GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# FİTTİNG İDEALLER

MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

SÜMEYRA KÖMEKÇİ
OCAK 2011

# Fitting Idealler

**Gaziantep Üniversitesi**
**Matematik Bölümü**
**M.Sc. Tezi**

**Danışman**
**Yrd.Doç.Dr.Necati OLGUN**

**Sümeyra KÖMEKÇİ**
**OCAK 2011**

**T.C.**
**GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

Tezin Adı: Fitting İdealler
Öğrencinin, Adı Soyadı: Sümeyra KÖMEKÇİ
Tez Savunma Tarihi: 27/01/2011

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ramazan KOÇ
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

| Jüri Üyeleri: | İmzası |
|---|---|
| Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN | ............................ |
| Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN | ............................ |
| Yrd. Doç. Dr. Ali BOZKURT | ............................ |

# ÖZET

## FİTTİNG İDEALLER

KÖMEKÇİ, Sümeyra
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN
Ocak 2011, 37 sayfa

Bu tezin amacı modüllerin fitting ideallerinin bulunması ve bunlarla ilgili sonuçların elde edilmesidir. Bu yüzden öncelikle halka, ideal, modül tanımları ve bazı önemli teoremleri verilmiştir. Daha sonra fitting idealler ve özellikleri incelenmiştir.

Tezde ilk olarak fitting ideallerin tarihi gelişimi ve önemi verilmiştir.

İkinci olarak halka, ideal ve modül ile ilgili temel tanım ve teoremler üzerinde durulmuştur.

Daha sonra, fitting idealler ve özellikleri hakkında genel bilgiler verilip, fitting idealler ile ilgili yapılan çalışmalar incelenmiştir.

Son olarak da evrensel modüllerin fitting idealleri bulunmuş ve birtakım sonuçlar elde edilmiştir.



**Anahtar Kelimeler:** Halka, Lokal Halka, Noetherian Halka, İdeal, Modül, Serbest Modül, *R*-modül, Projektif Modül, Fitting İdeal.

## ABSTRACT

## FITTING IDEALS



KÖMEKÇİ, Sümeyra
M.Sc. in Department of Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Necati OLGUN


January 2011, 37 pages



The aim of this thesis, fitting ideals of modules are found and some results are obtained. For that reason first rings, ideals and modules definitions and some important theorems are given. After that fitting ideals and features are studied.

First of all in thesis, the importance and historical development of fitting ideals are given.

Secondly rings, ideals and modules focuses on the basic definitions and theorems.

Then fitting ideals and general information about its features are given and studies about fitting ideals are studied.

Finally, fitting ideals of universal modules are found and some results are obtained.



**Key Words**: Ring, Local Ring, Noetherian Ring, Ideals, Module, *R*-module, Free Module, Projective Module,Fitting Ideals.

## TEŞEKKÜRLER

Bu çalışma süresince gösterdiği yol ve yöntemlerle desteğini esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN’ a ve bölümdeki diğer bütün hocalarıma, ayrıca bana maddi ve manevi her türlü desteği sağlayan aileme, kardeşlerime ve özellikle tez yazımı aşamasında desteğini esirgemeyen kardeşim Seyfullah Kömekçi ‘ye sonsuz teşekkürler ederim.

## İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... i
ABSTRACT ..... ii
TEŞEKKÜRLER ..... iii
İÇİNDEKİLER ..... iv
SEMBOLLER DİZİNİ ..... v

BÖLÜM 1 : GİRİŞ ..... 1

BÖLÜM 2 : HALKALAR VE MODÜLLER ..... 3
2.1. Halkalar ..... 3
2.2. İdealler ..... 3
2.3. Modüller ..... 4
2.4. Alt Modüller ..... 5
2.5. R-Modül Homomorfizmaları ..... 10
2.6. Serbest R-Modüller ..... 15
2.7. Projektif R-Modüller ..... 17

BÖLÜM 3 : FİTTİNG İDEALLER ..... 20
3.1. Fitting İdealler ve Özellikleri ..... 20

BÖLÜM 4 : SONUÇLAR ..... 36
KAYNAKLAR ..... 37

## SEMBOLLER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $I \lhd R$ | I, R ‘nin ideali |
| $(G_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ | M’ nin alt modüllerinin ailesi |
| $Ann_R(J)$ | J’ nin sıfırlayanı |
| $\tau(M)$ | M modülünün torsion elemanlarının kümesi |
| $pd_R(M)$ | M, R modülünün projektif boyutu |
| $Fitt_i(M)$ | M modülünün i_inci fitting ideali |
| $\mu(M)$ | M modülünün minimal üreteç sayısı |
| $\Omega_n(R)$ | n_inci dereceden evrensel türev modülü |
| $\dim R$ | R’ nin Krull boyutu |
| $Q(R)$ | R’ nin kesir cismi |
| $spec(R)$ | Spectrum R |
| $Ass(R)$ | Associated prime R |

# BÖLÜM 1

## GİRİŞ

$R$ birim elemanlı değişmeli halka ve $M$ sonlu üretilmiş $R$-modül olsun. Her $M$ modül bir serbest modülün homomorfik görüntüsü olduğundan $0 \to K \to R^n \xrightarrow{\alpha} M \to 0$ kısa tam dizisi elde edilir. Hans Fitting bu dizide $M$ ‘nin birtakım özelliklerini incelemiştir. Böylece bir modülün fitting ideali ilk olarak Hans Fitting tarafından tanımlanmıştır.

Hans Fitting bu çalışmasında $M$ ’nin fitting ideallerini bularak, bu ideallerin artan dizisini sonlu abelyen gruplar için genelleştirmiştir. $M$ ‘nin fitting ideallerini $Fitt(M)$ ile gösterelim. Fitting ideallerin en önemli özellikleri aşağıdaki gibi özetlenebilir;

$S$ $R$ ‘de çarpımsal kapalı bir küme ise o zaman, $R_S = S^{-1}R$ bölümlü halkasında $Fitt(M)_S = Fitt(M_S)$ ‘dir. $M$ sonlu üretilmiş $R$-modül ve $0 \to A \to B \to M \to 0$ kısa tam dizisi ise $M$ aşağıdaki koşulları sağlar;

i) $M$ ‘nin sıfırlayanı sıfır bölensiz bir eleman içerir.

ii) $M$ ’nin homolojik boyutu en fazla 1 ‘dir. O zaman $Fitt(A).Fitt(M) = Fitt(B)$ ‘dir.

Sonuç olarak $R$ noetherian halka, $M$ $R$-modül ve $M$ yukarıdaki şartları sağlıyorsa o zaman $Fitt(M)$ $R$ ‘nin tersinir idealidir.

Fitting ideallerle ilgili çalışmaları, Macrae ‘nin On an Application of the Fitting Invariants (1964), E. Kunz ‘ın Algebraic Disserential Calculus (2002), A. E. Nuccio Filipo ‘nun Fitting Ideals (1990), Necati Olgun ‘un Sonlu Üretilmiş

Cebirlerin Evrensel Diferansiyel Modülleri (2005), Hans Fitting ‘in Die Determantanideale Eines Moduls (1936) yapmış oldukları çalışmalarda görmekteyiz.

Tezde ilk olarak fitting ideallerin tarihi gelişimi ve önemi anlatılarak giriş yapılmıştır.

İkinci bölümde halka, ideal ve modüllerle ilgili temel tanım ve teoremler verilmiş, belli başlı özellikleri ve modüllerle ilgili bilinen sonuçlar incelenmiş, bazıları ispatlarıyla birlikte verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise fitting idealin tanımı ve özellikleri verilerek, önemli teorem ve sonuçları ispatıyla birlikte verilmiştir. Son olarak da evrensel modüllerin fitting idealleri bulunmuş ve birtakım sonuçlar elde edilmiştir.

# BÖLÜM 2

## HALKALAR VE MODÜLLER

Bu bölümde fitting ideallere temel oluşturacak şekilde halka, ideal ve modül tanımları ile bazı teoremler verilmiştir.

### 2.1 Halkalar

**Tanım 2.1.1** $R \neq \emptyset$ üzerinde tanımlı ikili işlem olsun. Genellikle bu işlemler toplama ve çarpma sembolü ile gösterilir. Aşağıdaki şartları sağlayan ($R,+,\cdot$) 'ya bir halka denir.

**1)** ($R,+$) bir değişmeli gruptur.

**2)** $\forall$ $a,b$ için $ab \in R$ ‘dir.

**3)** $\forall$ $a,b,c \in R$ için $a(bc)=(ab)c$ ‘dir.

**4)** $\forall$ $a,b,c \in R$ için $(a+b)c = ac+bc$

$$a(b+c) = ab+ac \text{ ‘dir.}$$

Eğer $\forall$ $a,b \in R$ için $ab=ba$ oluyorsa $R$ 'ye değişmeli halka denir. $\forall$ $a \in R$ için $1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a$ oluyorsa $R$ 'ye birim elemanlı halka denir. [9]

### 2.2 İdealler

**Tanım 2.2.1** $R$ bir halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun.

**1)** $\forall x,y \in I$ için $x$ - $y \in I$

**2)** $\forall r \in R$ ve $x \in I$ için $xr \in I$ ve $rx \in I$ şartlarını sağlayan $I$ kümesine $R$ 'nin bir ideali denir ve $I \lhd R$ ile gösterilir. Sadece $xr \in I$ oluyorsa $I$ 'ya sağ ideal, $rx \in I$ oluyorsa $I$ 'ya sol ideal denir. [9]

**Tanım 2.2.2** $R$ bir halka ve $X \subseteq R$ için;

$\{I_i : \forall i \in I, I_i \lhd R \quad ve \quad X \subseteq I_i\}$

idealler ailesi olsun. O zaman $\bigcap_{i \in I} I_i$ ‘ye $X$ kümesi tarafından üretilen ideal denir ve $(X)$ ile gösterilir. $X$ ’in elemanlarına $(X)$ idealinin üreteçleri denir.

$X = \{x_1,...,x_n\}$ ise $(X) = (x_1,...,x_n)$ ile gösterilir ve $(X)$ idealine sonlu üretilmiştir denir.

