GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HESAPLAMALI CEBİRSEL GEOMETRİDE ALGORİTMALAR

MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

FARUK AYTEKİN
OCAK 2011

Hesaplamalı Cebirsel Geometride Algoritmalar

Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN

Faruk AYTEKİN
Ocak 2011

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Hesaplamalı Cebirsel Geometride Algoritmalar
Öğrencinin, Adı Soyadı: Faruk AYTEKİN
Tez Savunma Tarihi: 27/01/2011

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ramazan KOÇ
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:	İmzası
Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN	....
Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN	....
Yrd. Doç. Dr. Ali BOZKURT	....

ÖZET

HESAPLAMALI CEBİRSEL GEOMETRİDE ALGORİTMALAR

AYTEKİN, Faruk
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN
Ocak 2011, 54 Sayfa

Bu tezde, hesaplamalı cebirsel geometrideki bazı cebirsel yapılar üzerindeki algoritmalar incelenmiş ve bu algoritmalar kullanılarak bazı temel cebir problemleri çözülmüştür. Örneğin bu algoritmaların bir uygulaması olan Macaulay2 programı üzerinde asal ideallerin asıl ayrışımı, Hilbert fonksiyonu, Hilbert serisi, Hilbert polinomu ve serbest çözünürlük ile ilgili uygulamalar yapılmıştır.

Tezin giriş bölümünde Macaulay2 programının tarihi gelişimi ve önemi verilmiştir. İkinci ve üçüncü bölümde halkalar ve modüllerin tanımı, özellikleri ve temel teoremleri verilerek Macaulay2 programının kullanımı anlatılmıştır.

Son olarak asıl idealler, asal ideallerin asıl ayrışımı, Hilbert fonksiyonu, Hilbert serisi, Hilbert polinomu ve Serbest çözünürlük ile ilgili temel tanım ve teoremler verilerek Macaulay2 programında uygulamalar yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Noetherian halka, katmanlı halka, katmanlı modül, asıl ideal, asıl ayrışım, Hilbert fonksiyonu, Hilbert Polinomu

ABSTRACT

ALGORITHMS ON COMPUTATIONAL ALGEBRAIC GEOMETRY

AYTEKİN, Faruk
M. Sc. in Department of Mathematics
Supervisor: Asst Prof. Dr. Necati OLGUN

January 2011, 54 pages

In this thesis, the algorithms on some algebraic structures are studied in computational algebraic geometry and some basic algebra problems are solved using these algorithms. For example, a Macaulay2 program is an application of these algorithms. Some problems related to primary decomposition of the prime ideals, Hilbert function, Hilbert series, Hilbert polynomials and free resolution are solved using the Macaulay2 program.

The historical development and significance of Macaulay2 program is given in the introduction of the thesis. In the second and the third section, the definition of ring and modules, features and fundamental theorems are given and the use of Macaulay2 program is explained.

Finally, the basic definitions of primary ideals, primary ideal decomposition of prime ideals and the Hilbert function, Hilbert series, Hilbert polynomial and the free resolution and some theorems are given and some applications are being on the Macaulay2 program.

Key words: Noetherian ring, graded ring, graded module, primary ideal, primary decomposition, Hilbert function, Hilbert polynomial

TEŞEKKÜRLER

Bu çalışma süresince gösterdiği yol ve yöntemlerle desteğini esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN'a ve sabırlarıyla destek olan kıymetli aileme teşekkür ederim…

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Macaulay2, Cebirsel Geometri ve Cebirdeki hesaplamalar için hazırlanmış bir Matematik programıdır. Özellikle Cebirsel Geometriyi hedefleyen Macaulay, ilk olarak 1983-1993 yılları arasında David Bayer ve Michael Stillman tarafından yazılmıştır. Macaulay2 ise Macaulay programının devamı niteliğinde olup Daniel R. Grayson ve Michael E. Stillman tarafından 1993 yılında geliştirilmiştir.[3]

Macaulay2 ile kullanıcıların Macaulay2 için yeni algoritmaların gelişmesine katkıda bulunacakları umulmuştur. Bu yüzden Macaulay2 programını yazan matematikçiler sisteme kolay ulaşılabilmesi ve sistemin kolay anlaşılabilmesi için matematiksel notasyonları yalın bir şekilde kullanmışlardır. Sistemi geliştiren birçok önemli algoritmalar David Eisenbud ve Bernd Sturmfels tarafından yazılmıştır.

Daha sonraki yıllarda bu program matrisler, halkalar, modüller ve Groebner tabanları gibi birçok konudaki problemlerin çözümüne katkıda bulunmuştur. Bu programla ilgili Daniel R. Grayson ve Michael E. Stillman'nın [5] 1993 yılında yazdığı bir kitabı ve David Eisenbud'un [3] 2001 yılında yaptığı çalışmalar bulunmaktadır.

Tezin ikinci bölümünde halkalar ve modüllerin tanımı, özellikleri ve temel tanım ve teoremlerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde Macaulay2 programının kullanımı verilmiştir. Dördüncü bölümde ise, asal ideallerin asıl ayrışımı, Hilbert fonksiyonu, Hilbert serisi ve serbest çözünürlük ile ilgili temel tanım ve teoremler verilerek Macaulay2 programında uygulamalar yapılmıştır.

BÖLÜM 2

TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde tez çalışmasında ihtiyaç duyulan halkalar ve modüller ile ilgili bazı temel tanım ve teoremler üzerinde çalışılmıştır. Bu bölümdeki çalışmalar [6, 7,10, 11, 13] kaynaklarından derlenmiştir.

2.1. Halkalar

Tanım 2.1.1. R boş kümeden farklı, üzerinde toplama ve çarpma olarak adlandırılan iki işlem bulunan bir küme olsun.

$i)$ $(R,+)$ değişmeli grup

$ii)$ R çarpma işlemi altında kapalı

$iii)$ $\forall a,b,c \in R$ için $(ab)c = a(bc)$ (Birleşme özelliği)

$iv)$ $\forall a,b,c \in R$ için $a(b+c) = ab+ac$

$$(a+b)c = ac+bc$$

özelliklerini sağlayan $(R,+,.)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

R halkasının toplamsal birim elemanı 0_R dir. R çarpma işlemi altında birim elemana sahipse R ye birimli halka denir ve R nin birimi 1_R ile gösterilir. R çarpma işlemi altında değişme özelliğine sahipse R ye değişmeli halka denir.

Örnek 2.1.1. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ kümeleri (sırasıyla tamsayılar, rasyonel sayılar, reel sayılar, karmaşık sayılar kümesi) toplama ve çarpma işlemleri altında birimli ve değişmeli halkalardır.

Tanım 2.1.2. R bir halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. $ab = 0$ olacak şekilde $0 \neq b \in R$ varsa a elemanına R halkasının sıfır böleni denir.

Tanım 2.1.3. R birim elemanlı ve değişmeli halka olsun. R sıfır bölensiz ise bu halkaya tamlık bölgesi denir.

Tanım 2.1.4. R birim elemanlı ve değişmeli halka olsun. $\forall\, 0 \neq a \in R$ elemanı R de birim(tersinir) ise R halkasına bir cisim denir. O halde R bir cisim ise $\left(R - \{0\}, .\right)$ bir değişmeli gruptur.

Önerme 2.1.1. Her cisim bir tamlık bölgesidir.

İspat: F bir cisim ve $x, y \in F$ olsun. $xy = 0$ ve $x \neq 0$ ise x tersinir olacağından $x^{-1} \in F$ vardır. Öyle ki $0 = x^{-1}(xy) = \left(xx^{-1}\right)y = y$ olur.

Bu F nin sıfır böleni olmadığını gösterir. F cisim olduğundan değişmeli ve birim elemanlıdır. Böylece her cisim bir tamlık bölgesidir.

Önerme 2.1.2. Her sonlu tamlık bölgesi bir cisimdir.

İspat: R bir tamlık bölgesi ve $a \in R$, $a \neq 0$ olsun. Tamlık bölgesinde sıfır bölen olmadığından kısaltma özelliği vardır. Kısaltma özelliğinden dolayı $x \to ax$ dönüşümü birebir fonksiyondur. R sonlu olduğundan bu dönüşüm aynı zamanda örtendir. Bu durumda $ab=1$ olacak şekilde bir $b \in R$ bulunacağından a, R'de tersinirdir. $a \in R$, $a \neq 0$ keyfi bir eleman olduğundan R cisimdir.

Tanım 2.1.5. R bir halka ve R nin bir S alt kümesi R deki toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halka yapısı oluşturuyorsa S ye R halkasının bir alt halkası denir.

Teorem 2.1.1. $(R, +, .)$ bir halka ve S, R nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. S nin bir alt halka olması için gerek ve yeter koşul

$i)$ $\forall a,b \in S$ için $a-b \in S$

$ii)$ $\forall a,b \in S$ için $a.b \in S$

şartlarını sağlamasıdır.

İspat: S, R halkasının alt halkası ise $(S,+) \leq (R,+)$ olduğundan (i) sağlanır. Ayrıca S çarpma işlemine göre kapalı olduğundan (ii) de sağlanır.

Tersine, (i) den $(S,+) \leq (R,+)$ dır. $(R,+)$ değişmeli grup olduğundan $(S,+)$ da değişmeli gruptur. (ii) den S, çarpma işlemine göre kapalıdır. Ayrıca $S \subseteq R$ olduğundan R'de geçerli olan çarpma işleminin birleşme ve dağılma özellikleri S de geçerlidir. O halde S, R halkasının bir alt halkasıdır.

Tanım 2.1.6. R bir halka ve I, R nin bir alt halkası olsun. $\forall r \in R$ ve $x \in I$ için $rx \in I$ ise I'ya sol ideal $\forall r \in R$ ve $x \in I$ için $xr \in I$ ise I'ya sağ ideal denir. Sağ ve sol ideal olan I'ya R'nin bir ideali denir ve $I \lhd R$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.2. R bir halka ve $\varnothing \neq I \subseteq R$ olsun. I'nın R'nin bir ideali olması için gerek ve yeter koşul

$i)$ $\forall a,b \in I$ için $a-b \in I$

$ii)$ $\forall r \in R$ ve $a \in I$ için $ra \in I$ ve $ar \in I$

şartlarını sağlamasıdır.

Tanım 2.1.7. R bir halka ve $X \subseteq R$ olsun. $\{A_i \mid \forall i \in I \text{ için } X \subseteq A_i\}$ kümesi X'i içeren R'nin idealler ailesi olsun. O zaman $\bigcap_{i \in I} A_i$ idealine X kümesi tarafından üretilen ideal denir ve (X) ile gösterilir. X'in elemanlarına (X) idealinin üreteçleri denir.

$X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ ise $(X)=(x_1,x_2,...,x_n)$ ile gösterilir ve X'e sonlu üretilmiştir denir.

Tanım 2.1.8. Tek bir eleman tarafından üretilen (X) idealine temel ideal, her ideali temel ideal olan halkaya temel ideal halkası, tamlık bölgesi olan temel ideal halkasına ise temel ideal bölgesi denir.

