GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK GRUPLAR VE HALKALAR

MATEMATİK ANA BİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ECE YETKİN
HAZİRAN 2011

Bulanık Gruplar ve Halkalar

Gazianteр Üniversitesi
Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN

Ece YETKİN
Haziran 2011

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Bulanık Gruplar ve Halkalar
Öğrencinin, Adı Soyadı: Ece YETKİN
Tez Savunma Tarihi: 01.06.2011

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ramazan KOÇ
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

	İmzası
Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN	----------------------------------
Yrd. Doç. Dr. Ali BOZKURT	----------------------------------
Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN	----------------------------------

ÖZET

BULANIK GRUPLAR VE HALKALAR

YETKİN Ece

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN

Haziran 2011, 46 sayfa

Bu çalışmada, bulanık mantık kavramının temel taşı kabul edilen bulanık küme kavramı tanıtılarak, bulanık fonksiyon ve bulanık ikili işlem kavramları yardımıyla inşa edilen bulanık grup yapısı tüm özellikleriyle incelenmiştir. Bulanık grup teorisi adı altında bulanık alt grup, bulanık normal alt grup, bulanık bölüm grubu gibi alt kavramlara ve bulanık grup homomorfizması üzerine kurulan bulanık gruplar için temel homomorfizma teoremine yer verilmiştir.

İki bulanık işlemli bulanık halka, bulanık alt halka, bulanık ideal, bulanık bölüm halkası, bulanık tamlık bölgesi, bulanık cisim ve bulanık halka homomorfizması gibi cebirsel yapılar tanıtılarak, temel teorem ve özellikleri ile detaylı olarak incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık küme, Bulanık ikili işlem, Bulanık grup, Bulanık bölüm grubu, Bulanık grup homomorfizması, Bulanık halka, Bulanık ideal, Bulanık halka homomorfizması, Bulanık bölüm halkası.

ABSTRACT

FUZZY GROUPS AND RINGS

YETKİN Ece
M.Sc. in Department of Mathematics
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Necati OLGUN

June 2011, 46 pages

In this study, by introducing the concept of fuzzy sets being considered the cornerstone of the concept of fuzzy logic, the structure of fuzzy group, which was built on the concepts of fuzzy function and fuzzy binary operation, together with all its properties were investigated. Under the fuzzy group theory, the concepts of fuzzy subgroup, fuzzy normal subgroup, fuzzy factor group and the fundamental homomorphism theorem for groups based on fuzzy group homomorphism are given.

Introducing fuzzy algebraic structures such as fuzzy ring with two fuzzy binary operations, fuzzy subring, fuzzy ideal, fuzzy factor ring, fuzzy integral domain fuzzy field and fuzzy ring homomorphism, the basic theorems and properties of these were investigated in detail.

Key Words: Fuzzy sets, Fuzzy binary operation, Fuzzy group, Fuzzy factor group, fuzzy group homomorphism, Fuzzy ring, Fuzzy ideal, Fuzzy ring homomorphism, fuzzy factor ring.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince ilgi ve yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN' a ve destekleriyle her zaman yanımda olduklarını hissettiren sevgili aileme çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET…………………………………………………………………….......	i
ABSTRACT…………………………………………………………………	ii
TEŞEKKÜR…………………………………………………………………	iii
İÇİNDEKİLER…………………………………………………………...	iv
ŞEKİL LİSTESİ…………………………………………………………..	v
SİMGELER LİSTESİ…………………………………………………….	vi
BÖLÜM 1: GİRİŞ ……………………………………………………….	1
BÖLÜM 2: GRUPLAR……………………………………………………	4
2.1 İkili İşlem, Yarı Grup ve Gruplar...	4
2.2 Alt Gruplar...	5
2.3 Normal Alt Gruplar ve Kalan Sınıfları…………………………….	6
2.4 Bölüm Grupları……………………………………………………	7
2.5 Grup Homomorfizmaları…………………………………………..	8
BÖLÜM 3: HALKALAR…………………………………………………..	9
3.1 Halka, Tamlık Bölgesi ve Cisim..	9
3.2 Alt Halkalar ve İdealler…………………………………………	10
3.3 Bölüm Halkaları..	11
3.4 Halka Homomorfizmaları...	11
BÖLÜM 4: BULANIK GRUPLAR………………………………………..	13
4.1. Bulanık Küme, Bulanık Fonksiyon ve Bulanık İkili İşlem……….	13
4.2 Bulanık Gruplar……………………………………………………	15
4.3 Bulanık Alt Gruplar…………………………………………….....	20
4.4 Normal Bulanık Alt Gruplar ve Kalan Sınıfları…………………...	23
4.5 Bulanık Bölüm Grupları…………………………………………..	25
4.6 Bulanık Grup Homomorfizmaları…………………………………	27
BÖLÜM 5: BULANIK HALKALAR……………………………………..	32
5.1 Bulanık Halka, Bulanık Tamlık Bölgesi ve Bulanık Cisimler…….	32
5.2 Bulanık Alt Halka ve Bulanık İdealler…………………………….	37
5.3 Bulanık Bölüm Halkaları………………………………………....	39
5.4 Bulanık Halka Homomorfizmaları………………………………..	41
BÖLÜM 6: SONUÇLAR………………………………………………….	44
KAYNAKLAR..	45

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 4.1 Klasik Küme………………………………….……………...... 13

Şekil 4.2 Bulanık Küme……………………….……………................... 14

SİMGELER LİSTESİ

Ann J	J nin sıfırlayanı
C	Halkanın merkezi
$Çek\ f$	f fonksiyonunun çekirdeği
e	Birim eleman
e_0	Sıfır eleman
E	Evrensel küme
$F(G)$	G kümesinin bulanık alt kümelerinin ailesi
$Im\ f$	f fonksiyonunun görüntü kümesi
I_A	A kümesinin karakteristik fonksiyonu
μ_A	A kümesinin üyelik fonksiyonu
$\vee$	Supremum
$\wedge$	İnfimum

BÖLÜM 1

GİRİŞ

İnsan dış ortamdaki verileri duyu organları yardımıyla algılar, modeller ve derler. Şüphesiz, her insan için duyu organlarının derlediği veriler farklıdır. Üstelik duyu organlarının bir algılama eşiği de söz konusudur. Böylece aynı olguların değerlendirilmesi insandan insana farklılık gösterir. Dolayısıyla dış gerçekliğin zihinsel modellemesi kişiye özgü bir kavramdır. Bu nedenle hiçbir model, ne dil, ne düşünce ne de bunların modellemeleri için kullanılan matematiksel mantık türleri, tamamen kapsayıcı, yeterli ve yegane değildir [3]. Aristoteles'ten günümüze kullanılan mantık sistemleri çeşitlilik göstermektedir.

Geleneksel mantık sistemleri, kesin doğru ve kesin yanlış değerlerine sahip (iki değerli) önermelerle çalışırlar. Önermelerin değer kümesi {Yanlış, Doğru} veya sayısal olarak $\{0,1\}$ olarak kabul edilir. Bu mantık sistemi halen bilgisayarlarımızda kullanılan Boolean mantığının temellerini oluşturur. Aristo mantığı olarak bilinen bu klasik mantık sistemi üçüncü bir ihtimali reddeder ve bize dünyayı siyah ve beyazdan ibaret sunar. Oysa gerçek dünyada sonsuz renk tonu olduğu gibi, bir o kadar göreceli doğrular ve yanlışlar vardır. Belirsizliği tanımlama ve modellemenin önemini ünlü fizikçi Einstein şu şekilde ifade etmiştir: "Matematiğin kavramları kesin oldukları sürece gerçeği yansıtmazlar, gerçeği yansıttıkları sürece de kesin değillerdir." Bulanık mantık yoluyla, belirsizliği istenilmeyen bir durum olarak gören ve mümkün bütün durumlarda kaçınılması gerektiğinde inanan geleneksel anlayıştan, belirsizlikle uğraşan ve bilimde bundan kaçınılmasının mümkün olmadığını iddia eden alternatif bakış açısına doğru dereceli bir geçiş ortaya konulmaktadır. Klasik mantığın tanımlayamadığı belirsiz kavramların matematiksel olarak ifade edilebilmesinin ihtiyacından dolayı bulanık mantık gibi mantık sistemleri önem kazanmıştır. Örneğin "yemek biraz acı" gibi bir ifade kesin hüküm vermediğinden klasik mantıkta bir önerme olarak kabul görmez ancak belirsizlik içeren bu tür bulanık önermelerle uğraşan mantık sistemine bulanık mantık adı verilir [5]. Bulanık mantığa giriş yapmadan önce mantık sistemlerinin tarihsel gelişim sürecine göz atalım.

Aristoteles (M.Ö 322-M.Ö 294) ile başlayan ikili mantık, Boole (1815-1864) tarafından uygulamada yer bulmuş ve evrensel kümenin elemanlarını, kümeye ait olanlar ve olmayanlar olarak kesin çizgilerle ikiye bölen dairesel kapalı şekillerle ifade etme yöntemi, Venn (1834-1923) tarafından kullanmıştır.

1900'lerin ilk yıllarında Lukasiewicz ve Knuth, Aristo mantığında yanlış ve doğru arasında üçüncü bir değer olan "belki" kavramını eklemeyi ileri sürmüştür. Çok değerli mantığı geliştiren ve sezgisel mantığın kurucusu kabul edilen Heyting' in ardından, Gödel ve Black de çok değerli mantık üzerine çalışmalarını sürdürmüşler ancak kendilerine bir uygulama alanı bulamamışlardır. 1965'te yayınlanan "bulanık kümeler" adlı makale ile Lotfi A. Zadeh [15] modern anlamda bulanık mantık sistemini kurmuştur. Lotfi A. Zadeh' e göre, bulanık mantık her şeyin, doğrunun da, bir derece meselesi olduğu insani akıl yürütme için bir modeldir. Temelde, sözcükle hesap yapmak anlamını barındırmaktadır. Bulanık mantık, nesneleri ve değerleri gerçekliğe daha uygun olarak betimlemeyi amaçlayan ve bunu matematiğin elverdiği oranda başaran bir mantıktır.

Önermelerin değer aralığı $[0,1]$ aralığına genişleterek, Zadeh'in bulanık küme kavramını matematiğe kazandırmasının ardından 1971'de Rosenfeld' in [11,12], bulanık mantığı grup teorisine uygulamasıyla bulanık cebire ilk adımlar atılmış oldu. Bununla birlikte Aktaş[2], Bhutani[11], Çağman[2,4,5], Demirci[6,7], Kumar[9], Lee[14], Malik[10], Mordeson[10,11], Yuan[14] gibi pek çok matematikçi bulanık grup ve bulanık halka teorisinin gelişmesine katkıda bulundu.

Bu çalışmada, milattan önce 3. yüzyıla dayanan klasik mantık ile 20. yüzyılın yeni mantık sistemi olan bulanık mantık arasındaki farklılıklar, genelleştirmeler ve bulanık mantık sistemi üzerine kurulan bulanık cebirsel yapılar tüm detaylarıyla ele alınmıştır. Tamamlayıcı ve karşılaştırmalı olması gayesiyle, ikinci ve üçüncü bölümde klasik cebirsel yapılara ve bunu takiben dördüncü ve beşinci bölümde bulanık cebirsel yapılara yer verilmiştir.

Bölüm 2 ve Bölüm 3’te, klasik mantıkta yer alan grup ve halka teorisinde temel tanımlar, teoremler ve özellikler ispatsız verilmiştir.

Bölüm 4, bulanık küme kavramı ile başlayarak bulanık fonksiyon ve bulanık ikili işlem gibi bulanık cebirde yer alan temel unsurlar tanımlanarak temel özelliklerine yer verilmiştir. Bulanık grup, bulanık alt grup, bulanık normal alt grup, bulanık grup homomorfizması ve bulanık bölüm grubu gibi bulanık cebirsel yapılar tanımlanmış ve detaylı olarak incelenmiştir.

Bölüm 5’te bulanık halka, bulanık alt halka, bulanık ideal, bulanık halka homomorfizması ve bulanık bölüm halkaları kavramları verilmiş, temel teoremleri, özellikleri ve detaylarıyla incelenmiştir.

BÖLÜM 2

GRUPLAR

2.1 İkili İşlem, Yarı Grup ve Gruplar

Tanım 2.1.1 A ve B boş kümeden farklı iki küme olsun.f, $A \times B$ nin bir alt kümesi olsun. Şayet A kümesinden alınan her$a$ elemanına B kümesinde $b = f(a)$ ile gösterilen bir ve yalnız bir b elemanı karşılık geliyorsa, f ye , A *dan* B *ye bir fonksiyon* denir.

A, B ve C boş kümeden farklı kümeler olmak üzere, $a: A \to B$, $b: B \to C$ birer fonksiyon ise bu fonksiyonların bileşkesi olan $a \circ b$ şu şekilde tanımlanır:

$$(a \circ b)(x) = a(b(x)) \quad ; x \in A$$

A kümesinde her elemanı kendisine götüren id_A fonksiyonuna birim fonksiyon adı verilir.

Tanım 2.1.2 A boş olmayan bir küme olmak üzere,

$$\circ: A \times A \to A \, ,$$
$$(x, y) \mapsto x \circ y,$$

ile tanımlı $\circ$ fonksiyonuna A üzerinde bir *ikili işlem* denir. Böylece A içinde bir ikili işlem $A \times A$ nın her sıralı ikilisi (x, y) ye A nın bir ve yalnız bir $x \circ y$ elemanını karşılık getirir. Yukarıda yazıldığı gibi (x, y) sıralı ikilisinin $\circ$ ikili işlemi altındaki görüntüsü $\circ\,(x, y)$ yi, $x \ \circ y$ ile göstermek alışılagelmiştir.

Tanım 2.1.3 G, boş kümeden farklı ve üzerinde ikili işlem tanımlı bir küme olsun.

(G1) G deki herhangi üç a, b, c elemanları için $(ab)c = a(bc) = abc$ sağlanıyorsa G üzerinde tanımlı ikili işlem birleşme özelliğine sahiptir.