Tek bir eleman tarafından üretilen ideale temel ideal denir. [10]

**Tanım 2.2.3** $R$ bir halka ve $P \neq R$ olacak şekilde $P \lhd R$ olsun. $\forall a, b \in R$ için;

$a.b \in P \Rightarrow a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa $P$ ’ye bir asal ideal denir. [9]

**Tanım 2.2.4** $R$ bir halka ve $M \neq R$ olacak şekilde $M \lhd R$ olsun. $M \subseteq N \subseteq R$ olacak şekilde her $N \lhd R$ ideali için $M = N$ veya $N = R$ oluyorsa $M$ ’ye $R$ ’nin bir maksimal ideali denir. [9]

## 2.3 Modüller

**Tanım 2.3.1** $R$ birim elemanlı ve değişmeli bir halka, $M$ değişmeli bir grup olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $M$ ‘ye $R$-modül denir.

$$\cdot : R \times M \to M$$
$$(r, m) \to r.m$$

**i)** $\forall\ r \in R$ , $m, m' \in M$ için $r(m + m') = rm + rm'$

**ii)** $\forall\ r, r' \in R$ , $m \in M$ için $(r + r')m = rm + r'm$

**iii)** $\forall\ r, r' \in R$ , $m \in M$ için $(r.r')m = r(r'm)$

**iv)** $\forall\ m \in M$ için $1_R m = m$ [10]

**Örnek 2.3.2** Bir $K$ cismi üzerinde modül, $K$ üzerinde bir vektör uzayıdır. [10]

**Örnek 2.3.3**

**1-** Her değişmeli grup, tamsayılar halkası üzerinde bir $Z$-modül olarak düşünülebilir. $G$ değişmeli grup olsun.

$$\mu : \mathrm{Z} \times G \to G$$

$$(n,g) \to \mu(n,g) = ng = g + g + .........+ g \ , \ g \in G, \ \ n \in \mathrm{Z}$$

modül yapısı vardır.

**2-** $R$ değişmeli halka, $I \triangleleft R$ olsun;

**i)** $R$ ' nin kendisi $R$-modüldür.

**ii)** $I$ , $R$-modüldür.

**iii)** $R/I$ bölüm halkası bir $R$-modüldür.

$r \in R$ ve $R/I$ içinde $s, s' \in R \ \ s + I = s' + I$

$$\Rightarrow s - s' \in I \Rightarrow rs - rs' = r(s - s') \in I \Rightarrow rs + I = rs' + I$$

$$\begin{array}{l} R \times R/I \to R/I \\ (r, s + I) \to rs + I \end{array} \quad R\text{-modül yapısı vardır.}$$

**3-** $R$ değişmeli halka ve $f : R \to S$ halka homomorfizma yapısı ile $S$ bir $R$ cebir olsun. O zaman $S$ bir $R$-modüldür ve

$$\begin{array}{l} R \times S \to S \\ (r, s) \to f(r)s \end{array}$$

yapısı kurulur.

**4-** $R$, $S$ değişmeli halka ve $f : R \to S$ halka homomorfizması olsun. Eğer $G$, $S$-modül ise $G$ aynı zamanda $R$-modüldür.

$$\begin{array}{l} R \times G \to G \\ (r, g) \to f(r)g \end{array}$$

**2.4 Alt Modüller**

**Tanım 2.4.1** $M$ $R$-modül ve $G \subseteq M$ olsun. $G$ $R$-modül ise $G$'ye $M$'nin alt modülü denir. [10]

**Önerme 2.4.2** $R$ değişmeli halka ve $G$, $M$ $R$-modülünün bir altkümesi olsun. O zaman $G$, $M$ 'nin alt modülüdür $\Leftrightarrow \forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall r \in R$ için $g_1 + g_2 \in G$ ve $rg \in G$ 'dir. [10]

**Önerme 2.4.3** $M$ ’nin alt modüllerinin boş olmayan herhangi bir ailesinin kesişimi yine bir alt modüldür.

$R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül, $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ $M$ ’nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ tarafından üretilen $M$ ’nin alt modüllerinin toplamını $\sum_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ ile göstereceğiz. $\Lambda=\varnothing$ ise $\sum_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda = 0$ ‘dır.

i) $\sum_{i=1}^{n} G_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} g_i : g_i \in G_i \text{ için } \quad i=1,.......n \right\}$

ii) $j_1, j_2, ........, j_n \in M$ olsun. $j_1, j_2, ........, j_n$ tarafından üretilen $M$ ’nin alt modülü $Rj_1 + Rj_2 + ....... + Rj_n$ ‘dır. [10]

**Tanım 2.4.4** $R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül, $I$, $J \lhd R$ ve $IM$, $M$ ’nin alt modülü olsun.

$IM$, $\{rg \ : \ \mathrm{r}\in I, \ \mathrm{g}\in M\}$ kümesi tarafından üretilir. Aşağıdaki özelliklere sahiptir;

i) $IM = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i g_i : r_i \in I, g_i \in M, n \in IN \right\}$

ii) $I(JM) = (IJ)M$

iii) $a \in R$ için $(Ra)M$ ‘nin yerine $aM$ yazılır.

$(Ra)M = \{am \ : \ m \in M\}$ [10]

**Tanım 2.4.5** $R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül, $G$ $M$ ’nin bir alt modülü ve $J \subseteq M$ olacak şekilde $J \neq \varnothing$ olsun.

$$(G:J) = (G:_R J) = \{\ r \in R \ : \forall\, j \in J \ için\ rj \in G\}$$

ideal olarak tanımlanır.

Eğer $N$, $J$ tarafından üretilen $M$ ‘nin alt modülü ise $(G:J)=(G:N)$ ‘dir. $m \in M$ için $(G:\{m\})$ ‘nin yerine $(G:m)$ yazılır.

Eğer $G=0$ ise $(0:J)=\{\, r\in R : \forall j\in J \;\; için\; rj=0\}$ kümesine $J$'nin sıfırlayanı denir ve $Ann_R(J)$ ya da $Ann(J)$ ile gösterilir. Aynı zamanda $m\in M$ için m ‘nin sıfırlayanı (0 : m) ile gösterilir. [10]

**Önerme 2.4.6** $I \triangleleft R$ değişmeli haka olsun. $I = Ann_R(R/I) = (0:_R 1+I)$ [10]

**Önerme 2.4.7** $R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül ve $N$, $N'$, $G$ $M$'nin alt modülü ve $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ve $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ $M$'nin alt modüllerinin iki ailesi olsun.

***i)*** $(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda : N) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(G_\lambda : N)$

***ii)*** $(G:\sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(G:N_\lambda)$ (veya $Ann(N+N') = Ann(N)\cap Ann(N')$) [10]

**Tanım 2.4.8** $R$ değişmeli halka , $M$ $R$-modül ve $I$, $I\subset Ann(M)$ olacak şekilde $R$ ‘nin ideali olsun. $M$ üzerinde $R/I$ modül yapısı kuralım.

$r,r'\in R$ $r+I=r'+I$ ve $m\in M$ olsun. O zaman $r-r'\in I\subseteq Ann(M)$ ve böylece $(r-r')m=0$ ve $rm=r'm$ olur.

Böylece $\begin{array}{c} R/I\times M\to M \\ (r+I,m)\to rm \end{array}$ bir dönüşüm tanımlanabilir.

$M$ üzerinde $R$-modül ve $R/I$ modül yapıları aşağıdaki yolla yapılır.

Her $r\in R$, $m\in M$ için $(r+I)m=rm$

$G$ $M$'nin bir alt $R$-modülüdür $\Leftrightarrow$ $G$ $M$'nin bir alt $R/I$ modülüdür. [10]

**Tanım 2.4.9** $R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül, $G$ $M$'nin alt modülü ve $I\triangleleft R$ olsun. O zaman $(G:_m I)=\{m\in M \;:\forall r\in I \; için \; rm\in G\}$ $M$'nin alt modülü ve $G\subseteq (G:_m I)$ ‘dir.

Eğer $G=0 \Rightarrow (0:_m I)=\{\, m\in M : \forall r\in I \;\; için \;\; rm=0\}$'dır. [10]

**Önerme 2.4.10** $R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül, $G$ $M$ 'nin alt modülü, $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ $M$ 'nin alt modüllerinin bir ailesi, $K, I, J \lhd R$, $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ $R$ 'nin ideallerinin bir ailesi olsun.

***i)*** $((G :_m J) :_m K) = (G :_m JK) = ((G :_m K) :_m J)$

***ii)*** $(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda :_m I) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (G_\lambda :_m I)$

***iii)*** $(G :_m \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (G :_m I_\lambda)$ dir. [10]

**Tanım 2.4.11** $R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül ve $G$, $M$ nin bir alt modülü olsun. ($G$, $M$ toplamsal değişmeli grubunun bir alt grubudur.) $M/G = \{m + G : m \in M\}$ bölüm grubunu oluşturabiliriz.

$$m + G = m' + G \Leftrightarrow m - m' \in G$$

$$\forall \ m, x \in G \text{ için } (m+G) + (x+G) = (m+x) + G$$

Böylece $\begin{array}{c} R \times M/G \to M/G \\ (r, m+G) \to rm + G \end{array}$ $M/G$ değişmeli grubu bir $R$-modüldür. Bu $M$ $R$-modüle, $M$ 'nin bölüm modülü denir ve $M/G$ ile gösterilir. [10]

**Önerme 2.4.12** $R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül ve $I \lhd R$ olsun. O zaman $I \subseteq Ann_R(M/IM)$ ve $M/IM$, her $r \in R$ ve $m \in M$ için $(r+I)(m+IM) = rm + IM$ ile $R/I$ yapısına sahiptir. [10]

**Önerme 2.4.13** $R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül ve $G$, $M$ 'nin bir alt modülü olsun.

***i)*** $G'$, $M$ 'nin alt modülü yani $G' \supseteq G$ ise $G'/G$ , $M/G$ 'nin bir alt modülüdür.

***ii)*** $M/G$ 'nin herhangi bir alt modülü $G'' \supset G$ gibi $M$ 'nin $G''$ bir alt modülü için $G''/G$ şeklindedir.