Tanım 2.1.9. R değişmeli bir halka I ve J, R'nin iki ideali olsun. $(I:J)=\{r\in R \mid rJ\subseteq I\}$ kümesine bölüm ideali denir.

Tanım 2.1.10. R birimli ve değişmeli halka , $P\neq R$ olacak şekilde $P\lhd R$ olsun. $\forall a,b\in R$ için $ab\in P$ iken $a\in P$ veya $b\in P$ oluyorsa P'ye R'nin bir asal ideali denir.

Tanım 2.1.11. R birimli ve değişmeli halka olsun. R nin bütün asal ideallerinin kümesine R nin spectrumu denir ve Spec(R) ile gösterilir.

Spec(R) = { $P_i \mid P_i$, R de asal ideal}

Tanım 2.1.12.
R bir halka ve $M\neq R$ olacak şekilde $M\lhd R$ olsun. $M\subset N\subset R$ olacak şekilde her $N\lhd R$ ideali için $M=N$ veya $N=R$ oluyorsa M'ye R'nin bir maksimal ideali denir.

Tanım 2.1.13. I , R nin bir ideali olsun. $\{r\in R:\exists n\in IN \quad öyleki \quad r^n\in I\}$ kümesine I 'nın radikali denir ve $\sqrt{I}$ yada rad(I) ile gösterilir.

Tanım 2.1.14. S, değişmeli birimli bir halka olsun. S'nin bütün maksimal ideallerinin arakesiti olan ideale S'nin Jacobson radikali denir ve Jac(S) ile gösterilir.

Tanım 2.1.15. R ve S iki halka olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $f:R\to S$ dönüşümüne bir halka homomorfizması denir.

$i)$ $\forall a,b\in R$ için $f\left(a+b\right)=f\left(a\right)+f\left(b\right)$

$ii)$ $\forall a,b\in R$ için $f\left(a.b\right)=f\left(a\right).f\left(b\right)$

Bir homomorfizmaya birebir ise monomorfizma, örten ise epimorfizma, hem birebir hem örten ise izomorfizma denir.

Tanım 2.1.16. $f:R\rightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. $\left\{r\in R \mid f\left(r\right)=0\right\}$ kümesine f 'nin çekirdeği denir ve $Çekf$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.3. $f:R\rightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. $Çekf$, R'nin bir idealidir.

Teorem 2.1.4. R bir halka ve $I\lhd R$ olmak üzere $\pi:R\rightarrow R/I$, $r\rightarrow r+I$ dönüşümü örten bir halka homomorfizmasıdır ve $çek\pi=I$ dır. Bu dönüşüme doğal homomorfizma denir.

İspat: $\pi:R\rightarrow R/I$, $r\rightarrow r+I$

$$\begin{aligned}\pi\left(r_1+r_2\right)&=\left(r_1+r_2\right)+I=r_1+I+r_2+I\\&=\pi\left(r_1\right)+\pi\left(r_2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi\left(r_1r_2\right)&=r_1r_2+I=(r_1+I)(r_2+I)\\&=\pi\left(r_1\right).\pi\left(r_2\right)\end{aligned}$$

π halka homomorfizmasıdır.

$\forall r+I\in R/I$ için $\pi\left(r\right)=r+I$ olup $r\in R$ vardır. O halde π örtendir.

$\forall i\in I$ için $\pi\left(i\right)=i+I=I$ ise $i\in Çekf$ dir. Buradan $Çekf$ $=I$ olur.

Teorem 2.1.5. $f:R\rightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. f birebirdir ancak ve ancak $Çekf=\left\{0_R\right\}$ dir.

İspat: $\Rightarrow$: f birebir olsun. $r \in Çekf$ alalım. $f(r) = 0_S$ olur. $r \in Çekf$ olduğundan $f(r) = f(0_R) = 0_S$ olur.

f birebir olduğundan $r = 0_S$ olup *Çekf*=$\{0_R\}$ dir.

$\Leftarrow$: *Çekf*=$\{0_R\}$ olsun. $\forall r_1, r_2 \in R$ için $f(r_1) = f(r_2)$ alalım.
$f(r_1) - f(r_2) = 0_S \Rightarrow f(r_1 - r_2) = 0_S \Rightarrow r_1 - r_2 \in çekf = \{0_R\} \Rightarrow r_1 - r_2 = 0_R \Rightarrow r_1 = r_2$ dir. Buradan f birebirdir.

Tanım 2.1.17. R değişmeli bir halka olsun. Aşağıdaki denk koşullar sağlandığında R halkasına Noetherian halka denir.

(i) $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots \subseteq I_i \subseteq I_{i+1} \subseteq \ldots$ R'nin ideallerinin artan zinciri ise, $\forall i \in \mathbb{N}$ için $I_k = I_{k+i}$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır.

(ii) Boş olmayan R'nin ideallerinin her kümesi artan zincir koşuluna göre maksimal bir elemana sahiptir.

(iii) R'nin her ideali sonlu üretilmiştir.

Teorem 2.1.7. $k[x_1, x_2, \ldots x_n]$ polinomlar halkasında aşağıdakiler birbirine denktir.

i) Eğer I, $k[x_1, x_2, \ldots x_n]$ polinomlar halkasının bir ideali ise $I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_s \rangle$ olacak şekilde $f_1, f_2, \ldots f_s \in k[x_1, x_2, \ldots x_n]$ vardır**.**

ii) $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_k \subseteq I_{k+1} \subseteq \ldots$ dizisi $k[x_1, x_2, \ldots x_n]$**'**nin ideallerinin artan bir zinciri ise öyle bir $n \in \mathbb{N}$ vardır ki $I_n = I_{n+1} = \ldots$ dir.

İspat: $(i) \Rightarrow (ii)$ $I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \subseteq I_k \subseteq I_{k+1} \subseteq ...$ dizisi $k[x_1, x_2, ...x_n]$ polinomlar halkasının ideallerinin artan bir zinciri olsun. $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, $k[x_1, x_2, ...x_n]$'nin bir idealidir. (i) kabulünden $I = \langle f_1, f_2, ..., f_s \rangle$ olacak şekilde $f_1, f_2, ... f_s \in k[x_1, x_2, ...x_n]$ vardır. $\forall f_i \in I$ olduğundan $f_i \in I_{N_i}$ olacak şekilde N_i indisleri seçilebilir. $n = \max_{1 \le i \le s} N_i$ alınırsa $\forall i \in \{1, 2, ..., s\}$ için $f_i \in I_n$ olur. Böylece $I \subseteq I_n$ olur. Buradan $I = I_n$ olur ki bu da $I_n = I_{n+1} = ...$ demektir.

$(ii) \Rightarrow (i)$ I, $k[x_1, x_2, ...x_n]$ nin bir ideali olsun ve I sonlu üreteçli olmasın. $0 \neq f_1 \in I$ olsun. I sonlu üreteçli olmadığından $\langle f_i \rangle \subseteq I$ olur. O zaman $f_2 \notin \langle f_1 \rangle$ olan $f_2 \in I$ elemanı seçilebilir. Böylece $\langle f_1, f_2 \rangle \subseteq I$ olur. Bu şekilde devam edilirse $\langle f_1 \rangle \subseteq \langle f_1, f_2 \rangle \subseteq \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \subseteq ...$ artan zinciri elde edilir. Bu ise (ii) kabulü ile çelişir. O halde I sonlu üreteçli olmak zorundadır

Ön Teorem 2.1.1. R halkasının Noetherian halka olması için gerek ve yeter koşul her idealinin sonlu olarak üretilmesidir.

İspat:

İlk olarak R halkasının her idealinin sonlu üretildiğini, fakat ideallerin $I_1 \subseteq I_2 \subseteq ...$ şeklinde sonsuz artan bir zinciri olduğunu varsayalım.
$J = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ bir idealdir. Kabulümüzden J, $\{f_1, ..., f_k\}$ tarafından sonlu üretilmiştir ve bazı l_i için $f_i \in I_{l_i}$ dir. Bu yüzden eğer $m = \max\{l_i\}$ ise $I_{m-1} \subseteq I_m = I_{m+1} = ...$ olur. Bu ise bir çelişkidir.

Şimdi I nın sonlu olarak üretilmediğini varsayalım. $f_i \notin \langle f_1, f_2, ..., f_{i-1} \rangle$ ile I için $\{f_1, f_2, ...\}$ tarafından üretilen dizilerini alarak $\langle f_1 \rangle \subseteq \langle f_1, f_2 \rangle \subseteq ...$, ideallerin sonsuz artan bir zinciri elde edilir. Bu da R halkasının Noetherian halka olması ile çelişir.

Ön Teorem 2.1.2. R değişmeli bir halka olsun. I ve J , $R[X]$ polinom halkasının $I \subseteq J$ koşulunu sağlayan idealleri olsunlar. $\forall i \in \mathbb{N}$ için

$$L_i(I) = \left\{ a_i \in R: \ \exists a_{i-1}, a_{i-2}, ..., a_0 \in R \ \ için \ \sum_{j=0}^{i} a_j x^j \in I \right\}$$ verilsin.

Bu durumda;

i) $\forall i \in \mathbb{N}$ için $L_i(I)$ kümesi R nin bir ideali ve $L_i(I) \subseteq L_i(J)$ dir.

ii) $L_0(I) \subseteq L_1(I) \subseteq ... \subseteq L_n(I) \subseteq L_{n+1}(I) \subseteq ....$

iii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $L_n(I) = L_n(J)$ ise $I = J$ dir.

Teorem 2.1.8. (*Hilbert baz teoremi*) R, değişmeli Noetherian halka olsun. $R[X]$ polinom halkası Noetheriandır.

İspat:

$I_0 \subseteq I_1 \subseteq ... \subseteq I_J \subseteq I_{J+1} \subseteq ...$ $R[X]$ in ideallerinin artan bir zinciri olsun. Ön Teorem 2.1.2 den $\forall i \in \mathbb{N}$

$$L_i(I_0) \subseteq L_i(I_1) \subseteq ... \subseteq L_i(I_j) \subseteq L_i(I_{j+1}) \subseteq ....$$

ve $\forall j \in \mathbb{N}$ için

$$L_0(I_j) \subseteq L_1(I_j) \subseteq ... \subseteq L_i(I_j) \subseteq L_{i+1}(I_j) \subseteq .... \text{ dir.}$$

R, Noetherian halka olduğundan $L_p(I_q)$, $\{L_i(I_i): i, j \in \mathbb{N}\}$ kümesinin maksimal elemanı olacak şekilde $p, q \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla $i \geq p$ ve $j \geq q$ yapan $\forall i \in \mathbb{N}$ için $L_i(I_j) = L_i(I_q)(= L_p(I_q))$ öte yandan öyle bir q' vadır ki her $j \geq q'$ ve her $i = 0,1,2,..., p-1$ için $L_i(I_j) = L_i(I_{q'})$ olur.

