GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# BULANIK ÖLÇÜM TEORİSİ ÜZERİNDE TANIMLI ÖLÇÜLEBİLİR FONKSİYONLAR

MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

NİLGÜN DÖNERTAŞ
OCAK 2011

# Bulanık Ölçüm Teorisi Üzerinde Tanımlı Ölçülebilir Fonksiyonlar

**Gaziantep Üniversitesi**
**Matematik Bölümü**
**Yüksek Lisans Tezi**

**Danışman**
**Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN**

**Nilgün DÖNERTAŞ**
**Ocak 2011**

**T.C.**
**GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

Tezin Adı: Bulanık Ölçüm Teorisi Üzerinde Tanımlı Ölçülebilir Fonksiyonlar
Öğrencinin, Adı Soyadı: Nilgün DÖNERTAŞ
Tez Savunma Tarihi: 27/01/2011

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ramazan KOÇ
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

| Jüri Üyeleri: | İmzası |
|---|---|
| Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN | .............................. |
| Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN | .............................. |
| Yrd. Doç. Dr. Ali BOZKURT | .............................. |

# ÖZET

**BULANIK ÖLÇÜM TEORİSİ ÜZERİNDE**

**TANIMLI ÖLÇÜLEBİLİR FONKSİYONLAR**

DÖNERTAŞ, Nilgün

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Mehmet Şahin

Ocak 2011, 51 Sayfa

Bu tezde bulanık ölçüm teorisi üzerinde tanımlı olan ölçülebilir fonksiyonlar incelenmiştir.

İlk olarak küme sınıflarının cebirsel yapıları ile bulanık kümeler ve bu kümeler üzerindeki cebirsel yapılar üzerinde durulmuştur. Sonra klasik ölçüm ve bulanık ölçümler ile ilgili temel tanım ve teoremler incelenmiştir. Daha sonra fonksiyon ve bulanık fonksiyonlarla ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Son olarak ölçüm ve fonksiyon konusundan başlayarak ölçüm üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonlarla ilgili tanım ve teoremler verilip ölçülebilir fonksiyonların özellikleri incelenmiştir.



**Anahtar Kelimeler:** Ölçüm, bulanık ölçüm, fonksiyon, bulanık fonksiyon, ölçüm ve fonksiyon, ölçülebilir fonksiyonlar.

# ABSTRACT

**DEFINED MEASURE FUNCTOINS ON**

**FUZZY MEASURE THEORY**

DÖNERTAŞ, Nilgün

M.Sc.Thesis,Math Department

Adviser:Assistant Professor Doctor Mehmet ŞAHİN

January 2011, 51 pages

In this thesis,the measurable functions defined on the theory of fuzzy solution are investigated.

Firstly algebric structures of set classes with fuzzy sets and algebric structures on these sets are emphasized. After that the basic definitions and theorems about classical measurement and fuzzy measurements are examined. Then the basic definitions and theorems about function and fuzzy functions are existed.

Finally,starting from measurement and function topics, the basic definiton and theorems about measurement on defined measurable funtions are given and measurable properties areinvestigated.



**Key words:** measurement, fuzzy measurement, function, fuzzy function, measurement and function, measurable function.

## TEŞEKKÜRLER

Bu çalışma süresince gösterdiği yol ve yöntemlerle desteğini esirgemeyen Sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN ‘e ve sabrıyla destek olan eşim Mehmet Akif DÖNERTAŞ’a teşekkür ederim…

İÇİNDEKİLER page

## SEMBOLLER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $f \circ g$ | $f$ ve $g$ fonksiyonlarının bileşkesi |
| $E \Delta F$ | $E$ ve $F$ kümelerinin simetrik farkı |
| $\mu$ | küme fonksiyonu |
| $\mathscr{B}$ | Borel cebiri |
| $\tilde{E}$ | Bulanık küme |
| hhh | hemen hemen her yerde |
| phhh | pseudo-hemen hemen her yerde |
| $f_n \xrightarrow{p.\mu} f$ | μ içinde $f_n$ , $f$'e pseudo yakınsar |
| $f_n \xrightarrow{\mu} f$ | μ içinde $f_n$ , $f$'e yakınsar |
| $f_n \xrightarrow{hh.d} f$ | $f_n$ , $f$'e hemen hemen düzgün yakınsar |
| $f_n \xrightarrow{phh.d} f$ | $f_n$ , $f$'e pseudo hemen hemen düzgün yakınsar |

# 1. BÖLÜM

## GİRİŞ

Ölçüm kavramı matematiğin temel konularından biridir. Önceleri sürüdeki koyunların sayısı, ipin uzunluğu, tarlanın alanı, küpün hacmi gibi basit sonlu kümelerle ifade edilebilen kavramlar için ölçüm kuralları bulunmuş ancak sonraları bilimin, özellikle matematiğin gelişmesiyle karşılaşılan, sonsuz kümelerle ifade edilebilen daha karmaşık yapıların veya olayların ölçümü için çalışılmıştır. Örneğin reel doğru üzerinde "0" ile "1" arasındaki reel sayıların kümesinin [0,1] kapalı aralığı ölçümünün ne olacağı, bu kümeden "0" ve "1" 'in çıkarılmasıyla oluşan kümenin (0,1) açık aralığı veya reel doğru üzerindeki herhangi bir açık aralık ölçümünün ne olacağı veya bu kümeden bütün rasyonel sayıların çıkarılmasıyla oluşan kümenin ölçümünün ne olacağı gibi sorular üzerinde durulmuştur. Ayrıca basit yapılar için belirlenmiş olan ölçüm kurallarının bunları kapsayan daha karmaşık yapılara nasıl genişleteceği önemli bir sorun olmuştur.

Bu konularla özellikle Fransız matematikçiler Emile Borel (1871-2956) ve Henri Lebesgue (1875-1941)'in yapmış olduğu çalışmalar bugünkü klasik ölçüm teorisinin temelini oluşturmuştur. Klasik ölçüm teorisindeki ölçümün toplamsallık özelliğinden dolayı bu ölçümlere toplamsal ölçüm denilmiştir. Toplamsallık özelliği etkili ve uygun olabilir ancak çok keskindir ve esnek değildir. İşte bu noktada ölçümün toplamsallık özelliği daha zayıf bir şart olan monotonlukla yer değiştirmiştir. Toplamsallık özelliği göstermemesi bulanık ölçümlerin ana karakteristiğidir ve bu yüzden bazı kaynaklarda toplamsal olmayan ölçüm diye de isimlendirilir.

Fonksiyon terimini Gottfried Wilhelm Leibniz'e (1646-1716) y. borçluyuz. Leonhard Evler (1707-1783) genel fonksiyonlar incelemesiyle yapıtlar yayımlar (1748) ve orada fonksiyonlarla ilgili birçok özelliği ortaya koyar. 18 yy'dan beri matematiğe girmiş olan fonksiyon kavramı, yalnızca ilkel cebir işlemleriyle ifade edilen bağıntılara uygulanmaktan çok öteye geçerek diferansiyel ve integral hesap yoluyla geniş bir alana kaymıştır. [9]

Aynı zamanda Wang'un [1982.1984 a.b] üç yayını bulanık ölçüm uzayları üzerinde ölçülebilir fonksiyon dizilerinin yakınsaklıkları konusundaki ilk görüşleri içermektedir." Pseudo-hemen hemen" genel kavramı tanıtıldıktan sonra, Wang [1985 a, 1986 a] Pseudo otosüreklilik ve karşıt otosürekliliğin genel kavramlarının esasları üzerinde ölçülebilir fonksiyon dizilerinin çeşitli yakınsamalarına ilişkin birçok sonuç elde etti.

1930'ların başlarında Polonyalı Mantıkçı Jon Lukasiewicz ilk üç değerli mantık sistemini geliştirdi. 1930'larda kuantum filozofu Max Black, sürekli değerlere sahip mantığı, eleman düzeyinde kümelere uyguladı. Black, bulanık-küme üyelik fonksiyonlarından bahsetmiştir.

Bulanık küme kavramı ilk olarak L.A. Zadeh tarafından 1965 yılında "Fuzzy Sets" adlı çalışmasıyla ortaya atılmıştır ve bu çalışmayla birlikte "bulanık" kelimesini teknik terimlere dâhil etti. Ayrıca bu çalışma ile bilinen küme teorisi de genişletilmiştir.[23]

Bulanık mantığın uygulama alanları çok geniştir. Sağladığı en büyük fayda ise "insana özgü tecrübe ile öğrenme" olayının kolayca modellenebilmesi ve belirsiz kavramların bile matematiksel olarak ifade edilebilmesine olanak tanımasıdır. Yani zor ve karmaşık yapılar yerine bulanık mantık ile çok basit şekilde çözülebilir.[5]

Bulanıklık, rastgelelikle aynı değildir. Bulanıklık olaydaki belirsizliği ifade eder, bir olayın olup olmadığını değil hangi dereceye kadar olduğunu ölçer. Rastgelelik, olayın oluşundaki kesin olmayışlığı ifade eder. Bir olayın olmadığı rastgeledir, hangi dereceye kadar olduğu ise bulanıklıktır.[14]

# 2.BÖLÜM

## KÜME BİLGİLERİ

Ölçüm kavramı bir küme fonksiyonu olduğundan dolayı kümelerin cebirsel yapıları önemlidir. Bu bölümde üzerinde ölçüm kuramının tanımlanacağı küme sınıfları ve bu küme sınıflarının ürettikleri halkalar, cebirler ile bulanık kümeler ve bulanık kümeler üzerindeki cebirsel yapılar ile ilgili temel tanım ve teoremler verilerek, incelenmiştir. Bu bölümde küme sınıfları ile ilgili kısım [7-12-29] bulanık kümelerle ilgili kısım Zadeh'in [23] çalışmasından derlenmiştir.

### 2.1. Küme Sınıfları

**Tanım 2.1.1.** $X$ kümesinin tüm alt kümeleri sınıfına X'in *kuvvet kümesi* denir ve $P(X)$ ile gösterilir. $P(X)$ in alt kümelerine sınıf denir.

**Tanım 2.1.2.** Aşağıdaki şartları sağlayan boş kümeden farklı bir $R$ sınıfına *halka* denir.

$$\forall E,F \in R \;\; ; \;\; E \cup F \in R \quad ve \quad E - F \in R$$

**Önerme 2.1.1.** Boş küme her halkanın elemanıdır.

**Teorem 2.1.1.** Her halka birleşim, kesişim ve simetrik fark işlemleri altında kapalıdır ve tersine arakesit ve simetrik fark işlemleri altında kapalı olan boş olmayan bir küme sınıfı bir halkadır.

**İspat:**

$$E \Delta F = (E - F) \cup (F - E) \quad ve \quad E \cap F = (E \cup F) - (E \Delta F)$$

bu şekilde birinci sonuç bulunur. Şimdi tersine

$$E \cup F = (E \Delta F) \Delta (E \cap F) \quad ve \quad E - F = (E \Delta F) \cap E$$

olup ispat tamamlanmış olur. ■

**Teorem 2.1.2.** Kesişim, simetrik fark ve ayrık kümelerin birleşimleri altında kapalı olan boş olmayan her küme sınıfı bir halkadır.

**İspat:** Teorem 2.1.1.'den ve aşağıdaki eşitlikten ispat tamamlanır.

$$E \Delta F = [E - (E \cap F)] \cup [F - (E \cap F)]$$

**Örnek 2.1.1.** $X$ kümesinin sonlu bütün alt kümelerinin sınıfı bir halkadır.

**Tanım 2.1.3.** Aşağıdaki şartları sağlayan boş kümeden farklı bir $R$ sınıfına *cebir* denir.

*i.* $\forall E, F \in R \;;\; E \cup F \in R$
*ii.* $\forall E \in R \;;\; \overline{E} \in R$

**Teorem 2.1.3.** Cebir, $X$ kümesini içeren bir halkadır ve tersine $X$ kümesini içeren bir halka, cebirdir.

**İspat**: $R$ bir cebir olsun.

$$E - F = E \cap \overline{F} = \overline{\left(\overline{E} \cup F\right)}$$

ve $E \in R$ ise

$$X = E \cup \overline{E} \in R$$

o halde teoremin birinci kısmı tamamlanmış olur. Tersine $R$, $X$ kümesini içeren bir halka ise $\forall E \in R$ için

$$\overline{E} = X - E \in R$$

olduğundan teoremin ikinci kısmı da gösterilmiş olup ispat tamamlanır. ■

**Örnek 2.1.2.** Bütün sonlu kümeler ve onların tümleyenlerinin sınıfı bir cebirdir.

**Tanım 2.1.4.** $\varphi$ boş olmayan bir sınıf aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\varphi$ küme sınıfına *yarı halka* denir.