(G2) Her $a \in G$ için $ae = ea = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ varsa e ye G nin birim elemanı denir.

(G3) Her $a \in G$ için $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ olacak şekilde bir $a^{-1} \in G$ varsa, a^{-1} elemanına a nın ters elemanı denir.

(G4) Her $a, b \in G$ için $ab = ba$ sağlanıyorsa G ye *değişmeli (Abelyen)* denir.

$(G,\cdot)$ cebirsel yapısı, yukarıdaki koşullardan (G1) i sağlıyorsa *yarı grup*, (G1) ve (G2) i sağlıyorsa *monoid*, (G1),(G2) ve (G3) i sağlıyorsa *grup*, tamamını sağlıyorsa *değişmeli (Abelyen) grup* adını alır.

Teorem 2.1.4 G bir grup olsun.

(i) G nin birim elemanı tektir;

(ii) $c \in G$ ve $cc = c \Rightarrow c = e$;

(iii)$\forall a, b, c \in G$ için $ab = ac \Rightarrow b = c$ ve $ba = ca \Rightarrow b = c$;

(iv) $\forall a \in G$ için a^{-1} tersi tektir;

(v) $\forall a \in G$ için $(a^{-1})^{-1} = a$;

(vi)$\forall a, b \in G$ için $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$;

(vii) $a, b \in G$ için $ax = b$ ve $ya = b$ denklemlerinin çözümleri $x = a^{-1}b$ ve $y = ba^{-1}$ ile tek türlü belirlidir.

Teorem 2.1.5 G bir yarı grup olsun. G nin bir grup olması için gerek ve yeter koşul, aşağıdaki iki durumun sağlanmasıdır.

(G2)* $\forall a \in G$ için $ea = a$ olacak şekilde $e \in G$ sol birim elemanı olmalıdır ;

(G3)* $\forall a \in G$ için $a^{-1}a = e$ olacak şekilde $a^{-1} \in G$ sol ters elemanı olmalıdır. [8]

Teorem 2.1.6 G bir yarı grup olsun. G nin bir grup olması için gerek ve yeter koşul, her $a, b \in G$ için $ax = b$ ve $ya = b$ denklemlerinin G de çözümlerinin olmasıdır.

2.2 Alt Gruplar

Tanım 2.2.1 G bir grup ve H, G de tanımlanan ikili işleme göre kapalı bir alt küme olsun. H, G deki ikili işleme göre bir grup yapısına sahip ise H ya G nin *alt grubu* denir ve $H \leq G$ ile gösterilir. G ve $\{e\}$, G nin aşikar (trivial) alt gruplarıdır.

Teorem 2.2.2 H, G nin bir alt grubu olsun. Bu takdirde

(1) $e_H = e$;

(2) a nın H daki tersi G deki a^{-1} ters elemanıdır.

Teorem 2.2.3 G bir grup ve H, G nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. H nın alt grup olması için gerek ve yeter koşul her $u, v \in H$ için $uv^{-1} \in H$ olmasıdır.

Önerme 2.2.4 G bir grup ve $\{H_i : i \in I\}$, G nin alt gruplarının boş olmayan bir ailesi ise $\bigcap_{i\in I} H_i \leq G$ dir.

Önerme 2.2.5 G bir grup olsun. Bir $a \in G$ için G nin a ile değişmeli elemanlarının oluşturduğu $C(a)$ kümesine, a elemanının G içindeki *merkezleyicisi* denir ve

$$C(a) = \{t \in G : ta = at\}$$

ile gösterilir. $C(a) \leq G$ dir.

2.3. Normal Alt Gruplar ve Kalan Sınıfları

Tanım 2.3.1 G bir grup, N, G nin bir alt grubu ve $aNa^{-1} = \{ana^{-1} : n \in N\}$ olsun. Her $a \in G$ için $aNa^{-1} \subset N$ sağlanıyorsa N ye G nin bir *normal alt grubu* denir.

Tanım 2.3.2 Gbir grup, H, Gnin bir alt grubu olsun. $aH = \{ah : h \in H\}$ ($Ha = \{ha : h \in H\}$) ile tanımlı olan aH (Ha) ya, H nın G deki *sol (sağ) kalan sınıfı* denir.

Teorem 2.3.3 G bir grup ve H, G nin bir alt grubu olsun. H nın bir normal alt grup olması için gerek ve yeter koşul her $a \in G$ için $aH = Ha$ nın sağlanmasıdır.

2.4 Bölüm Grupları

Tanım 2.4.1 H, bir G grubunun alt grubu ve $a, b \in G$ olsun. $ab^{-1} \in H$ ise a, b ye *sağdan denktir* denir ve $aH = bH$ (yani$a \equiv_r b (mod\ H)$) ile gösterilir.

Benzer şekilde $a^{-1}b \in H$ ise a, b ye *soldan denktir (kongrüdür)* denir ve $Ha = Hb$ (yani$a \equiv_l b (mod\ H)$) ile gösterilir.G değişmeli ise $mod\ H$ ya göre sağ ve sol kongrüans çakışır.

Teorem 2.4.2 G bir grup ve $H \leq G$ olsun.

(i) $mod\ H$ ye göre sağdan/ soldan kongrüans, G de bir denklik bağıntısıdır.

(ii) $a \in G$nin $mod\,H$ ya göre sağdan/soldan kongrüansının denklik sınıfı $Ha = \{ha : h \in H\}$ ve $aH = \{ah : h \in H\}$ kalan sınıflarıdır.

Teorem 2.4.3 G bir grup ve N, G nin normal alt grubu ise G/N, N nin G deki tüm (sol) kalan sınıflarının kümesi olmak üzere

$$(aN)(bN) = (ab)N$$

işlemi, G/N üzerinde bir ikili işlem tanımlar.

Teorem 2.4.4 G/N, Teorem 2.4.3 te tanımlanan ikili işlem ile birlikte bir gruptur ve bu gruba *bölüm grubu* adı verilir.

2.5 Grup Homomorfizmaları

Tanım 2.5.1 G ve H iki grup olsun. $f: G \to H$ fonksiyonuna, her $a, b \in G$ için

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

yi sağladığı takdirde bir *homomorfizma* denir.f, 1-1 bir homomorfizma ise *monomorfizma*, örten bir homomorfizma ise *epimorf*izma, hem 1-1 hem örten bir homomorfizma ise *izomorfizma* adını alır. f nin izomorfizma olduğu durumda G, H grubuna izomorftur denir ve $G \cong H$ ile gösterilir.$f: G \to G$ homomorfizmasına *endomorfizma*, $f: G \to G$ izomorfizmasına *otomorfizma* adı verilir.

$f: G \to H$ bir grup homomorfizması olmak üzere f nin çekirdeği,

$$Çek\, f = \{a \in G : f(a) = e_H\} = f^{-1}(e_H)$$

ile tanımlanır. $A \subseteq G$ ise $f(A) = \{b \in H : b = f(a), a \in A\}$ olur ve burada,
$f(G) = Im\, f$ ile gösterilir. $B \subseteq H$ ise $f^{-1}(B) = \{a \in G : f(a) \in B\}$ dir.

Teorem 2.5.2 G bir grup ve N, G nin normal alt grubu ise $\pi: G \to G/N$; $\pi(a) = aN$ dönüşümü çekirdeği N olan bir epimorfizmadır. π ye doğal (kanonik) epimorfizma adı verilir.

Önerme 2.5.3 $f: G_1 \to G_2$ bir grup homomorfizması olsun. Bu durumda, aşağıdaki özdeşlikler gerçeklenir:

(i) $f(e_1) = e_2$;

(ii) $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

Teorem 2.5.4 $f: G \to H$ bir grup homomorfizması olmak üzere, f nin monomorfizma olması için gerek ve yeter koşul $Çek\ f = \{e\}$ olmasıdır.

Teorem 2.5.6 (Temel Homomorfizma Teoremi)
$f: G \to H$ bir grup epimorfizması ise $N = Çek\ f$ olmak üzere $G/N \cong H$ izomorfizması vardır.

BÖLÜM 3

HALKALAR

3.1 Halka, Tamlık Bölgesi ve Cisim

Tanım 3.1.1 Bir R boş olmayan kümesi üzerinde tanımlı toplama ve çarpma olarak isimlendirilen iki ikili işlem tanımlansın.
(H1) $(R,+)$ değişmeli bir grup;
(H2) $\forall a,b,c \in R$ için $(ab)c = a(bc)$;
(H3) $\forall a,b,c \in R$ için $a(b+c) = ab + ac$ ve $(b+c)a = ba + ca$;
Yukarıdaki üç koşulu sağladığı takdirde $(R,+,\cdot)$ ye bir *halka* denir.
$(R,+,\cdot)$ ye bir halka olsun. Şayet
(H4) $\forall a,b \in R$, $ab = ba$ sağlanıyor ise R ye *değişmeli halka* denir.
(H5) $\forall a \in R$, $a1_R = 1_R a = a$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ varsa R ye *birim elemanlı halka* adı verilir. Bir halkanın toplama işlemine göre birim elemanına ise sıfır eleman denir ve 0 ile gösterilir.

Teorem 3.1.2 [13] $(R,+,\cdot)$ bir halka olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:
(i)$\forall a \in R,\ 0a = a0 = 0$;
(ii)$\forall a,b \in R, (-a)b = a(-b) = -(ab)$;
(iii)$\forall a,b \in R, (-a)(-b) = ab$;
(iv)$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a,b \in R, (na)b = a(nb) = n(ab)$;
(v) $\forall a_i, b_j \in R, \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j$.

Tanım 3.1.3 Bir $(R,+,.)$ halkasında sıfırdan farklı bir a elemanı için $ab = 0$ (ya da $ba = 0$) olacak şekilde $\exists b \in R - \{0\}$ ise a ya *sol* (ya da *sağ*) *sıfır bölen* adı verilir. R nin hem sağ hem sol sıfır bölen olan elemanına *sıfır bölen* denir.

Önerme 3.1.4 R nin sıfır bölensiz bir halka olması için gerek ve yeter koşul R de sağ ve sol kısaltma kurallarının geçerli olmasıdır. Yani her $a, b, c \in R,\ a \neq 0$ için $(ab = ac$ veya $ba = ca) \Rightarrow b = c$ sağlanmasıdır.

Tanım 3.1.5 Birim elemanlı bir R halkasında bir a elemanı için $ca = 1_R$ (ya da $ab = 1_R$) olacak şekilde bir $c \in R$ $(b \in R)$ elemanı bulunuyorsa a ya *soldan (sağdan) tersinir eleman* denir, c elemanına (b elemanına) ise a nın *sol (sağ) tersi* adı verilir. Bir $a \in R$ hem sol hem sağ tersinir eleman ise *tersinir* ya da *birim* adını alır.

Not 3.1.6 (i) Birim elemanlı bir R halkasında, herhangi bir tersinir elemanın sağ ve sol tersi çakışır.
(ii) Birim elemanlı bir R halkasında tersinir elemanların oluşturduğu küme çarpma işlemi altında bir grup oluşturur.

Tanım 3.1.7 i) Değişmeli, birim elemanlı $1_R \neq 0$ bir R halkası sıfır bölensiz ise *tamlık bölgesi* adını alır.
ii) Sıfırdan farklı her elemanı birim (tersinir) olan değişmeli, birim elemanlı bir halkaya *cisim* denir.

Önerme 3.1.8 Her cisim bir tamlık bölgesidir.

3.2 Alt Halkalar ve İdealler

Tanım 3.2.1 R bir halka ve S, R deki toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalı bir alt küme olsun. S , R deki ikili işlemlere göre bir halka ise S ye R nin *alt halkası* denir. Bir R halkasının I alt halkası için

$$r \in R \quad \text{ve} \quad x \in I \quad \Rightarrow \quad rx \in I$$

sağlanıyorsa I ya R nin *sol ideali,*

$$r \in R \quad \text{ve} \quad x \in I \quad \Rightarrow \quad xr \in I$$

sağlanıyorsa I ya R nin *sağ ideali* adı verilir. I, R nin hem sağ hem sol ideali ise *ideal* adını alır.

Not 3.2.2 R herhangi bir halka olmak üzere $C = \{c \in R : \forall r \in R \text{ } için \text{ } cr = rc\}$ kümesine R nin merkezi denir. C, R nin bir alt halkasıdır ancak bir ideali olmayabilir.

Not 3.2.3 $f : R \to S$ bir halka homomorfizması ise $Çek\, f$, R nin bir idealidir ve $Im\, f$, S nin bir alt halkasıdır ancak $Im\, f$, S nin bir ideali olmayabilir.

Teorem 3.2.4 R halkasının boş kümeden farklı bir I alt kümesinin bir sol (sağ) ideal olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in I$ ve $r \in R$ için, aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır:

(i) $a, b \in I \Rightarrow a - b \in I$;

(ii) $a \in I,\ r \in R \Rightarrow ra \in I\ (ar \in I)$.

Sonuç 3.2.5 $\{A_i : i \in I\}$, R halkasındaki sol idealler ailesi ise $\bigcap_{i \in I} A_i$ arakesiti de S nin bir sol idealidir.

3.3 Bölüm Halkaları

Halkalar teorisinde idealler, grup teorisinde normal alt grupların oynadığı rolün benzerini üstlenirler. Örneğin R bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. R toplamsal grubu değişmeli olduğundan I bir normal alt gruptur. Sonuç olarak iyi tanımlı bir R/I bölüm grubu vardır.

Teorem 3.3.1 R bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. Şu halde toplamsal bölüm grubu R/I,

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I;$$
$$(a + I)(b + I) = ab + I;$$

ile tanımlı olan toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte bir halkadır. R birim elemanlı ve değişmeli ise R/I bölüm halkası da birim elemanlı ve değişmelidir.

3.4 Halka Homomorfizmaları

Tanım 3.4.1 R ve S iki halka olsun. $f: R \to S$ dönüşümü için
$\forall a, b \in R$ için

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \quad \text{ve} \quad f(ab) = f(a)f(b)$$

gerçekleniyorsa f ye bir *halka homomorfizması* adı verilir.