$t = maks\{q, q'\}$ olsun. Bu durumda her $i \in \mathbb{N}$ için $L_i(I_j) = L_i(I_t)$ dir ($j \geq t$) dolayısıyla Ön Teorem 2.1.2. den her $j \geq t$ sayısı için $I_j = I_t$ olur. Yani $R[X]$ in yukarıda verilen ideallerinin artan zinciri sonlu olur. O halde $R[X]$ Noetherian halkadır.

Tanım 2.1.18. R değişmeli halka ve $I \lhd R$ olsun. Şayet I ideali öz ve kendisinden farklı iki idealin arakesiti olarak ifade edilemiyorsa I idealine indirgenemez ideal denir.

Bu tanıma göre $I \lhd R$ idealinin indirgenemez olması için gerek ve yeter şart $I \subseteq R$ ve $I_1, I_2 \lhd R$ için $I = I_1 \cap I_2$ oluyorsa $I = I_1$ yada $I = I_2$ olmasıdır.

Ön Teorem 2.1.3. R, değişmeli Noetherian halka olsun. Bu durumda R nin her öz ideali R nin sonlu sayıda indirgenemez ideallerinin bir arakesiti olarak ifade edilebilir.

İspat: Σ, R nin sonlu sayıda indirgenemeyen ideallerinin arakesiti olarak ifade edilemeyen tüm öz ideallerin kümesi olsun. Bu durumda $\Sigma = \varnothing$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\Sigma \neq \varnothing$ olduğunu kabul edelim. R Noetherian olup Σ kümesi kapsama bağıntısı altında bir I maksimal elemanına sahiptir. Dolayısıyla $I \subset I_1$ indirgenemez değildir. Aksi takdirde $I = I_1 \cap I_2$ yazabilirdik ki $I \notin \Sigma$ olurdu. I ideali öz ideal olup $I \subset I_1, I \subset I_2$ sağlayan bazı I_1 ve I_2idealleri için $I = I_1 \cap I_2$ sağlar. I_1ve I_2 öz idealler olup I nın seçilisinden dolayı $I_1 \notin \Sigma$, $I_2 \notin \Sigma$ olur. Bu durumda I_1ve I_2 sonlu sayıda indirgenemez idealin arakesiti olarak ifade edilebilir. Aynı şekilde $I = I_1 \cap I_2$ olup I da aynı özelliğe sahiptir. Yani $I \notin \Sigma$. Bu bir çelişki olup $\Sigma = \varnothing$ dir.

Ön Teorem 2.1.4. R Noetherian halkasında, indirgenemez idealler asıl ideallerdir.

İspat: $I \subset R$ indirgenemez ideal olsun. $f, g \in R$ için $fg \in I$ fakat $f \notin I$ olduğunu kabul edelim.

$A = R/I$ bölüm halkasına geçerek bazı $m \in \mathbb{N}$ için $g^m = 0$ olduğunu göstermemiz gerekir.

$ann(h) = \{e \in A \mid eh = 0\}$ olmak üzere $0 \subseteq ann(g) \subseteq ann(g^2) \subseteq \ldots$ A nın bir idealler zinciridir. Böylece A, Noetherian olup her $n \in IN$ için $ann(g^n) = ann(g^{n+1})$ dir. $f \neq 0$ ve A daki sıfır ideal indirgenemez olduğundan, eğer $\langle g^n \rangle \cap \langle f \rangle = 0$ olduğunu göstermemiz gerekir.

$a \in \langle f \rangle \cap \langle g^n \rangle$ kabulümüzden $a \in \langle f \rangle$, $ag = 0$ anlamına gelir. Fakat $a \in \langle g^n \rangle \Rightarrow a = bg^n \Rightarrow bg^{n+1} = 0 \Rightarrow bg^n = 0 \Rightarrow a = 0$

Buradan da $\langle g^n \rangle \cap \langle f \rangle = 0$ olur. Bu da I idealinin asıl ideal olduğunu gösterir.

Tanım 2.1.19. R bir halka olsun. $\forall d, e \in Z$ için $R = \bigoplus_{d \in Z} R_d$ ve $R_d R_e \subseteq R_{d+e}$ olacak şekilde R'nin toplamsal alt grupları varsa R ye Z- katmanlı (*Z-graded*) halka denir. Burada $\{R_d\}_{d \in Z}$ ailesine de R'nin bir Z-katmanı denir. Ayrıca R_d altgrubu R nin d ninci katman bileşeni olarak adlandırılır.

$R = \bigoplus_{d \in Z} R_d$ bir katmanlı halka olsun. Bu durumda R_d' nin elemanlarına d ninci dereceden homojendir denir. $\forall a \in R$ ve $a_d \in R_d$ için sonlu sayıda bileşenler hariç tüm a_d ler sıfır ise $a = \sum_{d \in Z} a_d$ formunda tek şekilde yazılır. Burada a_d elemanlarına a'nın homojen bileşenleri denir.

Teorem 2.1.6. R, Z-katmanlı bir halka olsun. Bu durumda R'nin 1_R birimi sıfırıncı dereceden homojen elemandır.

İspat: $1_R = \sum_{i \in Z} a_i$; birimin homojen elemanlarının toplamı şeklinde temsili olsun. Öte yandan b elemanı j-inci dereceden homojen bir eleman olarak verilsin. Bu durumda $b = ba_0$ olur.

$b1_R = ba_0 + ba_1 + ... + ba_j + ...$ olup, $i \neq 0$, $i > 0$ için, ba_i terimi $j+i$ inci derecedir ama $b1_R$, j inci dereceden olup ba_i terimi sıfır olur. Yani $b1_R = ba_0 + 0 + 0 + ... + 0 = ba_0$ dır.

R'nin her bir r elemanı homojen elemanların bir toplamı olup, her $r \in R$ için $r = ra_0$ ve $1_R = 1_R a_0 = a_0$ dır.

Tanım 2.1.20. R, bir Z-katmanlı halka ve $I \subseteq R$ bir ideal olsun. Bir $r \in I$ için r'nin bütün homojen bileşenleri yine I'ya ait oluyorsa I idealine, R'nin bir homojen (veya katmanlı) ideali denir. I, R nin bir homojen ideali olsun. Bu durumda $\left(R/I \right)_d = R_d / (I \cap R_d)$ eşitliği bize Z-katmanlı R/I halkasını verir.

2.2. Modüller

Tanım 2.2.1. R birim elemanlı ve değişmeli bir halka, M değişmeli bir grup olsun. $R \times M \to M$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa M ye R-modül denir.

i) Her $r \in R$ ve $m, m' \in M$ için $r(m + m') = rm + rm'$

ii) Her $r, r' \in R$ ve $m \in M$ için $(r + r')m = rm + r'm$

iii) Her $r, r' \in R$ ve $m \in M$ için $(r.r')m = r(r'm)$

iv) Her $m \in M$ için $1_R m = m$

Örnek 2.2.1. Her değişmeli halka, tamsayılar halkası üzerinde bir Z –modül olarak düşünülebilir. G değişmeli halka olsun.

$$\mu : Z \times G \to G$$

$$(n, g) \to \mu(n, g) = ng = g + g + ... + g, \quad g \in G, \quad n \in Z$$

modül yapısı vardır.

Tanım 2.2.2. M R-modül ve $G \subseteq M$ olsun. G, R -modül ise G'ye M'nin alt modülü denir.

Tanım.2.2.3. M, R değişmeli halkası üzerinde bir R-modül olsun. G, M'nin bir alt modülü ve $J \neq 0$ olacak şekilde $J \subseteq M$ olsun.

$$(G:J) = (G:_R J) = \{r \in R : \forall j \in J \; için \; rj \in G\}$$

ifadesi R'nin ideali olarak tanımlanır**.**

Eğer N, J tarafından üretilen M nin alt modülü ise $(G : J) = (G : N)$ dir. $m \in M$ için $(G:\{m\})$ nin yerine $(G : m)$ yazılır.

Eğer $G = 0$ ise $(0:J) = \{r \in R : \forall j \in J \;\; için \;\; rj = 0\}$ kümesine J nin sıfırlayanı denir ve $Ann_R(J)$ ya da $Ann(J)$ ile gösterilir. Aynı zamanda $m \in M$ için m nin sıfırlayanı $(0: m)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.4. R değişmeli halka, M R -modül, G M nin alt modülü $I \lhd R$ olsun. O zaman $(G :_M I)$, $\{m \in M : \forall r \in I \;\; için \;\; rm \in G\}$ M nin alt modülü ve $G \subseteq (G :_M I)$ dir.

Eğer $G = 0 \Rightarrow (0 :_M I) = \{m \in M : \forall r \in I \; için \; rm = 0\}$ dır

Tanım 2.2.5. R değişmeli halka, M R -modül ve G, M nin bir alt modülü olsun. (G, M toplamsal değişmeli grubunun bir alt grubudur.)

$M / G = \{m + G : m \in M\}$ bölüm grubunu oluşturabiliriz.

$m + G = m' + G \Leftrightarrow m - m' \in G$

Her $m, x \in G \;\; için \; (m + G) + (m + x) = (m + x) + G$

Böylece;

$$\begin{aligned} R\times M/G &\to M/G \\ (r, m+G) &\to rm+G \end{aligned}$$

M/G değişmeli grubu bir R-modüldür. Bu M, R-modüle M'nin bölüm modülü denir ve M/G ile gösterilir.

Tanım 2.2.6. M ve N, R değişmeli halkası üzerinde iki modül olsun. $f : M \to N$ dönüşümü,

Her $m, m' \in M$ için $f(m+m') = f(m) + f(m')$

Her $m \in M$ ve $r \in R$ için $f(rm) = rf(m)$

şartlarını sağlıyorsa bu dönüşüme R -modül homomorfizması denir. $z : M \to N$ dönüşümü her $m \in M$ için $z(m) = 0_N$ tanımlanarak bir R -modül homomorfizmasıdır ve buna sıfır homomorfizma denir ve 0 ile gösterilir.

Tanım 2.2.7. $f : M \to N$ birebir ve örten bir modül homomorfizması ise bu homomorfizmaya bir izomorfizma denir ve $M \cong N$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.8. M R değişmeli halkası üzerinde bir modül ve G M nin alt modülü olsun. $f : M \to M/G$ dönüşümü $\forall m \in M$ için $f(m) = m+G$ ise bu dönüşüme doğal homomorfizma denir.

Tanım 2.2.9. R değişmeli halka, M R -modül olsun.

i) N R -modül ve $f : M \to N$ R -modül homomorfizması ise f nin çekirdeği $Çekf = \{m \in M : f(m) = 0\}$ ile gösterilir. *Çekf*, M nin bir alt modülüdür.
$Çekf = 0 \Leftrightarrow f$ monomorfizmadır. f nin görüntüsü Imf ile gösterilir ve $f(M) = \{f(m) : m \in M\}$ kümesi N'nin alt kümesidir. Im f, N'nin alt modülüdür.

ii) G M nin alt modülü olsun. $f: M \to M/G$ dönüşümü doğal epimorfizm ise $Çekf = G$ ve $M/0 \cong M$ dir.