*i.* $\forall E, F \in \varphi$ ; $E \cap F \in \varphi$

*ii.* $\forall E \subset F \in \varphi$ ; $i = 1, 2, 3, ..., n$ *için*

$$E = C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset ... \subset C_n = F$$
$$D_i = C_i - C_{i-1} \in \varphi$$

olacak biçimde $\varphi$ nin içinde sonlu bir $\{C_0, C_1, C_2, ..., C_n\}$ küme sınıfı vardır. Her halka yarı halkadır ve boş küme her yarı halkanın bir elemanıdır.

**Örnek 2.1.3.** $X$ kümesinin tek elemanlı tüm alt kümelerini ve boş kümeyi içeren küme sınıfı bir yarı halkadır.

**Tanım 2.1.5.** $\mathscr{F}$ boş olmayan bir küme sınıfı aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\mathscr{F}$ küme sınıfına $\sigma$ - *halka* denir.

*i.* $\forall$ E, F$\in \mathscr{F}$ ; E-F $\in \mathscr{F}$

*ii.* $\forall E_i \in \mathscr{F}$; i=1,2,3,…, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{F}$

Bir $\sigma$ - halka sayılabilir birleşim altında kapalı olan bir halkadır.

**Önerme 2.1.2.** Bir $\sigma$ - halka sayılabilir arakesit altında kapalıdır. Bundan dolayı $\mathscr{F}$ bir $\sigma$ - halka ve $\{E_n\} \in \mathscr{F}$ bir küme dizisi ise;

$$\limsup_n E_n \in \mathscr{F} \text{ ve } \liminf_n E_n \in \mathscr{F}$$

olur

**Örnek 2.1.4.** Tüm sayılabilir kümelerin sınıfı bir $\sigma$ - halkadır.

**Tanım 2.1.6.** $X$ kümesini içeren bir $\sigma$ - halkaya $\sigma$ - cebiri denir.

**Örnek 2.1.5.** Tüm sayılabilir kümeler ve onların tümleyenlerinin sınıfı bir $\sigma$ - cebirdir.

**Önerme 2.1.3.** $\mathscr{F}$ bir $\sigma$ - halka ise $\mathscr{F} \cup \left\{ E : \overline{E} \in \mathscr{F} \right\}$ bir $\sigma$ - cebirdir.

**Tanım 2.1.7.** Boş olmayan ve her $\left\{ E_n \right\} \subset M$ monoton küme dizisi için eğer $\lim_n E_n \in M$ ise $M$ küme sınıfına *monoton sınıf* denir.

**Önerme 2.1.4.** Bir $\sigma$ - halka bir monoton sınıftır.

**Önerme 2.1.5.** Bir halka aynı zamanda bir monoton sınıf ise bu bir $\sigma$ -halkadır.

**Tanım 2.1.8.** $\mathscr{F}_p$ boş olmayan bir sınıf ve T keyfi indeks kümesi olmak üzere

$\forall \left\{ E_t : t \in T \right\} \subset \mathscr{F}_p$ için

$$\bigcup_t E_t \in \mathscr{F}_p \qquad \text{ve} \qquad \bigcap_t E_t \in \mathscr{F}_p$$

ise $\mathscr{F}_p$ sınıfına *düzenli sınıfı* denir.

**Önerme 2.1.6.** Düzenli sınıf bir monoton sınıftır.

**Örnek 2.1.6.** $X = [0,1]$ kapalı birim aralık olsun. $a \in [0,1]$ olmak üzere $[0,a)$ ya da $[0,a]$ biçimindeki tüm kümelerin sınıfı düzenli bir sınıftır.

**Önerme 2.1.7.** $E$ sabit bir küme olsun. $\varphi$ bir $\sigma$ - halka ise (sırasıyla halka, yarı halka, monoton sınıf, düzenli sınıfı) $\varphi \cap E$ de $\sigma$ - halkadır.

**Teorem 2.1.4.** $\varphi$ bir küme sınıfı olsun. $\varphi$ sınıfını kapsayan en küçük bir $R_0$ halkası vardır.

$$\forall R \ \textit{ve} \ R_0 \supset \varphi \ \textit{için} \ R \supset \varphi \Rightarrow R \supset R_0$$

$R_0$, $\varphi$ sınıfının ürettiği halka olarak adlandırılır ve $R(\varphi)$ ile gösterilir.

**İspat:** $P(X)$, $\varphi$ sınıfını içeren bir halkadır. $\varphi$ yi içeren halkaların kesişimi de yine $\varphi$ yi içeren bir halkadır. Bu $R_0$ halkası ile gösterilir. $R_0$ ın tekliği aşikârdır. ■

Benzer şekilde $\varphi$ nin ürettiği $\sigma$ - halka, monoton sınıf ve düzenli sınıf için tanımlanıp sırasıyla $\mathscr{F}(\varphi)\sqrt{2}$, $M(\varphi)$, $\mathscr{F}_p(\varphi)$ ile gösterilebilir.

**Örnek 2.1.8.** $X$ sonsuz bir küme olsun. $\varphi$ bütün tek elemanlı kümelerin sınıfı ise R($\varphi$) bütün sonlu kümelerin ve $\mathscr{F}(\varphi)$ bütün sayılabilir kümelerin sınıfıdır.

**Örnek2.1.9.** $X$ reel doğru olsun. $\varphi$ tüm açık aralıkların sınıfı ise $M(\varphi)$ tüm açık aralıkların sınıfı ve $\mathscr{F}_p(\varphi) = P(X)$ dir.

**Önerme 2.1.8.** $\varphi_1 \subset \varphi_2$ ise $\mathscr{K}(\varphi_1) \subset \mathscr{K}(\varphi_2)$ dir. Burada $\mathscr{K}$ yerine $R$, $M$, $\mathscr{F}_p$ veya $\mathscr{F}$ den herhangi biri alınabilir.

**Teorem 2.1.5.** $\varphi$ bir yarı halka olsun. $R(\varphi)$, $\varphi$ deki bütün kümelerin sonlu, ayrık birleşimlerinin sınıfıdır.

**Teorem 2.1.6.** $\mathscr{F}(\varphi) = \mathscr{F}\ (R(\varphi))$.

**İspat:** İlk olarak $\varphi \subset R(\varphi)$ olduğundan Önerme 2. 1. 8. e göre;

$$\mathscr{F}(\varphi) \subset \mathscr{F}(R(\varphi))$$

İkinci olarak $\mathscr{F}(\varphi) \supset \varphi$ ve $\mathscr{F}(\varphi)$ bir halka olduğundan

$$\mathscr{F}(\varphi) \supset R(\varphi)$$

olur.

Ayrıca $\mathscr{F}(\varphi)$ bir $\sigma$ - halka olduğundan,

$$\mathscr{F}(\varphi) \supset \mathscr{F}(R(\varphi))$$

olur. Böylece

$$\mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}\ (R(\varphi))$$

bulunur. ■

**Örnek 2.1.10.** $X$ reel doğru ve $\varphi$ de Örnek 2.1.3. deki yarı halka olsun. Bu durumda $\mathcal{F}(\varphi)$ ye Borel cebiri denir ve "$\mathcal{B}$" ile gösterilir. $\mathcal{B}$ deki kümeler Borel kümesi olarak adlandırılır. $\mathcal{B}$ aynı zamanda sırasıyla tüm açık aralıkların sınıfı, tüm kapalı aralıkların sınıfı, tüm soldan açık sağdan kapalı aralıkların sınıfı, bütün soldan kapalı sağdan açık aralıkların sınıfı veya tüm aralıkların sınıfı tarafından üretilen bir $\sigma$ - halkadır.

**Teorem 2.1.7.** $\varphi$ bir küme sınıfı ise,

$$\mathcal{F}_p(\varphi) = \left\{ \bigcup_{t\in T} \bigcap_{s\in S_t} E_s : E_s \in \varphi \quad S_t \text{ ve } T \text{ keyfi indeks kümeleri} \right\}$$

olur.

**İspat:** Eşitliğin sağ tarafını V ile gösterelim.

*i.* $S_t$ ve $T$ tek elemanlı olabileceklerinden $V \supset \varphi$

*ii.* Bileşke işleminin birleşme özelliğinden, V bileşke işlemine göre kapalıdır.

*iii.* $\varphi$ deki kesişim ve birleşim işleminin yer değiştirebilmesinden ve kesişimin birleşme özelliğinden V, kesişim işlemine göre kapalıdır.

Bu yüzden V, $\varphi$ yi içeren bir düzenli sınıftır ve $V \supset \mathcal{F}(\varphi)$.

Tersine $\varphi$ yi içeren her düzenli sınıf V yi de kapsar buradan $\mathcal{F}_p(\varphi) \supset V$ .

Sonuç olarak

$$\mathcal{F}_p(\varphi) = V$$

bulunur. ■

**Teorem 2.1.8.** $\varphi$ herhangi bir sınıf ve A herhangi bir küme ise,

$$\mathscr{F}(\varphi) \cap A = \mathscr{F}(\varphi \cap A)$$

dır.

Benzer şekilde halka, monoton sınıf ve düzenli sınıf içinde aynı ifade geçerlidir.

**İspat:** *i.* $\mathscr{F}(\varphi) \cap A$ bir $\sigma$ -halkadır ve $\varphi \cap A$ yı kapsar, bu yüzden

$$\mathscr{F}(\varphi) \cap A \supset \mathscr{F}(\varphi \cap A)$$

olur.

*ii.* $V = \{E : E \cap A \in \mathscr{F}(\varphi \cap A),\ E \in \mathscr{F}(\varphi)\}$ olsun. $V$ bir $\sigma$ -halka ve $V \supset \varphi$ olur.

$V \supset \mathscr{F}(\varphi)$ olduğundan $\forall E \in \mathscr{F}(\varphi)$ için

$$E \cap A \in \mathscr{F}(\varphi \cap A)$$

olur. Buradan,

$$\mathscr{F}(\varphi) \cap A \subset \mathscr{F}(\varphi \cap A)$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\mathscr{F}(\varphi) \cap A = \mathscr{F}(\varphi \cap A)$$

elde edilir. ■

**Örnek 2.1.11.** $\mathscr{B}$ reel doğru üzerinde bir borel cebiri olsun. $\mathscr{B} \cap [0,1]$ birim aralık üzerindeki borel cebiri olarak adlandırılır. Bu, [0,1] deki tüm aralıkların sınıfı tarafından üretilen $\sigma$ -halkadır.

**Teorem 2.1.9.** Eğer $R$ bir halka ise $M(R) = \mathscr{F}(R)$ olur.

**Sonuç 2.1.1.** Bir halkayı kapsayan monoton sınıf, bu halkanın ürettiği $\sigma$ -halkayı da kapsar.

## 2.2. Bulanık Kümeler

1965 yılına kadar matematikte, incelenen konuların (olayların) daha önce saptanmış olan kurallara kesin olarak uyup uymadığı incelenmiştir. Bu incelemeler de her zaman kendimize göre bir kesinlik aranmıştır. Araç olarak, düşünce sistemimizde, iki değerli mantık kullanılmıştır. Örneğin bir önerme için, daha önce saptanan kurallara uyuyorsa doğru, uymuyorsa yanlış denilmiştir. Buna karşın yaşadığımız evrende birçok olay vardır ki, bunlarla ilgili önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu ayırt etmek çoğu kez bizi güç durumda bırakabilir. Başka bir deyişle bizi yanılgıya düşürebilir. Örneğin elinizdeki elmanın bir parçasını ısırın ve şu soruyu sorun;"elimdeki nedir?" yanıt "elma" olacaktır. Bir parça daha alın ve yine aynı soruyu sorun. Yanıtınız belki yine "elma" olacaktır ama içinizden bu yanıtı biraz daha açmak geçecektir. Örneğin, "biraz yenmiş bir elma" gibi. Isırmaya ve soruyu sormaya devam edin. Öyle bir an gelecektir ki, elinizde tuttuğunuz, her neye benziyor ise, artık sadece "elma" sözcüğü ile açıklanamayacaktır. Yemeye devam edin. Sonunda elma yok olacak ve sorunun yanıtı da "hiçbir şey" olacaktır. Şimdi sorunuzu değiştirin, "elma ne zaman elma olmaktan çıktı? ". Bu soruya bir yanıt bulamayacaksınız. Burada verilen örnek, bulanık mantığın mantığını anlatan çok güzel bir örnektir.

Soruda, "ne zaman" sözcüğü, içerisinde bir kesinlik taşımaktadır. Yani yanıtın "5.ısırıktan sonra", ya da "elma yemeye başladıktan 5 dk. sonra" gibi, kesin bir şekilde ifade beklenmektedir.