Gruplardaki benzer terminoloji halkalar için de kullanılır: Halka homomorfizması birebir ise *monomorfizma*, örten ise *epimorfizma*, hem birebir hem örten ise *izomorfizma* adını alır. $R \to S$ monomorfizmasına R *yi* S *içine gömme* denilir ve $R \to R$ izomorfizmasına *otomorfizma* denir.

$f: R \to S$ halka homomorfizmasının çekirdeği ve görüntü kümesi toplamsal gruplardaki gibi sırasıyla,

$$Çek\, f = \{r \in R: f(r) = 0\}$$

ve

$$Imf = \{s \in S : s = f(r), r \in R\}$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.4.2 $f : R \to S$ bir halka homomorfizması ise f nin çekirdeği R nin bir idealidir. Tersine I, R nin bir ideali ise $: R \to R/I$; $r \mapsto \mathrm{r} + \mathrm{I}$ ile tanımlı dönüşüm bir halka epimorfizmasıdır ve çekirdeği I dır. Buradaki π dönüşümüne doğal (kanonik) epimorfizma adı verilir.

Teorem 3.4.3 (Halkalarda Temel Homomorfizma Teoremi)

$f: R \to S$ bir halka epimorfizması ise $N = Çek\, f$ olmak üzere $R/N \cong S$ izomorfizması vardır.

BÖLÜM 4

BULANIK GRUPLAR

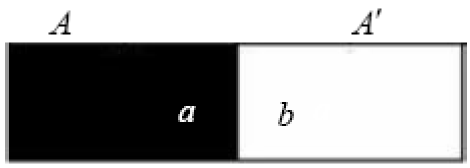
4.1. Bulanık Küme, Bulanık Fonksiyon ve Bulanık İkili İşlem

Tanım 4.1.1 A boş olmayan bir küme olmak üzere, A dan $I = [0,1]$ kapalı aralığına tanımlı bir fonksiyona *bulanık küme* ya da A nın bir *bulanık alt kümesi* adı verilir.

Bir başka deyişle, bir bulanık küme, kümenin her bir elemanına matematiksel olarak kümeye olan üyelik derecesini temsil eden bir değer atayarak tanımlanır. Bu değer, elemanın bulanık küme tarafından ifade edilen kavrama uygunluk derecesini ifade eder. Bundan dolayı elemanların kümeye ait olması farklılaşır. Üyelik dereceleri 0 ile 1 arasındaki reel sayılarla temsil edilirler. Tam üye olma ve üye olmama durumu bulanık kümesinde sırasıyla 1 ve 0 değerleriyle karşılanır. Bundan dolayı da klasik küme kavramı bulanık küme kavramının bu iki değere kısıtlanmış özel bir şekli olarak görülebilir [1].
Bu durumda klasik kümelerde

$$I_A(a) = \begin{Bmatrix} 1 \ , & a \in A & ise \\ 0 \ , & a \in E \backslash A & ise \end{Bmatrix}$$

ile tanımlanan $I_A: E \to \{0,1\}$ karakteristik fonksiyonu, bulanık kümeye özel bir örnektir.



Şekil 4.1: Klasik Küme

Bulanık kümelerde ise bu karakteristik fonksiyonun değer aralığı $I = [0,1]$ kapalı aralığına genişletilerek

$$\mu_A : E \to I$$

$$\mu_A(a) = \begin{Bmatrix} \theta \ , & a \in A & ise \\ 0 \ , & a \in E \backslash A & ise \end{Bmatrix} \quad ; \theta \in I$$

ile tanımlanan üyelik fonksiyonu halini alır.

Şekil 4.2: Bulanık Küme

$\mu_A(a) \in [0,1]$, her bir $a \in E$ nin A daki üyelik derecesini göstermek üzere A bulanık kümesi

$$A = \{(a, \mu_A(a)) : a \in E\}$$

ile tanımlanır. Özel olarak $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ise A bulanık kümesi

$$A = \{(a_1, \mu_A(a_1)), (a_2, \mu_A(a_2)), \dots, (a_n, \mu_A(a_n))\}$$

biçiminde E nin elemanları ile bu elemanlara karşılık gelen A daki üyelik değerlerini ikililer halinde kabul eden kümedir.

Tanım 4.1.2 R ve S boş olmayan kümeler, f, $R \times S$ kartezyen çarpımının bulanık bir alt kümesi ve $\theta \in [0,1)$ olsun. Bu takdirde

(1) $\forall x \in R$ için $f(x,y) > \theta$ olacak şekilde en az bir $y \in S$ vardır;

(2) $\forall x \in R$, $\forall y_1, y_2 \in S$ için $f(x, y_1) > \theta$ ve $f(x, y_2) > \theta$ ise $y_1 = y_2$;

(3) $\forall y \in S$ için $f(x,y) > \theta$ olacak şekilde en az bir $x \in R$ vardır;

(4) $\forall x_1, x_2 \in R$, $\forall y \in S$ için $f(x_1, y) > \theta$ ve $f(x_2, y) > \theta$ ise $x_1 = x_2$

f yukarıdaki koşullardan (1) ve (2) yi sağlıyor ise R den S ye bir *bulanık fonksiyon*, (1), (2) ve (3) ü sağlıyorsa *bulanık örten fonksiyon*, (1), (3) ve (4) ü sağlıyorsa *bulanık birebir fonksiyon* adı verilir.

Tanım 4.1.3 G boş olmayan bir küme ve R, $G \times G \times G$ nin bulanık bir alt kümesi olsun. R aşağıdaki koşulları sağladığı takdirde G üzerinde bir *bulanık ikili işlem* adını alır:

(1) $\forall a, b \in G$ için $R(a,b,c) > \theta$ olacak şekilde en az bir $c \in G$ vardır;

(2) $\forall a, b, c_1, c_2 \in G$ için $R(a,b,c_1) > \theta$ ve $R(a,b,c_2) > \theta$ ise $c_1 = c_2$.

R, G de bir bulanık ikili işlem ise, $F(G) = \{A \mid A: G \to [0,1] \text{ bir fonksiyon}\}$ olmak üzere

$$R: F(G) \times F(G) \to F(G)$$

$$(A, B) \mapsto R(A, B)$$

$$R(A,B)(c) = \bigvee_{a \in A, b \in B} (A(a) \wedge B(b) \wedge R(a,b,c)) \qquad (4.1)$$

ile tanımlanan bir fonksiyon vardır. $A = \{a\}$ ve $B = \{b\}$ alınır ve $R(A,B) = a \circ b$ ile gösterilirse aşağıdaki işlemler tanımlanır:

$$(a \circ b)(c) = R(a,b,c); \quad \forall c \in G \qquad (4.2)$$

$$\big((a \circ b) \circ c\big)(z) = \bigvee_{d \in G} (R(a,b,d) \wedge R(d,c,z)) \qquad (4.3)$$

$$\big(a \circ (b \circ c)\big)(z) = \bigvee_{d \in G} (R(b,c,d) \wedge R(a,d,z)) \qquad (4.4)$$

4.2 Bulanık Gruplar

Tanım 4.2.1 G boş olmayan bir küme ve R, G üzerinde bir ikili işlem olsun.

(BG1) $\forall a, b, c, z_1, z_2 \in G$ için $((a \circ b) \circ c)(z_1) > \theta$ ve $\big(a \circ (b \circ c)\big)(z_2) > \theta$ iken $z_1 = z_2$ sağlanıyorsa G üzerinde tanımlı ikili işlem birleşme özelliğine sahiptir.

(BG2) $\forall a \in G$ için $(e \circ a)(a) > \theta$ ve $(a \circ e)(a) > \theta$ olacak şekilde bir $e \in G$ varsa e ye G nin birim elemanı denir.

(BG3) $\forall a \in G$ için $(a \circ b)(e) > \theta$ ve $(b \circ a)(e) > \theta$ olacak şekilde bir $b \in G$ varsa b ye G nin ters elemanı denir.

(BG4) $\forall a, b \in G$ için $(a \circ b)(z) > \theta \Leftrightarrow (b \circ a)(z) > \theta$ sağlanıyorsa G ye *değişmeli (Abelyen)* denir.

(G, R) cebirsel yapısı, yukarıdaki şartlardan (BG1) i sağlıyorsa *bulanık yarı grup*, (BG1) ve (BG2) i sağlıyorsa *bulanık monoid*, (BG1),(BG2) ve (BG3) i sağlıyorsa *bulanık grup*, tamamını sağlıyorsa *değişmeli (Abelyen) bulanık grup* adını alır.

Teorem 4.2.2 (G, R) bir bulanık grup olsun.

(i) G nin birim elemanı tektir.

(ii) $\forall a \in G,\ (a \circ a)(a) > \theta$ ise $a = e$;

(iii) $\forall a, b, c, d \in G,\ (a \circ b)(d) > \theta$ ve $(a \circ c)(d) > \theta$ ise $b = c$;

(iv) $\forall a, b, c, d \in G$, $(b \circ a)(d) > \theta$ ve $(c \circ a)(d) > \theta$ ise $b = c$;

(v) $\forall a \in G$ için a nın tersi tektir;

(vi) $\forall a \in G$, $(a^{-1})^{-1} = a$;

(vii)$\forall a, b, c, d \in G$, $(b^{-1} \circ a^{-1})(c) > \theta$ ve $(a \circ b)(d) > \theta$ ise $c = d^{-1}$.

İspat:

(i) e_1 ve e_2, G nin iki birim elemanı olsun. Bu takdirde $R(e_1, e_2, e_2) > \theta$ ve $R(e_1, e_2, e_1) > \theta$ olduğundan $e_1 = e_2$ dir.

(ii) b, a nın ters elemanı olsun. Bu durumda

$$\big((b \circ a) \circ a\big)(a) \geq R(b, a, e) \wedge R(e, a, a) > \theta \ ,$$

$$\big(b \circ (a \circ a)\big)(e) \geq R(a, a, a) \wedge R(b, a, e) > \theta \ ,$$

olduğundan (G1) uyarınca $a = e$ elde edilir.

(iii) $R(a^{-1}, d, h) > \theta$ olacak şekilde $h \in G$ alalım. Bu takdirde

$$\big(a^{-1} \circ (a \circ b)\big)(h) \geq R(a, b, d) \wedge R(a^{-1}, d, h) > \theta \ ,$$

$$((a^{-1} \circ a) \circ b)(b) \geq R(a^{-1}, a, e) \wedge R(e, b, b) > \theta \ ,$$

olduğundan (G1) uyarınca $h = b$ ve sonuç olarak $R(a^{-1}, d, b) > \theta$ dir. Burada

$$\big(a^{-1} \circ (a \circ c)\big)(b) \geq R(a, c, d) \wedge R(a^{-1}, d, b) > \theta \ ,$$

$$\big((a^{-1} \circ a) \circ c\big)(c) \geq R(a^{-1}, a, e) \wedge R(e, c, c) > \theta \ ,$$

olduğundan (G1) uyarınca $b = c$ elde edilir.

(iv) Benzer şekilde ispat edilir.

(v) b ve c, a nın iki ters elemanı olsun. Bu takdirde $(a \circ b)(e) > \theta$, $(a \circ c)(e) > \theta$ sağlanır. (iii) uyarınca $b = c$ elde edilir.

Aynı ispat farklı bir yaklaşım ile yapılabilir:

$$\big((b \circ a) \circ c\big)(c) \geq R(b, a, e) \wedge R(e, c, c) > \theta \ ,$$

$$\big(b \circ (a \circ c)\big)(b) \geq R(a, c, e) \wedge R(b, e, b) > \theta \ ,$$

olduğundan $b = c$ olduğu görülür.

(vi) $(a \circ a^{-1})(e) > \theta$ ve $(a^{-1} \circ a)(e) > \theta$ olduğundan $(a^{-1})^{-1} = a$ elde edilir.

(vii) $R(b, c, h) > \theta$ olacak şekilde $h \in G$ alalım. Bu takdirde

$$\big(b \circ (b^{-1} \circ a^{-1})\big)(h) \geq R(b^{-1}, a^{-1}, c) \wedge R(b, c, h) > \theta \ ,$$

$$\big((b \circ b^{-1}) \circ a^{-1}\big)(a^{-1}) \geq R(b, b^{-1}, e) \wedge R(e, a^{-1}, a^{-1}) > \theta \ ,$$

olduğundan $h = a^{-1}$ ve $R(b, c, a^{-1}) > \theta$ dir. Burada $R(d, c, k) > \theta$ olacak şekilde $k \in G$ alınırsa

$$\big((a \circ b) \circ c\big)(k) \geq R(a, b, d) \wedge R(d, c, k) > \theta \ ,$$

$$\big(a \circ (b \circ c)\big)(e) \geq R(b, c, a^{-1}) \wedge R(a, a^{-1}, e) > \theta \ .$$

Böylece $k = e$ ve $R(d, c, e) > \theta$ dan $c = d^{-1}$ elde edilir.

Teorem 4.2.3 R, G üzerinde tanımlı bir bulanık ikili işlem olsun ve (G, R), (BG1) i sağlayan bir cebirsel yapı olsun. Bu takdirde (G, R) nin bir bulanık grup olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki şartların sağlanmasıdır:

(BG2)* $\forall a \in G$ için $(e \circ a)(a) > \theta$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır. (e elemanına G nin sol birim elemanı denir.)

(BG3)* $\forall a \in G$ için $(b \circ a)(e) > \theta$ olacak şekilde bir $b \in G$ vardır. (b elemanına a nin sol ters elemanı denir.)

İspat: (G, R) bir bulanık grup ise (BG2)* ve (BG3)* ı gerçeklediği açıktır.