Tanım 2.2.10. R değişmeli halka, G, M ve N R-modüller ve $g: G \to M$ ve $f: M \to N$ R-modül homomorfizmaları olsun. $G \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N$ dizisinde $\operatorname{Im} g = Çekf$ ise bu diziye R-modüllerin tam dizisi denir

Önerme 2.2.1.

i) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ tamdır $\Leftrightarrow$ f, $1-1$ dir.

ii) $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ tamdır $\Leftrightarrow f$ örtendir.

iii) $N \subseteq M$ alt modül ise $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$ dizisi her zaman tamdır.

Genel olarak $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ dizisi için f 1-1, g örten ve $\operatorname{Im} f = Çekg$ ise bu diziye kısa tam dizi denir.

Tanım 2.2.11. R değişmeli halka $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ R - modüllerinin boş olmayan bir ailesi olsun. $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ kartezyen çarpım kümesi her $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (g'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, r \in R$ için

$$(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} + (g'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (g_\lambda + g'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$
$$r(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (rg_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

ile bir R - modüldür. Bu R - modüle $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ailesinin direkt çarpımı denir.

$\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ nin alt kümesi (her $\lambda \in \Lambda$ için $g_\lambda \in M_\lambda$ ile) $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ailesini içerir ve g_λ elemanlarının sonlu sayıdaki bileşenleri sıfırdan farklı olma özelliğiyle $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ nin bir R-alt modülüdür ve $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ ile gösterilir. Buna $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ailesinin direkt toplamı denir.

$\Lambda' = 0$ ise $\bigoplus_{\lambda'\in\Lambda'} M_{\lambda'}$ ve $\prod_{\lambda'\in\Lambda'} M_{\lambda'}$ her ikisi de sıfır R-modüldür.

Λ sonlu ise $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} M_\lambda = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ elde edilir.

Tanım 2.2.12. *M, R* değişmeli halkası üzerinde bir modül olsun. $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *M'* nin alt modüllerinin boş olmayan bir ailesi olsun. Eğer $M = \sum_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ ise her bir $m \in M$ elemanı $m = \sum_{i=1}^{n} g_{\lambda_i}$ formunda ifade edilebilir ki burada $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$, her $i = 1, 2, ..., n$ için $g_{\lambda_i} \in G_{\lambda_i}$ ve Λ nın sonlu bir alt kümesidir.

M **,** $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ alt modüllerinin ailesinin direkt toplamıdır ve her bir $m \in M$ elemanı için g_λ nın sonlu sayıda elemanı sıfırdan farklı ve her $\lambda \in \Lambda$ için $g_{\lambda_i} \in G_{\lambda_i}$, $m = \sum_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda$ formunda tek türlü yazılabilir ve bu $M = \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} G_\lambda$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.13. *R* değişmeli halka ve *L, M, N* R -modül, $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ R modül homomorfizmalarının kısa tam dizisi olsun. Im *f* = *Çekg, M* nin bir direkt toplamı oluyorsa bu diziye split denir. Yani;

Dizi splittir $\Leftrightarrow M = Çekg \oplus G$ olacak şekilde *M* nin bir *G* alt modülü vardır.

Önerme 2.2.2. *R* değişmeli halka ve $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ kısa tam dizi olsun. Bu dizi splittir $\Leftrightarrow h : N \to M$ ve $e : M \to L$ R modül homomorfizmaları vardır. Yani;

$$eof = Id_L, \quad goh = Id_N, \quad eoh = 0, \quad foe + hog = Id_M \text{ dir.}$$

İspat: Dizi split olsun. O zaman bazı $M' \subseteq M$ için $M = Çekg \oplus M'$ dır. Verilen herhangi bir $n \in N$ için $\exists m \in M$ $g(m) = n$ ile $h : N \to M$ tanımlandığından M ; *Çekg* ve M' nün direkt toplamıdır. $\forall m \in M$ için $m_1 \in Çekg$, $m_2 \in M'$ $m = m_1 + m_2$ tek türlü olarak yazılır. Dahası $M' \cap Çekg = \{0\}$,
$$m = m_1 + m_2$$
$$r = r_1 + r_2 \qquad r_1 \in Çekg,\ r_2 \in M'$$

$g(m) = g(r) = n$ tek türlüdür. O zaman $g\left(m-r\right)=0 \Rightarrow m-r \in çekf \Rightarrow \underbrace{\left(m-r\right)}_{\in Çekg} =$ $\underbrace{\left(m_1-r_1\right)}_{\in Çekg} + \left(m_2-r_2\right) \Rightarrow m_2-r_2 \in ÇekgnM' = \{0\} \Rightarrow m_2 = r_2$ dir. $h(n) = m_2$ tanımı h dönüşümünü iyi tanımlı yapar.

Verilen herhangi bir $m \in M$ için $k : M \to L$ tanımlansın. $\underbrace{m = m_1 + m_2}_{\in Çekg = \operatorname{Im} f}$ tek türlü ise $l \in L$ için $m_1 = f\left(l\right)$ dir.

Tanım 2.2.14. R değişmeli bir halka ve M, $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ tarafından üretilen bir R -modül olsun. Her $\lambda \in \Lambda$ için $r_\lambda \in R$ ve $e_\lambda \in M$ olmak üzere $\forall m \in M,\ m = \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda m_\lambda$ olacak şekilde tek türlü yazılabiliyorsa $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, M için bir tabandır ve M, bir tabana sahip olduğundan serbest R -modüldür.

R nin kendisi 1_R elemanı tarafından bir tabana sahip olduğundan bir serbest R -modüldür. 0 R-modülü boş bir taban ile serbest R-modüldür.

Önerme 2.2.3. F, R değimeli halkası üzerinde $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tabanı ile bir serbest R -modül olsun. M, R -modül ve $\{m_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, M nin elemanlarının bir ailesi olsun. O zaman $\forall \lambda \in \Lambda$ için $f\left(e_\lambda\right) = m_\lambda$ tanımı ile $f : F \to M$ bir R -modül homomorfizması vardır.

İspat: M , $\{m_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tabanına sahip serbest R -modül olsun. $\Lambda = \varnothing$ ise açıktır. $\Lambda \neq \varnothing$ ise $\forall \lambda \in \Lambda$ $Rm_\lambda = R$, $\forall \left(r_\lambda\right)_{\lambda \in \Lambda} \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ için $f\left(\left(r_\lambda\right)_{\lambda \in \Lambda}\right) = \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda m_\lambda$ tanımı ve $f : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda \to M$ dönüşümüyle f bir R -modül homomorfizmasıdır. M , $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ kümesi tarafından üretildiğinde f örtendir. $\{m_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, M nin tabanı olduğundan f $1-1$ dir.

Tanım 2.2.15. X, R –modül olmak üzere herhangi bir g: $A \to B$ R -modül epimorfizması ve herhangi bir f: $X \to B$ R –modül homomorfizması için

$h: X \to A$ R–modül homomorfizması varsa X modülüne projektiftir denir.

Teorem 2.2.1. Birimli R halkası üzerindeki her serbest F modülü projektiftir.

Teorem 2.2.2. R bir halka ve P, R-modül olsun. Buna göre aşağıdakiler birbirine denktir.

i) P projektiftir.

ii) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi splittir.

iii) F serbest modül ve K R-modül olmak üzere $F \cong K \oplus P$ dir.

İspat: $(i) \Rightarrow (ii)$ Aşağıdaki diyagramı düşünelim.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "1_P"] & \\ B \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

P projektif olduğundan $gh = 1_P$ olacak şekilde $h: P \to B$ R-modül homomorfizması vardır. Bu nedenle $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi splittir.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ F sebest R-modül ve $g: F \to P$ epimorfizm alındığında

Eğer $K = Çekg$ ise $0 \longrightarrow K \longrightarrow F \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ tamdır. Hipotezden dolayı $F \cong K \oplus P$ dir.

$(iii) \Rightarrow (i)$ $F \cong K \oplus P$ olacak şekilde bir F serbest modülü $l: F \cong K \oplus P \to P$ dönüşümü ve $l: P \to F \cong K \oplus P$ dönüşümü alalım. Aşağıdaki diyagramı düşündüğümüzde

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, shift right, "\pi"'] & \\ & \mathrm{P} \arrow[u, shift right, "l"'] \arrow[d] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

F projektif olduğundan $gh_1 = f\pi$ olacak şekilde $h_1 : F \to A$ R- modül homomorfizması vardır. $h = h_1 l : P \to A$ olun. $gh = gh_1 l = (f\pi)l = f(\pi l) = f1_P = f$ dir. Buradan P projektiftir.

Tanım 2.2.16. $R = \underset{d\in Z}{\oplus} R_d$ bir katmanlı halka ve M bir R-modül olsun. $d, e \in Z$ için M_d ler toplamsal alt grup ve $R_d M_e \subseteq M_{d+e}$ olacak şekilde $M = \underset{d\in Z}{\oplus} M_d$ sağlıyorsa M'ye Z-katmanlı (Z-graded) modül ya da katmanlı modül denir. Bu durumda $\{M_d\}_{d\in Z}$ ailesine M'nin Z-katmanı ve M_d 'ye de M nin d ninci katman bileşeni denir.

$R = \underset{d\in Z}{\oplus} R_d$ bir katmanlı halka ve $M = \underset{d\in Z}{\oplus} M_d$ katmanlı R-modül olsun. $N = \underset{d\in Z}{\oplus}(N \cap M_d)$ ise N ye katmanlı alt modül denir.

N, M'nin bir katmanlı alt modülü ise M / N bir katmanlı R-modüldür ve $(M / N)_d = M_d / (N \cap M_d)$ katmanı sağlanır.

BÖLÜM 3

MACAULAY2 PROGRAMI

Bu bölümde Macaulay2 programının kurulumu ve kullanımı anlatılmıştır. Bu bölümdeki çalışmalar [4] kaynağından derlenmiştir.

3.1. Macaulay2 Programının Kurulumu ve Yardımcı Elemanları

Bu sistemin kurulumunda kullanılan birçok komut vardır. Aşağıdaki komutlar programı başlatır.

M2 programı başlatır.

Program başladığında init.m2 yüklenir.

M2 file1,file2,… Dosyaları açar ve okur.

Komut satırında kullanılan bazı seçenekler;

-- veriyi yükledikten sonra önceki verileri önemsemez

-ex _ x ifadesinin değerini bulur

-h _ kullanılan mesajı görüntüler

-mpwprompt-MPW _ girdi imlecini düzenler

-n _ hiçbir veri imleci yazmaz

-q _ “init m2” init dosyasının yüklenmesini durdurur

-s _ Hata meydana gelirse görüntüyü durdurur

-x _ Tekrarlanan örnekler için özel yöntemdir.

M2 dosyası aslında Macaulay2 programının çalışması için derlenen küçük bir programdır. Macaulay2 programı M2 dosyasından açıldığında önce sistem yüklenir sonra çalışmaya başlanılabilir.