Bulanık mantık, " elmadan, elma değile geçişi" bir derece meselesi olarak algılar, klasik mantık(Aristo mantığı) ise, kesin bir an ister [30].

Bu gözlemler ve çeşitli araştırmacılar, iki değerli mantığa dayanan bugünkü matematiğin kesinlik göstermeyen birçok olayları tam olarak açıklayamayacağı düşüncesini doğurmuştur. Bu durumu ilk kez 1965 yılında Zadeh yayınladığı "Fuzzy Sets" [23] , adlı makalesiyle ortaya koydu ve bulanık küme (Fuzzy set) kavramını tanıttı. Zadeh daha sonra bulanık kümelerle ilgili birçok çalışma yaptı [22-24-25].

### 2.3. Bulanık Küme Kavramı

Şimdiye kadar, bir kümenin belirtilmesini bu kümenin iyi tanımlanmış olması koşuluna bağladık. Başka bir deyişle, A kümesinin tanımlı olması için evrensel kümeden seçtiğimiz bir x elemanı A kümesinin elemanı mıdır? Sorusuna kesinlikle evet ya da hayır dememiz gerekirdi. Bunu $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere, A kümesinin

$$\forall x \in X \ \ i\c{c}in \ \ \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

ile tanımlı $\mu_A : X \to \{0,1\}$ üyelik fonksiyonu ile ifade ediyorduk [11]. Zadeh'in [23] de ortaya koyduğu aşağıdaki tanıma göre $0 \leq r \leq 1$ olmak üzere $x \in X$ elemanı, A kümesinin üyelik derecesi r olan bir elemanı olmaktadır [13-16].

**Tanım 2.3.1.** $X = \{x : x \in X\}$ kümesi verilmiş olsun. $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \in [0,1]$ olmak üzere

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

kümesine $X$ in A *bulanık kümesi* denir. $\mu_A$ fonksiyonuna A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu, $\mu_A(x)$ değerine $x$ n üyelik derecesi (ya da değeri) ve $\mu_A(x)$ kümesine de A bulanık kümesine ait elemanların üyelik derecelerinin kümesi denir[23].

0 ve 1 sayıları [0,1] aralığının elemanları olduğundan her kümeyi bir bulanık küme olarak düşünebiliriz.

Eğer;

$$\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1$$

ise bulanık kümeye normal denir [31-32-33].

**Tanım 2.3.2.** Eğer her $x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ise $A \subset B$ denir.

**Tanım 2.3.3.** Bulanık kümelerde birleşme işlemi $A \cup B$, "$\vee$" verilen bulanık kümelerin en büyük işlemi olmak üzere aşağıdaki biçimde tanımlanır;

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \qquad \forall x \in X$$

**Tanım 2.3.4.** Bulanık kümelerde kesişim işlemi, $A \cap B$,"$\wedge$" verilen bulanık kümelerin en küçük işlemi olmak üzere aşağıdaki biçimde tanımlanır;

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \qquad \forall x \in X$$

Benzer biçimde eğer $\{A_t : t \in T\}$ bulanık kümelerinin bir sınıfı ise $\cup_{t \in T} A_t$ *ve* $\cap_{t \in T} A$ bulanık kümeleri de aynı üyelik fonksiyonları kullanılarak;

$$\sup_{t \in T} \mu_{A_t}(x) \text{ ve } \inf_{t \in T} \mu_{A_t}(x)$$

ile bulunur [26].

**Tanım 2.3.5.** $A$ bir bulanık küme olsun. $A$ nın tümleyeni $\bar{A}$, aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad \forall x \in X$$

**Teorem 2.3.1.** Bulanık kümelerde birleşim, kesişim ve tümleyen işlemleri aşağıdaki özelliklere sahiptir [3-34] ;

Tek kuvvet $\qquad A \cup A = A$

$\qquad A \cap A = A$

Değişme $\qquad A \cup B = B \cup A$

$\qquad A \cap B = B \cap A$

Tümleme $\qquad \bar{\bar{A}} = A$

Yutma $A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

Evrensel ve boş kümede yutma $A \cup X = X$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

Özdeşlik $A \cap X = A$

$A \cup \varnothing = A$

Birleşme $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Dağılma $B \cap \left( \bigcup_{t \in T} A_t \right) = \bigcup_{t \in T} (A_t \cap B)$

$B \cup \left( \bigcap_{t \in T} A_t \right) = \bigcap_{t \in T} (A_t \cup B)$

De Morgan kuralı $\overline{\left( \bigcup_{t \in T} A_t \right)} = \bigcap_{t \in T} \overline{A}_t$

$\overline{\left( \bigcap_{t \in T} A_t \right)} = \bigcup_{t \in T} \overline{A}_t$

Klasik kümelerden farklı olarak;

$$\mu_{A \cup \overline{A}}(x) \neq \mu_X(x)$$

$$\mu_{A \cap \overline{A}}(x) \neq \mu_{\varnothing}(x)$$

olabilir.

**Örnek 2.3.1.** X={a,b} ve A, B bulanık kümelerin üyelik fonksiyonları için bulanık küme işlemleri aşağıdaki gibi olur;

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0,3 & x=a\\ 0,8 & x=b\end{cases}$$

$$\mu_B(x)=\begin{cases}0,9 & x=a\\ 1 & x=b\end{cases}$$

$$\mu_{A\cup B}(x)=\begin{cases}0,9 & x=a\\ 1 & x=b\end{cases}$$

$$\mu_{A\cap B}(x)=\begin{cases}0,3 & x=a\\ 0,8 & x=b\end{cases}$$

$$\mu_{\bar{A}}(x)=\begin{cases}0,7 & x=a\\ 0,2 & x=b\end{cases}$$

$$\mu_{\bar{B}}(x)=\begin{cases}0,1 & x=a\\ 0 & x=b\end{cases}$$

$$\mu_{A\cup\bar{A}}(x)=\begin{cases}0,7 & x=a\\ 1 & x=b\end{cases}$$

$$\neq \mu_X(x)$$

$$\mu_{A\cap\bar{A}}(x)=\begin{cases}0,3 & x=a\\ 0 & x=b\end{cases}$$

$$\neq \mu_{\varnothing}(x)$$

**Tanım 2.3.6.** $A\in V(x)$ olsun. $\{x:\mu_A(x)>0\}$ klasik kümesi $A$ *nın desteği* olarak isimlendirilir ve $\sup A$ ile gösterilir.

**Tanım 2.3.7.** $A\in V(x)$ olsun. $\forall\alpha\in[0,1]$ için

$$\{x:\mu_A(x)\geq\alpha\} \quad ve \quad \{x:\mu_A(x)>\alpha\}$$

klasik kümelerine $\alpha$ - *kesim* ve *güçlü* $\alpha$ - *kesim* kümeleri denir ve sırasıyla $A_\alpha$, $A_{\alpha^+}$ ile gösterilir [4].

**Tanım 2.3.8.** $X=(-\infty,\infty)$ olsun. Eğer $\forall\alpha\in(0,1]$ için $A_\alpha$ bir sonlu kapalı aralık ise $A\in V(x)$ bulanık kümesine *bulanık sayı* denir. Eğer $A$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu $a,b\in R$ ve $b\geq 0$ olmak üzere;

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 0 & ,x<a-b \quad veya \quad x>a+b \\ (x-a+b)/b & ,a-b\leq x<a \\ (a+b-x)/b & ,a\leq x<a+b \\ 1 & ,x=a \end{cases}$$

ise A ya *üçgensel bulanık sayı* denir [6].

Her üçgensel bulanık sayı bir bulanık sayı, her reel sayı özel bir üçgensel bulanık sayı ve buradan her reel sayı aynı zamanda bulanık sayıdır.

**Tanım 2.3.9.** $X=(-\infty,\infty)$ olsun. Eğer $\forall x_1,x_2,x_3\in X$ için $x_1\leq x_2\leq x_3$

$$\mu_A(x_2)=\mu_A(x_1)\wedge\mu_A(x_3)$$

ise $A\in V(x)$ bulanık kümesine *konveks* denir [3].

**Teorem 2.3.2.** Her bulanık sayı $(-\infty,\infty)$ un konveks bulanık alt kümesidir ve bunların üyelik fonksiyonları üstten yarı süreklidir.

**Tanım 2.3.10.** $A$, $B$ bulanık sayılar olsun. Bu durumda $A+B$, $A-B$, $A.B$, $A/B$ aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mu_{A+B}(z)=\sup_{x+y=z}\left[\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)\right]$$

$$\mu_{A-B}(z)=\sup_{x-y=z}\left[\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)\right]$$

$$\mu_{A.B}(z)=\sup_{x.y=z}\left[\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)\right]$$

$$\mu_{A/B}(z)=\sup_{\frac{x}{y}=z,y\neq 0}\left[\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)\right]$$

# 3.BÖLÜM

## ÖLÇÜM

Bu bölümde klasik anlamdaki ölçüm kavramı ve bulanık ölçümlerle ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir.

### 3.1.Klasik Ölçüm

Klasik anlamdaki ölçümler toplamsal ölçümler olarak da adlandırılırlar. Klasik ölçümlerle ilgili olarak genel tanım ve teoremler [2], [8], [12] kaynaklarından derlenmiştir.

**Tanım 3.1.1.** $\mathscr{C}, X$ kümesinin alt kümelerinden oluşan bir cebir ve $\mu$ , $\mathscr{C}$ cebirinde genişletilmiş reel değerli fonksiyon olsun. Aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\mu$ ye *ölçüm* denir.

$i. \mu(\emptyset) = 0$

$ii. \forall A \in \mathscr{C} \, . \, \mu(A) \geq 0$

$iii.$ $\forall A_n \in \mathscr{C}$ ikişer ikişer ayrık küme dizisi ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{C}$ için

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \text{(sayılabilir toplamsallık özelliği)}$$

eğer

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n)$$

alınırsa sonlu *toplamsallık özelliği* denir.

**Önerme 3.1.1.** $\mu$ , $\mathscr{C}$ cebiri üzerinde bir ölçüm olsun.

*i.* $A \in \mathscr{C}, B \in \mathscr{C}, A \subset B$ *için* $\mu(A) \le \mu(B)$

*ii. Eğer* $A_n \in \mathscr{C}$ $, 1 \le n < \infty$ *ve* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *için*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \text{(sayılabilir toplamsallık özelliği).}$$

**İspat:**

*i.* $B = A \cup (B - A)$; buradan $A_1 = A$ , $A_2 = B - A$ ve $n > 2$ için $A_n = \emptyset$ ise $\mu$ nin sayılabilir toplamsallığından;

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \quad ve \quad \mu(B) \ge \mu(A)$$

olur.

*ii.* $n > 1$ *ve* $A_1 = B_1$ $B_n = A_n - \bigcup_{n=1}^{n-1} A_i$ olsun. $\forall n$ için;

$B_n \in \mathscr{C}$ , $B_n \subset A_n$ ve $B_n$ ler ikişer ikişer ayrık kümeler ise

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{C}$$

buradan

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \qquad \blacksquare$$

**Önerme3.1.2.** $\mu$ , $\mathscr{C}$ cebiri üzerinde bir ölçüm olsun.

*i.* Eğer $A_n \subset A_{n+1}$, $A_n \in \mathscr{C}$ , $1 \le n < \infty$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{C}$ ise

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right)$$

*ii.* Eğer $A_n \supset A_{n+1}$ $A_n \in \mathscr{C}$ , ise; $1 \le n < \infty$ $\mu\left(A_1\right) < \infty$ , $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{C}$ ise

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right)$$

Ayrıca, $i.$) den sonlu toplamsal $\mu$ için sayılabilir toplamsallık bulunur.

### 3.2. Bulanık Ölçüm Metotları

Bulanık ölçümlerde üyelik fonksiyonlarından ziyade güven, olasılık ve benzerlik dereceleri önem taşır. Bu derece bir evrensel kümedeki aitliği belli olmayan bir elemanın, evrensel kümesinin bir alt kümesine olan aitliğinin derecesidir. Bu bölümde klasik kümeler üzerindeki bulanık ölçümler yüzeysel olarak incelenmiştir ve bulanık ölçümlerle ilgili çeşitli tanım ve teoremler verilmiştir. Bulanık ölçüm düşüncesi ilk olarak Sugeno [19-20] tarafından tasarlanmıştır.