Tersine (G, R); (BG1), (BG2)* ve (BG3)* ı sağlayan cebirsel bir yapı olsun. Öncelikle b, a nın tersi olmak üzere $(a \circ b)(e) > \theta$ olduğunu ispat edelim: $c, d, h \in G$ öyle ki $R(a, b, c) > \theta,\ R(a, e, d) > \theta$ ve $R(c, a, h) > \theta$ olsun. Bu takdirde

$$\big(a \circ (b \circ a)\big)(d) \geq R(b, a, e) \wedge R(a, e, d) > \theta\ ,$$

$$\big((a \circ b) \circ a\big)(h) \geq R(a, b, c) \wedge R(c, a, h) > \theta\ ,$$

olduğundan $d = h$ ve $R(c, a, d) > \theta$ elde edilir.

$k \in G$ öyle ki $R(d, b, k) > \theta$ olsun. Bu durumda

$$\big(a \circ (e \circ b)\big)(c) \geq R(e, b, b) \wedge R(a, b, c) > \theta\ ,$$

$$\big((a \circ e) \circ b\big)(k) \geq R(a, e, d) \wedge R(d, b, k) > \theta\ ,$$

olduğundan $c = k$ ve $R(d, b, c) > \theta$ elde edilir.

$u \in G$ öyle ki $R(c, c, u) > \theta$ olsun. Bu durumda

$$\big(c \circ (a \circ b)\big)(u) \geq R(a, b, c) \wedge R(c, c, u) > \theta\ ,$$

$$\big((c \circ a) \circ b\big)(c) \geq R(c, a, d) \wedge R(d, b, c) > \theta\ ,$$

olduğundan $u = c$ ve $R(c, c, c) > \theta$ elde edilir. Böylece Teorem 4.2.2 (ii) den $c = e$ ve $(a \circ b)(e) > \theta$ sonucuna varılır. Şimdi $(a \circ e)(a) > \theta$ olduğunu ispat edelim:

$$\big(a \circ (b \circ a)\big)(d) \geq R(b, a, e) \wedge R(a, e, d) > \theta\ ,$$

$$\big((a \circ b) \circ a\big)(a) \geq R(a, b, e) \wedge R(e, a, a) < \theta\ .$$

olduğundan $d = a$ ve $(a \circ e)(a) > \theta$ elde edilir. Böylece (G, R), (BG1)-(BG3) ü sağladığından bulanık gruptur.

Önerme 4.2.4 $R,\ G$ üzerinde tanımlı bir bulanık ikili işlem olsun ve (G,R), (BG1) i sağlayan bir cebirsel yapı olsun. Bu takdirde (G,R) nin bir bulanık grup olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki şartların sağlanmasıdır:

(BG2)* Her $a \in G$ için $(a \circ e)(a) > \theta$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır. (e elemanına G nin sağ birim elemanı denir.)

(BG3)* Her $a \in G$ için $(a \circ b)(e) > \theta$ olacak şekilde bir $b \in G$ vardır. (b elemanına a nin sağ ters elemanı denir.)

Teorem 4.2.5 $R,\ G$ üzerinde tanımlı bir bulanık ikili işlem olsun ve (G,R), (BG1) i sağlayan bir cebirsel yapı olsun. Bu takdirde (G,R) nin bir bulanık grup olması için gerek ve yeter koşul her $a,b \in G$ için

$$(a \circ x)(b) > \theta \quad \text{ve} \quad (y \circ a)(b) > \theta \tag{4.5}$$

olacak şekilde $x,y \in G$ elemanlarının olmasıdır.

İspat: (G,R) bir bulanık grup ve $x,u \in G$ öyle ki $R(a^{-1},b,x) > \theta$ ve $R(a,x,u) > \theta$ olsun. Bu takdirde

$$(a \circ (a^{-1} \circ b))(u) \geq R(a^{-1},b,x) \wedge R(a,x,u) > \theta \ ,$$

$$\big((a \circ a^{-1}) \circ b\big)(b) \geq R(a,a^{-1},e) \wedge R(e,b,b) > \theta \ .$$

olduğundan $u = b$ ve $R(a,x,b) > \theta$ elde edilir. Benzer şekilde $R(y,a,b) > \theta$ olacak şekilde bir $y \in G$ vardır. Sonuç olarak $(a \circ x)(b) > \theta$ ve $(y \circ a)(b) > \theta$ elde edilir.

Tersine, (G,R); (BG1) ile (4.5) şartlarını sağlasın ve $c \in G$ olsun. Bu durumda $R(e',c,c) > \theta, R(c,x,a) > \theta$ ve $R(e',a,d) > \theta$ olacak şekilde $e',x,d \in G$ vardır. Burada

$$\big(e' \circ (c \circ x)\big)(d) \geq R(c,x,a) \wedge R(e',a,d) > \theta \ ,$$

$$\big((e' \circ c) \circ x\big)(a) \geq R(e',c,c) \wedge R(c,x,a) > \theta \ .$$

olduğundan $d = a$ ve $R(e', a, a) > \theta$ yani $(e' \circ a)(a) > \theta$ elde edilir. (4.5) gereğince$(y \circ a)(e') > \theta$ olacak şekilde bir $y \in G$ elemanı vardır, Teorem 4.2.3 uyarınca (G, R) bir bulanık gruptur.

Önerme 4.2.6 G bir bulanık grup olmak üzere $R(a, b, c) > \theta$ ise $R(c, b^{-1}, a) > \theta$ ve $R(a^{-1}, c, b) > \theta$ dir.

İspat: $R(a, b, c) > \theta$ ve $d \in G$ için $R(c, b^{-1}, d) > \theta$ olsun. Bu takdirde

$$\big((a \circ b) \circ b^{-1}\big)(d) \geq R(a, b, c) \wedge R(c, b^{-1}, d) > \theta \,,$$

$$\big(a \circ (b \circ b^{-1})\big)(a) \geq R(b, b^{-1}, e) \wedge R(a, e, a) > \theta \,,$$

olduğundan $d = a$ ve $R(c, b^{-1}, a) > \theta$ dır. Benzer şekilde $R(a^{-1}, c, b) > \theta$ dır.

Önerme 4.2.7 (G, R) bir bulanık grup olsun. Her $a, b, c, d \in G$ için

$$\big((a \circ b) \circ c\big)(d) > \theta \Leftrightarrow \big(a \circ (b \circ c)\big)(d) > \theta \tag{4.6}$$

gerçeklenir.

İspat: $\big((a \circ b) \circ c\big)(d) > \theta$ olsun. $R(b, c, u) > \theta$ ve $R(a, u, v) > \theta$ olacak şekilde $u, v \in G$ alalım. Buradan $(a \circ (b \circ c)(v) \geq R(b, c, u) \wedge R(a, u, v) > \theta$ ve $d = v$ elde edilir. Dolayısıyla $\big(a \circ (b \circ c)\big)(d) > \theta$ bulunur.

4.3 Bulanık Alt Gruplar

(G, R) bir bulank grup ve H, G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Her $a, b, c \in G$ için $R_H(a, b, c) = R(a, b, c)$ise her $a, b, c, z \in G$ için aşağıdaki işlemler tanımlanabilir:

$$(a \bullet b)(c) = R_H(a, b, c) = R(a, b, c)\ , \tag{4.7}$$

$$\big((a \bullet b) \bullet c\big)(z) = \bigvee_{x \in G}(R(a, b, x) \wedge R(x, c, z)), \tag{4.8}$$

$$\big(a \bullet (b \bullet c)\big)(z) = \bigvee_{x \in G}(R(b, c, x) \wedge R(a, x, z))\ . \tag{4.9}$$

Tanım 4.3.1 (G, R) bir bulanık grup ve $H,\ G$ nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan H ya G nin bir *bulanık alt grubu* denir.

(BG1) $\forall a, b \in H,\ \forall c \in G$ için $(a \bullet b)(c) > \theta$ ise $c \in H$;

(BG2) $\forall a, b, c, z_1, z_2 \in H$ için $\big((a \bullet b) \bullet c\big)(z_1) > \theta$ ve $\big(a \bullet (b \bullet c)\big)(z_2) > \theta$ ise $z_1 = z_2$;

(BG3) $\forall a \in H$ için $(a \bullet e_H)(a) > \theta$ ve $(e_H \bullet a)(a) > \theta$ olacak şekilde bir $e_H \in H$ vardır;

(BG4) $\forall a \in H$ için $(a \bullet b)(e_H) > \theta$ ve $(b \bullet a)(e_H) > \theta$ olacak şekilde bir $b \in H$ vardır.

Teorem 4.3.2 $H,\ G$ nin bir bulanık alt grubu olsun. Bu takdirde

(1) $e_H = e$;

(2) a nın H daki tersi G deki a^{-1} ters elemanıdır.

İspat: **(**BG3) gereğince $(e_H \circ e_H)(e_H) > \theta$ dır.$(e_H \circ e)(e_H) > \theta$ olduğundan Teorem 4.2.2 (iii) ten $e_H = e$ elde edilir. $(b \bullet a)(e_H) > \theta$ den $(b \circ a)(e) > \theta$ ve $(a^{-1} \circ a)(e) > \theta$ olduğundan Teorem 4.2.2 (iv) gereğince $b = a^{-1}$ dir.

Önerme 4.3.3 G bir bulanık grup ve $H,\ G$ nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. H nın G nin bir bulanık alt grubu olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in H,\ c \in G$ için aşağıdaki koşulun sağlanmasıdır:

$$(a \circ b^{-1})(c) > \theta \ \Rightarrow c \in H \tag{4.10}$$

İspat H, G nin bir bulanık alt grubu olsun. $\forall a, b \in H$ için (BG3) gereğince $b^{-1} \in H$ ve (BG1) gereğince $R(a, b^{-1}, c) > \theta$ ise $c \in H$ sağlanır.

Tersine, her $a, b \in H$ için (4.9) koşulunun gerçeklendiği varsayalım. Bu takdirde $a = b$ için $R(a, a^{-1}, e) > \theta \Rightarrow e \in H$ olur. Benzer şekilde her $b \in H$ için $R(e, b^{-1}, b^{-1}) > \theta \Rightarrow b^{-1} \in H$ bulunur. Teorem 4.2.2 (vi) dan, $R(a, (b^{-1})^{-1}, c) = R(a, b, c) > \theta \Rightarrow c \in H$ sağlanır. Böylece H, G nin bulanık alt grubudur.

Önerme 4.3.4 G bir bulanık grup ve $\{H_i : i \in I\}$, G nin bulanık alt gruplarının boş olmayan bir ailesi ise $\bigcap_{i \in I} H_i$ de G nin bir bulanık alt grubudur.

İspat: Herhangi $x, y \in \bigcap_{i \in I} H_i$ olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $a, b \in H_i$ ve H_i lerin her biri G nin bulanık alt grubu olduğundan her $i \in I$ için $(x \circ y^{-1})(z) > \theta \Rightarrow z \in H_i$ dir. Sonuç olarak $(x \circ y^{-1})(z) > \theta \Rightarrow z \in \bigcap_{i \in I} H_i$ sağlandığından $\bigcap_{i \in I} H_i$ nin G nin bulanık alt grubu olduğu görülür.

Önerme 4.3.5 (G, R) bir bulanık grup olsun. Aşağıdaki gibi tanımlanan ve G bulanık grubunun merkezi olarak adlandırılan C, G nin bulanık alt grubudur.

$$C = \{x \in G : \forall a, c \in G, (x \circ a)(c) > \theta \Leftrightarrow (a \circ x)(c) > \theta\}$$

İspat: $e \in C$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $C \neq \emptyset$ dir.

(1) $x_1, x_2 \in C$ ve $(x_1 \circ x_2)(x) > \theta \Rightarrow x \in C$ dir. Gösterelim:

$a, c, d_1, d_2, b_2 \in G$ öyle ki $R(x, a, c) > \theta$, $R(a, x, d_1) > \theta$, $R(a, x_2, b_2) > \theta$ ve $R(b_2, x_1, d_2) > \theta$ olsun. $R(x_1, x_2, x) > \theta$ ve $R(x_1, x_1, x) > \theta$ olduğundan

$$\big(a \circ (x_2 \circ x_1)\big)(d_1) \geq R(x_2, x_1, x) \wedge R(a, x, d_1) > \theta \ ,$$

$$\big((a \circ x_2) \circ x_1\big)(d_2) \geq R(a, x_2, b_2) \wedge R(b_2, x_1, d_2) > \theta.$$

olduğundan $d_1 = d_2$ ve $R(b_2, x_1, d_1) > \theta$ dir.

$x_1, x_2 \in C$ olduğundan $R(x_2, a, b_2) > \theta,\ R(x_1, b_2, d_1) >$θ dir. Böylece

$$\big((x_1 \circ x_2) \circ a\big)(c) \geq R(x_1, x_2, x) \wedge R(x, a, c) > \theta \ ,$$

$$\big(x_1 \circ (x_2 \circ a)\big)(d_1) \geq R(x_2, a, b_2) \wedge \mathrm{R}(x_1, b_2, d_1) > \theta \ .$$

olduğundan $c = d_1$ ve $R(a, x, c) > \theta$ dir. Benzer şekilde $R(x, a, c) > \theta$ olacağından $x \in C$ elde edilir.

(2) $x \in C \Rightarrow x^{-1} \in C$ dir. Gösterelim: $c, b, d \in G$ öyle ki $R(a, x^{-1}, c) > \theta$, $R(c, x, b)$ ve $R(x^{-1}, a, d) > \theta$ olsun. Bu takdirde

$$\big((a \circ x^{-1}) \circ x\big)(b) \geq R(a, x^{-1}, c) \wedge R(c, x, b) > \theta \ ,$$

$$\big(a \circ (x^{-1} \circ x)\big)(a) \geq R(x^{-1}, x, e) \wedge R(a, e, a) > \theta \ ,$$

olduğundan $b = a$ ve $R(c, x, a) > \theta,\ R(x, c, a) > \theta$ dır.

$$\big(x^{-1} \circ (x \circ c)\big)(d) \geq R(x, c, a) \wedge R(x^{-1}, a, d) > \theta \ ,$$

$$\big((x^{-1} \circ x) \circ c\big)(c) \geq R(x^{-1}, x, e) \wedge R(e, c, c) > \theta \ ,$$

olduğundan $c = d$ ve $R(x^{-1}, a, c) > \theta$ elde edilir. Benzer şekilde $R(a, x^{-1}, c) > \theta$ olacağından $x^{-1} \in C$ sonucuna varılır. Dolayısıyla Teorem 4.3.3 gereğince C, G nin bir bulanık alt grubudur.