3.2. Macaulay2 Programının Kullanılması

İlk girdi “i1:” şeklindedir. İfadenin değerini bulmak için hiçbir noktalama işaretine gereksinim duyulmaz.

Örneğin;

i1: 2+2

o1 = 4

Cevap o1=… şeklinde çıktının sağ tarafında görüntülenir.

i2: 3/5+7/11

o2 = 68/55

o2: QQ

Burada o2: simgesi ile ek bir satır daha olduğu görülmektedir. Bu ek simge çıktının türü hakkında bilgi verir. Bu durumda QQ sembolü bütün rasyonel sayıların sınıfını ve önceki satırın cevabının rasyonel sayı olduğunu gösterir.

Çarpma işlemi * ile gösterilir

i3: 1*2*3*4

o3 = 24

Kuvvet alma ^ ile gösterilir.

i4: 2^200

o4 = 1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376

Faktöriyel ! ile elde edilir

i5: 40!

o5 = 815915283247897734345611269596115894272000000000

Bazı cevaplar çok uzun olabilir. Bu durumda çıktı satırı yatay olarak istenilen kadar kullanılır.

i6: 100!

o6=

93326215443944152681699238856266700490715968264381621468592963895217

59299156089414639761565182862536979208272237582511852109168640000000

000000000000

Çoklu ifadeler noktalı virgülle ayrılabilir.

i7: 1;2;3*4

o9 = 12

Satırın sonundaki noktalı virgül yazılan değeri durdurur.

i10: 4*5;

Önceki satırdaki çıktıyı noktalı virgül engellese de oo simgesiyle tekrar kullanabiliriz

i11: oo

o11 = 20

Daha önceki satırlardaki çıktıyı ooo ve oooo sembolleri ile tekrar elde edebiliriz Alternatif olarak aşağıdaki örnekte olduğu gibi daha önce bulduğumuz ifadelerin simgelerini tekrar kullanabiliriz.

i12: o5+1

o12 = 815915283247897734345611269596115894272000000001

Bir ifade girmek için tırnak işareti kullanılır

i13 : "hi three"

o13 = hi three

o13: String

Bir değer = ile bir değişkenle tanımlanabilir

i14: s = "hi three"

o14 = hi three

o14: String

İfadeler | ile yatay olarak, || ile düşey olarak sıralanabilir.

i15: s|"-"|s

o15 = hi three-hi three

o15: String

i16: s||"-"||s

o16 = hi three

-

hi three

o16: Net

İfadeler {…} parantezi ile liste oluşturur.

i17 : {1, 2, s}

o17 = {1, 2, hi three}

o17: List

Listeler vektör olarak kullanılabilir

i18: 10*{1, 2, 3}+{1, 1, 1}

o18 = {11, 21, 31}

o18: List

Bir fonksiyon -> ok operatörü kullanarak oluşturulabilir

i19: f = i -> i^3

o19 = f

o19: Function

Fonksiyonun bir noktadaki değerini bulmak için fonksiyonun sağına istenilen nokta yazılır

i20: f 5

o20 = 125

i21: g = (x,y) -> x * y

o21 = g

o21: Function

i22: g(6,9)

o22 = 54

Listedeki her bir elemanın fonksiyon değerini bulmak için *apply* ifadesi kullanılır.

i23: apply({1, 2, 3, 4}, i -> i^2)

o23 = {1, 4, 9, 16}

o23: List

i24: apply({1, 2, 3, 4}, f)

o24 = {1, 8, 27, 64}

o24: List

apply ifadesi ardışık sayıları dizisini kullanmak için de kullanılır.

i25 : apply(1..4, f)

o25 = (1, 8, 27, 64)

o25: Sequence

Eğer ilk sayı *n* tamsayısı ise *apply* ifadesi fonksiyonu {1, 2, 3, …, *n*-1} için uygular.

i26: apply(5, f)

o26 = {0, 1, 8, 27, 64}

o26: List

scan ifadesi apply ifadesine tekrar dönmesi dışında benzerdir. Programdaki döngü uygulamalarında kullanılır.

```
i27: scan(5, i -> print (i, i^3))
(0, 0)
(1, 1)
(2, 8)
(3, 27)
(4, 64)
i28: j =1; scan(10, i -> j = 2*j) ; j
o30 = 1024
i31: R=ZZ/5 [x, y, z];
```

Halkalardaki değişkenler için Z gibi tek harfler kullanılır. Burada biz ZZ yi tamsayı halkaları için kullanmalıyız. Z yerine ZZ yi tercih edersek Z = ZZ yazmalıyız.

```
i32 : (x+y)^5
         5      5
o32 = x   +  y
o32:   R
```

Halkalar ve diğer türleri global değişkenlerle tanımlanmıştır.

```
i33:    R
o33 = R
o33: PolynomialRing
```

R Halkasının orijinal tanımını görmek için *describe R* kullanılır.

```
i34: describe R
o34 = ZZ/5 [x, y, z]
o34: String
```

Serbest modül aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

```
i35: F=R^3
          3
o35 = R
o35: R - module, free
```

F nin *i*-ninci taban elemanı *F_i* olarak elde edilebilir. Bu örnekte *i* için geçerli değerler 0, 1, 2 dir.

```
i36: F_1
o36 = <1>
          3
o36 : R
```

Gösterilen vektörü tabanlarına eş indisleri kullanarak homomorfizm oluşturulabilir.

```
i37: F_{1,2}
o37 = {0} | 0 0 |
        {0} | 1 0 |
        {0} | 0 1 |
                   3         2
o37: Matrix R  <--- R
i38: F_{2,1,2}
o38 = {0} | 0 0 0 |
        {0} | 0 1 0 |
        {0} | 1 0 1 |
                  3          3
o38: Matrix R  <--- R
```

Her bir elemanı halkaların elemanları olan matrislerin satır listesini kullanarak matrisler ile serbest modüller arasında bir homomorfizm oluşturulabilir.

```
i39: f = matrix{{x,y,z}}
o39 = {0} | x y z |
                    1          3
o39: Matrix R  <--- R
```

f fonksiyonunun görüntüsünü bulmak için *image* ifadesi kullanılır.

```
i40: image f
o40 = image {0} | x  y  z |
                                             1
o40: R - module, submodule of R
```

Eş ideal oluşturmak için *ideal* ifadesi kullanılır.

```
i41:   ideal (x, y, z)
o41 = ideal (x, y, z)
o41: Ideal of R
```

f nin çekirdeğini hesaplamak için *kernel f* ifadesi kullanılır.

```
i42: kernel f
o42 = image  {1} | 0  -y -z |
             {1} | -z  x  0  |
             {1} | y   0  x  |
                                               3
o42 : R - module, submodule of R
```

Cevap matrisi görüntülenen homomorfizma ile ifade edilen bir modül olarak ortaya çıkar. Bu durumda matrisin kendisi istenebilir. Bu *generators oo* kullanılarak bulunur.

```
i43: generators oo
o43 = {1} | 0  -y   -z |
      {1} |-z   x    0  |
      {1} | y   0    x  |
```

```
                  3        3
o43: Matrix R  <--- R
```

Poincare polinomunu hesaplamak için *poincare* ifadesi kullanılır

```
i44: poincare kernel f
              3       2
o44 = - $T  + 3$T
o44: ZZ[ZZ^1]
```

Rank hesaplamak için *rank* ifadesi kullanılır.

```
i45: rank kernel f
o45 = 2
```

f'nin çekirdeğini göstermek için *presentation kernel f* ifadesi kullanılır.

```
i46: presentation kernel f

o46 = {2} | x  |
      {2} | z  |
      {2} | -y |
                  3       1
o46: Matrix R  <--- R
```

Hiçbir hesaplama yapmadan *cokernel f* ifadesi kullanılarak *f*'nin eş çekirdeği üretilebilir.

```
i47: cokernel f
o47 = cokernel {0} | x y z |
                                   1
o47: R - module, quotient of R
```

İki modül arasında direk toplam elde etmek için ++ sembolü kullanılır

```
i48: N = kernel f  ++  cokernel f

o48 = subquotient ({1} | 0  -y -z 0 | , {1} | 0 0 0 |)
                   {1} | -z x  0  0 |  {1} | 0 0 0 |
                   {1} | y  0  x  0 |  {1} | 0 0 0 |
                   {0} | 0  0  0  1 |  {0} | x y z |
                                4
o48: R - module, subquotient of R
```

Cevap fonksiyonun terimlerinden oluşacaktır ki bu terimler alt bölüm modüllerini oluşturur. Her bir alt bölüm modülü matrisin üreteçleri ile temsil edilir. Üreteçler için *generatör* ifadesi kullanılır.

```
i49: generators N
o49 = {1}  |0 -y -z  0 |
      {1}  |-z  x  0  0 |
      {1}  | y  0  x  0 |
      {0}  | 0  0  0  1 |

              4      4
o49: Matrix R <--- R
i50: relations N
o50 = {1} | 0  0  0 |
      {1} | 0  0  0 |
      {1} | 0  0  0 |
      {0} | x  y  z |

              4      3
o50: Matrix R  <--- R
```

Alt bölüm modülünü bölüm modülüne çevirmek için *prune* ifadesi kullanılır

```
i51: prune N
```

```
o51 = cokernel {2} | 0 0 0 -y |
               {2} | 0 0 0 z  |
               {2} | 0 0 0 x  |
               {0} | z y x 0  |

                               4
o51 : R - module, quotient of R
```

f’nin eş çekirdeğinin projektif çözümünü hesaplamak için *resolution cokernel* ifadesi kullanılır.

```
i52 : C = resolution cokernel f

       1      3      3      1
o52 = R <-- R <-- R <-- R

      0      1      2      3

o52: ChainComplex
```

Diferansiyel hesabı için *C.dd* kullanılır.

```
i53: C.dd

                      1
o53 = -1: 0 <----- R: 0
                 0

     1                  3
0: R <----------------- R: 1

       {0} | x  y  z |

     3                    3
1: R <-------------------- R : 2

       {1} | -y –z  0 |
       {1} | x   0  -z |
       {1} | 0   x   y |


     3              1
2: R <-------------- R : 3

       {2} |  z   |
       {2} | -y   |
       {2} |  x   |
```

```
o53: ChainComplexMap
```

Diferansiyel fonksiyonunun kareleştirilmesiyle C’ nin kompleks olduğu kanıtlanabilir.

```
i54: C.dd^2 == 0
o54 = true
```

C’ nin bileşenlerinin derecesini bulmak için *betti C* ifadesi kullanılır.

```
i55: betti C
o55  =  total: 1 3 3 1
             0: 1 3 3 1
o55: Net
```

```
i56 : R = ZZ/101[a .. r];
```

R halkasının değişkenleri kullanılarak genericmatrix oluşturulabilir.

```
i57: g = genericMatrix(R,a,3,6)
o57 =  {0} | a  d  g  j  m p |
       {0} | b  e  h  k  n q |
       {0} | c  f   i   l  o  r |
             3         6
o57: Matrix R  <--- R
```