### 3.3. Bulanık Ölçüm

$X \neq \varnothing$ bir küme, $\mathscr{C}$ , $X$ 'in alt kümelerinin boştan farklı bir sınıfı ve

$m : \mathscr{C} \rightarrow [0,\infty]$ negatif olmayan, $\mathscr{C}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir küme fonksiyonu olsun. Bu durumda;

$$\sup_{x\in\varnothing}\left\{x : x \in [0,\infty]\right\} = 0$$

$$\inf_{x\in\varnothing}\left\{x : x \in [0,\infty]\right\} = 1$$

$\sum_{i\in\varnothing} A_i = 0$ (burada $\left\{A_i\right\}$ bir reel sayı dizisidir.)

olarak alalım. [21-29].

**Tanım 3.3.1.** $m: \mathscr{C} \rightarrow [0,\infty]$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bu m fonksiyonuna *bulanık ölçüm* denir. [17]

*i.* $m(\varnothing)=0 \quad ,\varnothing \in \mathscr{C}$ için

*ii.* $A\in \mathscr{C} \quad B\in \mathscr{C} \quad A\subset B \quad için \quad m(A)\leq m(B)$ (monotonluk şartı)

*iii.* $\forall n\in N \quad \{A_n\}\subset \mathscr{C}$

$$A_1 \subset A_2 \subset ..., \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{C} \qquad \text{için}$$

$$\lim_n m(A_n) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \qquad \text{(üstten sürekli)}$$

*iv.* $\forall n\in N \quad \{A_n\}\subset \mathscr{C}$

$$A_1 \supset A_2 \supset ..., \quad m(A_1)<\infty \quad ve \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{C} \qquad \text{için}$$

$$\lim_n m(A_n) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \qquad \text{(alttan sürekli)}$$

**Tanım 3.2.2.** Eğer (X, $\mathscr{C}$ ) üzerinde Tanım 3.3.1.'deki (i), (ii) ve (iii) koşulları sağlanıyorsa m' ye *üstten yarı sürekli bulanık ölçüm*; (i), (ii) ve (iv) koşulları sağlanıyorsa m'ye *alttan yarı sürekli bulanık ölçüm*; kısaca her ikisine birden *yarı sürekli bulanık ölçüm* denir.

Bundan başka $X\in \mathscr{C}$ , $m(x)=1$ ise $m$ bulanık ölçüm *normaldir* veya yarı sürekli bulanık ölçüm *normaldir* denir.

Genellikle $m$ nin tanımlı olduğu $\mathscr{C}$ sınıfı olarak monoton sınıfı yarı halka, halka, cebir, $\sigma$-cebir, $\sigma$-halka, düzenli sınıf veya kuvvet kümesi göz önüne alınabilir. Eğer $m$ , $(X,\mathscr{F})$ de bir bulanık ölçüm (veya yarı sürekli bulanık ölçüm) ise $(X,\mathscr{F},m)$ ye bir *bulanık ölçüm uzayı*( veya yarı sürekli bulanık ölçüm uzayı) denir.

Bir yarı halka üzerindeki bulanık ölçümde, klasik ölçümdeki toplamsallık yerine monotonluk, süreklilik ve boş kümede sıfır olma anlamına gelir.

Bunun yanında bulanık ölçüme toplamsal olmayan ölçüm de denir [28].

**Örnek 3.3.1.** $\mu$ , $(X,\mathscr{F})$ üzerinde tanımlı ve her $E \in \mathscr{F}$ için $x_0$, $X$ kümesinde sabit bir nokta olmak üzere

$$\mu(E)=\begin{cases} 1, & x_0 \in E \\ 0, & x_0 \notin E \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan Dirac Ölçümü bir normal bulanık ölçümdür.

$R$, $X$ kümesinin alt kümelerinden oluşan bir cebir ve $\mu$ , $(R,X)$ üzerinde tanımlı düzenli bir bulanık ölçüm (düzenli artan yarı sürekli bulanık ölçüm veya düzenli azalan yarı sürekli bulanık ölçüm) olsun. Eğer $v$, $(R,X)$ de bir küme fonksiyonu ve

$$v(E)=1-\mu(\overline{E})$$

ise $v$ düzgün bulanık ölçüme sırasıyla, düzenli artan yarı sürekli veya düzenli azalan yarı sürekli bulanık ölçümdür. $v$ ye $\mu$ nün *iki yönlü( dual)* bulanık ölçümü denir[10-15-18].

# 4.BÖLÜM

## FONKSİYON KAVRAMI VE ÖZLELİKLERİ

İlk defa 1694 ‘de Leibnitz tarafından ortaya atılan fonksiyon kavramı matematikteki temel kavramlardan biridir. Eşleme, dönüşüm gibi kelimelerin genel adı olarak fonksiyon kullanılır. Fonksiyon; verilen her girdiye karşılık bir çıktı atayan bir kuraldır.

Örneğin; herkesin sevdiği bir renk vardır. Renk kişilerin fonksiyonudur. Ali maviyi severken, Ayşe kırmızıdan hoşlanır buradaki kişiler girdiyi oluştururken sevdiği renkler çıktıyı verir. Buna daha pek çok örnek verilebilir.

Görüldüğü gibi fonksiyonlar günlük yaşantımızın en basit yönlerinde bile görülebilmektedir. Peki, fonksiyon bulanık ise nasıl bir sonuç elde edilir. Ona örnek verelim. Hava sıcaklığını derece değil de “ sıcak,soğuk ılık, serin….” gibi değerlendirdiğimizde net sınırları olmayan bir küme oluşur. İşte bu durumda oluşan küme bulanık mantığın fonksiyon kavramımıza uygulanmasıdır. Bu bölümde öncelikle klasik fonksiyon kavramı ve özellikleri hakkında bilgi vereceğiz.[3]

### 4.1 Fonksiyon ve Fonksiyonla İlişkili Kavramlar

**Tanım 4.1.1** A, B boş olmayan iki küme ve A,B$\subset$ R olsun. $\forall x \in A$ girdisine yalnız bir y$\in$B çıktısı getiren y= $f(x)$ kuralına *fonksiyon* denir.

Fonksiyonu sağlayan y= $f(x)$ kuralında x değiştikçe, y’de değişecektir. Bu nedenle *x’e bağımsız değişken, y’e bağımlı değişken* denir.

Fonksiyon özel bir tip bağıntıdır. Bir $f$ bağıntısının fonksiyon olabilmesi için;

i) $\forall x \in A$ için (x,y)$\in f$ olacak biçimde en az bir y$\in B$ vardır.

ii) $\forall x \in A$ için (x,y) $\in f$ ve (x,z) $\in f$ iken y=z dir.

**Tanım 4.1.2.** y=$f(x)$ denklemine uyan tüm x girdileri kümesine $f$ fonksiyonun tanım kümesi ya da alan $(D_f)$, B kümesine de *değer kümesi* denir.

Tüm y lerin oluşturduğu kümeye de $f$ fonksiyonun *görüntü kümesi* ya da *aralık* $(R_f)$ denir.

## 4.2. Fonksiyonların Özellikleri

**Tanım 4.2.1.** A, B$\subset R$ olmak üzere $f: A \to B$ y=$f(x)$ fonksiyonu tanımlansın.

Tanım kümesindeki her farklı elemanın görüntüsü de farklı ise bu tip fonksiyona *bire- bir fonksiyon* denir. Yani $\forall$ $x_1, x_2 \in A$ için;

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ veya $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ dir.

**Tanım 4.2.2.** Değer kümesi ile görüntü kümesi eşit olan fonksiyonlara *örten fonksiyon* denir. Yani, $\forall$ y$\in B$ için y= $f(x)$ olacak şekilde en az bir x$\in A$ varsa *f'ye örten fonksiyon* denir.

Bu durumda;

$$f(A) = \{f(a); a \in A\} = B$$

olur.

**Tanım 4.2.3.** Görüntü kümesi değer kümesinin öz alt kümesi ise buna *içine fonksiyon* denir. Yani:

$$f(A) \subset B$$

dir.

**Tanım 4.2.4.** $\forall\ x_1, x_2 \in A$ için

$x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ (Artan fonksiyon)

$x_1 < x_2$ için $f(x_1) \leq f(x_2)$ ( Azalmayan fonksiyon)

$x_1 < x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ (Azalan fonksiyon)

$x_1 < x_2$ için $f(x_1) \geq f(x_2)$ (Artmayan fonksiyon)

Bu koşullardan birini sağlayan fonksiyona *monotonik fonksiyon* denir.

**Tanım 4.2.5.** T>0 ve $\forall x \in A$ için x+T $\in A$ ve

$$f(x+T) = f(x)$$

oluyorsa $f$ 'ye *periyodik fonksiyon* denir. T'ye de *periyot* denir.

## 4.3. Fonksiyon işlemleri

**Tanım 4.3.1.** $f$ ve g fonksiyonlarının her ikisinin de tanım kümesi içerisinde olan x değerleri için:

*i)* $(f+g)(x) = (f(x)+g(x))$

*ii)* $(f-g)(x) = (f(x)-g(x))$

*iii)* $(f.g)(x) = (f(x).g(x))$

*iv)* $(f/g)(x) = (f(x)/g(x))$ $(g(x) \neq 0)$

şeklinde tanımlanan işlemlere fonksiyonlarda *aritmetik işlemler* denir.

**Tanım 4.3.2.** *f(x)* , *g*'nin tanım kümesi içinde *f* ve *g* herhangi iki fonksiyon olmak üzere;

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

olarak tanımlanan *gof* fonksiyonuna *g* ile *f*' nin *bileşke fonksiyonu* denir.

**Tanım 4.3.3.** Bir *f* fonksiyonu bire bir ise $f^{1}$ ters fonksiyon vardır. $f^{-1}(x)$ değeri *f*'nin tanım kümesi içinde, $f(y)=x$ eşitliğini sağlayan bir tek *y* sayısıdır. Yani;

$$x=f(y) \Leftrightarrow y=f^{-1}(x)$$

olur.

# 5.BÖLÜM

## BULANIK FONKSİYONLAR

Klasik fonksiyon tanımına bulanık kavramı üç düzeyde uygulanabilir ve dolaysıyla üç tip bulanık fonksiyon elde edilmiş olur. Bulanıklık kavramının tanım ve görüntü kümesine uygulanmasıyla bulanık sınırlamalı fonksiyon elde edilir. Bir başka seçenekte fonksiyonun bağımsız değişkenin bulanıklığını bağımlı değişkene yayması durumu olabilir. Bu bölümde bulanık fonksiyonlar ile ilgili bölüm [3] Baykal N. Ve Timur B. çalışmalarından derlenmiştir.

### 5.1. Bulanık Sınırlamalı Fonksiyon

**Tanım 5.1.1.** A ve B klasik kümeler olmak üzere, *f* klasik ve kesin bir fonksiyon ( $f$:A→B) olsun. A ve B sırasıyla E ve F evrensel kümelerinde $\mu_A(x) \leq \mu_B(f(x))$ şeklinde tanımlanır. Bulanık kümelerde ise, bu fonksiyon A bulanık tanım kümesi ya da bulanık alanda ve B görüntü kümesi ya da bulanık aralık da bulunan bir fonksiyon olacaktır.

**Örnek 5.1.1.** $y = f(x)$ olsun. *f* fonksiyonun aşağıdaki gibi bulanık sınırlamaları olsun;

"Eğer *x*, A'nın bir üyesi ise, *y*, B'nin bir üyesidir." "A kümesi için *x*'in üyelik derecesi $\mu_A(x)$, B kümesi için *y*'nin üyelik derecesi $\mu_B(y)$'den daha az dır."

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(y)$$

öncül bulanık sınırlamalar *y*'nin B kümesinin elemanı olması için yeter bulanık koşulu belirtir.

Eğer, A kümesi için x'in üyelik derecesi $\alpha$ ise , B kümesi için $y$'in üyelik derecesi $\alpha$ 'dan daha küçük olmayacaktır.

İki bulanık küme düşünelim.

$$A=\{(1,0.5),(2,0.8)\}$$

$$B=\{(2,0.7),(4,0.9)\}$$

ve $x \in A$, $y \in B$ için $y=f(x)=2x$ olsun.

*f*, fonksiyonu

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(y)$$

koşulunu sağlar.

**Örnek 5.1.2.** "Deneyimli satıcı yüksek gelir sağlar" ifadesiyle bir fonksiyon araştıralım.

E ve F sırayla satıcı ve $[0,\infty]$ aylık gelir kümeleri olsun. A ve B' de deneyimli satıcı ve yüksek gelir bulanık kümelerini ifade etsin. Bu durum da,

$f: A \to B$ fonksiyonu,

$$\forall x \in A \text{ ve } y=f(x) \in B \text{ için } \mu_A(x) \leq \mu_B(y)$$

koşulunu sağlamaktadır.

