(bv_p,bv_p)}\leq|s|+|r| \tag{5.4}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece $B(r,s)\in B(bv_p)$ olur.

Teorem 5.1.11. $\sigma(B(r,s),bv_p)=\{\alpha\in\mathbb{C}:|\alpha-r|\leq|s|\}$ [17].

İspat: Teorem 5.1.5 teki benzer düşünceyle $\alpha\notin\{\alpha\in\mathbb{C}:|\alpha-r|\leq|s|\}$ olsun. $s\neq0$ olduğundan $r\neq0$ ve $(B(r,s)-\alpha I)$ üçgensel olup $(B(r,s)-\alpha I)^{-1}$ şeklinde bir tersi vardır. $y=(y_k)\in bv_p$ olduğundan $(y_k-y_{k-1})\in bv_p$ olur. $(B(r,s)-\alpha I)x=y$ lineer denkleminin çözümünden

$$(B(r,s)-\alpha I)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{(r-\alpha)} & 0 & 0 & \cdots\\ \frac{-s}{(r-\alpha)^2} & \frac{1}{(r-\alpha)} & 0 & \cdots\\ \frac{s^2}{(r-\alpha)^3} & \frac{-s}{(r-\alpha)^2} & \frac{1}{(r-\alpha)} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}$$

ters dönüşümü elde edilir. Buradan da

$$x_k-x_{k-1}=\sum_{j=0}^{k}\frac{(-s)^{k-j}}{(r-\alpha)^{k-j+1}}(y_j-y_{j-1});\qquad (\mathrm{k}\in\mathbb{N}) \tag{5.5}$$

ve

$$x_k - x_{k-1} = \left(B(r,s) - \alpha I\right)\left(y_j - y_{j-1}\right)$$

elde edilir. Teorem 5.1.5 ten $\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1} \in \left(\ell_p, \ell_p\right)$ ve $\left(x_k - x_{k-1}\right) \in \ell_p$ olur. Böylece $x_k \in bv_p$ ve $\sigma\left(B(r,s), bv_p\right) \subseteq \left\{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \le |s|\right\}$ dir.

Şimdi de $\alpha \in \left\{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \le |s|\right\}$ için $\alpha \ne r$ ve $\alpha = r$ durumları ele alınsın.

$\alpha \in \left\{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \le |s|\right\}$ ve $\alpha \ne r$ olsun. Bu durumda $B(r,s) - \alpha I$ üçgensel olduğundan $\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}$ dönüşümü mevcut olur. Ancak $y = (1,0,0,...) \in bv_p$ dizisi için $\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}$ ters dönüşümünün genel terimi $x_k = \dfrac{(-s)^k}{(r-\alpha)^{k+1}}$ olan dizi $|s| \ge |\alpha - r|$ için bv_p de olmadığından $\left(B(r,s)-\alpha I\right)^{-1}$ dönüşümü de $B\left(bv_p\right)$ bir dönüşüm olamaz.

$\alpha \in \left\{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \le |s|\right\}$ ve $\alpha = r$ olsun. Teorem 5.1.5 in ispatındaki benzer düşünceyle $\left(B(r,s)-\alpha I\right) = B(0,s)$ dönüşümünün bir terse sahip olmayacağı görülür. Buradan $\left\{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \le |s|\right\} \subseteq \sigma\left(B(r,s), bv_p\right)$ olur ki bu da istenendir.

Teorem 5.1.12. $\left\|B(r,s)\right\|_{\left(bv_p, bv_p\right)} = |r| + |s|$ [17].

İspat: $r_\sigma\left(B(r,s)\right) = |r| + |s|$ olduğundan ve Teorem 5.1.11 den

$$|s| + |r| \le \left\|B(r,s)\right\|_{\left(bv_p, bv_p\right)}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ifade (5.4) ile birleştirilirse

$$\|B(r,s)\|_{(bv_p,bv_p)} = |r| + |s|$$

eşitliği elde edilir.

$B(r,s)$ matris dönüşümünün bv_p dizi uzayındaki spektrumu ℓ_p dizi uzayındaki spektruma benzer olarak yapılabileceğinden aşağıdaki teoremler ispatsız olarak verildi.

Teorem 5.1.13. [17]

i) $\sigma_p\left(B(r,s), bv_p\right) = \phi$.

ii) $\sigma_p\left(B(r,s)^*, bv_p^{\ *}\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| < |s|\}$.

iii) $\sigma_r\left(B(r,s), bv_p\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| < |s|\}$.

iv) $\sigma_c\left(B(r,s), bv_p\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| = |s|\}$.