Şimdi g’nin eş çekirdeği oluşturulursa;

```
i58: M = cokernel g
o58 = cokernel {0} | a  d  g  j  m  p |
               {0} | b  e  h  k  n   q |
              {0} | c  f   i  l   o   r |

                     3
```

```
o58: R - module, quotient of R
```

Projektif çözüm daha önce oluşturulmuştu. Bu hesap için ne kadar zaman gerektiğine *time* ifadesi kullanılarak bakılabilir.

```
i59: time C = resolution M
     -- used 0.02 seconds

       3      6     15    18    6
o59 = R <-- R <-- R <-- R <-- R
      0      1      2     3     4

o59 : ChainComplex

i60: betti C
o60 = total: 3   6  15  18  6
          0: 3   6  .    .   .
          1: .   .  .    .   .
          2: .   .  15   18  6
o60: Net
```

18 indeksli bir polinomlar halkası oluşturulursa;

```
i61 : S = ZZ/101[t_1 .. t_9,  u_1 .. u_9];
i62: m = genericMatrix(S,   t_1,  3,  3)
o62 = {0} | t_1  t_4  t_7 |
      {0} | t_2  t_5  t_8 |
      {0} | t_3  t_6  t_9 |

                3      3
o62: Matrix S <--- S

i63: n = genericMatrix(S, u_1, 3, 3)
o63 = {0} | u_1 u_4 u_7 |
```

```
         {0} | u_2 u_5 u_8 |
         {0} | u_3 u_6 u_9 |
                   3          3
o63: Matrix S <--- S
```

Matrislerde çarpma işlemi * sembolü kullanılarak yapılır.

```
i64: m*n
o64 = {0} | t_1u_1+t_4u_2+t_7u_3 t_1u_4+t_4u_5+t_7u_6 t_1u_7+t_4u_8+t_7u_9 |
         {0} | t_2u_1+t_5u_2+t_8u_3 t_2u_4+t_5u_5+t_8u_6 t_2u_7+t_5u_8+t_8u_9 |
         {0} | t_3u_1+t_6u_2+t_9u_3 t_3u_4+t_6u_5+t_9u_6 t_3u_7+t_6u_8+t_9u_9 |
                     3         3
o13 : Matrix S  <--- S
i65 : j = flatten(m*n - n*m)
o65 = {0} | t_4u_2+t_7u_3-t_2u_4-t_3u_7 t_2u_1-t_1u_2+t_5u_2 ...
                   1          9
o65: Matrix S <--- S
```

BÖLÜM 4

MACAULAY2 PROGRAMININ UYGULAMALARI

Bu bölümde Macaulay2 programının kullanım alanlarına çeşitli örnekler verilmiştir. İlk olarak asıl idealler ve ideallerin asıl ayışımı ile ilgili daha sonra Hilbert fonksiyonu, Hilbert serisi, Hilbert polinomu ve serbest çözünürlük ile ilgili uygulamalar yapılmıştır. Bu bölümdeki çalışmalar [4, 11-15] kaynaklarından derlenmiştir.

4.1. Asıl İdealler ve İdeallerin Asıl Ayrışımı

Tanım 4.1.1. Q, R' nin bir ideali olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan sağlayan Q ya R nin bir asıl ideali denir.

$i)$ $Q \subset R$

$ii)$ $a,b \in R$, $ab \in Q$ ise ya $a \in Q$ ya da bir $n \in \mathbb{N}$ için $b^n \in Q$

Ön Teorem 4.1.1.

Q, R değişmeli halkasının bir asıl ideali olsun. Bu durumda $P = \sqrt{Q}$ radikali R 'nin bir asal ideali olup Q ya P*-asıl* denir. P, Q'yu barındıran en küçük asal ideal olup Q' nun tek minimal asal idealidir.

İspat: Q, asıl ideal olup $1 \notin Q$ olduğundan $1 \notin \sqrt{Q} = P$ dir. Bu yüzden P bir öz idealdir. $ab \in \sqrt{Q}$ fakat $a \notin \sqrt{Q}$ olacak şekilde $a,b \in R$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda;

$(ab)^n = a^n b^n \in Q$ olacak şekilde $\exists\ n \in \mathbb{N}$ vardır. Fakat $a \notin \sqrt{Q}$ olup $\exists\ n \in \mathbb{N}$ için $a^n \notin Q$ dur. Q asıl ideal olduğundan $\exists\ n \in \mathbb{N}$ için $b^n \in Q$ yani $b \in \sqrt{Q}$. O halde

P = $\sqrt{Q}$ bir asal idealdir.

Diğer yandan T , R'nin bütün asal ideallerinin kümesinin bir elemanı ve $Q \subseteq T$ ise $T = \sqrt{T} \supseteq \sqrt{Q} = P$ dir. Buradan da P, Q'nun tek minimal asal idealdir.

Tanım 4.1.2. *R* değişmeli bir halka ve *I* ideali *R*'nin bir öz ideali olsun. *I* idealinin *R*'nin sonlu sayıdaki asıl ideallerinin arakesiti olarak ifadesine *I*'nın asıl ayrışımı denir. Buna göre;

$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ için Q_i ideali $P_i - asıl(\sqrt{Q_i} = P_i)$ olmak üzere;

$i)$ P_i ler *R*'nin *n* tane farklı asal ideali

$ii)$ j =1,2,…,n için $\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} Q_i \not\subset Q_j$

şartları sağlanıyorsa $I = Q_1 \cap Q_2 \cap ... \cap Q_n$ asıl ayrışımına *I*'nın minimal asıl ayrışımı denir. Asıl ayrışıma sahip olan bir ideale ayrışabilir bir ideal denir.

Tanım 4.1.3. *R* değişmeli bir halka , $I \lhd R$ ayrışabilir bir ideal ve i =1,…,n ve $\sqrt{Q_i} = P_i$ için $I = Q_1 \cap Q_2 \cap ... \cap Q_n$ I idealinin minimal asıl ayrışımı olsun. Bu durumda *I* idealinin minimal asıl ayrışımının seçiminden bağımsız olan n elemanlı $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ kümesine I idealinin ilişkilendirilmiş asal idealleri (*Associated primes*) denir ve $ass\,I$ veya $ass_R I$ ile gösterilir.

Ön Teorem 4.1.2. *R* değişmeli bir halka, $P \lhd R$ asal ideal ve $n \geq 1$ için $Q_1, ..., Q_n$ R nin $P - asıl$ idealleri olsun. Bu durumda $\bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ ideali de $P - asıl$ idealdir.

İspat:

$\sqrt{Q_1 \cap ... \cap Q_n} = \sqrt{Q_1} \cap ... \cap \sqrt{Q_n} = P \subset R$. Bu $\bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ arakesitinin bir öz ideal olduğunu verir. $ab \in \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ fakat $b \notin \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ olacak şekilde $a, b \in R$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $1 \le j \le n$ ve $b \notin Q_j$ yapan bir j tamsayısı vardır. $ab \in Q_j$ ve Q_j $P-asıl$ olduğundan $a \in P = \sqrt{Q_1 \cap ... \cap Q_n}$ olur.

Böylece;

$\bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ ideali de $P-asıl$ idealdir.

Ön Teorem 4.1.3. *Q*, *R* değişmeli halkasının *P-asıl* ideali ve $f \in R$ olsun.

$i)$ $f \in Q \Rightarrow (Q : f) = R$

$ii)$ $f \notin Q \Rightarrow (Q : f)$ *P-asıldır*.

$iii)$ $f \notin P \Rightarrow (Q : f) = Q$

İspat: $i)$ ispatı açıktır.

$ii)$ Eğer $fg \in Q$ ise $f \notin Q$ ve Q, P- asıl olduğundan $g^n \in Q$ ve $g \in P$ dir. $Q \subseteq (Q : f) \subseteq P$, bu ifadenin radikalini aldığımızda $P = \sqrt{Q} \subseteq \sqrt{(Q : f)} \subseteq \sqrt{P} = P$

Böylece $\sqrt{(Q : f)} = P$ olur. Bu da $Q : f$ nin *P*-asıl olduğunu gösterir.

$iii)$ Bu asıl idealin tanımından doğrudan gelir. Eğer $fg \in Q$ ise $f^n \notin Q$ bu yüzden $g \in Q$ ve $Q : f \subseteq Q$

Sonuç 4.1.1. *R*, birimli ve değişmeli bir halka, $I \lhd R$ bir öz ideal olsun. $i = 1,...,n$ için $\sqrt{Q_i} = P_i$ olacak şekilde $I = Q_1 \cap ... \cap Q_n$, I idealinin asıl ayrışımı olsun.

$j \ne k$ için $P_j = P_k$ $(1 \le j, k \le n)$ oluyorsa Ön Teorem 4.1.2 kullanılarak Q_j ve Q_k bir araya getirilerek I idealini $n-1$ idealin arakekesiti olarak yeniden ifade edebiliriz ki bu I idealinin başka bir asıl ayrışımı olur. Bu şekilde I idealinin minimal asıl ayrışımı elde edilinceye kadar devam edilebilir. Böylece *R*'nin her ayrışabilir idealinin bir minimal asıl ayrışımının olduğunu söyleyebiliriz. Şayet I idealinin t terimli minimal olmayan bir asıl ayrışımı varsa, bu ayrışımdan, t den daha az sayıda terimden oluşan bir minimal asıl ayrışım elde edilebilir.

Teorem 4.1.1. R değişmeli bir halka, $I \lhd R$ ayrışabilir bir ideal ve *i=1,…,n* için $I = Q_1 \cap ... \cap Q_n$ $(\sqrt{Q_i} = P_i)$ I nın asıl ayrışımı olsun. $P \in \mathrm{Spec}(R)$ alalım. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir.

i) $1 \leq i \leq n$ olmak üzere bazı *i*'ler için $P = P_i$ dir.

ii) $(I : a)$ $P - asıl$ olacak şekilde $a \in R$ vardır.

iii) $\sqrt{(I : a)} = P$ olacak şekilde $a \in R$ vardır

İspat:

$(i) \Rightarrow (ii)$: $1 \leq i \leq n$ olmak üzere bazı *i*'ler için $P = P_i$ olsun.

$I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ asıl ayrışımı minimal olup $a_i \in \bigcap\limits_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} Q_j / Q_i$ olacak şekilde a_i elemanı vardır.

$(I : a_i) = \left(\bigcap_{j=1}^{n} Q_j : a_i\right) = \bigcap_{j=1}^{n} (Q_j : a_i)$, fakat $i \notin j$ ve i=1,…,n için $\left(Q_j : a_i\right) = R$ ve $\left(Q_i : a_i\right)$ $P_i - asıl$ dır. $P = P_i$ olduğundan $\left(I : a_i\right)$ $P - asıl$ idealdir.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: $(I : a)$ $P - asıl$ olacak şekilde $a \in R$ olsun. Asıl ideallerin radikali asal ideal olduğundan $(I : a)$ $P - asıl$ ise $\sqrt{(I : a)} = P$ olacak şekilde $a \in R$ vardır

$(iii) \Rightarrow (i)$: $\sqrt{(I : a)} = P$ olacak şekilde $a \in R$ olsun.