A,B ve C; E, F ve G' de tanımlanmış bulanık kümeler olmak üzere bulanık sınırı olan $f: A \to B$, $g: B \to C$ fonksiyonları kabul edelim. Bu fonksiyonların birleşimi;

$$(gof): A \to C$$

şeklinde bulanık fonksiyon ve bulanık sınırlamalar üretirler.

bileşke fonksiyon *gof,*

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(f(x))$$

$$\mu_B(y) \le \mu_C\left(g\left(y\right)\right)$$

ve

$$y=f(x),\ z=g(y)$$

koşullarına bağlıdır. Buradan,

$$\mu_A(x) \le \mu_C(g(f(x)))$$

elde edilir.

## 5.2 Kesin Fonksiyonla Bulanıklığın Yayılımı

Bulanık genişleme fonksiyonu, bağımlı değişkenlere bağımsız değişkenlerin belirsizliğini yayan fonksiyonlardır. $f\colon E \to F$ kesin bir fonksiyon ise, bulanık genişleme fonksiyonu $f$, bulanık küme $\widetilde{E}$'nin $f(\widetilde{E})$ görüntüsünü tanımlar. Bu genişleme ilkesinin uygulanmasıdır.

$$\mu_{f(x)}(y) = \begin{cases} f^{-1}\left(y\right) \ne \phi \quad ise \quad EB\mu_{(\tilde{x})}(x) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x \in f^{-1} \\ f^{-1}\left(y\right) = \phi \quad ise \quad 0 \end{cases}$$

$f^{-1}(y)$, y'nin ters görüntüsüdür. Bu bölümde bulanık değişkeni temsil etmek için "~" işareti kullanılacaktır.

**Örnek 5.2.1.** A= $\{(0,\ 0.9),\ (1,\ 0.8),\ (2,\ 0.7),\ (3,\ 0.6),\ (4,\ 0.5)\}$ tanım kümesinde ve B=$[0,20]$ aralığında $f(x) = 3\widetilde{x} + 1$ şeklinde bir kesin fonksiyon olsun. Bağımsız değişkenler belirsizdir ve bulanıklık B kümesine yayılarak $B'$ bulanık kümesi elde edilecektir.

$$B' = \{(1,\ 0.9),\ (4,\ 0.8),\ (7,\ 0.7),\ (10,\ 0.6),\ (13,\ 0.5)\}$$

bulanık genişleme fonksiyonu ile ilgili;

$$\tilde{y} = a\tilde{x} + b\tilde{x}^2 \qquad \text{ve} \qquad \tilde{y} = a.\cos\tilde{x} + b$$

gibi örneklerde vardır.

### 5.3 Kesin Değişkeni Bulandırma Fonksiyonu

**Tanım 5.3.1.** Bu fonksiyon bulanık kümede kesin tanım kümesinin görüntüsünü oluşturur. Tekil bulandırma fonksiyonu, E'nin bulanık güç kümesindeki $\tilde{p}(Y)$ eşleşmesini veren E'den F'ye bulandırma fonksiyonu olup

$$\tilde{f} :\rightarrow \tilde{p}(Y)$$

şeklinde gösterilir.

Bulandırma fonksiyonu tanım kümesinden; bulanık görüntü kümesine bir eşleme sağlar. Bulandırma fonksiyonu ve bulanık bağıntı, matematikte birbirinin yerine kullanılmaktadır. Bundan dolayı bulandırma fonksiyonu ∀ (x,y)∈ExF için aşağıdaki gibi tanımlanan bulanık bağıntı olarak yorumlanabilir.

$$\mu_{f(\tilde{x})}(y) = \mu_R(x, y)$$

**Örnek 5.3.1** iki kesin küme olan A={2,3,4} ve B={2,3,4,6,8,9,12} yi ele alalım. $\tilde{f}$ bulandırma fonksiyonu A'daki elemanları $\tilde{p}(B)$ güç kümesinde aşağıdaki şekilde eşleşsin.

$$\tilde{f}(2) = B_1, \qquad \tilde{f}(3) = B_2, \qquad \tilde{f}(4) = B_3$$

$$\tilde{p}(B) = \{B_1, B_2, B_3\}$$

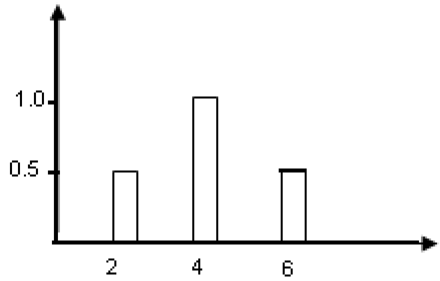
olup,

$B_1$={(2, 0.5), (4,1), ( 6, 0.5)}

$B_2$= {(3, 0.5), (6,1), (9, 0.5)}

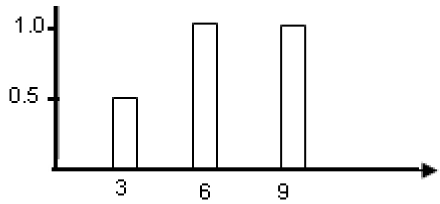
$B_3$= {(4, 0.5), (8,1), (12, 0.5)}

$\tilde{f}: 2 \to B_1$



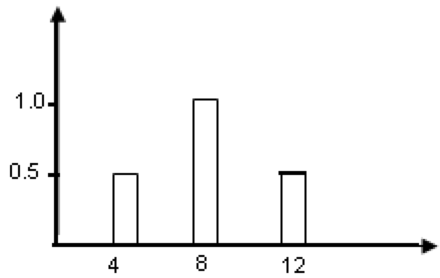

$B_1$

$\tilde{f}: 3 \to B_2$




$B_2$

$\tilde{f}: 4 \to B_3$




$B_3$

$\tilde{f}$ fonksiyonu $2 \in A$ 'yı $\quad$ $2 \in B_1$'e 0,5 derecesi ile

$4 \in B_1$'e 0,1 derecesi

$6 \in B_1$'e 0,5 derecesi

ile eşler. Bulandırma fonksiyonuna $\propto -$kesme işlemi uygularsak;

$$\propto = 0{,}5 \ için \ f: 2 \to \{2,4,6\}$$

$$\propto = 1{,}0 \ için \ f: 2 \to \{4\}$$

aynı yolla,

$$\propto = 0{,}5 \ için \ f: 3 \to \{3,6,9\}$$

$$\propto = 1{,}0 \ için \ f: 3 \rightarrow \{6\}$$

yine; $\propto = 0{,}5 \quad için \quad f: 4 \rightarrow \{4{,}8{,}12\}$

$\propto = 1{,}0 \quad için \quad f: 4 \rightarrow \{8\}$ elde edilir.

**Tanım 5.3.2**

E'den F' ye kesin fonksiyonların bulanık gruplar'ı kesin $\tilde{f}_i (i = 1, 2, ...., n)$ fonksiyonu bulanık kümesi ile tanımlanır ve $\forall x \in E$ için $f_i = f(x)$ olmak üzere şu şekilde gösterilir.

$$\tilde{f} = \left\{ \left( f_i, \mu_{\tilde{f}}(f_i) \quad \right) \middle| f_i : E \rightarrow F, \quad i \in X \right\}$$

bu fonksiyon çıktı olarak bulanık küme üretir.

**Örnek 5.3.2.**

$$\tilde{f} = \{(f_1, 0.4), (f_2, 0.7), (f_3, 0.5)\}$$

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = -x+1$$

bulanık kümelerinin varlığında E={1, 2, 3} olmak üzere bulanık grup şu şekilde hesaplanacaktır;

$f_1$ ile $\tilde{f}$ ={(1. 0,4), (2, 0.4), (3, 0.4)}

$f_1$ ile $\tilde{f}_2$ = { (1, 0.7), (4, 0.7), (9, 0.7)}

$f_1$ ile $\tilde{f}_3$ = { (0, 0.5), (-1, 0.5), (-2, 0.5)}

böylece çıktılar şu şekilde yazılabilir,

$\tilde{f}(1)$= {(1, 0.4), (1,0.7), (0, 0.5)} = {(0, 0.5), {1, 0.7)}

$\tilde{f}(2)$={(2, 0.4), (4,0.7), (-1,0.5)}={(-1, 0.5), (2,0.4), (4,0.7)}

$\tilde{f}(3)$ ={(3, 04), (9, 0.7), (-2,0.5)}={(-2,0.5), (3, 0.4), (9,0.7)}

# 6. BÖLÜM

## BULANIK ÖLÇÜM UZAYLARINDA ÖLÇÜLEBİLİRLİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde bulanık ölçüm uzaylarında ölçülebilir fonksiyonlarla ilgili tanımlar, teoremler, sonuçlar verilmiş “hemen hemen” ve “pseudo hemen hemen “ kavramları, ölçülebilir fonksiyon yakınsamaları arasındaki ilişki incelenmiştir. Bu bölüm [27]’den derlenmiştir.

### 6.1. Ölçülebilir Fonksiyonlar

Bu bölümde, (X, $\mathscr{F}$ ) ölçülebilir uzay, μ: $\mathscr{F} \rightarrow [0, \infty]$ bulanık ölçümü (veya yarı sürekli bulanık ölçümü) ve B (-∞,∞) üzerinde Borel cisim olsun.

**Tanım 6.1.1.** Herhangi bir $B \in \mathscr{B}$ *B o r e l* kümesi için;

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\} \in \mathscr{F}$$

Olacak şekilde $X$ üzerinde gerçel değerli $f: X \rightarrow (-\infty, \infty)$ fonksiyonu varsa $\mathscr{F}$ ölçülebilirdir.

**Teorem 6.1.1.** Eğer $f$: X $\rightarrow (-\infty, \infty)$ fonksiyonu gerçel değerli bir fonksiyon ise aşağıdaki ifadeler denktir.

**(1)** $f$ ölçülebilirdir

**(2)** Herhangi bir α ϵ (-∞,∞) için $\{x | f(x) \geq \alpha \} \in \mathscr{F}$ dir.

**(3)** Herhangi bir $\alpha \in (-\infty, \infty)$ için $\{x | f(x) > \alpha \} \in \mathscr{F}$ dir.

**(4)** Herhangi bir $\alpha \in (-\infty, \infty)$ için $\{x | f(x) \leq \alpha \} \in \mathscr{F}$ dir.

**(5)** Herhangi bir $\alpha \in (-\infty,\infty)$ için $\{x | f(x) < \alpha\} \in \mathscr{F}$ dir.

**İspat.**

**(1) => (2):** $\{x | f(x) \geq \alpha\} = f^{-1}([\alpha,\infty))$ ve $[\alpha,\infty)$ bir Borel kümesidir.

**(2)=>(1)** : Herhangi bir $\alpha \in (-\infty,\infty)$ için $\{x | f(x) \geq \alpha\} \in \mathscr{F}$ ise herhangi bir

$$B \in \{[\alpha,\infty) | \alpha \in (-\infty,\infty)\} \text{ için } f^{-1}(B) \in \mathscr{F} \text{dir.}$$

$\mathscr{A} = \{B | f^{-1}(B) \in \mathscr{F}\}$ ve $\mathscr{L} = \{[\alpha,\infty) | \alpha \in (-\infty,\infty)\}$ ile belirtirsek $\mathscr{A} \supset \mathscr{L}$

olduğunu görürüz. $B \in \mathscr{A}$ verilsin.

$f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)} \in \mathscr{F}$ olduğunda $\overline{B} \in \mathscr{A}$ dır, yani $\mathscr{A}$ tümleyen işlemi altında kapalıdır. Benzer şekilde, bazı $\{B_n\} \subset \mathscr{A}$ *verilsin*.

$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) \in \mathscr{F}$ olduğundan $\bigcup_{n=1}^{\infty} B \in \mathscr{A}$ olur yani $\mathscr{A}$ sayılabilir birleşim oluşumu altında kapalıdır. Bu yüzden, $\mathscr{A}$ *bir* $\sigma-$cebiridir ve dolayısıyla $\mathscr{A} \supset \mathscr{F}$ (L ) $= \mathscr{B}$ dir. Bu da bize, $f$ fonksiyonunun ölçülebilir bir fonksiyon olduğunu gösterir.

**Sonuç 6.1.1.** $f$ ölçülebilir bir fonksiyon ise herhangi bir $\alpha \in (-\infty,\infty)$ için

$$\{x | f(x) = \alpha\} \in \mathscr{F}$$

dir.