5.2. ℓ_p ve bv_p Uzaylarının Fine Spektrumu

Bu kısımda $B(r,s)$ dönşümünün ℓ_p ve bv_p dizi uzayları üzerindeki fine spektrum kavramları incelendi.

Teorem 5.2.1. Eğer $\alpha = r$ ise $\left(B(r,s) - \alpha I\right) \in \mathrm{III}_1\sigma\left(B(r,s), \ell_p\right)$ olur [17].

İspat: Teorem 5.1.7 ve Teorem 2.2.6 dan $\left(B(r,s) - rI\right) \in \mathrm{III}$ olduğunda $\alpha = r$ olur. Diğer taraftan Teorem 5.1.6 dan $\alpha = r$ ifadesi $\sigma_p\left(B(r,s), \ell_p\right)$ de değildir. Böylece $B(r,s) - \alpha I$ dönüşümü bir terse sahip ve $\left(B(r,s) - rI\right)$ dönüşümü fine spektrumun 1 veya 2 şartını sağladığı kolayca görülür.
$\left(B(r,s) - rI\right)$ dönüşümünün 1 şartını sağladığını göstermek için Teorem 2.2.5 ten $B(r,s)^* - rI \ = B(0,s)^*$ ifadesinin örten olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$y=(y_n)\in \ell_q$ için $B(0,s)^* x=y$ denkleminde $x=(x_n)\in \ell_q$ olacak şekilde bir x dizisi mevcut ise $B(0,s)^*$ örten olur. $B(0,s)^* x=y$ lineer denkleminden x dizisinin genel terimi

$$x_n=\frac{1}{s}y_{n-1}$$

olur. Böylece $B(0,s)^*$ dönüşümünün örten olduğunu gösterir ve ispat biter.

Teorem 5.2.2. Eğer $\alpha\neq r$ ve $\alpha\in\sigma_r\left(B(r,s),\ell_p\right)$ ise $\left(B(r,s)-\alpha I\right)\in \mathrm{III}_2$ $\sigma\left(B(r,s),\ell_p\right)$ olur [17].

İspat: $\alpha\neq r$ olduğundan $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümü üçgensel olup bir tersi vardır. (5.3) ten $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümünün tersi süreksiz olduğundan $\left(B(r,s)-\alpha I\right)$ fine spektruma ait 2 şartını sağlayan bir dönüşüm olur.

Teorem 5.1.7 den $B(r,s)^*-\alpha I$ bire-bir değildir. Teorem 2.2.6 dan $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümü yoğun bir değer kümesine sahip değildir. Dolayısıyla da $\left(B(r,s)-\alpha I\right)\in \mathrm{III}$ olur.

Teorem 5.2.3 Eğer $\alpha\in\sigma_c\left(B(r,s),\ell_p\right)$ ise $\alpha\in \mathrm{II}_2$ olur [17].

İspat: $\alpha\in\sigma_c\left(B(r,s),\ell_p\right)$ olsun. $s\neq 0$ olduğundan $r\neq\alpha$ olur. $\alpha\in \mathrm{II}_2$ olduğunu göstermek için $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümünün örten olmadığını göstermek yeterlidir. $y=(1,0,0,0...)$ için $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümü altında elde edilen ters dönüşümün genel terimi $x_k=\frac{(-s)^k}{(r-\alpha)^{k+1}}$ olur. Burada $|s|=|\alpha-r|$ olduğunda $x_k=\frac{(-s)^k}{(r-\alpha)^{k+1}}$ dizisi ℓ_p de olmaz. Böylece $B(r,s)-\alpha I$ dönüşümünün örten olmadığı görülür.

Aşağıda verilen ince spektrum kavramları ℓ_p uzayındakine benzer olarak elde edilebileceği için ispatsız olarak verildi.

Teorem 5.2.4. [17]

i) Eğer $\alpha = r$ ise $\left(B(r,s)-\alpha I\right) \in \mathrm{III}_1\sigma\left(B(r,s),bv_p\right)$ olur.

ii) Eğer $\alpha \neq r$ ve $\alpha \in \sigma_r\left(B(r,s),bv_p\right)$ ise $\left(B(r,s)-\alpha I\right) \in \mathrm{III}_2\sigma\left(B(r,s),bv_p\right)$ olur.

iii) Eğer $\alpha \in \sigma_c\left(B(r,s),bv_p\right)$ ise $\alpha \in \mathrm{II}_2$ olur.