$(I : a) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} Q_i : a\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (Q_i : a)$.

$a \in Q_i$ ise $(Q : a) = R$ ve $a \notin Q_i$ ise $(Q : a)$, $P_i - asıl$ dır.

Buradan,

$$P = \sqrt{(I : a)} = \bigcap_{\substack{i=1 \\ a \notin Q_i}}^{n} \sqrt{Q_i : a} = \bigcap_{\substack{i=1 \\ a \notin Q_i}}^{n} P_i$$

elde edilir.

P, R'nin bir öz ideali olduğundan $1 \leq i \leq n$ aralığında en az bir *i* tamsayısı için $P = P_i$ dir.

Örnek 4.1.1. $I=\langle x^2, xy\rangle$ $R=k[x,y]$ de bir ideal olsun.

$\langle x\rangle$ ve $\langle x^2, y\rangle$ I'nın asıl idealleridir. I'nın asıl ayrışımı I'nın sonlu sayıdaki asıl ideallerinin arakesiti olduğu için $I=\langle x^2, y\rangle \cap \langle x\rangle$ dir.

I, tek minimal ilişkilendirilmiş asal ideale $\langle x\rangle$, ve tek gömülebilir ilişkilendirilmiş asal ideale $\langle x, y\rangle$ sahiptir.

$\langle x\rangle \cap \langle x^2, xy, y^2\rangle = I = \langle x^2, y\rangle \cap \langle x\rangle$ şeklinde yazılabileceği için $\langle x^2, xy, y^2\rangle$ ifadesi de asıl idealdir.

Bu çalışma Macaulay2 programında aşağıdaki gibi gösterilir.

```
i1 : R=QQ[x,y]
o1 = R
o1 : PolynomialRing
i2 : intersect(ideal(x),ideal(x^2,x*y,y^2))
                  2
o2 = ideal (x*y, x )
o2 : Ideal of R
i3 : intersect(ideal(x),ideal(x^2,y))
                  2
o3 = ideal (x*y, x )
o3: Ideal of R
i4: o2 = = o3
o4 = true
i5 = radical o2
o5 = ideal x
o5 : Ideal of R
```

Örnek 4.1.2. $I=\langle x^2-x, xy\rangle$ $R=k[x,y]$ de bir ideal olsun. I idealinin Macaulay2 programı kullanılarak asıl ayrışımı bulunursa;

i1 : R=QQ[x,y]

o1 = R

o1 : PolynomialRing

i2 : primaryDecomposition ideal (x^2-x, x*y)

o6 = {ideal (y,x-1) , ideal x }

o6 : List

i7 : (radical ideal (x^2 – x , x*y)) = = ideal (x^2-x , x*y)

o7 = true

Örnek 4.1.3. $I = \langle xy, xz \rangle$ $R = k[x, y, z]$ de bir ideal olsun. I idealinin asıl ayrışımının $I = (x) \cap (y, z)$ olduğu Macaulay2 programınında gösterilirse;

i1 : R=QQ[x,y,z]

o1 = R

o1 : PolynomialRing

i2 : ideal(x*y,x*z)

o2 = ideal (x*y, x*z)

o2 : Ideal of R

i3 : primaryDecomposition ideal (x*y, x*z)

o4 = {ideal (y,z) , ideal x }

o4 : List

i5: intersect (ideal(x),ideal(y,z))

o5 = ideal (x*z, x*y)

o5 : Ideal of R

i6 : (radical ideal (x*y , x*z))==ideal (x*y , x*z)

o6 = true

Örnek 4.1.4. $J = \langle x^3 y \rangle$ $R = k[x, y]$ de bir ideal olsun. J idealinin asıl ayrışımının $J = (x^3) \cap (y)$ olduğu Macaulay2 programınında gösterilirse;

i1 : R=QQ[x,y]

o1 = R

o1: PolynomialRing

```
i2: ideal(x ^3* y)
                 3
o2 = ideal (x   y)
o2 : Ideal of R
i3 : primaryDecomposition ideal (x^3*y)
                  3
o4 = {ideal (x ),  ideal  y }
o4 : List
i5: intersect (ideal(x^3),ideal(y))
                3
o5 = ideal (x  y)
o5 : Ideal of R
i6 : (radical ideal (x^3*y))= =ideal (x^3*y)
o6 = false
```

Bu örnekte $\left(x^3\right)$ asıl idealdir fakat asal ideal değildir.

Örnek 4.1.5. $J = \langle xy \rangle$ $R = k[x, y]$ de bir ideal olsun. J idealinin asıl ayrışımının $J = (x) \cap (y)$ olduğu Macaulay2 programı kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

```
i1 : R=QQ[x,y]
o1 = R
o1 : PolynomialRing
i2 : intersect (ideal(x),ideal(y))
o2 = ideal(x*y)
o2 : Ideal of R
i3 : radical o2
o3 = ideal(x*y)
o3 : Ideal of R
```

Bu örnekte (x) ve (y) minimal asal ideallerdir.

4.2. Hilbert Fonksiyonu ve Hilbert Serisi

Tanım 4.2.1. $\dim_k\left(k\left[x_0,...,x_n\right]_i\right)=\binom{n+i}{i}$ dir.

Tanım 4.2.2. *M*, sonlu üretilmiş katmanlı modül olmak üzere Hilbert fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$HF\left(M,i\right)=\dim_k M_i \tag{4.2.1}$$

Tanım 4.2.3. *M*, sonlu üretilmiş katmanlı modül olmak üzere Hilbert serisi aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$HS(M,t)=\sum_{i\in \mathrm{Z}} HF(M,i)t^i \tag{4.2.2}$$

M , $k\left[x_1,...,x_n\right]$ üzerinde sonlu üretilen katmanlı modül ise $P(t)\in\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ iken $HS\left(M,t\right)=\dfrac{P(t)}{(1-t)^n}$ şeklindedir.

Örnek 4.2.1. $R=k[x,y,z]$ ve $I=\left\langle x^3+y^3+z^3\right\rangle$ olsun. Burada *i*.dereceden R/I nın boyutu; *i*. dereceden *R*'nin boyutundan *i*. dereceden *I*'nın boyutunun çıkarılması ile elde edilir. *I* ideali 3. dereceden üretilmiş temel idealdir. Bu yüzden *I*'nın *i*.dereceden boyutu, *R*'nin (*i*-3). dereceden bouyutuna eşittir.

$$\dim(R/I)_i=\binom{i+2}{2}-\binom{i-1}{2}=3i$$

ve buradan,

i	0	1	2	3	4	…
$HF(R/I,i)$	1	3	6	9	12	…

şeklindedir.

Şimdi Hilbert serisi oluşturulursa;

$$HS(R/I,t) = 1.t^0 + 3t^1 + 6t^2 + 9t^3 + \ldots$$

$$= 1 + 3t(1 + 2t + 3t^2 + \ldots)$$

$$= 1 + \frac{3t}{(1-t)^2}$$

$$= \frac{1+t+t^2}{(1-t)^2}$$

Bu örnek Macaulay2 programında hesaplanırsa;

```
i1 : R=ZZ/101[x, y, z];
i2 : I=matrix{{x^3+y^3+z^3}}
o2 = {0} | x3+y3+z3 |

                 1         1
o2: Matrix R  <--- R
i3: hilbertFunction(3, coker I)
o3 = 9
i4: poincare R
o4 = 1
o4: ZZ[ZZ^1]
i5: poincare coker I
             3
o5 = - $T  + 1
o5: ZZ[ZZ^1]
i6: Q=R/ideal I
o6 = Q
o6: QuotientRing
i7: hilbertSeries Q
              2
           $T  + $T + 1
o7 =    ------------------
                        2
            (- $T + 1)
```

Sonuç olarak;

$$HS(R/I,t) = \frac{1+t+t^2}{(1-t)^2}$$

elde edilir.

Örnek 4.2.2. $R = k[x,y,z]$ ve $I = \langle x^3 + y^3 + z^3 \rangle$ olsun I idealine bir lineer form ekleyerek $J = I + \langle x \rangle$ idealini oluşturalım

$R/J = k[y,z]/\langle y^3 + z^3 \rangle$ olduğundan Hilbert fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} HF(R/J,i) &= \dim_k k[y,z]_i - \dim_k k[y,z]_{i-3} \\ &= \binom{i+1}{i} - \binom{i-2}{i-3} \end{aligned}$$

Buradan,

i	0	1	2	3	4	…
$HF(R/J,i)$	1	2	3	3	3	…

şeklinde olur.

Şimdi de Hilbert serisi oluşturulursa;

$$\begin{aligned} HS(R/J,t) &= 1.t^0 + 2t^1 + 3t^2 + 3t^3 + \dots \\ &= 1 + 2t + 3t^2(1 + t + t^2 + \dots) \\ &= 1 + 2t + \frac{3t^2}{1-t} \\ &= \frac{1+t+t^2}{1-t} \end{aligned}$$

Bu örnek Macaulay2 programında hesaplanırsa;

```
i1 : R=ZZ/101[x, y, z];
i2: J=matrix{{x, x^3+y^3+z^3}}
```

```
o2 = {0} | x x3+y3+z3 |
                 1           2
o2: Matrix R  <--- R
i3: poincare coker J
         4       3
o3 = $T  - $T  - $T + 1
o3: ZZ[ZZ^1]
i4: L=R/ideal J
o4 = L
o4 : QuotientRing
i5: hilbertSeries L
                 2
             $T  + $T + 1
o5 =     -------------------
              (- $T + 1)
o5: Divide
```

Sonuç olarak;

$$HS\left(R/J,t\right)=\frac{1-t-t^3+t^4}{(1-t)^3}=\frac{1+t+t^2}{1-t}$$

elde edilir.

Örnek 4.2.3. $R=k\left[x,y\right]/\left\langle x^2,y^2\right\rangle$ olsun. R'nin Hilbert serisinin toplamının $1+2t+t^2$ olduğu Macaulay2 programında gösterilirse;

```
i1: R=ZZ/31991[x, y];
i2: poincare coker matrix {{x^2,y^2}}

          4         2
o2 = $T  - 2$T  + 1
o2 : ZZ[ZZ^1]
i3 : factor o2
```

```
           2           2
o3 = ($T - 1) ($T + 1) (1)

o3 : Product

i4: Q=R/ideal(x^2,y^2)

o4 = Q

o4: QuotientRing

i5: poincare Q

           4       2
o5 = $T  - 2$T  + 1

o5: ZZ[ZZ^1]

i6: hilbertSeries Q

        2
     $T  + 2$T + 1
o6 = -------------
           1

o6: Divide
```

sonuç olarak;

$$HS\left(R/I,t\right)=\frac{1-2t^2+t^4}{(1-t)^2}=1+2t+t^2$$

elde edilir.