***iii)*** $G_1, G_2$ $G$ 'yi içeren $M$ 'nin alt modülleri

$$G_1 \subseteq G_2 \Leftrightarrow G_1/G \subseteq G_2/G \quad \text{dir. [10]}$$

**Önerme 2.4.14** $R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül, $G_1, G_2$ $M$ ‘nin alt modülleri olsun. O zaman $Ann((G_1 + G_2)/G_1) = (G_1 : G_2)$ ‘dır. [10]

**Tanım 2.4.15** $R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül, $m \in M$ için $rm = 0$ olacak şekilde $0 \neq r \in R$ varsa $m$ ’ye $M$ ’nin torsion elemanı denir.

$$\tau(M) = \{m \in M : 0 \neq r \in R \; için \; rm = 0\} \qquad [10]$$

**Önerme 2.4.16** Eğer $R$ tamlık bölgesi ise $\tau(M)$, $M$ ’nin bir $R$-alt modülüdür ve $\tau(M)$ ‘ye $M$ $R$-modülünün torsion modülü denir.

$$\begin{aligned} &R \times \tau(M) \to \tau(M) \\ &(r, m) \to rm \qquad (r'(rm) = r(r'm) = 0 \quad r' \in R) \end{aligned}$$

**Not 2.4.17** Eğer $R$ tamlık bölgesi değil ise $\tau(M)$‘ nin alt modül olması gerekmez. Çünkü

$$\begin{aligned} &x_1, x_2 \in \tau(M) \\ &x_1 + x_2 \in \tau(M) \\ &r_1x_1 \neq r_2x_2 = 0 \quad (r_1r_2)(x_1 + x_2) = 0 \end{aligned}$$

**Örnek 2.4.18** $\overline{2}.\overline{3} = \overline{0}$ $\quad R = Z_6 \quad M(2) = \{0, 2, 4\} \quad \tau(M) = \{0, 2, 4\}$

$$R = Z_6 \quad \Rightarrow \quad X = M_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \tau(X) \text{ fakat } A+B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \tau(X) \qquad [10]$$

**Tanım 2.4.19**

**i)** $\tau(M) = M$ ise $M$ ’ye torsion modül denir.

**ii)** $\tau(M) = 0$ ise $M$ ’ye torsion serbest modül denir. [10]

**Önerme 2.4.20** $R$ tamlık bölgesi olsun.

**1)** $\tau(R) = 0$ ‘dır.

**2)** $R$-modül ve $\tau(X) = X$ ve $M \subset X$ alt modül ise $\tau(M) = M$ ‘dır.

**3)** $\tau(X)=0$ ve $M \subset X$ alt modül ise $\tau(M)=0$ ‘dır.

**4)** $\tau(\tau(X))=\tau(X)$ [10]

## 2.5 R-Modül Homomorfizmaları

**Tanım 2.5.1** $M,N$ $R$ değişmeli halkası üzerinde modüller olsun. $f:M\to N$ dönüşümü

$$\forall\ m,m' \in M \text{ için } f(m+m')=f(m)+f(m')$$
$$\forall\ m\in M \ ve\ r\in R \text{ için } f(rm)=rf(m)$$

şartlarını sağlıyorsa bu dönüşüme *R*-modül homomorfizması denir. $Z:M\to N$ dönüşümü her $m\in M$ için $Z(m)=0_N$ tanımlanarak bir *R*-modül homomorfizmasıdır ve buna sıfır homomorfizma denir ve *0* ile gösterilir. [10]

**Tanım 2.5.2** $f:M\to N$ birebir ve örten bir modül homomorfizması ise bu homomorfizmaya bir izomorfizma denir ve $M\cong N$ ile gösterilir. [10]

**Önerme 2.5.3** $R$ değişmeli halka $M,N$ *R*-modül ve $f:M\to N$ bir izomorfizma olsun. O zaman $f^{-1}:N\to M$ de aynı zamanda bir izomorfizmadır ve $M\cong N$ ile gösterilir.

$M\cong M$ ise $M$ ’nin kendi üzerine $i_{d_M}$ özdeş dönüşümdür. [10]

**Önerme 2.5.4** $f:M\to N$, $g:N\to G$ *R*-modül homomorfizmaları ve $gof$ de *R*-modül homomorfizmasıdır.

$f:M\to N$, $g:N\to G$ *R*-modül izomorfizması ise $gof$ de *R*-modül izomorfizmasıdır. [10]

**Tanım 2.5.5** $M$ $R$ değişmeli halkası üzerinde modül ve $G$, $M$ **’**nin alt modülü olsun. Her $m\in M$ için $m\to f(m)=m+G$ olarak tanımlanan $f:M\to M/G$ dönüşümü doğal (kanonik) homomorfizma diye adlandırılır ve $f$ örtendir. [10]

**Tanım 2.5.6** $R$ değişmeli halka, $M$ *R*-modül olsun.

**i)** $N$ $R$-modül ve $f: M \to N$ $R$-modül homomorfizması ise $f$ 'nin çekirdeği $Çekf = \{m \in M \ : f(m) = 0_N\}$ ile gösterilir. $Çekf$, $M$ 'nin bir alt modülüdür. $Çekf = 0 \Leftrightarrow f$ monomorfizmadır. $f$ 'nin görüntüsü $\operatorname{Im} f$ ile gösterilir ve $f(M) = \{f(m) \ : \ m \in M\}$ kümesi $N$ 'nin alt kümesidir. $\operatorname{Im} f$ $N$ 'nin alt modülüdür.

**ii)** $f: M \to M/G$, $Çekf = G$ ve $M/0 \cong M$ 'dır.

**iii)** $H \subseteq M$ alt kümesi $M$ 'nin bir alt modülüdür. $\Leftrightarrow$ $Çekf = H$ olacak şekilde $f: M \to M'$ homomorfizması vardır .

($\Leftrightarrow \exists f: M \to M'$ homomorfizma $Çekf = H$ dır.) [10]

**Teorem 2.5.7** $R$ değişmeli halka $M, N$ $R$-modül ve $f: M \to N$ $R$-modül homomorfizması olsun. O zaman $\forall$ $m \in M$ için $\overline{f}(m + Çekf) = f(m)$ olacak şekilde $\overline{f}: M/Çekf \to \operatorname{Im} f$ izomorfizması vardır. $(M/Çekf \cong \operatorname{Im} f)$ [10]

**Teorem 2.5.8** $R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül, $G, G'$ $M$ 'nin $G' \supseteq G$ olacak şekilde alt modülleri olsun. $G'/G$, $M/G$ $R$-modülünün bir alt modülüdür. O zaman burada $\forall$ $m \in M$ için $\eta((m+G) + G'/G) = m + G'$ tanımıyla

$$\eta : (M/G)/(G'/G) \to (M/G')$$

izomorfizması vardır. [10]

**Teorem 2.5.9** $R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül, $G, H$ $M$ 'nin alt modülleri olsun. O zaman burada $\forall$ $g \in G$ için $\xi(g + G \cap H) = g + H$ tanımıyla

$$\xi : G/(G \cap H) \to (G+H)/H$$

izomorfizması vardır. [10]

**Tanım 2.5.10** $R$ değişmeli halka, $G, M, N$ $R$-modüller ve $g: G \to M$ ve $f: M \to N$ $R$-modül homomorfizmaları olsun.

$$G \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N$$

dizisinde $\operatorname{Im} g = Çekf$ ise bu diziye $M$ $R$-modüllerin tam dizisi denir.

Genel olarak

$$.... \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} M_n \xrightarrow{d^n} M_{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} M_{n+2} \longrightarrow .....$$

dizisi her $M_n$ de tam ise bu diziye $R$-modüllerin tam dizisi denir. Örneğin $\operatorname{Im} d_n = Çekd_{n+1}$ iken

$$M_{n-1} \xrightarrow{d_n} M_n \xrightarrow{d_{n+1}} M_{n+1}$$

dizisi tamdır. [10]

**Önerme 2.5.11 1)** $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ tamdır. $\Leftrightarrow f$, $1-1$ dir.

**2)** $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ tamdır. $\Leftrightarrow f$ örtendir.

**3)** $N \subseteq M$ alt modül ise $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$ dizisi her zaman tamdır.

Genel olarak $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ dizisi için $f$ birebir, $g$ örten ve $\operatorname{Im} f = Çekg$ ise bu diziye kısa tam dizi denir. [10]

**Tanım 2.5.12** $R$ değişmeli halka $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ $R$-modüllerinin boş olmayan bir ailesi olsun. $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ kartezyen çarpım kümesi her $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (g'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, r \in R$ için

$$(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} + (g'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (g_\lambda + g'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

$$r(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (rg_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

ile bir $R$-modüldür. Bu $R$-modüle $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ailesinin çarpımı denir.

$\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ ‘nin alt kümesi (her $\lambda \in \Lambda$ için $g_\lambda \in M_\lambda$ ile) $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ailesini içerir ve $g_\lambda$ elemanlarının sonlu sayıdaki bileşenleri sıfırdan farklı olma özelliğiyle $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ ‘nin bir $R$-alt modülüdür ve $\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ ile gösterilir. Buna $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ailesinin direkt toplamıdır denir.

$\Lambda' = 0$ ise $\bigoplus\limits_{\lambda'\in\Lambda'} M_{\lambda'}$ ve $\prod\limits_{\lambda'\in\Lambda'} M_{\lambda'}$ her ikisi de sıfır $R$-modüldür.

$\Lambda$ sonlu ise $\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ elde ederiz. [10]

**Tanım 2.5.13** $M$ **,** $R$ değişmeli halkası üzerinde bir modül olsun. $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ $M$ **'**nin alt modüllerinin boş olmayan bir ailesi olsun. $M=\sum_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ ise her bir $m\in M$ elemanı $m=\sum_{i=1}^{n} g_{\lambda_i}$ formunda ifade edilebilir ki burada $\{\lambda_1,......,\lambda_n\}$, her $i=1,2,.....,n$ için $g_{\lambda_i}\in G_{\lambda_i}$ ve $\Lambda$ 'nın sonlu bir alt kümesidir.

$M$ **,** $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ alt modüllerinin ailesinin direkt toplamıdır ve her bir $m\in M$ elemanı için $g_\lambda$ **'**nın sonlu sayıda elemanı sıfırdan farklı ve her $\lambda\in\Lambda$ için $g_{\lambda_i}\in G_{\lambda_i}$ $m=\sum_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda$ formunda tek türlü yazılabilir ve bu $M=\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} G_\lambda$ ile gösterilir. [10]

**Önerme 2.5.14** $M$, $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ alt modül ailesinin direkt toplamıdır. $\Leftrightarrow$ i) $\sum_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda=M$ ii) her bir $\nu\in\Lambda$ için $G_\nu\bigcap\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ \lambda\neq\nu}} G_\lambda=0$ elde edilir. [10]

**Önerme 2.5.15** $R$ değişmeli halka $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *R*-modüllerinin boş olmayan bir ailesi olsun.Herbir $\mu\in\Lambda$ için $M_\mu^{'}=\left\{ (g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} M_\lambda : g_\lambda=0 \text{ } her \text{ } \lambda\in\Lambda \text{ } ile \text{ } \lambda\neq\mu \text{ } için \right\}$ ile verilen $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} M_\lambda$ 'nin alt kümesi ile gösterilir. $M_\mu^{'}$, $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} M_\lambda$ 'nın bir alt modülüdür. [10]

**Tanım 2.5.16** $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ $R$ değişmeli halkası üzerinde modüllerin boş olmayan bir ailesi ve $\mu\in\Lambda$ olsun.