BÖLÜM 6

$B(r,s)^{+}$ DÖNÜŞÜMÜNÜN c_0 DİZİ UZAYI ÜZERİNDEKİ SPEKTRUMU

Bu bölümde $B(r,s)^{+}$ matrisi yardımıyla c_0 dizi uzayı üzerinde spektrum, nokta spektrumu, süreklilik spektrumu, rezidü spektrumu ve fine spektrumu kavramları incelendi.

6.1. c_0 Dizi Uzayında Spektrum

Teorem 6.1.1. $\sigma\left(B(r,s)^{+},c_0\right)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:\ |\alpha-r|\le|s|\right\}$.

İspat: Bu teoremin ispatında ilk önce $\alpha\notin\sigma\left(B(r,s)^{+},c_0\right)$ için $\left(B(r,s)^{+}-\alpha I\right)^{-1}$ dönüşümünün mevcut ve $(c_0:c_0)$ sınıfına ait olduğunu gösterdikten sonrada $B(r,s)^{+}$ dönüşümünün $\alpha\in\sigma\left(B(r,s),c_0\right)$ için $(c_0:c_0)$ sınıfına ait olmadığı yani spektrum kümesi gösterilecektir.

O halde $\alpha\notin\sigma\left(B(r,s)^{+},c_0\right)$ olsun. $\left(B(r,s)^{+}-\alpha I\right)$ üst üçgensel matris olduğundan $\left(B(r,s)^{+}-\alpha I\right)^{-1}$ mevcuttur ve bu ters dönüşüm $\left(B(r,s)^{+}-\alpha I\right)x=y$ denkleminin çözümünden elde edilir. Bu durumda

$$\left(B(r,s)^{+}-\alpha I\right)x=\begin{bmatrix} r-\alpha & s & 0 & \cdots \\ 0 & r-\alpha & s & \cdots \\ 0 & 0 & r-\alpha & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

denklem sisteminden

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-s)^{n-k}}{(r-\alpha)^{n-k+1}} y_k$$

dizisi bulunur. O halde buradan

$$\left(B(r,s)^+ - \alpha I\right)^{-1} = \begin{cases} \dfrac{(-s)^{n-k}}{(r-\alpha)^{n-k+1}} & k \geq n \\ 0 & k < n \end{cases}$$

elde edilir. Buradan da

$$\left\| \left(B(r,s)^+ - \alpha I\right)^{-1} \right\|_{(c_0:c_0)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{(-s)^{k-n}}{(r-\alpha)^{k-n+1}} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{r-\alpha} \right| \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{s}{r-\alpha} \right|^k < \infty \qquad (6.1)$$

olur. Bu ise $\left(B(r,s)^+ - \alpha I\right)^{-1} \in (c_0 : c_0)$ dir.

Şimdi de $\alpha \in \sigma\left(B(r,s)^+, c_0\right)$ olsun. Bu durumda karşımıza spektrum kümesine ait iki tane durum çıkacaktır.

1. Durum: $\alpha \in \sigma\left(B(r,s)^+, c_0\right)$ ve $\alpha \neq r$ olsun. Bu durumda $B(r,s)^+ - \alpha I$ üçgensel matris olduğu için $\left(B(r,s)^+ - \alpha I\right)^{-1}$ mevcuttur. (6.1) den

$$\left\| \left(B(r,s)^+ - \alpha I\right)^{-1} \right\|_{(c_0:c_0)} = \infty$$

olduğu görülür. O halde $\alpha \in \sigma\left(B(r,s)^+, c_0\right)$ olduğu zaman, $\left(B(r,s)^+ - \alpha I\right)^{-1}$ dönüşümü $B(c_0)$ da olmadığı görülür.

2. Durum: $\alpha \in \sigma\left(B(r,s)^+, c_0\right)$ ve $\alpha = r$ olsun. Bu durumda

$\left(B(r,s)^{+}-\alpha I\right)=B(0,s)^{+}$ matrisi

$$B(0,s)^{+}=\begin{bmatrix}0 & s & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & s & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}$$

şekildeki gibi bir gösterime sahip olur. $\overline{R\left(B(0,s)^{+}\right)}\neq c_0$ olduğundan $B(0,s)^{+}$ ifadesinin tersi mevcut değildir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 6.1.2. $\sigma_p\left(B(r,s)^{+},c_0\right)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:|\alpha-r|<|s|\right\}$.