4.4 Normal Bulanık Alt Gruplar ve Kalan Sınıfları

Tanım 4.4.1 G bir bulanık grup ve H, G nin bir bulanık alt grubu olsun. $\forall a, b \in G$, $\forall h \in H$ için aşağıdaki koşulu sağlayan H ye G nin bir *normal bulanık alt grubu* denir.

$$\big(a \circ (h \circ a^{-1})\big)(b) > \theta \ \Rightarrow \ b \in H \tag{4.11}$$

Not 4.4.2 Her $a, b, c, d \in G$için Önerme 4.2.7 uyarınca (4.10) koşulu aşağıdaki koşula dektir:

$$\big((a \circ b) \circ a^{-1}\big)(b) > \theta \Rightarrow b \in H \tag{4.12}$$

Tanım 4.4.3 G bir bulanık grup ve $H,\ G$ nin bir bulanık alt grubu olsun. Bu takdirde

$$(aH)(z) = \vee_{x\in H} R(a,x,z); \quad (Ha)(z) = \vee_{x\in H} R(x,a,z) \tag{4.13}$$

ile tanımlı olan aH (Ha) ya H nın *sol (sağ) kalan sınıfı* denir.

Teorem 4.4.4 G bir bulanık grup ve $H,\ G$ nin bir bulanık alt grubu olsun. H nın bir normal bulanık alt grup olması için gerek ve yeter koşul $\forall a, z \in G$ için

$$(aH)(z) > \theta \Leftrightarrow (Ha)(z) > \theta \tag{4.14}$$

gerçeklenmesidir.

İspat: $(aH)(z) > \theta$ ise $R(a,h,z) > \theta$ olacak şekilde $h \in H$ elemanı vardır. $R(z,a^{-1},c) > \theta$ olacak şekilde bir $c \in G$ alalım. Bu takdirde

$$\big((a \circ h) \circ a^{-1}\big)(c) \geq R(a,h,z) \wedge R(z,a^{-1},c) > \theta$$

olduğundan $c \in H$ ve $R(z,a^{-1},c) > \theta$ elde edilir. $w \in G$ için $R(c,a,w) > \theta$ olmak üzere

$$\big((z \circ a^{-1}) \circ a\big)(w) \geq R(z,a^{-1},c) \wedge R(c,a,w) > \theta \ ,$$

$$\big(z \circ (a^{-1} \circ a)\big)(z) \geq R(a^{-1},a,e) \wedge R(z,e,z) > \theta \ .$$

olduğundan $w = z$ ve $R(c,a,z) > \theta$ dır. Böylece

$$(Ha)(z) = \bigvee_{x\in H} R(x,a,z) \geq R(h,a^{-1},z) > \theta$$

elde edilir. Benzer şekilde $(Ha)(z) > \theta$ olduğunda $(aH)(z) > \theta$ elde edilir.

Tersine, $a, c \in G,\ h \in H$ öyle ki $\big(a \circ (h \circ a^{-1})\big)(c) > \theta$ ise $R(h,a^{-1},z) > \theta$ olacak şekilde bir $c \in G$ vardır. $R(a,z,c) > \theta$ ise

$$(Ha^{-1})(z) = \bigvee_{x\in H} R(x,a^{-1},z) \geq R(h,a^{-1},z) > \theta$$

ve buradan

$$(a^{-1}H)(z) = \bigvee_{x \in H} R(a^{-1}, x, z) > \theta$$

elde edilir. Dolayısıyla $R(a^{-1}, h_1, z)$ olacak şekilde bir $h_1 \in H$ vardır ve

$$(a \circ (a^{-1} \circ h_1))(c) \geq R(a^{-1}, h_1, z) \wedge R(a, z, c) > \theta$$

$$\big((a \circ a^{-1}) \circ h_1\big)(h_1) \geq R(a, a^{-1}, e) \wedge R(e, h_1, h_1) > \theta$$

olduğundan sonuç olarak $c = h_1 \in H$ elde edilir.

4.5 Bulanık Bölüm Grupları

Tanım 4.5.1 H, bir G bulanık grubunun bir normal bulanık alt grubu ve $\Sigma = \{aH : a \in G\}$ olsun. Σ üzerinde bir bağıntı

$$a_1\text{H} \sim a_2H \Leftrightarrow R({a_1}^{-1}, a_2, h) > \theta \text{ olacak şekilde } \exists h \in H. \tag{4.15}$$

ile tanımlanır. Bu durumda a_1, a_2 ye mod H ya göre soldan denktir denir.

Benzer şekilde

$$\text{H}a_1 \sim Ha_2 \Leftrightarrow R(a_1, {a_2}^{-1}, h) > \theta \text{ olacak şekilde } \exists h \in H. \tag{4.16}$$

ise a_1, a_2 ye mod H ya göre sağdan denktir denir.

Teorem 4.5.2 $\sim$ bağıntısı Σ üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

İspat:

(1) $R(a^{-1}, a, e) > \theta$ olduğundan $e \in H$ dır. Buradan $\forall a \in G,\ aH \sim aH$ elde edilir.

(2) $a_1H \sim a_2H$ ise $R({a_1}^{-1}, a_2, h) > \theta$ olacak şekilde bir $h \in H$ vardır. Böylece Önerme 4.2.6 dan $R(a_2, h^{-1}, a_1) > \theta$ elde edilir. $c \in G$ ve $R({a_2}^{-1}, a_1, c) > \theta$ ise

$$\big(({a_2}^{-1} \circ a_2) \circ h^{-1}\big)(h^{-1}) \geq R({a_2}^{-1}, a_2, e) \wedge R(e, h^{-1}, h^{-1}) > \theta,$$

$$({a_2}^{-1} \circ (a_2 \circ h^{-1}))(c) \geq R(a_2, h^{-1}, a_1) \wedge R({a_2}^{-1}, a_1, c) > \theta$$

eşitliklerinden $c = h^{-1}$ ve $R({a_2}^{-1}, a_1, h^{-1}) > \theta$ sonucuna varılır. $h \in H$ olduğundan $h^{-1} \in H$ ve $a_2H \sim a_1H$ dır.

(3) $a_1H \sim a_2H,\ a_2H \sim a_3H$ ise $R({a_1}^{-1}, a_2, h_1) > \theta$ ve $R({a_2}^{-1}, a_3, h_2) > \theta$ olacak şekilde $h_1,\ h_2 \in H$ dır. $c \in G$ için $R(h_1, h_2, c) > \theta$ ise $c \in H$ dır. $z_1, z_2 \in G$ için $R(h_1, {a_2}^{-1}, z_1) > \theta$ ve $R(z_1, a_3\ , w_1) > \theta$ olsun. Bu takdirde

$$\left(h_1 \circ ({a_2}^{-1} \circ a_3)\right)(c) \geq R({a_2}^{-1}, a_3, h_2) \wedge R(h_1, h_2, c) > \theta,$$

$$((h_1 \circ {a_2}^{-1}) \circ a_3)(w_1) \geq R(h_1, {a_2}^{-1}, z_1) \wedge R(z_1, a_3\ , w_1) > \theta$$

olduğundan $w_1 = c$ dir. $R({a_1}^{-1}, a_2, h_1) > \theta$ olduğundan Önerme 4.2.6 uyarınca $R(h_1, {a_2}^{-1}, {a_1}^{-1}) > \theta$, dolayısıyla $z_1 = {a_1}^{-1}$ ve $R({a_1}^{-1}, a_3, c) > \theta$ elde edilir. Buradan $a_1H \sim a_3H$ olduğu görülür.

Önerme 4.5.3 $a_1H \sim a_2H \ \Leftrightarrow\ [(a_1H)(z) > \theta \Leftrightarrow (a_2H)(z) > \theta]$ dır.

İspat: (⇒) $a_1H \sim a_2H$ olsun. Bu takdirde $a_2H \sim a_1H$ ve buradan $R({a_2}^{-1}, a_1, h) > \theta$ olacak şekilde $h \in H$ vardır. $(a_1H)(z) = \bigvee_{x \in H} R(a, x, z) > \theta$ olsun. Bu durumda $R(a_1, h_1, z) > \theta$ olacak şekilde $h_1 \in H$ vardır. Bir $h_2 \in G$ için $R(h, h_1, h_2) > \theta$ sağlansın. Burada $h_2 \in H$ dır. Bir $w \in G$ için $R(a_2, h_2, w) > \theta$ sağlansın. $R({a_2}^{-1}, a_1, h) > \theta$ olduğundan ve Önerme 4.2.6 uyarınca $R(a_2, h, a_1) > \theta$ elde edilir. Buradan

$$\left(a_2 \circ (h \circ h_1)\right)(w) \geq R(h, h_1, h_2) \wedge R(a_2, h_2, w) > \theta\ ,$$

$$((a_2 \circ h) \circ h_1)(z) \geq R(a_2, h, a_1) \wedge R(a_1, h_1, z) > \theta$$

dir. Dolayısıyla $w = z$ ve $R(a_2, h_2, z) > \theta$ bulunur. Buradan

$$(a_2H)(z) = \bigvee_{x \in H} R(a_2, x, z) \geq R(a_2, h_2, z) > \theta$$

elde edilir. Benzer şekilde $(a_2H)(z) > \theta$ iken $(a_1H)(z) > \theta$ dir.

(⇐) $e \in H$ ve $(a_1H)(a_1) = \bigvee_{x \in H} R(a_1, x, a_1) \geq R(a_1, e, a_1) > \theta$ olduğundan $(a_2H)(a_1) = \bigvee_{x \in H} R(a_2, x, a_1) > \theta$ dir. Bu durumda $R(a_2, h, a_1) > \theta$ olacak şekilde bir $h \in H$ vardır. Önerme 4.2.6 uyarınca $R({a_1}^{-1}, a_2, h^{-1}) > \theta$ elde edilir. $h^{-1} \in H$ olduğundan $a_1H \sim a_2H$ bulunur.

Teorem 4.5.4 $[aH] = \{a'H : a'H \sim aH\}$, $\bar{a} = \{a' : a' \in G \ ve \ a'H \sim aH\}$ ve

$G/H = \{[aH]: a \in G\}$ olarak tanımlanmak üzere

$$\bar{R} : G/H \times G/H \times G/H \to [0,1] \tag{4.17}$$

$$([aH],[bH],[cH]) \mapsto \bar{R}([aH],[bH],[cH]) = \bigvee_{(a',b',c') \in \bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c}} R(a',b',c')$$

ile tanımlanan bir dönüşüm göz önüne alalım. $\bar{R}$, G/H üzerinde bir bulanık ikili işlemdir.

Teorem 4.5.5 $(G/H, \bar{R})$ bir bulanık gruptur.

Tanım 4.5.6 $(G/H, \bar{R})$ grubuna G nin $mod\, H$ ya göre *bulanık bölüm grubu* adı verilir.

4.6 Bulanık Grup Homomorfizmaları

Tanım 4.6.1 (G_1, R_1) ve (G_2, R_2) iki bulanık grup ve $f: G_1 \mapsto G_2$ bir fonksiyon olsun. $\forall\, a, b, c \in G_1$ için

$$R_1(a,b,c) > \theta \Leftrightarrow R_2(f(a), f(b), f(c) > \theta \tag{4.18}$$

sağlandığı takdirde f ye *bulanık homomorfizma* denir. f, 1-1 ise *bulanık monomorfizma*, örten ise *bulanık epimorfizma*, hem 1-1 hem örten ise *bulanık izomorfizma* adını alır.

Teorem 4.6.2 (G, R) bir bulanık grup ve N, G nin bir normal bulanık alt grubu olmak üzere $(G/H, \bar{R})$ bulanık bölüm grubu ise

$$\varphi : G \to G/H \;\; ; \;\; a \mapsto [aH] \tag{4.19}$$

dönüşümü bir bulanık epimorfizmadır.

İspat: $R(a, b, c) > \theta$ olacak şekilde $a, b, c \in G$ olsun. Bu takdirde

$$\bar{R}\big(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)\big) = \bar{R}([aH], [bH], [cH])$$

$$= \bigvee_{(a', b', c') \in \bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c}} R(a', b', c') \geq R(a, b, c) > \theta$$

olduğundan $\bar{R}\big(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)\big) > \theta$ bulunur. Dolayısıyla φ bir bulanık grup homomorfizmasıdır. Her $[aH] \in G/H$ için $\varphi(a) = [aH]$ olacak şekilde bir $a \in G$ bulunduğu açıktır.

Önerme 4.6.3 $f : (G_1, R_1) \to (G_2, R_2)$ bir bulanık grup homomorfizması olsun. e_1 ve e_2, sırasıyla G_1 ve G_2 bulanık gruplarının birim elemanları olmak üzere aşağıdaki özdeşlikler gerçeklenir:

(i) $(e_1) = e_2$;

(ii) $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

İspat: (i) e_1 , G_1 in birim elemanı olduğundan, her $a \in G_1$için $R(a, e_1, a) > \theta$ ve $R(e_1, a, a) > \theta$ sağlanır. $f$bir bulanık grup homomorfizması olduğundan $R(f(a), f(e_1), f(a)) > \theta$ ve $R(f(e_1), f(a), f(a)) > \theta$ gerçeklenir. Böylelikle $f(e_1) = e_2$ olduğu görülür.

(ii) $a^{-1} \in G_1$ için $R(a, a^{-1}, e_1) > \theta$ ve $R(a^{-1}, a, e_1) > \theta$ sağlanır. f bulanık homomorfizma olduğundan

$$R(f(a), f(a^{-1}), f(e_1)) > \theta \text{ ve } R(f(a^{-1}), f(a), f(e_1)) > \theta$$

bulunur. Böylece (i) uyarınca,

$$R(f(a), f(a^{-1}), e_2) > \theta \quad \text{ve } R(f(a^{-1}), f(a), e_2) > \theta$$

sonucuna varılır. O zaman $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ elde edilir.