$M=\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} M_\lambda$ kümesinden $M_\mu$ üzerine $P_\mu : M\to M_\mu$ dönüşümü her $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in M$ için $P_\mu((g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})=g_\mu$ tanımıyla kanonik izdüşüm dönüşümüdür.

$M_\mu$ 'den $M=\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} M_\lambda$ içine $q_\mu : M_\mu\to M$ dönüşümü her $\lambda\in\Lambda$ için $g_\lambda=0$ ile $\lambda\neq\mu$ ve $\forall z\in M_\mu$ $q_\mu=z$ için $q_\mu(z)=(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tanımıyla kanonik örten dönüşümdür.

Her iki $P_\mu$ ve $q_\mu$ $R$-modül homomorfizmasıdır. $P_\mu$ bir epimorfizma ve $q_\mu$ bir monomorfizmadır.

***i)*** $p_\mu o q_\mu = Id_{\mu_\lambda}$

***ii)*** Her $\nu \in \Lambda$ ile $\nu \neq \mu$ için $p_\mu o q_\nu = 0$

iii) $\Lambda$ sonlu iken $\sum_{\lambda \in \Lambda} p_\mu o q_\mu = 1d_\mu$ ‘dır. [10]

**Önerme 2.5.17** $M, M_1, ...., M_n$ (ki burada $n \in \mathrm{N}$ ile $n \geq 2$ ) $R$ değişmeli halkası üzerinde modüller olsun.

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{q_1} \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \xrightarrow{P_1'} \bigoplus_{i=2}^{n} M_i \longrightarrow 0$$

dizisi bir tam dizidir ki burada $q_1$ kanonik örten ve her $(m_1, ....., m_n) \in \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ için $P_1'((m_1, ...., m_n)) = (m_2, ...., m_n)$ ile $P_1'$ kanonik izdüşümdür. [10]

**Tanım 2.5.18** $R$ değişmeli halka ve $L, M, N$ $R$-modül,

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

$R$ modül homomorfizmalarının kısa tam dizisi olsun. Bu diziye $\operatorname{Im} f = Çekg$, $M$ ’nin bir direkt toplamı oluyorsa bu diziye split denir. Yani; Dizi splittir $\Leftrightarrow M = Çekg \oplus G$ olacak şekilde $M$ ’nin bir $G$ alt modülü vardır. [10]

**Önerme 2.5.19**

**i)** $0 \longrightarrow H \longrightarrow M \longrightarrow M/H \longrightarrow 0$ kısa tam dizidir.

**ii)** $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$ split kısa tam dizidir. [10]

**Önerme 2.5.20** $R$ değişmeli halka ve $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ kısa tam dizi olsun. Bu dizi splittir $\Leftrightarrow h : N \to M$ ve $e : M \to L$ $R$-modül homomorfizmaları vardır, yani

$$eof = 1d_L, \qquad goh = 1d_N, \qquad eoh = 0, \qquad foe + hog = 1d_M \text{ ‘dır.}$$

**İspat:** Dizi split olsun. O zaman bazı $M' \subseteq M$ için $M = Çekg \oplus M'$dır. Verilen herhangi bir $n \in \mathrm{N}$ için $\exists m \in M$ $g(m) = n$ ile $h : N \to M$ tanımlandığından $M$ ;

$Çekg, M'$ nin direkt toplamıdır. $\forall m \in M$ için $m_1 \in Çekg,\ m_2 \in M'$ $m = m_1 + m_2$ tek türlü olarak yazılır. Dahası $M' n Çekg = \{0\}$, $\begin{matrix} m = m_1 + m_2 & \\ r = r_1 + r_2 & r_1 \in Çekg,\ r_2 \in M' \end{matrix}$

$g(m) = g(r) = n$ tek türlüdür. O zaman $g(m-r) = 0 \Rightarrow m - r \in Çekf \Rightarrow \underbrace{(m-r)}_{\in Çekg} =$

$\underbrace{(m_1 - r_1)}_{\in Çekg} + (m_2 - r_2) \Rightarrow m_2 - r_2 \in ÇekgnM' = \{0\} \Rightarrow m_2 = r_2$ dır. $h(n) = m_2$ tanımı $h$ iyi tanımlı yapar.

Verilen herhangi bir $m \in M$ için $k : M \to L$ tanımlansın. $\underbrace{m = m_1 + m_2}_{\in Çekg = \operatorname{Im} f}$ tek türlü $\Rightarrow$ $l \in L$ için $m_1 = f(l)$'dır. [10]

## 2.6 Serbest R-Modüller

**Tanım 2.6.1** $R$ değişmeli halka, $M$ $\{m_\lambda\ :\ \lambda \in \Lambda\}$ tarafından üretilen bir $R$-modül olsun. Her $m \in M$ ve $m = \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda m_\lambda$ olarak $r_\lambda \in R$, $m_\lambda \in M$ ile tek türlü yazılabiliyorsa $(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $M$ için bir tabandır ve $M$, bir tabana sahip olduğundan bir serbest $R$-modüldür.

$R$'nin kendisi $1_R$ elemanı tarafından bir tabana sahip olduğundan bir serbest $R$-modüldür. Sıfır $R$-modülü tabanı boş küme olan bir serbest $R$-modüldür. [10]

**Önerme 2.6.2** $R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül $\{M_\lambda\ :\ \lambda \in \Lambda\}$ $M$'nin bir ailesi olsun. O zaman $\{M_\lambda\ :\ \lambda \in \Lambda\}$, $\sum_{\lambda \in \Lambda} Rm_\lambda$ için bir tabandır $\Leftrightarrow$ $\forall$ $\lambda \in \Lambda$ için $\sum_{\lambda} r_y m_y = 0 \Rightarrow r_y = 0$ 'dır. [10]

**Önerme 2.6.3** $R$ değişmeli halka olsun.

**i)** $(R_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, her $\lambda\in\Lambda$ için $R_\lambda = R$ ile *R*-modüllerinin bir ailesi olsun. O zaman $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} R_\lambda$, $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tabanı ile serbest *R*-modüldür ki her $\mu\in\Lambda$ için $e_\mu \in \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} R_\lambda$ elemanı $R_\mu$ içinde kendisi 1 ‘e eşit ve diğer bütün elemanları sıfırdır.

$\{(1,0,0,.....)(0,1,0,0,.....)(0,0,1,0,.....),...........\text{gibi}\}$

**ii)** $M$ *R*-modül, $M$ serbest *R*-modüldür $\Leftrightarrow M$, (i) deki türden bir *R*-modüle izomorftur. $M$ $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tabanına sahip ise $M \cong \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} R_\lambda$ ki $R_\lambda = R$ ‘dır. Burada $Rm_\lambda \cong R$ dır.Böylece $Rm_\lambda \cong R/(0:m_\lambda) \cong R$ ‘dir.

$$\begin{array}{l} f : R \to Rm_\lambda \\ \quad 1 \to m_\lambda \end{array} \quad \text{olmak üzere} \quad R/(0:m_\lambda) \cong Rm_\lambda \Rightarrow Rm_\lambda \cong R$$

Böylece $M \cong \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} R_\lambda$ ‘dır. [10]

**Önerme 2.6.4** $F$, $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tabanı ile bir serbest *R*-modül olsun. $M$, serbest *R*-modül ve $\{m_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ $M$ ’nin elemanlarının bir ailesi olsun. O zaman $\forall\lambda\in\Lambda$ için $f(e_\lambda) = m_\lambda$ tanımıyla $f : F \to M$ bir *R*-modül homomorfizması vardır.

**İspat :** $M$, $\{m_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tabanına sahip serbest *R*-modül olsun. $\Lambda = \varnothing$ ise açıktır. Böylece $\Lambda \neq \varnothing$ ise $\forall\lambda\in\Lambda$ $Rm_\lambda = R$, $\forall (r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} R_\lambda$ için $f((r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = \sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda m_\lambda$ tanımıyla $f : \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} R_\lambda \to M$ dönüşümüyle $f$ bir *R*-modül homomorfizmasıdır. $M$, $\{m_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ kümesi tarafından üretildiğinde $f$ örtendir. $\{m_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ $M$ ’nin tabanı olduğundan $f$, 1-1 ‘dir. [10]

**Önerme 2.6.5** $M$, $R$ değişmeli halkası üzerinde bir modül olsun. O zaman $F$ serbest *R*-modül olmak üzere $f : F \to M$ *R*-modül epimorfizması vardır.

Ayrıca $M$, $n$ sonlu olarak üretilirse $F$, $n$ sonlu tabana sahip bir serbest *R*-modüldür. [10]

**Sonuç 2.6.6** $M \cong F/Çekf$ ‘dir. [10]

**Önerme 2.6.7** $0 \neq R$ değişmeli halka, $F$ sonlu taban ile serbest $R$-modül olsun. O zaman $F$ için her taban sonludur ve $F$ için iki tabanın elemanları aynı sayıya sahiptir. $F$ için bir taban içinde ki elemanların sayısına $F$'nin rankı denir ve $rank(F)$ ile gösterilir. [10]

**Önerme 2.6.8** $R \neq 0$ değişmeli halka, $F$ serbest $R$-modül ve $F$ sonlu üretilmiş olsun. O zaman $F$ için her taban sonludur. [10]

**2.7 Projektif R-Modüller**

**Tanım 2.7.1** $X$ $R$-modül ve $g : A \to B$ örten $R$-modül homomorfizması olsun. $\forall\ f : X \to B$ $R$-modül homomorfizması için $h : X \to A$ $R$-modül homomorfizması varsa $X$ $R$-modülüne projektif $R$-modül denir. [10]

**Teorem 2.7.2** Her serbest $R$-modül projektiftir. [10]

**Önerme 2.7.3** $X$ projektif $R$-modül ve $X = M \oplus N$ ise $M$ projektif $R$-modüldür. [10]

**Önerme 2.7.4** Projektif modüllerin direkt toplamı projektiftir. [10]

**Teorem 2.7.5** $X$ $R$-modül, $i : X \to X$ için aşağıdaki durumlar denktir.

**i)** $X$ projektiftir.

**ii)** Her $0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi splittir.

**iii)** $X$ serbest $R$-modüllerinin direkt toplamına izomorftur.

**iv)** Her $g : A \to B$ epimorfizma için $g_x = Hom(i, g) : Hom(X, A) \to Hom(X, B)$ aynı zamanda bir epimorfizmadır.

**v)** Her $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi için $0 \longrightarrow Hom(X, A) \longrightarrow Hom(X, B) \longrightarrow Hom(X, C) \longrightarrow 0$ dizisi aynı zamanda kısa tam dizidir. [10]

**Önerme 2.7.6** $M$ $R$-modül olsun. $X$ projektif $R$-modül olmak üzere

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow X \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi elde edilir. [10]

**Tanım 2.7.7** $M \in M_R$ 'nin projektif boyutu

$pd(M) = pd_R(M) = \min(n : P^n[M] = 0)$

olarak tanımlanır. Eğer böyle bir $n$ yoksa $pd_R(M)$ $\infty$ dur. $M$ bir projektif $R$-modül ise $pd_R(M) = 0$ 'dır. [10]

**Önerme 2.7.8** $M \in M_R$ ve $n \geq 0$ için aşağıdaki durumlar denktir.

**1)** $pd_R(M) \leq n$

**2)** Herhangi projektif çözünürlüğü

$$P_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} P_{n-2} \longrightarrow ......... \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$Çek\alpha_{n-1}$ 'in projektiftir.