**Tanım 6.1.2.** $R = (-\infty,\infty)$ ve $R^n = RxRxRx..........xR$ $n$-boyutlu çarpım uzayı olsun. Şimdi

$$\propto^{(n)} = \left\{ \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \middle| -\infty < a_i \leq b_i < \infty, i = 1,2,..........,n \right\}$$

olduğunu belirtmeliyiz. $\mathscr{B}^{(n)} = \mathscr{F}\ (\mathscr{L}^{(n)})$ $\sigma-$cebirine $R^n$ üzerinde *Borel cisim* denir ve $B^{(n)}$içindeki kümeler *(* $n$ -boyutlu) *Borel kümeleri* olarak adlandırılırlar. $f : R^n \to R$ fonksiyonu ($\mathrm{R}^n$, $\mathscr{B}^{(n)}$) ölçülebilir uzayında ölçülebilir bir fonksiyonsa bu fonksiyona *Borel fonksiyon'*u denir.

**Teorem 6.1.2.** $f_1,............,f_n$ fonksiyonları ölçülebilir fonksiyonlar olsunlar. Eğer $g : R^n \to R$ bir Borel fonksiyon ise $g:(f_1,.........,f_n)$ ölçülebilir bir fonksiyondur.

**İspat:** Herhangi bir $B \subset (-\infty,\infty)$Borel kümesi için,

$$\left[g\left(f_1,.........,f_n\right)\right]^{-1}(B)=\left\{x \middle| g\left(f_1(x),....f_n(x)\right)\in B\right\}$$

$$= \left\{x \middle| \left(f_1(x),.........,f_n(x)\right)\in g^{-1}(B)\ \right\}$$

dir. Herhangi bir $F \in \mathscr{B}^{(n)}$ için Teorem 6.1.1.'inin ispatında olduğu gibi herhangi bir $E = \prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i)\in \mathscr{L}^{(n)}$ için,

$$\left\{x \middle| \left(f_1(x),.....,f_n(x)\right)\in E\ \right\} = \bigcap_{i=1}^{n}\left\{x \middle| f_i(x)\in[a_i,b_i)\ \right\} \in \mathscr{F}$$

olduğundan

$$\left\{x \middle| \left(f_1(x),......,f_n(x)\right)\in F\ \right\} \in \mathscr{F}$$

elde ederiz.

g bir Borel fonksiyonu olduğundan, herhangi bir $B\subset (-\infty,\infty)$ Borel kümesi için $g^{-1}(B)\in\mathscr{B}^{(n)}$ olur. Böylece herhangi bir $B \subset (-\infty,\infty)$ Borel kümesi için,

$$\left\{x \middle| \left(f_1(x),......,f_n(n)\right)\in g^{-1}(B)\ \right\} \in \mathscr{F}$$

elde ederiz ve bu $g\left(f_1,.........,f_n\right)$ nin ölçülebilir olduğunu gösterir.

Teorem 6.1.2.'inin özel bir durumu olarak, eğer $f_1$ ve $f_2$ ölçülebilir ve $\alpha \in (-\infty, \infty)$ bir sabit ise, $\alpha$, $\alpha f_1, f_1 + f_2, f_1 - f_2, |f_1|, f_1.f_2$, $|f_1|^\alpha$, $f_1 \vee f_1, f_1 \wedge f_1$

ve $\alpha$ sabiti ölçülebilirdir. Ayrıca

$$\{x | f_1(x) = f_2(x) \} = \{x | f_1(x) - f_2(x) = 0 \} \in \mathscr{F}$$

olur.

**Teorem 6.1.3.** Herhangi bir x $\in X$ için, $\{ f_n \}$ ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ve

$$h(x) = \sup_n \{f_n(x) \}$$

$$g(x) = \inf_n \{f_n(x) \}$$

ise $h$ ve $g$ ölçülebilirdir.

**İspat:**

Herhangi bir $\alpha \in (-\infty, \infty)$ için, Teorem 6.1.1.'den

$$\{x \mid h(x) > \alpha\} = \left\{ x \middle| \sup_n \{f_n(x) \} > \alpha \right\}$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x | f_n(x) > \alpha \} \in \mathscr{F}$$

ve

$$\left\{ x \middle| g(x) \geq \alpha \right\} = \left\{ x \middle| \inf_n \{f_n(x)\} \geq \alpha \right\}$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x | f_n(x) \geq \alpha \} \in \mathscr{F}$$

dir. Böylece $h$ ve g ölçülebilirdir.

**Sonuç 6.1.2.** $\{f_n\}$ ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ve

$$\overline{f}(x) = \overline{\lim_{n}}\ f_n(x),$$

$$\underline{f}(x) = \underline{\lim}_{n} f_n(x)$$

ise, $\overline{f}$ ve $\underline{f}$ ölçülebilirdir. Ayrıca $\lim_{n} f_n$ varsa o da ölçülebilirdir.

**İspat:**

$\overline{f}(x) = \inf_m \sup_{n \geq m} \{f_n(x)\}$ ve

$\underline{f}(x) = \sup_m \inf_{n \geq m} \{f_n(x)\}$ *olup* Teorem6.1.3.'den ispat tamamlanmış olur.

**6.2. "Hemen Hemen" ve Pseudo-Hemen Hemen"**

$(X, \mathscr{F}, \mu)$ bulanık ölçüm (veya yarı sürekli bulanık ölçüm) uzayı üzerinde ölçülebilir fonksiyon tanımı, klasik ölçüm teorisiyle özdeştir, sonuç olarak bu $\mu$ küme fonksiyonuyla bağlantılı değildir, fakat ölçülebilir fonksiyonların özellikleri söz konusu olduğunda küme fonksiyonu görüşleri incelenmelidir. Örneğin, eğer $f$ fonksiyonu sonlu bulanık ölçüm uzayında ölçülebilir bir fonksiyon ise, "$f$ hemen hemen her yerde sıfıra eşittir' ifadesinin anlamı nedir?

Olasılık teoreminde "rastgele bir değişken $\xi$ ,1 olasılık ile 0'a eşittir" ifadesi "rastgele bir değişken $\xi$ , 0 olasılıkla 0'a eşit değildir" ifadesine denktir, çünkü olasılık ölçümleri toplanabilirlik özelliğine sahiptir. Şöyle ki, eğer $\rho$ olasılık ölçümü ise herhangi bir $E$ olayı için,

$\rho(E) + \rho(\overline{E}) = \rho(E \cup \overline{E}) = 1$ dir. Bulanık ölçümlerinde genellikle toplanabilirlik özelliği kaybolduğu için, aşağıdaki tanımda belirtildiği gibi "hemen

hemen her yerde" ifadesi "hemen hemen her yerde" ve "pseudo hemen hemen her yerde" diye ikiye ayrılmaktadır.

**Tanım 6.2.1.** $A \in \mathscr{F}$ olsun ve $P$, $A$ 'nin içindeki noktalara göre bir önerme olsun. $P$, $A$-$E$ üzerinde doğru olacak şekilde $E \in \mathscr{F}$ ve $\mu(E) = 0$ varsa, "*$P$ hemen hemen her yerde A üzerinde doğrudur"* denir. $P$, $A - F$ üzerinde doğru olacak şekilde $F \in \mathscr{F}$ ve $\mu(A - F) = \mu(A)$ varsa, " *$P$ pseudo hemen hemen her yerde $A$ üzerinde doğrudur"* denir.

"Hemen hemen her yerde" ve "pseudo-hemen hemen her yerde" ifadelerini sırasıyla "h.h.h." ve "p.h.h.h." ile göstereceğiz ve "$\{f_n\}$h.h.h. $f$ 'e yakınsar (veya "$\{f_n\}$p.h.h.h. $f'e$ Yakınsar") ifadelerini de sırasıyla "$f_n \xrightarrow{h.h.h} f$" (veya "$f_n \xrightarrow{p.h.h.h} f$ ") ile göstereceğiz.

**Örnek 6.2.1.** Herhangi bir $E \in \mathscr{F}$ için, $X = \{0,1\}$, $\mathrm{F} = P\ (x)$

$$\mu(E) = \begin{cases} 1, E \neq \phi \\ 0, E = \phi \end{cases}$$

olsun. Eğer aşağıdaki gibi (X, $\mathscr{F}$, $\mu$) üzerinde,

$$f_n(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1 - 1/\mathrm{n}, & \mathrm{x} = 1 & \text{ise} \\ 1/\mathrm{n}, & \mathrm{x} = 0 & \text{ise} \end{cases} \qquad \mathrm{n}=1,2,\ldots\ldots$$

ölçülebilir fonksiyon dizisini tanımlarsak,

$$f_n \xrightarrow{p.h.h.h.} 0 \ \text{ ve } \ f_n \xrightarrow{p.h.h.h.} 1$$

olur, fakat asla

$$f_n \xrightarrow{h.h.h.} 1 \ \text{ veya } \ f_n \xrightarrow{h.h.h.} 0$$

olamaz.

**Örnek 6.2.2.** Herhangi bir $\mathrm{E} \in \mathscr{F}$ için, X= {0,1}, $\mathscr{F} = \mathscr{P}\ \{X\}$ ve

$$\mu(E)=\begin{cases}1, E = X \\ 0, E \neq X\end{cases} \text{ ise}$$

olsun. Örnek 6.2.1. ‘de verilen ölçülebilir fonksiyon dizisi için

$$f_n \xrightarrow{h.h.h} 0 \text{ ve } \quad f_n \xrightarrow{h.h.h.} 1$$

olur, fakat asla

$$f_n \xrightarrow{p.h.h.h.} 0 \text{ veya } \quad f_n \xrightarrow{p.h.h.h.} 1$$

olamaz.

Örneklerden anlaşılacağı gibi, bu durumun klasik ölçüm teorisinden çok farklı olduğunu görüyoruz. Eğer $f_n \xrightarrow{h.h.h.} f$ ve $f_n \xrightarrow{h.h.h.} f'$ her ikisi de gerçekleşiyorsa, h.h.h. $f = f'$ dür. Fakat şimdi Örnek 6.2.1. ve Örnek 6.2.2.’de limit fonksiyonları her yerde 0'a ve l’e eşit değil, tabi ki bunlar ne h.h.h. ne de p.h.h.h. dır.

Şunu da belirtmeliyiz, “h.h.h.” ve “p.h.h.h.” durumları tamamen birbirine simetrik durumlar değildir. Gerçekte, eğer $P$ önermesi $A \in \mathscr{F}$ üzerinde h.h.h. doğru ise o zaman bu önerme $\boldsymbol{A}$ nin $\mathscr{F}$ ***’ye*** bağlı herhangi bir alt kümesi içinde doğrudur; fakat burada '"h.h.h." yerine "p.h.h.h." olsaydı bu ifademiz doğru olmayacaktı. Bu durum aşağıdaki örnekte açıklanmıştır.

**Örnek 6.2.3.** Herhangi bir $E \in \mathscr{F}$ için, $X = \{a, b, \}$, $\mathscr{F} = \mathscr{P}(X)$ olsun, $\mu$ ise aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\mu(E) = \begin{cases}|E|, & E \neq \{a,b\} \quad \text{ise} \\ 3, & E = \{a,b\} \quad \text{ise}\end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases}0, & x \in \{a,b\} \quad \text{ise} \\ 1, & x = c \quad \text{ise}\end{cases}$$

ve $\mu$ nün bulanık ölçüm olduğu ayrıca

$$\mu(\{x | f(x) = 0, x \in X\}) = \mu(\{a,b\}) = 3 = \mu(X)$$

olduğu kolayca ispatlanabilir.

Böylece, $X$ üzerinde p.h.h.h. $f = 0$ dır. Fakat

$$\mu(\{x|f(x)=0, x\in\{a,c\}\})=\mu(\{a\})=1\neq\mu(\{a,c\})=2$$

dir. Sonuç olarak " $\{a,\ c\}$ üzerinde p.h.h.h. $f = 0$" ifadesi doğru değildir.

Bu konuyla ilgili "'hemen hemen düzgün yakınsama" ve "ölçümde yakınsama" kavramları ölçülebilir fonksiyon dizileri içindir ve bulanık ölçüm uzayı (ya da yarı-sürekli bulanık ölçüm uzayı) üzerine dağılırlar.

**Tanım 6.2.2.** $A\in F$ , $f\in F$, $\{f_n\}\subset F$ olsun. Herhangi bir sabit $k$=1,2,... için, $\{f_n\}$ $A$ - $E_k$ üzerinde $f$ 'e düzgün yakınsayacak şekilde $\mu(E_k)=0$ ile $\{E_k\}\subset F$ varsa, $\{f_n\}$ A üzerinde $f$ *'ye hemen hemen düzgün yakınsar* denir ve $f_n \xrightarrow{h.h.d} f$ ile gösterilir.

Herhangi bir sabit $k$ = 1,2,... için, $\{f_n\}$ $A$ - $F_k$ üzerinde $f$ 'e düzgün yakınsayacak şekilde $\lim_k \mu(A-F_k)$ *ile* $\{F_k\}\subset$ $\mathscr{F}$ varsa $\{f_n\}$ A üzerinde $f$ *'e pseudo-hemen hemen düzgün yakınsar* denir.