Teorem 4.6.4 $f : (G_1, R_1) \rightarrow (G_2, R_2)$ bir bulanık grup homomorfizması ise f nin bir monomorfizma olması için gerek ve yeter koşul $Çek\ f = \{e_1\}$ olmasıdır.

İspat: $f : (G_1, R_1) \rightarrow (G_2, R_2)$ bir bulanık grup monomorfizması ve $a \in Çek\ f$ olsun. Şu halde $f(a) = e_2$ ve Önerme 4.6.3 (i) uyarınca $f(a) = e_2 = f(e_1)$ olur. f birebir olduğundan $a = e_1$ olup f nin çekirdeğinin e_1 den ibaret olduğu görülür.

Tersine, $a, b \in G_1$ için $f(a) = f(b)$ olsun. Buradan $R_2(f(a), f(b)^{-1}, e_2) > \theta$ bulunur. Şimdi $c \in G_2$için $R_1(a, b^{-1}, c) > \theta$ olduğunu varsayalım. f bulanık homomorfizma olduğundan $R_2\big(f(a), f(b^{-1}), f(c)\big) > \theta$ ve Önerme 4.6.3 gereğince $R_2\big(f(a), f(b)^{-1}, f(c)\big) > \theta$ sağlanır. Buradan $f(c) = e_2 \Rightarrow c \in Çekf = \{e_1\} \Rightarrow c = e_1$ bulunur. Sonuç olarak $R_1(a, b^{-1}, e_1) > \theta$, dolayısıyla $a = b$ elde edilir.

Teorem 4.6.5 $f : (G_1, R_1) \rightarrow (G_2, R_2)$ bir bulanık grup homomorfizması ise

(i) $H_1,\ G_1$ in bir bulanık alt grubu ise $f(H_1),\ G_2$ nin bir bulanık alt grubudur;

(ii) $H_2,\ G_2$ in bir bulanık alt grubu ise $f^{-1}(H_2),\ G_1$ in bir bulanık alt grubudur;

(iii) $N_2,\ G_2$ nin bir normal bulanık alt grubu ise $f^{-1}(N_2),\ G_1$ in bir normal bulanık alt grubudur;

(iv) $Çek\ f = \{x \in G_1 : f(x) = e_2\}$, G_1 in bir normal bulanık alt grubudur.

İspat: **(i)** $c, d \in f(H_1)$ olsun. Buradan $f(a) = c$ ve $f(b) = d$ olacak şekilde $a, b \in H_1$ vardır. $H_1,\ G_1$ in bir bulanık alt grubu olduğundan Önerme 4.3.3 gereğince $R(a, b^{-1}, u) > \theta \Rightarrow u \in H_1$ sağlanır. f bulanık homomorfizma olduğundan $R(f(a),f(b)^{-1},f(u)) > \theta \Rightarrow f(u) \in f(H_1)$ elde edilir. Böylece $f(H_1)$, G_2 nin bir bulanık alt grubudur.

(ii) $a,b \in f^{-1}(H_2)$ olsun. Böylece $f(a),f(b) \in H_2$ sağlanır. $R(a,b^{-1},c) > \theta$ olacak şekilde $c \in G$ alalım. f bulanık homomorfizma ve H_2, G_2 in bir bulanık alt grubu olduğundan $R\big(f(a),f(b)^{-1},f(c)\big) > \theta \Rightarrow f(c) \in H_2$ bulunur. Buradan $c \in f^{-1}(H_2)$ olduğu görülür.

(iii) $f^{-1}(N_2)$, G_1 in bir bulanık alt grubu olduğunu (ii) de göstermiştik. Herhangi $g_1 \in G_1$ ve $a \in f^{-1}(N_2)$ için $\big((g_1 \circ a) \circ g_1{}^{-1}\big)(c) > \theta$, $c \in G_1$ olsun. İspat için $c \in f^{-1}(N_2)$ olduğunu göstermek yeter. Burada $g_2 = f(g_1) \in G_2$, $b = f(a) \in N_2$ ve $d = f(c) \in G_2$ olsun. f bulanık homomorfizma ve N_2, G_2 nin bir normal bulanık alt grubu olduğundan $\big((g_2 \circ b) \circ g_2{}^{-1}\big)(d) > \theta \Rightarrow d \in N_2$ sağlanır. Dolayısıyla $c \in f^{-1}(N_2)$ elde edilir.

(iv) $\{e_2\}$ kümesi açıkça G_2 nin aşikar normal bulanık alt grubudur. Bu takdirde (iii) gereğince $\textit{Çek}\, f = \{x \in G_1 : f(x) = e_2\} = f^{-1}(e_2) = f^{-1}(\{e_2\})$ kümesi G_1 in bir normal bulanık alt grubudur.

Teorem 4.6.6 (Bulanık Gruplar için Temel Homomorfizma Teoremi)

$f : (G_1,R_1) \to (G_2,R_2)$ bir bulanık grup epimorfizması ise $H = \textit{Çek}\, f$ olmak üzere $(G_1/H) \cong G_2$ izomorfizması vardır.

İspat: $g: \frac{G_1}{H} \to G_2$; $[aH] \mapsto f(a)$ dönüşümünü göz önüne alalım.

(1) $aH \sim bH$ olmak üzere $R_1(a,h,b) > \theta$ olacak şekilde $h \in H$ olsun. Şu halde $R_2\big(f(a),f(h),f(b)\big) > \theta$ olur. $h \in \textit{Çek}\, f$ olduğundan $f(h) = e_2$, dolayısıyla $f(a) = f(b)$ bulunur. Buradan g nin iyi tanımlı olduğu görülür.

(2) $f : (G_1,R_1) \to (G_2,R_2)$ bir bulanık grup epimorfizması olduğundan $\forall y \in G_2$ için $y = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in G_1$ vardır. Böylece $g([xH]) = y$ olup g örtendir.

(3) $g([aH]) = g([bH])$ olsun. Buradan $f(a) = f(b)$ dir. $R_1(a^{-1}, b, c) > \theta$ olacak şekilde $c \in G_1$ alalım. Şu halde $R_2(f(a^{-1}), f(b), f(c)) > \theta$ ve $f(a) = f(b)$ olduğundan bu durum $f(c) = e_2$ olmasını gerektirir. Böylece $c \in H$ ve $aH \sim bH$ olup $[aH] = [bH]$ sonucuna varılır.

(4) $R_1([aH], [bH], [cH]) > \theta$ olsun. Bu takdirde

$$R_1(a, h_1, a_1) > \theta, \quad R_1(b, h_2, b_1) > \theta, \quad R_1(c_1, h_3, c) > \theta, \quad R_1(a_1, b_1, c_1) > \theta$$

olacak şekilde $a_1, b_1, c_1 \in G$ ve $h_1, h_2, h_3 \in H$ vardır. Şimdi $R_1(a, b, w) > \theta$ olacak şekilde $w \in G$ alalım. Bu durumda $R_1(w, h', c) > \theta$ olacak şekilde bir $h' \in H$ elemanı vardır. Böylece $wH \sim cH$ olup $f(c) = f(w)$ elde edilir. $R_1(a, b, w) > \theta$ olduğundan f bulanık homomorfizma olduğundan $R_2(f(a), f(b), f(w)) > \theta$, dolayısıyla $R_2(f(a), f(b), f(c)) > \theta$ sağlanır. Buradan$g$ bir bulanık homomorfizmadır. Sonuç olarak g bir bulanık grup izomorfizmasıdır.

BÖLÜM 5

BULANIK HALKALAR

5.1 Bulanık Halka, Bulanık Tamlık Bölgesi ve Bulanık Cisimler

Tanım 5.1.1 R boş olmayan bir küme, G ve H, R üzerinde tanımlı iki ikili işlem olsun. Bu işlemler,

$$G(a,b) = a \circ b \tag{5.1}$$

$$H(a,b) = a * b \tag{5.2}$$

$$(a \circ b)(c) = G(a,b,c) \tag{5.3}$$

$$(a * b)(c) = H(a,b,c) \tag{5.4}$$

$$\big((a \circ b) \circ c\big)(z) = \vee_{d \in R}\big(G(a,b,d) \wedge G(d,c,z)\big) \tag{5.5}$$

$$\big(a \circ (b \circ c)\big)(z) = \vee_{d \in R}(G(b,c,d) \wedge G(a,d,z)) \tag{5.6}$$

$$\big(a * (b \circ c)\big)(z) = \vee_{d \in R}(G(b,c,d) \wedge H(a,d,z)) \tag{5.7}$$

$$\big((a * b) \circ (a * c)\big)(z) = \vee_{d,e \in R}(H(a,b,d) \wedge H(a,c,e) \wedge G(d,e,z)) \tag{5.8}$$

ile tanımlanmak üzere (R,G,H) aşağıdaki üç koşulu sağladığı takdirde *bulanık halka* adını alır:

(BH1) (R,G) bir değişmeli bulanık grup;

(BH2) $\forall a,b,c,z_1,z_2 \in R$ için $\big((a * b) * c\big)(z_1) > \theta$ ve $\big(a * (b * c)\big)(z_2) > \theta$ ise $z_1 = z_2$;

(BH3) $\forall a,b,c,z_1,z_2 \in R$ için $\big((a \circ b) * c\big)(z_1) > \theta$ ve $\big((a * c) \circ (b * c)\big)(z_2) > \theta$ ise $z_1 = z_2$; $\big(a * (b \circ c)\big)(z_1) > \theta$ ve $\big((a * b) \circ (a * c)\big)(z_2) > \theta$ ise $z_1 = z_2$.

Bir (R, G, H) halkasında,

(BH4) $\forall a, b \in R$ için $(a * b)(u) > \theta \Leftrightarrow (b * a)(u) > \theta$ sağlanıyorsa(R, G, H) ya *değişmeli bulanık halka* denir.

(BH5) $\forall a \in R$ için $(a * e)(u) > \theta$ ve $(e * a)(v) > \theta$ ise $u = v$ olacak şekilde bir $e \in R$ birim elemanı varsa, (R, G, H) ya *birim elemanlı bulanık halka* denir. G deki işleme göre birim eleman e_0 a ise bulanık halkanın *sıfır elemanı* denir.

Teorem 5.1.2 (R, G, H), sıfır elemanı e_0 olan bulanık halkası aşağıdaki gibi bir takım özelliklere sahiptir: $\forall a, b \in R$ için,

(i) $(a * b)(b) > \theta$ ve $(a * b)(e_0) > \theta$ ise $b = e_0$;

$(b * a)(b) > \theta$ ve $(b * a)(e_0) > \theta$ ise $b = e_0$;

(ii) Herhangi bir b elemanının (R, G) deki tersi b^{-1} olmak üzere

$(a * b^{-1})(v) > \theta$ ve $(a * b)(w)$ ise $v = w^{-1}$;

$(a^{-1} * b)(s) > \theta$ ve $(a * b)(t) > \theta$ ise $s = t^{-1}$;

(iii) $(a^{-1} * b^{-1})(u) > \theta$ ve $(a * b)(v) > \theta$ ise $u = v$.

İspat: (i) e_0, R bulanık halkasının sıfır elemanı olduğundan

$$\big((a * b) \circ e_0\big)(b) \geq H(a, b, b) \wedge G(b, e_0, b) > \theta;$$

$$\big((a \circ e_0) * (b \circ e_0)\big)(e_0) \geq G(a, e_0, a) \wedge G(b, e_0, b) \wedge H(a, b, e_0) > \theta;$$

$$\big((b * a) \circ e_0\big)(b) \geq H(b, a, b) \wedge G(b, e_0, b) > \theta;$$

$$\big((b \circ e_0) * (a \circ e_0)\big)(e_0) \geq G(b, e_0, b) \wedge G(a, e_0, a) \wedge H(b, a, e_0) > \theta.$$

Sonuç olarak (BH3) ten $b = e_0$ elde edilir.

(ii) $G(v, w, c) > \theta$ olacak şekilde $c \in R$ olsun. Buradan

$$\big((a * b^{-1}) \circ (a * b)\big)(c) \geq H(a, b^{-1}, v) \wedge H(a, b, w) \wedge G(v, w, c) > \theta;$$

$$\big(a * (b^{-1} \circ b)\big)(e_0) \geq G(b^{-1}, b, e_0) \wedge H(a, e_0, e_0) > \theta;$$

ve sonuç olarak (BH3) ten $c = e_0$ ve $G(v, w, e_0) > \theta$ ve dolayısıyla (BG3) ten $v = w^{-1}$ elde edilir. Benzer şekilde $s = t^{-1}$ olduğu görülür.

(iii) $(a^{-1} \circ b^{-1})(u) > \theta$ olsun. (ii) den $(a^{-1} \circ b)(u^{-1}) > \theta$ ve (i) den $H(e_0, b, e_0) > \theta$ dir. $k \in R$ öyle ki $G(v, u^{-1}, k) > \theta$ ise

$$\big((a * b) \circ (a^{-1} * b)\big)(k) \geq H(a, b, v) \wedge H(a^{-1}, b, u^{-1}) \wedge G(v, u^{-1}, k) > \theta;$$
$$\big((a \circ a^{-1}) * b\big)(e_0) \geq G(a, a^{-1}, e_0) \wedge H(a, e_0, e_0) > \theta;$$

ve sonuç olarak (BH3) ten $k = e_0$ ve $G(v, u^{-1}, e_0) > \theta$ elde edilir. Benzer şekilde $G(u^{-1}, v, e_0) > \theta$ olduğu görülür. Dolayısıyla (BG3) gereğince $v = u$ dır.

Tanım 5.1.3 Bir (R, G, H) halkasında sıfırdan farklı bir a elemanı için $(a * b)(e_0) > \theta$ (ya da $(b * a)(e_0) > \theta$) olacak şekilde sıfırdan farklı bir $b \in R$ varsa a ya *sol* (ya da *sağ*) *sıfır bölen* adı verilir. R nin hem sağ hem sol sıfır bölen olan elemanına *sıfır bölen* denir.