($n = 0$ durumunda $M$ ' nin projektif olduğu kolaylıkla gösterilebilir.)

**3)** Bir sonlu projektif çözünürlüğü vardır.

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{\alpha_n} P_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} ......... \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$pd_R(M) = n$ 'dir ancak ve ancak $\alpha_n$ split değildir. [10]

**Tanım 2.7.9** $R$ halkasının global boyutu

$gl.\dim R = \sup\{pd_R(M) : M \in M_R\} \leq \infty$

olarak tanımlanır. [10]

**Teorem 2.7.10** $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ $R$ modüllerin tam dizi olsun. Eğer $pd(A)$, $pd(B)$, $pd(C)$ 'nin ikisi sonlu ise üçüncüde sonludur. Her bir durumda

**(1)** $pd(A) < pd(B)$ ise $pd(C) = pd(B)$ 'dir.

**(2)** $pd(A) > pd(B)$ ise $pd(C) = pd(A) + 1$ 'dir.

**(3)** $pd(A) = pd(B)$ ise $pd(C) \leq pd(A) + 1$ 'dir. [10]

**Sonuç 2.7.11** $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ $R$-modüllerin tam dizisi olsun. $pd(B) \leq \max\{pd(A), pd(C)\}$ iken $pd(C) = pd(A) + 1$ eşitliği vardır. [10]

**Sonuç 2.7.12** $0 = B_0 \subseteq B_1 \subseteq ...... \subseteq B_n = B \quad B_R$ modülünün bir sonlu ayrışımı olsun. O zaman $pd(B) \leq \max\left\{ pd(B_{i+1}/B_i) \right\}$ 'dir. [10]

**Önerme 2.7.13** $M = \oplus_i M_i$ olsun. O zaman $pd(M) = \sup\left\{ pd(M_i) \right\}$ 'dir. [10]

# BÖLÜM 3

## FİTTİNG İDEALLER

Fitting idealler, temel ideal bölgesi üzerindeki modüllerin elementer bölümlerinin genelleştirilmiş şeklidir. Modülün birçok yapısal özelliklerini sağlar.

Bu bölümde fitting idealin tanımı yapılmış. Özellikleri ile ilgili bazı teoremler ispatıyla birlikte verilmiştir. Ayrıca konu ile ilgili örnekler üzerinde uygulama yapılmıştır.

### 3.1 Fitting İdealler ve Özellikleri

**Tanım 3.1.1** $R$ bir halka, $M$ sonlu üretilmiş bir $R$-modül ve $\{m_1,.....,m_n\}$ kümesi *M'* nin üreteçleri olsun.

$R^n$, bazı $\{e_1,.....,e_n\}$ kümesi olmak üzere $\alpha : R^n \to M \quad \alpha(e_i) = m_i \quad i = 1,.....,n$ örten $R$-modül homomorfizması vardır. $K = Çek\alpha$ alınırsa

$$0 \to K \to R^n \xrightarrow{\alpha} M \to 0$$

$R$-modül homomorfizmasının tam dizisine, $M$ modülünün $\{m_1,.....,m_n\}$ kümesine göre sonlu gösterimi denir.

$\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, *K'*yı üreten elemanlar ve $v_\lambda = (x_\lambda^1,\ldots,x_\lambda^n)_{\lambda\in\Lambda} \in R^n$ olmak üzere

$$A = (x_\lambda^i) \quad \lambda \in \Lambda\,, \quad i = 1,.....,n$$

matrisine $M$ $R$-modülünün $\{m_1,.....,m_n\}$ kümesine göre bağıntı matrisi denir.

Bu matriste *(n-i)* minörleri tarafından üretilen *R*'nin idealine M R-modülünün fitting ideali denir ve $Fitt_i(A)$ ile gösterilir.

Eğer $i \geq n$ ise $Fitt_i(A) = R$ olarak alınacaktır. [8]

**Lemma 3.1.2** $(i \in N)$ için $Fitt_i(A)$, *M'* nin $\{m_1, \ldots m_n\}$ kümesine göre bir *A* bağıntı matrisinin özel seçimine bağlı değildir.

**İspat:** $v \in N$ için $v_v = (y_v^1, \ldots, y_v^n) \in R^n$ *K*'nın $\{v_v\}_{v \in N}$ şeklindeki başka bir üreteci olsun. $v \in \{v_1, \ldots, v_{n-i}\}$, $k \in \{k_1, \ldots, k_{n-i}\}$ ile $y_v^k$ elemanları tarafından oluşturulan $B = (y_v^k)$ bağıntı matrisinin minörleri $\Delta(v_1, \ldots, v_{n-i}, k_1, \ldots k_{n-i})$ şeklindedir.

Her *j* ve $r_j^\lambda \neq 0$ için

$$v_{v_j} = \sum_{\lambda \in \Lambda} r_j^\lambda v_\lambda \qquad (j = 1, \ldots, n-i, r_j^\lambda \in R)$$

bağıntısını elde ederiz. $\Delta(v_1, \ldots, v_{n-i}, k_1, \ldots k_{n-i})$ *A*'nın *(n-i)* minörlerinin bir lineer birleşimidir, bu yüzden $Fitt_i(A)$'yı kapsar.

$Fitt_i(B)$, *B*'nin *(n-i)* minörleri tarafından üretilen bir ideal olsun. O zaman $Fitt_i(B) \subseteq Fitt_i(A)$ 'dır ve simetriden her $i \in N$ için $Fitt_i(B) = Fitt_i(A)$ 'dır. [1]

**Lemma 3.1.3** $(i \in N)$ için $Fitt_i(A)$, *M*'nin $\{m_1, \ldots m_n\}$ üreteçleri kümesinin seçimine bağlı değildir.

**İspat:** $Fitt_i(A)$'nın değişmediğini göstermek yeterlidir. Keyfi bir $m \in M$ alalım. $\{m_1, \ldots m_n\}$ kümesinin yerine $\{m_1, \ldots m_n, m\}$ kümesini alalım.

$m = r^1 m_1 + \ldots + r^n m_n$ $(r^i \in R)$ yazalım ve, $0 \to K' \to R^{n+1} \to M \to 0$ dizisi $\{m_1, \ldots m_n, m\}$ tarafından tanımlanan *M* ' nin gösterimi olsun. $K'$ 'nün üreteçlerini

$v = (-r^1, \ldots, -r^n, 1)$

$\overline{v_\lambda} = (x_\lambda^1, \ldots, x_\lambda^n, 0)$ $(\lambda \in \Lambda)$ elemanları verir.

*B* bu satırlarla bir matris olsun. $Fitt_n(B) = (1) = Fitt_n(A)$ olduğu açıktır. $i = 0, \ldots, n-1$ için *B*'nin *(n+1-i)* minörleri ya $A = (x_\lambda^i)$ orjinal bağıntı matrisinin *(n+1-i)* minörleridir ve bu yüzden $Fitt_i(A)$' nın elemanlarıdır ya da $v$ elemanından gelen satırı içerir. İkinci durumda ise bunlar $Fitt_i(A)$'nın elemanlarının lineer birleşiminin tekrarıdır ve *A*'nın her *(n-i)* minörleri yeni matrisin *(n+1-i)* minörüdür. Yeni bağıntı matrisi aynı idealleri tanımlar. [4]

**Tanım 3.1.4** *A* matrisi *M'* nin bağıntı matrisi olmak üzere $\forall i \in N$ için $Fitt_i(M) = Fitt_i(A)$ yazılır. $Fitt_i(M)$ ' ye *M*' nin i'nci fitting ideali denir. Bu yapıya göre *M*' nin fitting idealleri arasındaki ilişki;
$Fitt_0(M) \subseteq Fitt_1(M) \subseteq \ldots \subseteq \; Fitt_i(M) \subseteq \ldots$ ve $i \geq n$ için $Fitt_i(M) = R$ şeklinde olur. [4]

**Önerme 3.1.5** Fitting idealler aşağıdaki özelliklere sahiptir.

**a)** *M*, sonlu gösterime sahipse, o zaman $i \in N$ için $Fitt_i(M)$ sonlu üretilmiş idealdir.

**b)** $\pi : M \to M'$ örten bir *R*-modül homomorfizması ise $i \in N$ için $Fitt_i(M) \subseteq Fitt_i(M')$ 'dir.

**c)** Her $S/R$ cebiri ve $i \in N$ için, $Fitt_i(S \otimes_R M) = S.Fitt_i(M)$ 'dir.

**d)** $N \subseteq R$ çarpımsal kapalı alt küme ve $i \in N$ olmak üzere $Fitt_i(M_N) = Fitt_i(M)_N$ 'dır.

**e)** *I,* *R*'nin ideali olmak üzere $Fitt_i(M/IM) = \overline{Fitt_i}(M)$ 'dir. Buradaki $\overline{Fitt_i}(M)$ , $Fitt_i(M)$ 'nin *R/I* altındaki görüntüsüdür. [4]

**İspat:** a) 'yı göstermek kolaydır.

b) $\{m_1, \ldots m_n\}$ *M*' nin üreteçlerinin kümesi olsun. O zaman, $\pi(M) = M' = \{\pi(m)_1, \ldots \pi(m)_n\}$ $M'$'nün üreteçlerinin kümesi olur. Eğer $\{r_1, \ldots, r_n\}$ $\{m_1, \ldots m_n\}$ kümesi için bir bağıntı ise $\pi(M)$ içinde bir bağıntıdır. Bu yüzden $\{m_1, \ldots m_n\}$ 'nin her bağıntı matrisi aynı zamanda $\pi(M)$'in de bağıntı matrisidir. Böylece $Fitt_i(M) \subseteq Fitt_i(M')$ olduğu görülür.

c) $0 \to K \to R^n \xrightarrow{\alpha} M \to 0$ dizisinden oluşturduğumuz
$S \otimes_R K \to S^n \to S \otimes_R M \to 0$ tam dizisini ele alalım.