**Tanım 6.2.3.** $A\in$ $\mathscr{F}$, $f\in F$ ve $\{f_n\}\subset F$ olsun. Verilen herhangi bir $\varepsilon$>0 için,

$\lim_n \mu\left(\left\{x \| f_n(x)-f(x)\right| < \varepsilon\right\} \cap A\right) = \mu(A)$ ise $\{f_n\}$ $\mu$ içinde, A üzerinde $f$ *'ye yakınsar (veya ölçüm içinde yakınsar)* denir ve A üzerinde $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ile gösterilir. Verilen her hangi bir $\varepsilon$>0 için,

$$\lim_n \mu\left(\left\{x \| f_n(x)-f(x)\right| \geq \varepsilon\right\} \cap A\right) = 0$$

ise $\{f_n\}$ $\mu$ içinde, A üzerinde $f$ *'ye pseudo-yakınsar ( veya ölçüm içinde pseudo-yakınsar)* denir ve A üzerinde $f_n \xrightarrow{p.\mu} f$ ile gösterilir

**Örnek 6.2.4.** $X = [0,\infty)$, $\mathscr{F} = \mathscr{B}$ ve $\mu$ Lebesgue ölçümü olsun, öyle ki, $\mathscr{B}$, $[0,\infty)$ içindeki bütün Borel kümelerinden oluşan sınıfı temsil etsin. Herhangi bir $x \in X$ için $f_n(x) = x/n$ , $n = 1,2,...$ ve $f(x) = 0$ alırsak,

$$f_n \xrightarrow{p.h.h.d} f$$

elde ederiz. Fakat $\{f_n\}$ $X$ üzerinde $f$'ye hemen hemen düzgün yakınsamaz. Hatta,

$$f_n \xrightarrow{p.\mu} f$$

olur. Fakat $\{f_n\}$ $\mu$ içinde $X$ üzerinde $f$'ye yakınsamaz.

## 6.3. Ölçülebilir Fonksiyon Dizisinin Yakınsamaları Arasındaki İlişki

6.2'de anlatılan kavramlar, bulanık ölçüm uzayında veya yarı sürekli bulanık ölçüm uzayında ölçülebilir fonksiyon dizisinin yakınsamaları arasındaki ilişkiyi karmaşıklaştırmaktadırlar. Klasik ölçüm teorisinde sadece üç kavram (h.h.h. yakınsama, h.h.d. yakınsama ve ölçümde yakınsama) ele alınmıştı, şimdi ise bunlar arasındaki altı ifadeyi tartışacağız. Bu kısımda, küme fonksiyonlarının özellikleri kullanılarak, başlıca bağıntılar verilecektir.

**Teorem 6.3.1.** Herhangi bir $A \in \mathscr{F}$ ve $A$ içindeki noktalara göre herhangi bir $P$ önermesi için, P, A üzerinde hemen hemen doğruysa, $P$ $A$ üzerinde p.h.h.h. doğrudur ancak ve ancak $\mu$ sıfır-toplamsaldır.

**İspat:**

Yeterlilik: $\mu$ sıfır-toplamsal olsun. Eğer $P$ $A$ üzerinde h.h.h. doğruysa, herhangi bir $x \in A - E$ için $P(x)$ doğru olacak şekilde $E \in \mathscr{F}$ ile $\mu(E) = 0$ vardır. Sıfır toplamsallığı kullanarak $\mu(A - E) = \mu(A)$ elde ederiz. Böylece $P$ $A$ üzerinde p.h.h.h. doğrudur.

Gereklilik: Herhangi bir $A \in \mathscr{F}$ , $E \in \mathscr{F}$ ile $\mu(E) = 0$ için, $P(x)$ önermesini "$x \in A - E$" olarak alalım. Açıkça görülmektedir ki, $P$ $A$ üzerinde h.h.h. doğrudur. Eğer bu $P$ 'nin $A$ üzerinde p.h.h.h. doğru olduğunu gösteriyorsa, herhangi bir $x \in A - F$ için $P(x)$ doğru olacak şekilde

$$F \in \mathscr{F} \text{ ile } \quad \mu(A - F) = \mu(A)$$

vardır. Yani $x \in A - F$ iken $x \in A - E$ 'dir. Bu yüzden

$$A - E \supset A - F$$

dir. 'nün monotonluğunu kullanarak

$$\mu(A - E) = \mu(A)$$

elde ederiz.

**Sonuç 6.3.1.** A$\in \mathscr{F}$ , $f \in F$ sıfır toplamsal olsun. Eğer A üzerinde $f_n \xrightarrow{h.h.d.} f$ , A üzerinde $f_n \xrightarrow{p.h.h.d.} f$ olur.

**Teorem 6.3.2.** A $\in \mathscr{F}$ $f \in F$ ve $\{f_n\} \subset$F ve $\mu$ alttan oto sürekli olsun. Eğer A üzerinde $f_n \xrightarrow{h.h.d} f$ ise, A üzerinde $f_n \xrightarrow{p.h.h.d} f$ olur.

**İspat.**

Eğer A üzerinde $f_n \xrightarrow{h.h.d} f$ ise, herhangi bir $k$ = 1,2,... için $A - E_k$ üzerinde $\{f_n\}$ $f$ 'e yakınsak olacak şekilde $\{E_k\} \subset F$ ile $\lim_k \mu(E_k)) = 0$ vardır, $\mu$ alttan otosürekli olduğundan, $\lim_k \mu(A - E_k) = \mu(A)$ olur ve bu yüzden $A$ üzerinde $f_n \xrightarrow{p.h.h.d} f$ 'dir.

**Teorem 6.3.3.** Herhangi bir $A \in \mathscr{F}$ ve herhangi bir $f \in F$ ve $\{f_n\} \subset F$ için, $A$ üzerinde $f_n \xrightarrow{\mu} f$ olduğunda $A$ üzerinde $f_n \xrightarrow{p.\mu} f$ ancak ve ancak $\mu$ alttan otosüreklidir.

**İspat:**

Yeterlilik : $\mu$ alttan otosürekli olsun. $A$ üzerinde $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ise, verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$\lim_n \mu\left(\left\{x \| f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\right\} \cap A\right) = 0$ olur. $\mu$ alttan otosürekli olduğundan,

$$\lim_n \mu\left(\left\{x \| f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\right\} \cap A\right) = \lim_n \mu(A - \left\{x \| f_n(x) - f(x) \geq \varepsilon\right\} \cap A) = \mu(A)$$

elde ederiz. Böylece $A$ üzerinde $f_n \xrightarrow{\rho.\mu} f$ olur.

Gereklilik : Herhangi bir $A \in \mathscr{F}$ için ve $\lim_n \mu(B_n) = 0$ olan herhangi bir $\{B_n\} \subset \mathscr{F}$ için, ölçülebilir fonksiyon dizisi $\{f_n\}$'i $n = 1,2,..$ için

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \overline{B_n} \quad \text{ise} \\ 1, & x \in \overline{B_n} \quad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlarız. Buradan, A üzerinde $f_n \xrightarrow{\mu} 0$ olduğunu göstermek kolaydır. Eğer bu, $A$ üzerinde $f_n \xrightarrow{\rho.\mu} 0$ olduğunu gösterirse $\varepsilon = 1 > 0$ için,

$$\lim_n \mu(\{x \| f_n(x)| < 1 \} \cap A) = \mu(A)$$

elde ederiz.

$$(\{x \| f_n(x)| < 1 \} \cap A) = \overline{B_n} \cap A = A - B_n$$

iken

$$\lim_n \mu(A - B_n) = \mu(A)$$

olur. Bu $\mu$'nün alttan otosürekli olduğunu gösterir.

Teorem 6.3.1. ve Teorem 6.3.3.'inin doğrulukları $\mu$ nün sürekliliğine bağlı değildir.

Aşağıdaki Egoroff un teoremine göre klasik ölçüm uzayından bulanık ölçüm uzayına yapılan genellemedir.

**Teorem 6.3.4.** $\mu$ bulanık ölçüm, $A \in \mathscr{F}$ ve $\mu(A) < \infty$ olsun. Eğer A'nın her yerinde $f_n \longrightarrow f$ ise $A$ üzerinde $f_n \xrightarrow{h.h.d} f$ ve $f_n \xrightarrow{p.h.h.d} f$ dir.

**İspat:**

A= X ve $\mu$ sonlu olsun demekle herhangi bir kaybımız olmayacaktır. Eğer herhangi bir $m$ = 1,2,... için

$$E_n^m = \bigcap_{i=n}^{\infty} \{x \| f_i(x) - f(x) | < 1/m\}$$

şeklinde tanımlarsak, $E_1^m \subset E_2^m \subset ......$ olur. $\{f_n(x)\}$'in $f(x)$ yakınsadığı bütün noktaların kümesi,

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m$$

dir. Eğer her yerde $f_n$ —> $f$ ise, herhangi bir m=1,2,… için $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m = X$ dir. Yani $n \to \infty$ iken $E_n^m \nearrow$ X ve bu nedenle herhangi bir sabit m = 1,2,... için $n \to \infty$ iken $\overline{E_n^m} \searrow \phi$ dir. Keyfi verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için, üstten süreklilik ve $\mu$'nün sonluluğu kullanılarak, $\mu\left(\overline{E_{n_1}^1}\right) < \varepsilon / 2$ olacak şekilde $n_1$ bulunur; bu $n_1$ için,

$\mu\left(\overline{E_{n_1}^1} \cup \overline{E_{n_2}^2}\right) < \varepsilon / 2 + \varepsilon / 2^2 = \frac{3}{4}\varepsilon$ olacak şekilde $n_2$ bulunur;….

Genel olarak, $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} \overline{E_{n_i}^i}\right) < \sum_{i=1}^{k} \varepsilon / 2^i = \left(1 - 1/2^k\right)\varepsilon < \varepsilon$ olacak şekilde $n_1, n_2, .....,n_k$ vardır. Buradan $\{n_i\}$ sayı dizisini ve $\left\{\overline{E_{n_i}^i}\right\}$ küme dizisini elde ederiz, $\mu$'nün alttan sürekliliğini kullanarak,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_i}^i\right) \leq \varepsilon$$

buluruz. Şimdi $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_i}^{i}$ üzerinde $\{f_n\}$ 'nin $f$ ye düzgün yakınsadığını göstermeliyiz.

Verilen herhangi bir $\delta > 0$ için, $i_0 > 1/\delta$ alalım. Eğer $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} E_{n_i}^{i}$ ise $x \in E_{n_{i_0}}^{i_0}$ olduğundan, $i \geq n_{i_0}$ olduğunda

$$|f_i(x) - f(x)| < 1 / \mathrm{i}_0 < \delta$$

olur. Buradan $f_n \xrightarrow{h.h.d} f$ olduğunu ispatlamış oluruz. Benzer yolla, $A$ üzerinde $f_n \xrightarrow{p.h.h.d} f$ olduğunu da ispatlayabiliriz.

Aşağıdaki örnek, eğer $\mu(A) = \infty$ ise Teorem 6.3.4.'deki sonucun doğru olmayabileceğini gösterir.

**Örnek 6.3.1.**

(X, $\mathscr{F}$ , $\mu$ ) bulanık ölçüm uzayı ve $f, f_1, f_2, ...$ fonksiyonları Örnek 6.2.4. ’deki fonksiyonlar olsun. $\mu(X) = \infty$ ve $X$ üzerinde her yerde $f_n \rightarrow f$ elde ederiz. Fakat Örnek 6.2.4.'de belirtildiği gibi X üzerinde $\{f_n\}$ $f$ ’e hemen hemen düzgün yakınsamaz.

**Sonuç 6.3.2.** $\mu$ bulanık ölçüm olsun, $A \in \mathscr{F}$ $\mu(A) < \infty$ ve $\mu$ sıfır toplamsal olsun. Eğer $A$ üzerinde $f_n \xrightarrow{h.h.h.} f$ ise buradan A üzerinde hem $f_n \xrightarrow{h.h.d} f$ hem de $f_n \xrightarrow{p.h.h.d} f$ dir.

Aşağıda verilen teorem, Sonuç 6.3.2'nin tersine bir sonuç verecektir

**Teorem 6.3.5.** $A \in \mathscr{F}$ olsun. Eğer $A$ üzerinde $f_n \xrightarrow{h.h.d} f$ ( v e y a $f_n \xrightarrow{p.h.h.d} f$ ) ise, $A$ üzerinde $f_n \xrightarrow{h.h.h.} f$ (veya $f_n \xrightarrow{p.h.h.h.} f$, sırasıyla) dir.