Önerme 5.1.4 (R, G, H) bulanık halkasının sıfır bölensiz olması için gerek ve yeter koşul $\forall a, b, c \in R,\ a \neq e_0$ için

$$(a * b)(u) > \theta \text{ ve } (a * c)(u) > \theta \text{ ise } b = c\,; \tag{5.9}$$

veya

$$(b * a)(u) > \theta \text{ ve } (c * a)(u) > \theta \text{ ise } b = c\,; \tag{5.10}$$

sol/ sağ kısaltma kurallarının geçerli olmasıdır.

İspat: R sıfır bölensiz bir bulanık halka olsun. $(a * c)(u) > \theta$ ise Teorem 5.1.2 uyarınca $(a * c^{-1})(u^{-1}) > \theta$ dır. $\forall a, b, c \in R$ için

$$\big((a * b) \circ (a * c^{-1})\big)(e_0) \geq H(a, b, u) \wedge H(a, c^{-1}, u^{-1}) \wedge G(u, u^{-1}, e_0) > \theta\ ;$$

$$(\ \big(a * (b \circ c^{-1})\big)(e_0) \geq G(b, c^{-1}, k) \wedge H(a, k, e_0) > \theta\,;$$

dır. Burada $H(a, k, e_0) > \theta$, $a \neq e_0$ ve R sıfır bölen içermediğinden $k = e_0$ bulunur. Dolayısıyla $G(b, c^{-1}, e_0) > \theta$ olup (R, G) bir grup olduğundan $b = c$ sonucuna varılır. Benzer şeklide $(b * a)(u) > \theta$ ve $(c * a)(u) > \theta$ ise $b = c$ olduğu görülür. Tersine, bir (R, G, H) halkasında (5.9) ve (5.10) özellikleri sağlansın ve $a \neq e_0$ olsun. Bu takdirde $(a * b)(e_0) > \theta$ ise (5.9) gereğince $b = e_0$ bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 5.1.5 (R, G, H) bir birimli bulanık halka olsun. $\forall a \in R$ için $(c * a)(e) > \theta$ (ya da $(a * b)(e) > \theta$) olacak şekilde bir $b \in$R ($c \in R$) varsa b elemanına (c elemanına) a nın *sol (sağ) tersi* denir. Bir $a \in R$, hem sol hem sağ terse sahip ise *birim* ya da *tersinir eleman* adını alır. Bu durumda $a \in R$ nın tersi a^{-1} ile gösterilir.

Tanım 5.1.6 (R, G, H) değişmeli, birim elemanlı bir bulanık halka olsun. Şayet R nin sıfır elemanı dışında her elemanı tersinir ise (R, G, H) ya bir *bulanık cisim* denir.

Teorem 5.1.7 (R, G, H) bir birim elemanlı bir bulanık halka olsun. Bu takdirde

(i) R nin birim elemanı tek türlü belirlidir;

(ii) $a \in R$ nin tersi varsa, tek türlü belirlidir.

İspat:

(i) e' ve e'', (R, G, H) nın iki birim elemanı olsun. Şu halde $(e' * e'')(e') > \theta$ ve $(e' * e'')(e'') > \theta$ yani $H(e', e'', e') > \theta$ ve $H(e', e'', e'') > \theta$ olduğundan $e' = e''$ elde edilir.

(ii) a_1 ve a_2 , $a \in R$ elemanının iki ters elemanı olsun. Şu halde $H(a, a_2, e) > \theta$ ve $H(a_1, a, e) > \theta$ olduğundan

$$\big(a_1 * (a * a_2)\big)(a_1) \geq H(a, a_2, e) \wedge H(a_1, e, a_1) > \theta \ ;$$

$$((a_1 * a) * a_2)(a_2) \geq H(a_1, a, e) \wedge H(e, a_2, a_2) > \theta \ ;$$

buradan $a_1 = a_2$ elde edilir.

Teorem 5.1.8 Birimli elemanlı bir bulanık halkada, tersinir elemanlarının kümesi bulanık halkanın ikinci işlemine göre bir bulanık gruptur.

İspat: (R, G, H) birim elemanı e olan bir bulanık halka ve R deki tersinir elemanların kümesi A olsun. $A \neq \emptyset$ dir. Çünkü açıkça $(e)^{-1} = e \in R$ dir. Herhangi $a \in A$ alalım. a bir tersinir eleman olduğundan $H(a^{-1}, a, e) > \theta$ olacak şekilde $a^{-1} \in G$ vardır. Diğer taraftan $(a^{-1})^{-1} = a$ olduğundan $a^{-1} \in A$ bulunur. Sonuç olarak Teorem 4.2.3 uyarınca (A, H) bir bulanık grup yapısına sahiptir.

Sonuç 5.1.9 R bulanık halkasının bir bulanık cisim olması için gerek ve yeter koşul $R = A$ olmasıdır.

Tanım 5.1.10 Değişmeli, birim elemanlı bir bulanık halka, sıfır bölensiz ise *bulanık tamlık bölgesi* adını alır.

Teorem 5.1.11 Her bulanık cisim bir bulanık tamlık bölgesidir.

İspat: (R, G, H) bir bulanık cisim olsun. O zaman değişmeli ve birim elemanlı bir bulanık halkadır. $a, b \in R$ için $H(a, b, e_0) > \theta$ olsun. Bu takdirde $H(a^{-1}, a, e) > \theta$ olacak şekilde $a^{-1} \in R$ vardır. Buradan

$$((a^{-1} * a) * b))(b) > H(a^{-1}, a, e) \wedge H(e, b, b) > \theta;$$

$$\big(a^{-1} * (a * b)\big)(e_0) > H(a, b, e_0) \wedge H(a^{-1}, e_0, e_0) > \theta;$$

dolayısıyla $b = e_0$ olup R sıfır bölensizdir.

5.2 Bulanık Alt Halka ve Bulanık İdealler

(R,G,H) bir bulanık halka ve S,R nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. $\forall a,b,c \in S$ için $G_S(a,b,c) = G(a,b,c)$ ve $H_S(a,b,c) = H(a,b,c)$ ise $\forall a,b,c,z \in S$,

$$(a\Delta b)(c) = G_S(a,b,c) = G(a,b,c) \tag{5.11}$$

$$(a \diamond b)(c) = H_S(a,b,c) = H(a,b,c) \tag{5.12}$$

$$\big(a \diamond (b\Delta c)\big)(z) = \vee_{x\in S}(G(b,c,x) \wedge H(a,x,z)) \tag{5.13}$$

$$((a \diamond b)\Delta(a \diamond c)(z) = \vee_{x,y\in S}(H(a,b,x) \wedge H(a,c,y) \wedge G(x,y,z)) \tag{5.14}$$

işlemleri tanımlanır.

Tanım 5.2.1 (R,G,H) bir bulanık halka ve $S \subset R$ olsun. Şu halde

(i) $\forall a,b \in S,\ \forall c \in R$ için $(a \circ b)(c) > \theta$ ise $c \in S$ ve $(a * b)(c) > \theta$ ise $c \in S$;

(ii) (S, G_S, H_S) bir bulanık halkadır;

koşullarını sağlayan (S, G_S, H_S) ye (R,G,H) nın bir *bulanık alt halkası* adı verilir.

Önerme 5.2.2 (R,G,H) bir bulanık halka ve S,R nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. (S,G,H) nın R nin bir bulanık alt halkası olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki şartların gerçeklenmesidir.

(i) $\forall a,b \in S,\ (a \circ b)(c) > \theta$ ise $c \in S$ ve $(a * b)(c) > \theta$ ise $c \in G$;

(ii) $\forall a \in S,\ a \in S$ ise $a^{-1} \in S$;

İspat (R,G,H) bir bulanık halka ve (S,G,H), (R,G,H) nın bir bulanık alt halkası olsun. Bulanık alt halka tanımı gereğince (i) ve (ii) nin sağlanacağı açıktır. Tersine, 4. bölümde incelendiği üzere (S,G), (R,G) nin bulanık alt grubudur. Böylece

(BH1) sağlanır. (BH2) ve (BH3) ise R nin her elemanı tarafından sağlandığı için S nin her elemanı için de gerçeklenir. Dolayısıyla S, R nin bir bulanık alt halkasıdır.

Önerme 5.2.3 (R, G, H) bir bulanık halka ve

$$C = \{x \in R \ : \ \forall a, c \in R, \ (x * a)(c) > \theta \ \Leftrightarrow \ (a * x)(c) > \theta\}$$

ise C, R nin bir bulanık alt halkasıdır.

Tanım 5.2.4 R bulanık halkasının boş olmayan bir I alt kümesine aşağıdaki koşulları sağladığı takdirde R nin bir *bulanık ideali* adı verilir.

(Bİ1) $\forall x, y \in I, \ \forall z \in R, \ (x \circ y)(z) > \theta \ \Rightarrow \ z \in I$;

(Bİ2) $\forall x \in I, \ {x_G}^{-1} \in I$;

(Bİ3) $\forall s \in I, \ \forall x, y, r \in R, \ (r * s)(x) > \theta \ \Rightarrow x \in I$ ve $(s * r)(y) > \theta \ \Rightarrow \ y \in I.$
Bir bulanık idealin aynı zamanda bir bulanık halka olacağı açıktır.

Teorem 5.2.5 $\{I_i : \ i \in I\}$ kümesi, (R, G, H) bulanık halkasının bulanık ideallerinin ailesi ise $\bigcap_{i \in I} \boldsymbol{I}_i$, (R, G, H) nin bir bulanık idealidir.

İspat $\{I_i : \ i \in I\}$, R bulanık halkasının bulanık ideallerinin ailesi aynı zamanda (R, G) bulanık grubunun bulanık alt gruplarının ailesi olduğundan Önerme 4.3.4 gereğince $\bigcap_{i \in I} \boldsymbol{I}_i$, (R, G) nin bir bulanık alt grubudur. O halde (Bİ1) ve (Bİ2) gerçeklenir. Herhangi $r \in R$ ve $s \in \bigcap_{i \in I} \boldsymbol{I}_i$ alalım. Buradan her $i \in I$ için $s \in \boldsymbol{I}_i$ olup I_i lerin bulanık ideal olması gereği her $i \in I$ için $R(r, s, x) > \theta$ iken $x \in I_i$ sağlanır. Dolayısıyla $x \in \bigcap_{i \in I} \boldsymbol{I}_i$ elde edilir.

5.3 Bulanık Bölüm Halkaları

I , bir R bulanık halkasının bir bulanık ideali ve $\Omega = \{a \circ \boldsymbol{I} : a \in R\}$ olsun.

$$a_1 \circ \boldsymbol{I} \sim a_2 \circ \boldsymbol{I} \;\; \Leftrightarrow \;\; \exists u \in \boldsymbol{I} \;\; \ni \;\; G({a_1}^{-1},\, a_2, u) > \theta \tag{5.15}$$

ile Ω üzerinde bir bağıntı tanımlayalım.

Teorem 5.3.1 $\sim$ bağnıtısı, Ω üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

İspat Teorem 4.5.2 nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Bulanık idealler, bulanık halkalar teorisinde; bulanık normal alt grupların bulanık grup teorisindeki yerini tutar. Örneğin (R, G, H) bir bulanık halka ve I, R nin bir bulanık ideali olsun. Şu halde (I, G), (R, G) nin bir bulanık alt grubudur. (R, G) değişmeli olduğundan (I, G), (R, G) nin bir bulanık normal alt grubudur. Sonuç olarak, iyi tanımlı bir R/I bölüm grubu elde edilir ki aşağıdaki işlemler, bu yapıyı bulanık halkaya taşır:

$$([a \circ I] \oplus [b \circ I])([c \circ I]) = \bar{G}([a \circ I], [b \circ I], [c \circ I]) = \bigvee_{(a', b', c') \in \bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c}} G\,(a', b', c')$$

$$([a \circ I] \otimes [b \circ I])([c \circ I]) = \bar{H}([a \circ I], [b \circ I], [c \circ I]) = \bigvee_{(a', b', c') \in \bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c}} H\,(a', b', c')$$

$\bar{G}$ ve $\bar{H}$, R/I üzerinde iki bulanık ikili işlemdir, buradan aşağıdaki işlemler tanımlanır:

$$\begin{aligned}
\big(([a \circ I] \oplus [b \circ I]) \oplus [c \circ I]\big)([d \circ I]) &= \vee_{x \in R}(\bar{G}([a \circ I], [b \circ I], [x \circ I]) \\
&\qquad \wedge \bar{G}([x \circ I], [c \circ I], [d \circ I])) \\
([a \circ I] \oplus ([b \circ I] \oplus [c \circ I]))([w \circ I]) &= \vee_{x \in R}(\bar{G}([b \circ I], [c \circ I], [x \circ I]) \\
&\qquad \wedge \bar{G}([a \circ I], [x \circ I], [w \circ I])) \qquad (5.16) \\
([a \circ I] \otimes ([b \circ I] \oplus [c \circ I]))([z \circ I]) &= \vee_{d \in R}(\bar{G}([b \circ I], [c \circ I], [d \circ I]) \\
&\qquad \wedge \bar{H}([a \circ I], [d \circ I], [z \circ I]))
\end{aligned}$$

$$\big([a \circ I] \otimes ([b \circ I] \oplus [c \circ I])\big)([z \circ I]) = \vee_{d\in R}(\bar{G}([a \circ I], [b \circ I], [d \circ I])$$
$$\wedge \bar{G}([a \circ I], [c \circ I], [w \circ I])$$
$$\wedge \bar{H}([d \circ I], [w \circ I], [z \circ I]))$$

Teorem 5.3.2 (R, G, H) bir bulanık halka ve I, R nin bir bulanık ideali olsun. Bu takdirde aşağıdaki işlem ile birlikte $(R/I, \bar{G})$ bölüm grubu, bir bulanık halkadır.

$$([a \circ I] \otimes [b \circ I])(c \circ I) = \bar{H}([a \circ I], [b \circ I], [c \circ I]) = \bigvee_{(a',b',c')\in \bar{a}\times\bar{b}\times\bar{c}} H\,(a', b', c')$$

Tanım 5.3.3 $(R/I, \bar{G}, \bar{H})$ bulanık halkasına, $mod\ I$ ya göre bulanık bölüm halkası adı verilir.