İspat: c_0 uzayında $x\neq\theta$ için $B(r,s)^{+}x=\alpha x$ denklemini göz önüne alalım. Bu denklemden

$$\begin{aligned} rx_0+sx_1&=\alpha x_0,\\ rx_1+sx_2&=\alpha x_1,\\ rx_2+sx_3&=\alpha x_2,\\ &\vdots\\ rx_k+sx_{k+1}&=\alpha x_k,\\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan x dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi x_0 için

$$x_n=\left(\frac{\alpha-r}{s}\right)^{n}x_0$$

genel terimi elde edilir. O halde $x\in c_0$ olması için gerek ve yeter şart $|\alpha-r|<|s|$ olmasıdır.

c_0 uzayı üzerindeki matris dönüşümünün, adjoint dönüşümü matrisin tranpozu olduğundan aşağıdaki teoremin ispatı kolayca görülür.

Teorem 6.1.3. $\sigma_p\left(B(r,s)^{+*},c_0\right)=\phi$.

Teorem 6.1.4. $\sigma_c\left(B(r,s)^+, c_0\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| = |s|\}$.

İspat: İspat için $B(r,s)^+ - \alpha I$ dönüşümünün tersinin mevcut ve

$$\overline{R\left(B(r,s)^+ - \alpha I\right)} = c_0,$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

O halde $\alpha \in \sigma_c\left(B(r,s)^+, c_0\right)$ olduğunda $\alpha \neq r$ olacağından $B(r,s)^+ - \alpha I$ üçgensel ve dolayısıyla da bu dönüşüm bir terse sahiptir. Teorem 6.1.3 gereğince $B(r,s)^+ - \alpha I$ dönüşümü bire-bir ve Teorem 2.2.6 dan da $\overline{R\left(B(r,s)^+ - \alpha I\right)} = c_0$ olur. Bu durumlar birleştirilirse teorem ispatlanmış olur.

Teorem 6.1.5. $\sigma_r\left(B(r,s)^+, c_0\right) = \phi$.

İspat: Spektrum kümesi, ayrık nokta spektrumu, sürelilik spektrumu ve rezidü spektrumu kümlerinin birleşimi olduğundan $\sigma_r\left(B(r,s)^+, c_0\right) = \phi$ olur.

6.2. c_0 Dizi Uzayının Fine Spektrumu

Bu kısımda da c_0 dizi uzayı üzerinde $B(r,s)^+$ dönüşümü yardımıyla fine spektrum kavramlarını inceledik.

Teorem 6.2.1. $|\alpha - r| = |s|$ eşitsizliğini sağlayan $\alpha \neq r$ skaleri için $\left(B(r,s)^+ - \alpha I\right)$ $\in \mathrm{II}_2\sigma\left(B(r,s)^+, c_0\right)$ olur.

İspat: Teorem 6.1.4 ten $\left(B(r,s)^+ - \alpha I\right) \in \mathrm{II}_1$ ya da II_2 olduğu açıktır. Şimdi bizden istenen bir diğer ifadeyi yani $\left(B(r,s)^+ - \alpha I\right) \in 2$ olduğunu gösterelim.

Teorem 6.1.1 den $\alpha \in \sigma\left(B(r,s)^{+}, c_0\right)$ ve $\alpha \neq r$ olması durumunda $B(r,s)^{+} - \alpha I$ dönüşümü bire-bir fakat

$$\left\|\left(B(r,s)^{+} - \alpha I\right)^{-1}\right\|_{(c_0:c_0)} = \infty$$

olduğundan $\left(B(r,s)^{+} - \alpha I\right) \in 2$ elde edilir.

Teorem 6.2.2. $|\alpha - r| < |s|$ eşitsizliğini sağlayan $\alpha = r$ skaleri için $\left(B(r,s)^{+} - \alpha I\right) \in \mathrm{III}_1 \sigma\left(B(r,s)^{+}, c_0\right)$ olur.

İspat: Teorem 6.1.1 den dolayı $\left(B(r,s)^{+} - \alpha I\right) \in \mathrm{III}_1$ ya da III_2 olduğu açıktır. Şimdi $\alpha = r$ için $\left(B(r,s)^{+} - \alpha I\right) = B(0,s)^{+}$ olur. Buradan bu dönüşümün normu göz önüne alınırsa

$$\left\|B(0,s)^{+}\right\| \geq \frac{\|s\|}{2}\|x\|$$

olur. Dolayısıyla da $\left(B(r,s)^{+} - \alpha I\right) \in \mathrm{III}_1$ olur.