Tanım 4.2.4. *M,* sonlu üretilen katmanlı modül olsun. $f(x)\in Q\left[x\right]$ ve $i>0$ için $HF(M,i)=f(i)$ ise $f(i)$'ye *M'* nin Hilbert polinomu denir ve $HP\left(M,i\right)$ şeklinde yazılır.

Örnek 4.2.4. $R=\left[x,y,z\right]$ ve $I=\left\langle x^3+y^3+z^3\right\rangle$ olsun. *R/I* nın Hilbert polinomu Macaulay2 programı kullanılarak aşağıdaki gibi hesap edilir.

```
i1 : R=ZZ/101[x,y,z];

i2 : m=matrix {{x^3+y^3+z^3}}
```

o2 = {0} | x3+y3+z3 |

1 1

o2 : Matrix R <--- R

i3 : hilbertPolynomial coker m

o3 = - 3*P + 3*P

0 1

o3 : ProjectiveHilbertPolynomial

i4 : I= ideal m;

o4 : Ideal of R

i5 : codim I

o5 = 1

i6 : degree I

o6 = 3

$P_n = \binom{n+i}{i}$ olduğu için;

$$HP\left(R/I,i\right) = f(i) = -3P_0 + 3P_1 = 3i$$

şeklindedir.

Örnek4.2.5. $R = k[x,y,z,w]$ olsun. $I = \left\langle w^2 - yw, xw - 3zw, x^2y - y^2z - 9z^2w + zw^2, x^3 - 3x^2z - xyz + 3yz^2 \right\rangle$ ise R/I nın Hilbert polinomu Macaulay2 programı kullanılarak aşağıdaki gibi hesap edilir.

i1: R=ZZ/101[x,y,z,w];

i2: m=matrix{{w^2-y*w,x*w-3*z*w,x^2*y-y^2*z-9*z^2*w+z*w^2,x^3-3*x^2*z-x*y*z+3*y*z^2}}

o2 = {0} | -yw+w2 xw-3zw x2y-y2z-9z2w+zw2 x3-3x2z-xyz+3yz2 |

1 4

o2 : Matrix R <--- R

```
i3 : hilbertPolynomial coker m
o3 = - P  + 3*P
        0      1
o3 : ProjectiveHilbertPolynomial
i4 : I= ideal m;
o5 : Ideal of R
i6 : codim I
o6 = 2
i7 : degree I
o7 = 3
```

sonuç olarak;

$$HP\left(R/I,i\right)=f(i)=-P_0+3P_1=3i+2$$

şeklindedir.

Örnek 4.2.7. $R=k\left[x,y,z\right]$ ve $I=\left\langle x^2-xz,y^3+yz^2\right\rangle$ olsun. *R/I* nın Hilbert polinomu Macaulay2 programı kullanılarak aşağıdaki gibi hesap edilir.

```
i1 : R=ZZ/101[x,y,z];
i2 : m=matrix{{x^2-x*z,y^3-y*z^2}}
o2 = {0} | x2-xz y3-yz2 |


                 1        2
o2 : Matrix R  <--- R
i3 : hilbertPolynomial coker m
o3 = 6*P
        0
o3 : ProjectiveHilbertPolynomial
i4 : I=ideal m;
o4 : Ideal of R
i5 : codim I
o5 = 2
```

i6 : degree I
o6 = 6

Buradan,

$$HP\left(R/I,i\right) = f(i) = 6P_0 = 6$$

şeklinde olur.

4.3. Serbest Çözünürlük

Teorem 4.3.1 (*Hilbert syzygy teorem***):** *M*, $R = k\left[x_1,...,x_n\right]$ polinom halkası üzerinde sonlu üretilen katmanlı modül ve F_i sonlu üretilen serbest modül olmak üzere

$$0 \to F_n \to F_{n-1} \to ... \to F_1 \to F_0 \to 0$$

olacak şekilde katmanlı tam dizisi vardır.

Örnek 4.2.1 de $R = k\left[x,y,z\right]$ polinomsal halka ve $I = \left\langle x^3 + y^3 + z^3 \right\rangle$ temel ideal olmak üzere R/I katmanlı modülü üzerinde çalışılmıştı. Başka bir ifade ile

$$0 \to R(-3) \xrightarrow{\left(x^3+y^3+z^3\right)} R \to R/\left\langle x^3 + y^3 + z^3 \right\rangle \to 0$$

olacak şekilde katmanlı tam dizisi vardır.

I'ya $\langle x \rangle$ ekleyerek x değişkenini yok ettiğimizde iki değişkenli bir halka için katmanlı tam dizisi hesaplanabilir. Fakat katmanlı tam dizisini başka bir şekilde aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz.

$$0 \to R(-4) \to R(-1) \oplus R(-3) \xrightarrow{[x,x^3+y^3+z^3]} R \to R/\left\langle x, x^3 + y^3 + z^3 \right\rangle \to 0$$

Şimdi de bu örnek Macaulay2 programında hesaplanırsa;

```
i1: R=ZZ/101[x,y,z]
o1 = R
o1 : PolynomialRing
```

M modülü verildiğinde *res* komutu serbest çözünürlüğü hesaplar ve çözünürlük içindeki modülleri görüntüler.

```
i2 : Mr = res coker matrix {{x,x^3+y^3+z^3}}

      1      2      1
o2 = R  <-- R  <-- R
     0      1      2

o2 : ChainComplex
```

Çözünürlük elde edildiğinde, çözünürlüğün isminin sonuna *.dd* son eki eklenerek tüm ayrıntılar görülebilir.

```
i3 : Mr.dd
                         1
o3 = -1 : 0 <----- R  : 0
                   0
            1                    2
       0 : R  <------------------ R  : 1
            {0} | x y3+z3 |
            2                    1
       1 : R  <------------------ R  : 2
           {1} | -y3-z3 |
           {3} | x      |
o3 : ChainComplexMap
i4 : betti Mr
o4 = total: 1 2 1
        0: 1 1 .
        1:  .  .  .
        2: .  1 1
```

```
o4 : Net
```

Örnek 4.3.2. $k[x,y]/\langle x^2, y^2 \rangle$ modülünün serbest çözünürlüğü Macaulay2 programında aşağıdaki gibi hesap edilir.

```
i1 : R=ZZ/101[x,y]
o1 = R
o1 : PolynomialRing
i2 : N = res coker matrix {{x^2,y^2}}
      1      2      1
o2 = R  <-- R  <-- R
     0      1      2
o2 : ChainComplex
i3 : N.dd
                  1
o3 = -1 : 0 <----- R  : 0
                  0

       1                 2
   0 : R  <----------------- R  : 1
          {0} | x2 y2 |

       2               1
   1 : R  <--------------- R  : 2
          {2} | -y2 |
          {2} | x2  |
o3 : ChainComplexMap
i4 : betti N
o4 = total: 1 2 1
         0: 1 .  .
         1: . 2  .
         2: .  .  1
```

Örnek 4.3.3. $R = k[x, y, z]$ ve $I = \langle x^2 - xz, y^3 + yz^2 \rangle$ olsun. *R/I* nın Macaulay2 programı kullanılarak serbest çözünürlüğü ve bu çözünürlük içindeki modülleri aşağıdaki gibi hesap edilir.

```
i1 : R=ZZ/101[x,y,z]
o1 = R
o1 : PolynomialRing
i2 : M = res coker matrix {{x^2-x*z,y^3+y*z^2}

         1       2      1
o2 = R  <-- R  <-- R
          0      1      2
 o2 : ChainComplex
i3 : M.dd
                          1
o3 = -1 : 0 <----- R  : 0
                    0

          1                               2
    0 : R  <------------------------ R  : 1
            {0} | x2-xz y3+yz2 |

          2                          1
    1 : R  <------------------- R  : 2
            {2} | -y3-yz2 |
            {3} | x2-xz   |
o3 : ChainComplexMap
i4 : betti M
o4 = total: 1 2 1
           0: 1 . .
           1:  . 1  .
           2: .  1  .
           3: .  .  1
```

BÖLÜM 5

SONUÇLAR

Bu çalışma boyunca görüldüğü gibi Cebirsel Geometride çeşitli uygulamalar yapılmıştır. Cebirsel Geometrideki bazı problemleri sadece teoride bırakmayıp görsel hale getirerek daha da anlaşılır hale gelmesine yardımcı olunmuştur.

Macaulay2 programının özellikle Cebirsel Geometride kullanılmasının bir sebebi de şekil bilgisinin oldukça anlaşılır olmasıdır. Son yıllarda Hesaplama ve Algoritmadaki ilerlemeler Cebir ve Cebirsel Geometrideki problemlerin hesaplanabilir olduğunu göstermektedir. Macaulay2 programında algoritmalar yazılarak ve bu programda uygulamalar yapılarak bu işe bir katkı sağlanabilir.

Sonuç olarak Macaulay2 programı, karmaşık ve soyut olan cebirsel problemleri daha basit hale getirerek ve içeriğini ortaya çıkararak daha da anlaşılır hale gelmesine yardımcı olmuştur.

KAYNAKLAR

[1] Atiyah, M.F. ve Macdonald, I.G. (1969), *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publshing Company, 83-84

[2] Eisenbud, D. (1995), *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic geometry*, University of California Berkeley, 87–89

[3] Eisenbud, D., Grayson D., Stillman, M. ve Sturmfels B. (2001), *Computations in Algebraic Geometry with Macaulay 2*, Springer-Verlag, 1-5

[4] Grayson, D.R. ve Stillman M.E.(1993), *Macaulay 2*, A program for commutative algebra and algebraic geometry, available at: *http://math.uiuc.edu/Macaulay2*

[5] Grayson, D.R. ve Stillman M.E. (1993), *Macaulay 2 A System for Computations in Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, University of Illinois at Urbana-Champaign, 27-37

[6] Hungerford, T. W. (1974), *Algebra*, Springer, New York, 190–193

[7] Kreuzer, M. ve Robbiano, L. (2000), *Computational Commutative Algebra*, ***2***, Springer-Verleg, 20-21

[8] Leykin, A. (2003), *Algorithms in Computational Algebraic Analysis*, Phd. Thesis, University of Minnesota

[9] Northcott, D. G. (1968), *Lessons on Rings, Modules and Multiplicites***,** Cambridge University Press, 112-118

[10] Olgun, N. ve Şahin, M. (2010), *Soyut Cebir*, Gaziantep, 85–123

[11] Schenck, H. (2003), *Computational Algebraic Geometry,* Cambridge University Press, 4–39

[12] Sharp, R.Y. (1990), *Steps in Commutative Algebra*, Cambridge University Press,101–120

[13] Sharp, R.Y. (2000), *Steps in Commutative Algebra* (2^{th} ed.), Cambridge University Press, 62-77, 145-149

[14] Stillman, M. (2003), *Tools for computing primary decompositions and applications to ideals associated to Bayesian Networks*, A. Dickenstein (eds.). Solving Polynomial Equations, Springer, 203-207

[15] Vasconcelos, W.V. (1998), *Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Springer, 368–370