Tanım 5.3.4 I ve J, (R, G, H) bulanık halkasının iki bulanık ideali olmak üzere

$$(I{:}J) = \{a \in R :\ a * J \subseteq I\} \tag{5.17}$$

ile tanımlanan $(I{:}J)$ kümesine bulanık bölüm ideali denir. Özel olarak $I = \{e_0\}$ ise

$$(e_0{:}J) = \{a \in R :\ \forall b \in J, (a * b)(e_0) > \theta\} \tag{5.18}$$

bölüm idealine J bulanık idealinin sıfırlayanı adı verilir. Ann J ile gösterilir.

Önerme 5.3.5 I ve J, (R, G, H) bulanık halkasının iki bulanık ideali olsun.

i) $(I{:}J)$, R bulanık halkasının bir bulanık idealidir;

ii) $I \subseteq (I{:}J)$.

İspat :

i) $(I{:}J) \neq \emptyset$ dir. Çünkü $e_0 * J = \{e_0\} \subseteq I$.

Herhangi $a, b \in (I{:}J)$ için $(a \circ b)(c) > \theta$ olacak şekilde $c \in R$ olsun. Bu durumda

$$\big((a*J)\oplus(b*J)\big)(c*J)=\bigvee_{(a',b',c')\in\bar{a}\times\bar{b}\times\bar{c}} G\,(a',b',c')\geq G(a,b,c)>\theta$$

ve $a*J$, $b*J$ kümeleri I bulanık idealinin alt kümesi olduğundan $c*J\subseteq I\Rightarrow c\in(I{:}J)$ elde edilir.

Herhangi $a\in(I{:}J)$ için $G(a,a^{-1},e_0)>\theta$ olacak şekilde $a^{-1}\in R$ vardır. Buradan

$$\big((a*J)\oplus(a^{-1}*J)\big)(e_0*J)\ \geq G(a,a^{-1},e_0)>\theta$$

olduğundan $(a^{-1}*J)\subseteq I$ ve $a^{-1}\in(I{:}J)$ sağlanır.

Herhangi $a\in(I{:}J)$, $r\in R$ için $H(r,a,x)>\theta$ olacak şekilde $x\in R$ vardır.

Böylece

$$(r*(a*J))(x*J)=\bigvee_{(a',x')\in\bar{a}\times\bar{x}} H\,(r,a',x')\geq H(r,a,x)>\theta$$

sağlandığından $(a*J)\subseteq I$ ve I nın bir bulanık ideal olması dolayısıyla $(x*J)\subseteq I$ den $x\in(I{:}J)$ gerçeklenir. Benzer şekilde $\big((a*J)*r\big)(y*J)>\theta$ ise $(y*J)\subseteq I$ olacağı açıktır.

ii) Herhangi $a\in I$ alalım. Her $b\in J$ için I bir bulanık ideal olduğundan $(a*b)(c)>\theta\Rightarrow c\in I$ sağlanır. Dolayısıyla $(c*J)\subseteq I\Rightarrow c\in(I{:}J)$ elde edilir.

5.4 Bulanık Halka Homomorfizmaları

Tanım 5.4.1 (R_1,G_1,H_1) ve (R_2,G_2,H_2) iki bulanık halka ve $f{:}\,R_1\to R_2$ bir dönüşümü aşağıdaki koşulları sağladığı takdirde *bulanık halka homomorfizması* adını alır:

(1) $G_1(a,b,c)>\theta\ \Rightarrow\ G_2\big(f(a),f(b),f(c)\big)>\theta$;

(2) $H_1(a,b,c)>\theta\ \Rightarrow\ H_2\big(f(a),f(b),f(c)\big)>\theta$.

Şayet f birebir ise *bulanık halka monomorfizması*, örten ise *bulanık halka epimorfizması*, hem birebir hem örten ise *bulanık halka izomorfizması* adını alır.

Önerme 5.4.2 $f:(R_1,G_1,H_1)\to(R_2,G_2,H_2)$ bir bulanık halka homomorfizması olsun. Bu takdirde,

(i) $f(e_1)=e_2$;

(ii) $f(a^{-1})=f(a)^{-1}$ dır.

İspat (i)f bir bulanık halka homomorfizması olduğundan, $\forall a\in R_1$ için

$$G_1(a,e_1,a)>\theta \ \Rightarrow G_2(f(a),f(e_1),f(a))>\theta$$

ve $f(a)\in R_2$ için $G_2(f(a),e_2,f(a))>\theta$ dır.

$$\Big(\big(f(a)^{-1}\circ f(a)\big)\circ f(e_1)\Big)(e_2)\geq G_2(f(a)^{-1},f(a),e_2)\ \wedge G_2\big(e_2,f(e_1),f(e_1)\big)>\theta$$

$$\Big(f(a)^{-1}\circ\big(f(a)\circ f(e_1)\big)\Big)\big(f(e_1)\big)\geq G_2\big(f(a),f(e_1),f(a)\big)$$
$$\wedge\, G_2\big(f(a)^{-1},f(a),f(e_1)\big)>\theta$$

olduğundan $f(e_1)=e_2$ elde edilir.

(ii) f bir bulanık halka homomorfizması olduğundan $\forall a\in R_1$ için

$$G_1(a,a^{-1},e_1)>\theta \ \Rightarrow G_2(f(a),f(a)^{-1},f(e_1))>\theta$$

yazılır. (i) de $f(e_1)=e_2$ bulunduğundan $G_2(f(a),f(a)^{-1},e_2)>\theta$, dolayısıyla $f(a)^{-1}=f(a^{-1})$ elde edilir.

Teorem 5.4.3 $f:(R_1,G_1,H_1)\to(R_2,G_2,H_2)$ bir bulanık halka homomorfizması olsun. Bu takdirde,

(i) $Im\,f$, R_2 nin bir bulanık alt halkasıdır;

(ii) $Çek\,f$, R_1 in bir bulanık idealidir.

İspat. (i) $f(e_1)=e_2\in Im\,f$ olduğundan $Im\,f\neq\emptyset$ dir. $x,x_1,x_2\in R_1$için $G_1(x_1,x_2,x)>\theta$ ise $G_2(f(x_1),f(x_2),f(x))>\theta$ dir. Bu nedenle $f(x)\in Im\,f$ bulunur.R_1 bir bulanık halka olduğundan $G_1(x,x^{-1},e_1)>\theta$ olacak şekilde $x^{-1}\in R_1$

vardır. Şu halde $G_2(f(x), f(x^{-1}), f(e_1)) = G_2(f(x), f(x^{-1}), e_2) > \theta$ elde edilir ki $f(x)^{-1} \in Im\, f$ sonucuna varılır.

(ii) Açıkça $e_1 \in Çek\, f$ olduğundan $Çek\, f \neq \emptyset$ dir. Herhangi $x, y \in Çek\, f$ için $G_1(x, y, z) > \theta$ ise $G_2(f(x), f(y), f(z)) > \theta$ dır. f bir bulanık homomorfizma olduğundan $G_2(e_2, e_2, f(z)) > \theta$ olur ki buradan $f(z) = e_2$ bulunur. Dolayısıyla $z \in Çek\, f$ elde edilir. Herhangi $x \in Çek\, f$ için$G_1(x, x^{-1}, e_1) > \theta$ olacak şekilde $x^{-1} \in R_1$ olduğundan $G_2(f(x), f(x)^{-1}, f(e_1)) = G_2(f(x), f(x)^{-1}, e_2) > \theta$ dır. Bu nedenle $f(x^{-1}) = e_2$ ve buradan $x^{-1} \in Çek\, f$ sonucuna varılır. Son olarak, herhangi $x \in Çek\, f$ ve $r \in R_1$ için $H_1(x, r, u) > \theta$ ise $H_1(f(x), f(r), f(u)) > \theta$ dır.$f(x) = e_2$ olduğundan $H_2(e_2, f(r), f(u)) > \theta$ ve buradan $f(u) = e_2$ bulunur. Benzer şekilde $H_1(r, x, v) > \theta$ ise $H_2(f(r), f(x), f(v)) > \theta$dir. $f(x) = e_2$ olduğundan $H_2(f(r), e_2, f(v)) > \theta$ ve buradan $f(v) = e_2$ sonucuna varılır. Böylece $Çek\, f$, R_1 in bir bulanık idealidir.

Teorem 5.4.4 (Bulanık Halkalar için Temel Homomorfizma Teoremi)

$f: (R_1, G_1, H_1) \to (R_2, G_2, H_2)$ bir bulanık halka epimomorfizması olsun. Bu takdirde $N = Çek\, f$ olacak şekilde $R_1/N \cong R_2$ bulanık halka izomorfizması vardır.

İspat :$\frac{R_1}{N} \to R_2$; $\varphi([r \circ N]) = f(r)$ ile bir dönüşüm tanımlayalım. Teorem 4.6.6 gereğince φ iyi tanımlı birebir bir bulanık grup homomorfizmasıdır. O halde gösterilmesi gereken $H_1([a \circ N], [b \circ N], [c \circ N]) > \theta$ ise $H_2(\varphi([a \circ N]), \varphi([b \circ N]), \varphi([c \circ N])) > \theta$ nin sağlandığıdır. $H_1([a \circ N], [b \circ N], [c \circ N]) > \theta$ olsun. Bu takdirde $H_1(a, n_1, a') > \theta$, $H_1(b, n_2, b') > \theta$, $H_1(c, n_3, c') > \theta$ olacak şekilde $n_1, n_2, n_3 \in N$ ve a', $b', c' \in R_1$ elemanları vardır. Şimdi $H_1(a, b, u) > \theta$ olacak şekilde bir $u \in R_1$ alalım. Buradan $H_1(u, n', c) > \theta$ olacak şekilde bir $n' \in N$ vardır. Şu halde $u \circ N \sim c \circ N$ ve $f(c) = f(u)$ elde edilir. f nin bulanık halka homomorfizması olması, $H_1(a, b, u) > \theta$ iken $H_2(f(a), f(b), f(u)) > \theta$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $H_2(f(a), f(b), f(c)) > \theta$ den $H_2(\varphi([a \circ N]), \varphi([b \circ N]), \varphi([c \circ N])) > \theta$ nin sağlandığı görülür. Böylece φ bir bulanık halka izomorfizmasıdır.

BÖLÜM 6

SONUÇLAR

Bulanık küme kavramı yardımıyla tanımlanan bulanık fonksiyon, bulanık ikili işlem gibi bulanık yapılar, klasik cebir teorisinde yer alan grup, halka, tamlık bölgesi, cisim gibi cebirsel yapıları bulanık bir yapıya taşır. Böylece klasik grup teorisinde bilinen temel kavramlar bulanık mantıkta; bulanık grup, bulanık alt grup, bulanık normal alt grup, bulanık bölüm grubu, bulanık grup homomorfizmaları; klasik halka teorisinde ise bulanık halka, bulanık alt halka, bulanık ideal, bulanık bölüm halkası, bulanık halka homomorfizmaları vb. bulanık yapılar, bulanık grup ve halka teorisi kapsamında tanımlanır.

Bu çalışmada, bulanık mantık kavramı tanıtılarak, cebir teorisinde bulanık cebirsel yapılar detaylarıyla incelenmiştir. Bulanık cebir teorisindeki bulanık cebirsel yapılar ile klasik cebirde yer alan klasik cebirsel yapıların benzer özellikler taşıdığı gözlemlenmiştir. Bir bakıma, klasik cebir teorisi genelleştirilerek, bulanık mantık adı verilen farklı bir mantık sistemi üzerine inşa edilen yeni cebirsel yapılarda da aynı cebirsel özelliklerin korunduğu söylenebilmektedir.

Bu çalışma, bulanık cebir teorisinin yapı taşları olan bulanık gruplar ve bulanık halkalar üzerine olması sebebiyle, bulanık mantık sistemi üzerine kurulan diğer bulanık cebirsel yapılarla çalışmak için başlangıç niteliği taşımaktadır. Bu yönüyle yeni bir bilimsel çalışma sahası oluşturmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Aktaş, H. ve Çağman N. (2005). Bulanık ve Yaklaşımlı Kümeler. *Journal of Arts and Sciences*, **3**, 13-25.

[2] Aktaş, H. and Çağman, N. (2007). A type of fuzzy ring. *Arch. Math. Logic*, **46**, 165-177.

[3] Baykal, N. ve Beyan, T. (2004). *Bulanık mantık ilke ve temelleri*. Bıçaklar Kitapevi.

[4] Çağman, N. (2006). Bulanık mantık. *Bilim ve Teknik*, **463**, 50-51.

[5] Çağman, N. (2006). Olasılık ve bulanık kümelerin karşılaştırılması. *Bilim ve Ütopya*, **149**, 51-54.

[6] Demirci, M. (1999). Fuzzy functions and their fundamental properties. *Fuzzy Sets and Systems*, **106**, 239-246.

[7] Demirci, M. (2000). Fuzzy functions and their applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **252**, 495-517.

[8] Hungerford, T.W. (1974). *Algebra*. New York: Springer.

[9] Kumar, R. (1992). Fuzzy subgroups, fuzzy ideals, and fuzzy cosets: Some properties. *Fuzzy Sets and Systems*, **48**, 267-274.

[10] Malik, D.S. and Mordeson, J.N. (1992). Fuzzy homomorphism of rings. *Fuzzy Sets and Systems*, **46**, 139-146.

[11] Mordeson, J.N., Bhutani, K.R.and Rosenfeld A. (2005) *Fuzzy Group Theory*. Springer.

[12] Rosenfeld, A. (1971). Fuzzy groups. *J. Math. Anal. Appl.*, **35**, 512-517.

[13] Sharp, R.Y., (2000). *Steps in commutative algebra.* (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

[14] Yuan, X. and Lee, E.S. (2004). Fuzzy group based on fuzzy binary operation. *Comput. Math. App.*, **47**, 631-641.

[15] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. *Inform. Control*, **8**, 353-383.