$S \otimes_R M$ $S$-modülünün bağıntı matrisinde tanımlı $x_\lambda^i$ 'nın görüntülerini $\{1 \otimes m_1, \ldots, 1 \otimes m_n\}$ yapısıyla göstermek kolaydır. d) ve e) ise c) ‘nin özel birer durumudur. [1]

**Örnek 3.1.6** $R$ temel ideal bölgesi ise $i = 1, \ldots, s-1$ için $e_i / e_{i+1}$ ve $e_i \in R / \{0\}$ olmak üzere, $M \cong R/(e_1) \oplus, \ldots, \oplus (e_s) \oplus R^r$ ‘dir.

Buradan;

$$Fitt_i(M) = \begin{cases} (0) & i = 0, \ldots, r-1 \quad için \\ (e_1, \ldots, e_j) & i = r + s - j \quad (j = 1, \ldots, s) \quad için \\ R & i \geq r + s = \mu(M) \quad için \end{cases}$$

‘dir. Bu yüzden $M$ sonlu uzunlukta ise, o zaman

$$\ell(M) = \ell(R / Fitt_0(M)) \text{ olur.}$$

Gerçekten de yukarıdaki notasyonla, $r = 0$ ‘ dır, ve $\ell(M) = \sum_{i=1}^{s} \ell(R/(e_i)) = \ell(R/(e_i, \ldots, e_s)) = \ell(R / Fitt_0(M))$ ‘dir. Lokal global özelliğinden ve önerme 3.1.5. d) formülünden $\ell(M) = \ell(R / Fitt_0(M))$ doğrudur. O halde $R$ Dedekind bölgesi ise, $M$ sonlu uzunlukta bir $R$-modüldür. [4]

**Örnek 3.1.7** Bazı $n \geq 1$ için $M = R^n$ olsun. $M$’nin üreteçlerinin kümesini $\{e_1, \ldots e_n\}$ ile gösterelim. Buradaki $e_i$, $(e_i)_j = \delta_{i,,j}$ olacak şekilde bir vektör olsun. Her $(r_1, \ldots, r_n) \in R^n$ bağıntısı için

$$\sum_{i=1}^{n} r_i e_i = 0 \quad \Rightarrow r_i = 0 \text{ ’dır.}$$

Bu yüzden bunlar aşikar olmayan bağıntılar değildir. Özellikle $\{e_1, \ldots e_n\}$ için bağıntı matrisi “*0*” matrisidir. Buna göre, $Fitt_R(R^n) = 0$ ‘dır. [1]

**Örnek 3.1.8** $p$ asal sayı $R$=$Z$ ve $M$ =$Z/pZ \times Z/p^2Z$ olsun. O zaman Ann $_Z$ $(M)$=$p^2Z$ olduğu açıktır. Biz $Fitt_Z(M)$’yi bulmak istiyoruz. Bunun için, $M$’nin üreteçlerinin kümesi *{(a,0), (0,b)}* ‘dir. Burada $p$ $ab$ ‘yi bölemez. O zaman *(a,b)*’nin bağıntı matrisini $v_p(\alpha_i) \geq 1$ ve $v_p(\beta_i) \geq 2$ için

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_q & \beta_q \end{pmatrix}$$

formunu yazalım. Bu yüzden *x*’in 2x2 minörü

$\det(X_{ij}) = \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \alpha_j & \beta_j \end{vmatrix}$ formundadır.

Ve $v_p(\det(X_{ij})) = v_p(\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i) \geq 3$ ‘tür. $Fitt_Z(M) = p^3 Z$ olduğu görülür. $(p, p^2)$ $p^2 Z$ idealinden üretilmiş bir matristir. Bu anlamda, bu değişken genel sıfırlayandan daha “finer” ‘dır. [1]

**Lemma 3.1.9** $I \subseteq R$ bir ideal olsun. O zaman $Fitt_R(R/I) = I$ ‘dır.

**İspat :** *R/I*’nın üreteçleri *1* ve genel bağıntı matrisi *A*, $\alpha_i 1 = 0 \in R/I$ olacak şekilde

$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_q \end{pmatrix}$ ‘dir.

Örneğin, her *i* için $\alpha_i \in I$ gibi. [1]

**Tanım 3.1.10** $Q(R) \otimes_R M$ serbest *Q(R)* -modül ise, $M$ ’nin bir rankı vardır. [4]

**Önerme 3.1.11** $M$ ’nin rankı $r$ ise, $i = 0,......, r-1$ için $Fitt_i(M) = (0)$ ve $i \geq r$ için $Fitt_i(M) \neq (0)$ ‘dır.

**İspat:** Önerme 3.1.5. d) ‘den, $i \in N$ için $Q(R).Fitt_i(M) = Fitt_i\,(Q(R) \otimes_R M)$ ‘dır. $Q(R) \otimes_R M$ serbest olduğundan $i = 0,......, r-1$ için $Fitt_i\,(Q(R) \otimes_R M) = 0$ ve $i \geq r$ için $Fitt_i\,(Q(R) \otimes_R M) = Q(R)$ ‘dir. $R \to Q(R)$ birebir olduğundan iddia tamamlanır. [4]

**Tanım 3.1.12** Bir tane maksimal ideali olan halkaya lokal halka denir.

**Önerme 3.1.13** *(R,m)* bir lokal halka olsun. O zaman,

$$\mu(M) = Min\{n / Fitt_n(M) = R\}$$ ‘dir.

Ayrıca aşağıdaki durumlar birbirine denktir:

**a)** $M$ modülü rankı $r$ olan serbest modüldür.

**b)** $i = 0,\dots,r-1$ için $Fitt_i(M) = (0)$ ve $i \geq r$ için $Fitt_i(M) = R$ ‘dir.

**İspat:** $\{m_1,\dots m_n\}$ $M$ ’nin minimal üreteçleri ve $0 \to K \to R^n \xrightarrow{\alpha} M \to 0$ bu sistemle tanımlanan bir gösterim olsun. $A = (x_\lambda^i)$ bağıntı matrisinin katsayıları $m$’nin elemanlarıdır, çünkü üreteç sistemi minimaldir. Bu yüzden $Fitt_{n-1}(M) \subseteq m$ ve $Fitt_n(M) = R$ olur. $\mu(M)$ formülü için ispat biter.

Şimdi b)→a) olduğunu gösterelim. Fakat b) $n = r$ ve $Fitt_{n-1}(M) = 0$ koşullarını sağlar. O zaman $A = (x_\lambda^i)$ bağıntı matrisi sıfır matrisi olmak zorundadır ve $M \cong R^r$ ‘dir. [4]

**Sonuç 3.1.14** Keyfi $R$ halkası ve $p \in Spec(R)$ için aşağıdaki koşullar birbirine denktir;

**a)** $\mu_p(M) = n$ ‘dir.

**b)** $Fitt_{n-1}(M) \subseteq p$ ve $Fitt_n(M) \not\subset p$ ‘dir. [4]

**Sonuç 3.1.15** ($\mu'$ ‘nün yarı sürekliğinden) $n \in N$ için $\forall p \in Spec(R)$ kümesi $\mu_p(M) \leq n$ ile açıktır.

Gerçekten de her $p$ ile $Fitt_n(M) \not\subset p$ dir. $\mu_p(M) = m \leq n$ ise , o zaman $Fitt_m(M) \not\subset p$ olur, buradan $Fitt_m(M) \not\subset p$, iyi tanımlıdır. [4]

**Sonuç 3.1.16** $Supp(M) = V(Fitt_0(M)) = \{p \in Spec(R) / Fitt_0(M) \subseteq p\}$’dir. [4]

**Sonuç 3.1.17** $M$ sonlu gösterime sahipse, o zaman $\forall p \in Spec(R)$ kümesi için $M_p$ bir serbest $R_p$-modüldür ve *Spec (R)* 'de açıktır.

**İspat:** Önerme 3.1.13. ' den, $M_p$ $R_p$-modül $r$ rank ile serbesttir. $\Leftrightarrow$ $i = 0,\ldots,r-1$ için $p \notin Supp(Fitt_i(M))$ ve $Fitt_r(M) \not\subset p$ 'dir. $Fitt_i(M)$ önerme 3.1.5. a) ' dan sonlu üretildiğinden, $Supp(Fitt_i(M))$ *Spec (R)* 'de kapalıdır ve böylece $\mathbb{V}$ $(Fitt_r(M))$ 'dir. Açık kümelerin birleşimi yine açık olduğundan sonuç ispatlanır. [4]

**Sonuç 3.1.18** $R$ halka ve $M$ sonlu $R$-modül olmak üzere aşağıdaki durumlar birbirine denktir :

**a)** $M$ modülü rankı $r$ olan lokal serbest modüldür.

**b)** $i = 0,\ldots,r-1$ için $Fitt_i(M) = (0)$ ve $i \geq r$ için $Fitt_i(M) = R$ 'dir.

**Önerme 3.1.19** $\mu(M) = n$ ise, o zaman

$$(AnnM)^n \subseteq Fitt_0(M) \subseteq AnnM \text{ 'dir.}$$

**İspat:** $\{m_1,\ldots m_n\}$ $M$ 'nin minimal üreteçleri ve $a_1,\ldots,a_n \in AnnM$ olsun. $i = 0,\ldots,n$ için $a_i.m_i = 0$ bağıntısından $a_1,\ldots,a_n \in Fitt_0(M)$ olur ve bu yüzden

$$(AnnM)^n \subseteq Fitt_0(M) \text{ 'dir.}$$

$(x_j^i)_{i,j=1,\ldots,n}$ $A = (x_\lambda^i)$ bağıntı matrisinin n-satırlı bir alt matrisi ve $\Delta = \det(x_j^i)$ olsun. $x_j^i$ 'e $x_j^i$ 'nin minörlerini ekleyerek $\Delta_j^i$ kümesini oluşturalım. Cramer kuralından,

$$\Delta_j^i \cdot (x_j^i) = \begin{pmatrix} \Delta & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Delta \end{pmatrix}$$

olur. $i = 0,\ldots,n$ için $\sum_{j=1}^{n} x_j^i m_j = 0$ olduğundan $(j = 0,\ldots,n)$ için $\Delta m_j = 0$ ' dır. O halde $Fitt_0(M) \subseteq AnnM$ 'dir.