KAYNAKLAR

[1] Reed, M. and Simon, B. (1980). *Methods of modern mathematical physics*. Volume I Functional Analysis. Revised and Enlarged Edition, Acedemic Pres, Inc., Boston-San Diego-New York-London-Sydney-Tokyo-Toronto.

[2] Brown, A., Halmos, P. R. and Shields, A. L. (1965). Cesãro operators. *Acta Scientiarumi Mathematicarum (Szeged)*, **26**, 125- 137.

[3] Wenger, R. B. (1975). The fine spectra of Hölder summability operators. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics,* **6**, 695- 712.

[4] Rhoades, B. E. (1983). The fine spectra for weighted mean operators. *Pacific Journal of Mathematics*, **104**, 219- 230.

[5] Reade, J. B. (1985). On the spectrum of the Cesãro operators. *Bulletin London Mathematical Society*, **17**, 263- 267.

[6] Gonzãlez, M. (1985). The fine spectrum of Cesãro operator in ℓ_p $\left(1<p<\infty\right)$. *Archiv der Mathematik*, **44**, 355- 358.

[7] Akhmedov, A. M. and Başar, F. (2004). On the fine spectrum of the Cesãro operator in c_0. *Mathematical Journal of Ibaraki University*, **36**, 25- 32.

[8] Sharma, N. K. (1972). Spectra of conservative matrices. *Proceeding American Mathematical Society*, **35**, 515- 518.

[9] Sharma, N. K. (1975). Isolated points of the spectra of conservative matrices. *Proceeding American Mathematical Society*, **51**, 74- 78.

[10] De Malafosse, B. (2002). Properties of some sets of sequences and application to the spaces of bounded difference sequence of order μ. *Hokkaido Mathematical Journal*, **31**, 283- 299.

[11] Altay, B. and Başar, F. (2004). On the fine spectrum of the difference operator Δ on c_0 and c. *Information Sciences*, **168**, 217- 224.

[12] Akhmedov, A. M. and Başar, F. (2006). The fine spectra of the difference operator Δ over the sequence space ℓ_p, $\left(1\leq p<\infty\right)$. *Demonstratio Mathematica*, **39**, 585- 595.

[13] Akhmedov, A. M. and Başar, F. (2007). The fine spectra of the difference operator Δ over the sequence space bv_p, $(1 \leq p < \infty)$. *Acta Mathematica Sinica England Series, vol*: 23 No: **10,** 1757- 1768.

[14] Başar, F. and Altay, B. (2003). On the space of sequence of p-bounded variation and sequence of related matrix mappings. *Ukrainian Mathematical Journal*, **55**, 136-147.

[15] Altay, B. and Başar, F. (2005). On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r,s)$ over the sequence spaces c_0 and c. *International Journal of Mathematicals and Mathematics Sciences,* **18**, 3005- 3013.

[16] Furkan, H., Bilgiç, H. and Kayaduman, K. (2006). On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r,s)$ over the sequence spaces ℓ_1 and bv. *Hokkaido Mathematical Journal Vol*., **35**, 893-904.

[17] Bilgiç, H. and Furkan, H. (2008). *On* the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r,s)$ over the sequence spaces ℓ_p and $bv_p, (1<p<\infty)$. *Nonlinear Analysis*, **68**, 499- 506.

[18] Maddox, I. J. (1970). *Elements of functional analysis*. Cambridge Uni. Press, Cambridge.

[19] Kreyszing, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley and Sons, New York.

[20] Wilansky, A. (1984). *Summability through functional analysis*. Nort- Holland Mathematics Studies, **85**, Amsterdam.

[21] Borwein, D. and Jakimowski, A. (1979). Matrix operators on ℓ_p. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **9**, 463- 477.

[22] Cartlidge, J. M. (1978). *Weighted mean matrices as operators on* ℓ_p. Ph. D. Thesis, Indian Universty.

[23] Brown, A. L. and Page, E. (1970). *Elements of functional analysis*. Van Nostrand Rein hold Comp.

[24] Goldberg, S. (1966). *Unbounded linear operators*. Mc Oraw-Hill Book Comp.

[25] Coşkun, C. (1989). *Spektral theory and Mercerian theorems via spektral theory* M. Sc. Thesis., Ankara Uni.

[26] Choundhary, B. and Nonda, S. (1989). *Functional analysis with applications*. John Wiley and Sons Inc., New York, Chichester, Brisbone, Toronto, Singapore.