**İspat:**

Eğer $A$ üzerinde $f_n \xrightarrow{h.h.d} f$ ise, $A$ - $E_k$ , üzerinde herhangi bir $k = 1,2,...$ için $\{f_n\}$ $f$ ’e yakınsak (hatta düzgün yakınsak) olacak şekilde $\{E_k\} \subset F$

ile $\lim_k \mu(E_k)=0$ vardır. Her $k$ için $E \subset E_k$ olduğundan, $\mu$ nün monotonluğuyla birlikte, µ (E)=0 olduğunu görürüz. Bu yüzden herhangi bir $x \quad A-E$ için $x \quad A-E_k$ olacak şekilde bazı $E_k$ 'lar vardır ve bu sebepten $\{f_n(x)\}$'e yakınsar. Bu da bize A üzerinde $f \_\_k$ olduğunu gösterir. $A$ üzerinde $f_n \xrightarrow{p.h.h.h.} f$ olduğunun ispatı da buna benzerdir.

Teorem 6.3.5.'inin doğruluğu $\mu$ 'nün sürekliliğine bağlı değildir.

**Teorem 6.3.6.** $A \in$ F olsun. Eğer $A$ üzerinde $f_n \xrightarrow{h.h.h} f$ üstten sürekli ve $\mu(A) < \infty$ ise, $A$ üzerinde $f_n \xrightarrow{\mu} f$ olur; eğer A üzerinde $f_n \xrightarrow{p.h.h.h.} f$ ve $\mu$ alttan sürekli ise, $A$ üzerinde $f_n \xrightarrow{p.\mu.} f$ olur.

**İspat:**

Eğer $A$ üzerinde $f_n \xrightarrow{p.h.h.h.} f$ ise, herhangi bir $x \in B$ için $\lim_n f_n(x) = f_n(x)$ olacak şekilde, $B \in \mathscr{F}$ ile $B \subset A$ ve $\mu(B) = \mu(A)$ vardır. Bu yüzden verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $x \in B$ için, $n \geq N(x)$ iken

$$\left| f_n(X) - f(x) \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde N(x) vardır. Eğer

$$A_k = \{x | N(x) \leq k\} \cap B$$

yazarsak

$$A_k \nearrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = B$$

olur.

$$\{x \| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon\} \cap A \supset A_n$$

olduğundan

$$B \supset \{x \| f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\} \cap A \cap B \supset A_n \cap B = A_n \nearrow B$$

olur ve bu yüzden

$$\lim_n \mu(\{x \| f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\} \cap A \cap B) = \mu(B)$$

dir. Dolayısıyla,

$$\mu(A) \geq \lim_n \mu(\{x \| f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\} \cap A)$$

$$\geq \lim_n \mu(\{x \| f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\} \cap A \cap B)$$

$$= \mu(B)$$

$$= \mu(A)$$

dır. Bu da bize $A$ üzerinde $f_n \xrightarrow{p.\mu.} f$ olduğunu gösterir.

Teorem 6.3.7. Teorem 6.3.6.'inin tersi sonuçlar vermektedir.

**Teorem 6.3.7.** $A \in \mathscr{F}$ olsun. $\mu$ üstten otosürekli olan zayıf yarı-sürekli bulanık ölçüm olsun. Eğer A üzerinde $f_n \xrightarrow{\mu.} f$ ise , $A$ üzerinde hem $f_n \xrightarrow{h.h.h.} f$ hem de $f_n \xrightarrow{p.h.h.h.} f$ olacak şekilde $\{f_n\}$'in bazı $\{f_{n_1}\}$ alt dizileri vardır.

**İspat:**

Genelliği bozmadan A = $X$ olduğunu varsayabiliriz. Eğer $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ise herhangi bir $k$ = 1,2,... için

$$\lim_n \mu(\{x \| f_n(x) - f(x)| \geq 1/k\}) = 0$$

olur. Böylece;

$$\mu(\{x \| f_n(x) - f(x)| \geq 1/k\}) < 1/k$$

olacak şekilde $n_k$ vardır. Herhangi bir $k = 1,2,...$ için. $n_{k+l} > n_k$ olduğunu varsayabiliriz. Eğer

$$E_k = \{x \| f_n(x) - f(x) | \geq 1/k\}$$

yazarsak

$$\lim_k \mu(E_k) = 0$$

olur. $\mu$ üstten otosürekli olduğundan.

$$\mu\left(\overline{\lim_n}\, \mu\left(E_{k_i}\right)\right) = 0$$

olacak şekilde $(E_k)$ 'nin bazı $\left(E_{k_i}\right)$ alt dizileri vardır. Şimdi $X - \overline{\lim_\iota} E_{k_i}$ üzerinde $\{f_{n_{k_i}}\}$ $f$ 'e yakınsadığını ispatlamalıyız. $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=j}^{\infty} \overline{E_{k_i}}$ olduğundan herhangi $x \in X - \lim_i E_{k_i}$ için, $x \in \bigcap_{i=j(x)}^{\infty} \overline{E_{k_i}}$ olacak şekilde j(x) vardır, açıkçası her $i \geq j(x)$ için

$$\left| f_{n_{k_i}}(x) - f(x) \right| < 1/k_i$$

dir. Bu yüzden verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için, $1/k_{i_0} < \varepsilon$ olacak şekilde $i_0$ seçelim. $i \geq j(x) \vee i_0$ olduğundan

$$\left| f_{n_{k_i}}(x) - f(x) \right| < \frac{1}{k_i} \leq \frac{1}{k_{i_0}} < \varepsilon$$

elde ederiz. Bu

$$f_{n_{k_i}} \xrightarrow{h.h.h.} f$$

olduğunu gösterir.

$\mu$ sıfır toplamsal olduğu için, Teorem 6.3.1.' i kullanarak

$$f_{n_{k_i}} \xrightarrow{p.h.h.h.} f$$

olduğunu söyleyebiliriz.

**Teorem 6.3.8.** $A \in \mathscr{F}$ olsun. Eğer A üzerinde $f_n \xrightarrow{h.h.d.} f$ (veya $f_n \xrightarrow{p.h.h.d.} f$ ) ise $A$ üzerinde $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (veya $f_n \xrightarrow{p\mu} f$ )olur.

**İspat:** $A$ üzerinde $f_n \xrightarrow{h.h.d.} f$ ise, bazı $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için $x \in A - E$ ve $n \geq n_0$ olduğunda,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\mu(E) < \infty$ ile $E \in F$ ve $n_0$ vardır. Böylece herhangi bir $n \geq n_0$ için;

$$\mu(\{x \| f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \cap A) \leq \mu(E \cap A)$$

$$\leq \mu($$

elde ederiz. Bu A üzerinde $f_n \xrightarrow{\mu} f$ olduğunu gösterir.

# 7. BÖLÜM

## SONUÇLAR

Bu çalışma boyunca görüldüğü gibi bulanık ölçüm teorisi üzerinde ölçülebilir fonksiyonların farklı tanımları yapılmıştır.

Ölçülebilir fonksiyonlarda hemen hemen ve pseudo hemen hemen kavramları ve ölçülebilir fonksiyon dizisinin yakınsamaları arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca bulanık ölçüm uzayında veya yarı sürekli bulanık ölçüm uzayında ölçülebilir fonksiyon dizisinin yakınsamaları arasındaki ilişki incelenmiştir.

Sonuç olarak ölçülebilir fonksiyonlar bulanık ölçüm üzerinde tanımlanmış, ortak ve farklı özellikler yardımıyla açıklanmıştır.

## KAYNAKLAR

[1] Auephanwiriyakul S.,Keller J.M.,Gader P.D.,(2002*),"Generalized Choquet Fuzzy İntegral Fusion"*,İnformation Fusion,**3**,69-85

[2] Balcı M., (2000), *Reel Analiz*, Ankara, Balcı Yayınları

[3] Baykal N., Timur B.,(2004), *Bulanık Mantık İlke ve Temelleri*, Bıçakçılar Kitabevi, Matematik dizisi no:1

[4] Bojadziev G.,ve Bojadziev M.M.,(1995), *Fuzzy Set, Fuzzy Logic Application Application and Theory* Vol.**5**,world scientific, London

[5] Bozkurt E., Fuzzy Logic

http://www.turkmekatronik.com/mforum/index.php./topic,3321msg6207.html#msg6207

[6] Civalek Ö.,(1999) *Dairesel Plakların Nöro-Fuzzy Tekniği ile Analizi*, Dokuz Eylül Üni. Mühendislik Fakültesi, Fen ve Mühendislik Dergisi cilt 1 sy:**2**

[7] Dönmez A.,(2001), *Reel Analiz*, Ankara, Seçkin Yayıncılık

[8] Halmos P.R.,(1967), *Measure Theory* , New York, Van Nostrand

[9] http://www.ödevarsivi.com/dosya.asp.islem=gor8dosyano:137062

[10] Karataş S.,(2004), *Fuzzy Ölçüm Metotları*,Gaziosmanpaşa Üni. Fen Bilimleri Enst.

[11] Klir G.J.,and Floger T.A.(1998), *Fuzzy Set*, Uncertainly and İnformation Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

[12] Mukherja A., and Pothoven K.,(1984), *Real and Functionaly Analysis Part A. Real Analysis*(2.ed) Universty of Florida: Plenum Press-New York and London.

[13] Munakata T.,Jani Y.,(1994), *Fuzzy Systems*: An Overview,Communications of the ACM vol.**37**,No:3

[14] MuraTh, Bulanık Mantık (Fuzzy Logic) nedir?
http://www.kontrolkalemi.com/forum/bulanık-mantık-fuzzy-logic/3068-bulanık mantık-fuzzy-logic-nedir.html

[15] Nguyen H.T.,and Walker E.A.(2000), *A First Course İn Fuzzy Logic*,Boca Raton London, New York

[16] Oberguggenberger M.,(2004), İntroductory remaks: Mathematical models of Uncertainly ZAMM.Z,Angew.Math.Mech.**84**.No:10–11/ www.zamm-journal.org

[17] Pap E., Biljana P.Mihailvic,(2005), A representation of a comonote –v- addivite and monotone functional by two Sugeno İntegrals*, Fuzzy and Systems*

[18] Prade H., (1980), *Fuzzy Set And Systems*, Academic Press New York

[19] Sugeno M.,(1977) , *Fuzzy Measure and İntegrals*: A survey,In: Gupta M.M., Saridis G.N., Gaines B.R.,(Eds.) Fuzzy Automata and Decision Processes., North-Holland, Amsterdam and New York, 89–102

[20] Sugeno M.,(1974) *Theory of Fuzzy İntegrals and Its Applications.* Ph. D. Dissertation. Tokyo: Institute of Technology

[21] Şahin M.,(2004), *Genelleştirilmiş* $\sigma-$*cebirleri ve Genel Bulanık Ölçümler*, Trabzon.

[22] Zadeh L.A.,(1968), Fuzzy Algorithms,*ibid*,**12**,94-102

[23] Zadeh L.A.,(1965), Fuzzy Sets, *Information and Control*,**8**,338-353

[24]Zadeh L.A.,(1968), Probability Measure of Fuzzy Events: *J.Math.Anal.Appl*.,**23**,421-427

[25] Zadeh L.A.,(1971), Quentitave Fuzzy Semantics, *Information Sciences*,**3**,159-176

[26] Zadeh L.A.,(1973),Qutline of a new approach to the analysis of complex systems and decision process. *IEEE. Trans. Syst. Man Cybernet SME*–3,28–44

[27] Zhenyuam Wang and George J. Klir *Fuzzy Measure Theory state university of Newyork (1989) at Binghamton. Newyork*

[28] Liu X.,(1992), "Entropy,distance measure and similarity measure of fuzzy set and their relations",*Fuzzy Sets and Systems* **52**(3):305–318

[29] Wang Z.and Klir G.J.,(1992), *Fuzzy Measure and Theory*, New York, Plenum Press

[30] Bart Kosko.,(1993) *Fuzzy Thinking: The New Science of Fuzzy Logic*, New York: Hyperion

[31] Kosko B.,(1992), *Neural Networks and Fuzzy Systems.*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

[32] Lee C.C.,(Mar/April,1990), *Fuzzy Logic in Control Systems: Fuzzy Logic Controller*. Parts 1 and 2,IEEE Trans. Syst. Man. Cybernet. **20**, 2, 404–435

[33] Terano T., Asai K.and Sugeno M.,(1992), *Fuzzy Systems Theory and Its Applications*. Academic Press. San Diego, Calif.

[34] Zimmermann H.J.(1985) *Fuzzy Set Theory –and Its Applications*. Kluwer,Boston