Eğer $Ann(M) = 0$ ise $M$ 'ye faithfull $R$-modül denir. [1]

**Sonuç 3.1.20** Eğer *M* faithfull *R*-modül ise, o zaman $Fitt_R(M) = 0$ ‘dır.

Şimdi de Fitting ideallerin çarpımsal özelliklerini inceleyelim. [1]

**Önerme 3.1.21** $M_1$ ve $M_2$ sonlu *R*-modül olsun. $i \in N$ için,

$$Fitt_i(M_1 \oplus M_2) = \sum_{p+\sigma=i} Fitt_p(M_1)\,.Fitt_\sigma(M_2) \qquad i \in N \text{ ‘dir.}$$

Ve özel olarak

$Fitt_0\ (M_1 \oplus M_2) = Fitt_0(M_1)\,.Fitt_0(M_2)$ ‘dir.

**İspat:** $M_1 \oplus M_2$’nin bağıntı matrisini;

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

formunda yazalım. Buradaki $A$ $M_1$’in bağıntı matrisi ve $B$ de $M_2$’ nin bağıntı matrisidir. İddia hemen gösterilir. [4]

**Lemma 3.1.22** $M \cong M_1 \times M_2$ ise, $Fitt_R(M) = Fitt_R(M_1)\,.Fitt_R(M_2)$ ‘dir.

**İspat:** Bir taraftan, $X$ $M_1$’ in ve $Y$ $M_2$’ nin olmak üzere iki bağıntı matrisini alalım. Bu bağıntı matrisleri bize $M_1 \times M_2$ için

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

matrisini verir. Diğer taraftan, $M_1 \times M_2$’nin üreteçleri kümesinden $\{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m\}$, formunu seçelim. Buradaki $\{x_1,\ldots x_n\}$ $M_1$ ‘in $\{y_1,\ldots,y_m\}$ $M_2$ ’nin üreteçleri kümesidir. $\{x_1,\ldots x_n\}$ ve $\{y_1,\ldots,y_m\}$ için oluşturduğumuz bağıntı matrisini $\{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m\}$ şeklinde $M_1 \times M_2$ içinde oluşturabiliriz. Bu matrisler ise;

$Det \quad Id(X) \cdot Det \quad Id(Y) = Det \quad Id(XY)$ ‘ yi kolayca sağlar. [1]

**Sonuç 3.1.23** $M = R/a_1 \times \ldots \times R/a_n$ ise $Fitt_R(M) = a_1 \ldots a_n$ ‘dir. [1]

**Sonuç 3.1.24** *M* sonlu üretilmiş *R*-modül ve $m \in N$ olsun, O zaman,

$$Fitt_i(R^m \oplus M) = \begin{cases} (0) & i = 0,....,m-1 \\ Fitt_{i-m}(M) & i \geq m \quad için \end{cases}$$

‘dir. [4]

**Lemma 3.1.25** $I \subseteq R$ ideal ise ,
$Fitt_{R/I}(M/IM) = Fitt_R(M) + I \subseteq R/I$ ‘dır.

**İspat:** $M$ üreteçlerinin kümesi $\{m_1, \ldots m_n\}$ ise, bunun kanonik izdüşüm altındaki görüntüsü $M/I$ ‘nın üreteç kümesini verir ve birinci kümenin her bağıntısı, ikinci kümeninde bağıntısı olduğundan, $Fitt_R(M) + I \subseteq Fitt_{R/I}(M/IM)$ olur.

Şimdi $[X] = ([\xi_{ij}])$ $[\underline{x}]$ için üreteçlerinin bağıntı matrisi ise, her $1 \leq i \leq n$ için $a_{ij} \in I$ elemanları bulunur ve,

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_{ij}.x_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}.x_j$$

olur. Çünkü $IM$ ‘nin her elemanı $I$ ‘daki katsayılar ile $M$ ’nin üreteçlerinin sonlu toplamı şeklinde yazılabilir. i. satırlı $\widetilde{X}$ matrisi,

$$(\ \xi_{i1} - \alpha_{i1}, ..., \xi_{in} - \alpha_{in})$$

$M$’nin bağıntı matrisidir ve $X \equiv X \pmod{I}$ ‘dır. Bu yüzden, $Det \quad Id([\widetilde{X}]) = Det \quad Id([\widetilde{X}]) + I \in Fitt_R(M) + I$ ‘dır. Böylece ispat biter. [1]

**Önerme 3.1.26** Sonlu $R$-modülün,

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

tam dizisi için

$$Fitt_0(M_1) \,.\, Fitt_0(M_3) \subseteq Fitt_0(M_2) \text{ ‘dir.}$$

$M_3$ $n$ üreteçlerinden oluşuyorsa, bu gösterimin çekirdeği $n$ elemanları tarafından üretilir, o zaman $Fitt_0(M_3)$ bir temel idealdir ve

$$Fitt_0(M_1) \,.\, Fitt_0(M_3) = Fitt_0(M_2) \quad \text{‘dir.}$$

**İspat:** $M_i$ $(i=1$ $veya$ $3)$ için,

$$0 \to K_i \to R^{n_i} \to M_i \to 0$$

gösterimini alalım. Tam satır ve sütun işlemleri ile değişmeli bir diyagram oluşturalım.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & K_1 & \to & K_2 & \to & K_3 & \to & 0 \\
0 & \to & R^{n_1} & \to & R^{n_1+n_3} & \to & R^{n_3} & \to & 0 \\
0 & \to & M_1 & \to & M_2 & \to & M_3 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Bu sistemi aşağıdaki formda yazalım

$$\begin{array}{cc}
\overbrace{n_1} & \overbrace{n_3} \\
\multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} A & 0 \\ * & B \end{bmatrix}}
\end{array}$$

Buradaki $A$ $M_1$ ‘ in bağıntı matrisi ve $B$ de $M_3$ ‘ün bağıntı matrisidir. Şimdi; $Fitt_0(M_1).Fitt_0(M_3) \subseteq Fitt_0(M_2)$ olduğunu görürüz. Eğer $B$ kare matris ise, eşitliğin sağlandığı kolayca görülür. [4]

**Lemma 3.1.27** $I$ sonlu üretilmiş ideal ise,

$$Fitt_R(M) \subseteq Fitt_R(M/IM) \subseteq (Fitt_R(M), I) \subseteq R \text{ ‘dir.}$$

**İspat:** İlk kapsama önerme 3.1.5. b ) den gösterilebilir. İkinci kısım için, $R^a \xrightarrow{h} R^b \to M \to 0$ $M$ ‘nin bir gösterimi ve $I = \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle$ ise, o zaman $M/IM$ ‘nin gösterimi

$$R^{a+nb} \xrightarrow{h^*} R^b \to M/IM \to 0$$

şeklindedir. Buradaki,

$$h^* \ (w_1, \ldots, w_a, v_{1,1}, \ldots, v_{1,b}, \ldots, v_{n,1}, \ldots, v_{n,b})$$

$$= h(w_1,\dots,w_a) + \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j v_{j,1},\dots,\alpha_j v_{j,b})$$

'dır. *A* matrisinin $h^*$ ile birleşimi,

$$H^* = \begin{pmatrix} H & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & A \end{pmatrix}$$

şeklindedir.Ve buradaki $H$ $h$ ile birleşim matrisi ve *A* köşegen matrisidir.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$H^*$ 'ın $b \times b$ minörleri ya $H$ 'nin $b \times b$ minörüdür ya da bazı $\alpha_j$ 'lerin uygun çarpımlarının lineer birleşimidir. Böylece ikinci durumda gösterilmiş olur. [1]

**Sonuç 3.1.28** $I \subseteq R$ sonlu üretilmiş ideal ve $M$ bir faithful *R*-modül ise, $Fitt_R(M/IM) \subseteq I$ 'dır. [1]

**Teorem 3.1.29** *R* lokal halka ve $r \in N$ için aşağıdaki durumlar birbirine denktir:

**a)** $i = 0,......,r-1$ için $Fitt_i(M)$=0 'dır ve $Fitt_r(M)$ sıfır bölensiz $R$ tarafından üretilen bir temel idealdir.

**b)** $M/\tau(M) \cong R^r$ ve rankı sonlu olan $P_0$ , $P_1$ , serbest *R*-modülleri için

$0 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ tam dizisi vardır.

**İspat:** b) $\rightarrow$ a) : $M = R^r \oplus \tau(M)$ olduğundan, $i = 0,......,r-1$ için $Fitt_i(M) = 0$' dır ve sonuç 3.1.24.' den $Fitt_r(M) = Fitt_0(\tau(M))$' dir. Ayrıca rankı sonlu $P_1^{'}$ serbest $R$-modül ise;

$$0 \rightarrow P_1' \rightarrow P_0 \rightarrow \tau(M) \rightarrow 0$$

tam dizisi vardır. Gerçekten de $\tau(M)$ torsion modül olduğundan, $rankP_0 = rankP_1^{'}$ 'dir.

$Fitt_0(\tau(M))$ temel idealdir ve $Q(R).Fitt_0(\tau(M)) = Fitt_0(Q(R) \otimes_R \tau(M)) = Q(R)$ olduğundan $Fitt_0(\tau(M))$ 'nin her üreteci sıfır bölensizdir.

a) $\rightarrow$ b) : $\{m_1,...,m_n\}$ $M$ 'nin üreteçleri ve *A, M* 'nin bağıntı matrisi olsun. Nakayama Lemmasından, $Fitt_r(M)$ temel ideali her zaman *A*'nın *(n-r)* minörü $\Delta$ tarafından üretilir. O zaman;

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^i m_j = 0 \quad (i = 1,\ldots,n-r, x_j^i \in R) \text{ 'dir.}$$

Ve biz $\Delta = \det(x_j^i)_{i,j=1,\ldots,n-r}$ olduğunu biliyoruz.

Cramer kuralından;

$$\Delta m_h = \sum_{j=n-r+1}^{n} \Delta_h^j m_j \qquad (h = 1,\ldots,n-r) \text{ 'dir.}$$

$$r_h^j \in R \text{ ile } \Delta_h^j = r_h^j.\Delta \text{ ve } \Delta.(m_h - \sum_{j=n-r+1}^{n} r_h^j m_j = 0)$$

olduğundan $m_h - \sum_{j=n-r+1}^{n} r_h^j m_j$ 'nin elemanları $\tau(M)$' dedir. Dolayısıyla $M/\tau(M)$

m $m_{n-r+1},\ldots,m_n$ 'nin görüntüleri $\overline{m_{n-r+1}},....,\overline{m_n}$ tarafından üretilir.

$Q(R) \otimes_R M = Q(R) \otimes_R (M/\tau(M))$'den, $(i = 0,\ldots,r-1)$ için $Fitt_i(Q(R) \otimes_R M) = Q(R).Fitt_i(M) = 0$ olmaktadır aynı zamanda $Fitt_r(Q(R) \otimes_R M) = Q(R).Fitt_r(M) = Q(R)$ olduğundan önerme 3.13.'den

$Q(R)\otimes_R M$ r rank ile serbesttir. M/ $\tau(M)$ r elemanları tarafından üretildiğinden $M/\tau(M)\cong R^r$ olması gerekir.

Şimdi $\{m_1,\ldots m_n\}$ kümesine ait

$$0\to K\to R^n\to M\to 0$$

gösterimini ele alalım. $v_j=(x_j^1,\ldots,x_j^n)\in R^n$ $(j=1,\ldots,n-r)$ elemanları $K$ 'dadır ve $\Delta=\det(x_j^i)_{i,j=1,\ldots,n-r}$ sıfır bölensiz olduğundan $R$ üzerinde lineer bağımsızdır ve $K$ 'yı gerdiğini gösterirsek bu bize b) 'nin son durumunu verecektir.

Her $(b_1,\ldots,b_n)\in K$ ve $h=1,\ldots,n$ için,

$$\det\begin{bmatrix} x_1^1 & \ldots & x_{n-r}^1 & x_h^1 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-r} & \ldots & x_{n-r}^{n-r} & x_h^{n-r} \\ b_1 & \ldots & b_{n-r} & b_h \end{bmatrix}=0$$

dır, çünkü $Fitt_{r-1}(M)=0$ dır. $h$'den bağımsız $\Delta_i^{'}\in Fitt_r(M)$ ile son satırın determinantı;

$$\Delta b_h=\sum_{i=1}^{n-r}\Delta_i^{'}.\alpha_{ih}$$

ifadesine eşittir. $\Delta$ tüm $\Delta_i^{'}$ leri böldüğünden , $(b_1,\ldots,b_n)$ ‘ nin $v_1,\ldots,v_{n-r}$ ‘ nin lineer birleşimi olduğunu görürüz. [1]

**Tanım 3.1.30** *R* tamlık bölgesi, *I,R*’ nin bir ideali ve Q’ da *R*’ nin kesir cismi olsun. $0\neq x\in Q$ için $xI\subseteq R$ ise $I$ idealine fractional ideal denir.

$I^{-1}=\{q\in Q: qI\subseteq R\}$ olarak tanımlanır. Eğer $II^{-1}=R$ ise *I* idealine tersinir ideal denir. [8]

**Teorem 3.1.31** *R* tamlık bölgesi ve *I*' da *R*' nin sonlu üretilmiş bir ideali olsun. O zaman *I* tersinir idealdir ancak ve ancak *R'* de her *m* maksimal ideali için $I_m$ temel idealdir. [8]

**Tanım 3.1.32** *R* değişmeli halka olsun. *R* ' nin her ideali sonlu üretilmiş ise *R* ' ye noetherian halka denir.

**Sonuç 3.1.33** $Ass(R) = Min(R)$ ile *R* noetherian halka ve *M* sonlu *R*-modül olmak üzere aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

**a)** $i = 0,......, r-1$ için $Fitt_i(M) = 0$ ve $Fitt_r(M)$ tersinir idealdir.

**b)** $M / \tau(M)$ projektif *R*-modüldür ve $pd_R$ (M) $\leq 1$ 'dir.

$AssM = MinM$ olduğundan, $\forall\, p \in$ *Spec (R)* için $\tau(M)_p = \tau(M_p)$ 'dir. Noetherian halkadaki bir ideal tersinirdir$\Leftrightarrow$ Lokal-global özelliği, teorem 3.1.28' den sonuç 3.1.31 sıfır bölensizdir.

Özellikle, $Fitt_0(M)$ tersinir idealdir $\Leftrightarrow$ *M* $pd_R$ *(M)* $\leq 1$ ile torsion modüldür. [4]

**Örnek 3.1.34** *R*=$k[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ olsun. $2xdx + 2ydy = 0$ 'dır. $Fitt_0(\Omega_1(R)) = (0)$ ve $Fitt_1(\Omega_1(R)) = (x, y) = R$ 'dir. O halde $\Omega_1(R)$, rankı *1* olan projektif *R*-modüldür. [8]

**Örnek 3.1.35** *R*=$k[x, y]/(y^2 - x^3)$ olsun. $\Omega_1(R), \Omega_2(R)$ ve $\Omega_3(R)$ 'nin fitting ideallerini bulalım.

*F*, $\{dx, dy\}$ tarafından üretilen serbest *R*-modül ve *N*' de $2ydy - 3x^2dx$ elemanı tarafından üretilen *F* 'in bir alt modülü olsun. $\Omega_1(R) \cong F / N$ olduğundan

$$0 \to N \xrightarrow{\Phi} F \xrightarrow{\pi} \Omega_1(R) \cong F / N \to 0$$

tam *R*-modül dizisi elde edilir. Bu dizide $\phi$ homomorfizması $\begin{pmatrix} -3x^2 \\ 2y \end{pmatrix}$ matrisidir. Bu matris $\Omega_1(R)$ 'nin bağıntı matrisidir.

$\Omega_1(R)$'nin fitting idealleri şu şekildedir:

$$Fitt_0(\Omega_1(R)) = (0) \subseteq Fitt_1(\Omega_1(R)) = (y, x^2) \subseteq Fitt_2(\Omega_1(R)) = R$$

$\Omega_2(R)$'nin fitting ideallerini bulalım: $F', \{\delta_2(x), \delta_2(y), \delta_2(xy), \delta_2(x^2), \delta_2(y^2)\}$ tarafından üretilen serbest $R$-modül ve $f = (y^2 - x^3)$ olmak üzere $N'$ 'de $\{\delta_2(f), \delta_2(xf), \delta_2(yf)\}$ kümesi tarafından üretilen $F'$'nün bir alt modülü olsun. $\Omega_2(R) \cong F'/N'$ olduğundan

$$0 \quad \rightarrow N' \xrightarrow{\beta} F' \xrightarrow{\pi} \Omega_2(R) \cong F'/N' \rightarrow 0$$

tam $R$-modül dizisi elde edilir. Bu dizide $\beta$ homomorfizması

$$\begin{pmatrix} -3x & 1 & 0 & 3x^2 & 0 \\ -6x^2 & x & 2y & 7x^3 & -2xy \\ -3xy & 9y & -3x^2 & 6x^2y & -y^2 \end{pmatrix}$$

matrisidir. Bu matris $\Omega_2(R)$ 'nin bağıntı matrisidir. $\Omega_2(R)$ 'nin fitting idealleri şu şekildedir: $Fitt_0(\Omega_2(R)) = Fitt_1(\Omega_2(R)) = (0) \subseteq Fitt_2(\Omega_2(R)) = (x^4, x^3y) \subseteq$ $Fitt_3(\Omega_2(R)) = Fitt_4(\Omega_2(R)) = R$

$\Omega_3(R)$ 'nin fitting ideallerini bulalım:

$$F'', \{\delta_3(x), \delta_3(y), \delta_3(xy), \delta_3(x^2), \delta_3(y^2), \delta_3(x^2y), \delta_3(xy^2), \delta_3(x^3), \delta_3(y^3)\}$$

tarafından üretilen serbest $R$-modül ve $f = (y^2 - x^3)$ olmak üzere $N''$ 'de $\{\delta_3(f), \delta_3(xf), \delta_3(yf), \delta_3(x^2f), \delta_3(y^2f)\}$ kümesi tarafından üretilen $F''$ 'nin bir alt modülü olsun. $\Omega_3(R) \cong F''/N''$ olduğundan

$$0 \rightarrow N'' \xrightarrow{\gamma} F'' \xrightarrow{\pi} \Omega_3(R) \cong F''/N'' \rightarrow 0$$

tam $R$-modül dizisi elde edilir. Bu dizide $\gamma$ homomorfizması

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4x^3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6x^2 & 0 & -4x^3 & 0 \\ -10x^2 & 0 & 2y & 2x & -4xy & 19x^3 & -x^2 & 13x^2 & -2x^2y \\ -y & 1 & -3x & 0 & 3x^2 & 3xy & 0 & -3x^2y & -x^3 \\ -x^3 & 4y & -6xy & -3x^2 & 12x^2y & 6x^4 & -4x^2 & -9x^5 & -2x^3y \\ -4xy & x & -6x^2 & 3y & 5x^3 & 12x^2y & -3xy & -11x^3y & 0 \end{pmatrix}$$

$\Omega_3(R)$ ‘nin bağıntı matrisi olup

$Fitt_0(\Omega_3(R)) = Fitt_1(\Omega_3(R)) = Fitt_2(\Omega_3(R)) = (0) \subseteq Fitt_3(\Omega_3(R)) \neq 0$ ‘dır. [8]

# BÖLÜM 4

## SONUÇLAR

Bu çalışmada halka, ideal, modül ve fitting ideallerin özellikleri ile ilgili yapılan çalışmalar incelenmiştir.

Fitting ideallere temel oluşturacak şekilde önemli tanım ve teoremler verilmiştir. Fitting idealler kapsamlı bir şekilde incelendikten sonra evrensel modüllerin fitting idealleri bulunmuştur.

Fitting ideallerle ilgili çalışmalara günümüzde de devam edilmektedir. Bu çalışmalarda modüllerin projektif boyutlarının sonlu olması ile fitting idealleri arasında bazı önemli ilişkiler bulunmuştur.

**KAYNAKLAR**

[1] Filipo A. E. Nuccio, (1990). *Fitting Ideals*, Talks Given at the school on Arithmetic Geometry, Guwahati, India.

[2] Fitting, H. (1936). Die, Determantanideale Eines Moduls, Jber DMV, **46**, 195-228.

[3] Kaplansky, I. ( 1970). *Commutative Rings, Allyn and Bacon*, Boston.

[4] Kunz, E. (2002). *Algebraic Differential Calculus*.

[5] Lipman, J. (1969). On the Jacobian Ideal of the Module of Differential, Proc. AMS., **21**, 422-426.

[6] Macrae, R. E. (1964). On an Application of the Fitting Invariant, Journal of Algebra, **2**, 153-169.

[7] Nakai, Y. (1970). *High Order Derivations*, Osaka J. Math. **7**, 1-27.

[8] Olgun, N. (2005). Sonlu Üretilmiş Cebirlerin Evrensel Diferansiyel Modülleri, Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi.

[9] Olgun, N. ve Şahin, M.(2010). *Soyut Cebir*, Gaziantep, 85–123

[10] Sharp, R. Y. (2000). *Steps in Commutative Algebra*, Second Edition, Cambridge University Press, U.K.