GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK SONLU ÜRETEÇLİ MODÜLLER

MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞERİF ÖZLÜ

HAZİRAN 2011

BULANIK SONLU ÜRETEÇLİ MODÜLLER

Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Necati Olgun

Şerif Özlü
Haziran 2011

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Bulanık Sonlu Üreteçli Modüller
Öğrencinin, Adı Soyadı: Şerif ÖZLÜ
Tez Savunma Tarihi: 01.06.2011

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ramazan KOÇ
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

	İmzası
Yrd. Doç. Dr. Memet ŞAHİN	
Yrd. Doç. Dr. Ali BOZKURT	
Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN	

ÖZET

BULANIK SONLU ÜRETEÇLİ MODÜLLER

ÖZLÜ, Şerif

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç.Dr. Necati OLGUN

Haziran 2011,43 sayfa

Bu tezde klasik cebirdeki modül kavramı bulanık cebir çercevesinde incelenmeye çalışılmıştır.

Öncelikle bulanık ile ilgili temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Daha sonra bulanık modülün tanımı verilerek bulanık modül ile klasik cebirdeki modül arasındaki bağlantı gösterilmiştir. Örneklerle beraber bir bulanık modül yapısının nasıl oluşması gerektiği ifade edilmiştir.

Son bölümde ise bulanık sonlu üreteçli modüllerden ve noetherian modül yapısından bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık, Modül, Bulanık modül, Noetherian modül, Bulanık Sonlu Üreteçli Modül

ABSTRACT

BULANIK FİNETELY GENERATED MODULES

ÖZLÜ, Şerif

M. Sc. Thesis, Math Department

Adviser: Assist. Prof. Dr. Necati OLGUN

June 2011, 43 pages

In this thesis the concept of module of classical algebra is analyzed within the context of the fuzzy algebra.

Initially, the basic properties and theorems are given about the subject. Then fuzzy module is gave and the relation between the fuzzy module and the module in classical algebra is demonstrated. It has been noted that how a fuzzy module structure should be formed with examples.

Finally in this thesis has been discussed fuzzy finitely generated modules and noetherian modules

Key Words: Fuzzy, Modules, Fuzzy Modules, Noetherian Modules, Fuzzy Fınetely Generated Modules

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Necati Olgun’a ve saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER DİZİNİ

$f \circ g$	f ve g fonksiyonlarının bileşkesi
$E \Delta F$	E ve F kümelerinin simetrik farkı
μ	küme fonksiyonu
χ_A	A nın karakteristik fonksiyonu
I	R nin ideali
R	Halka
G	Grup
$I \lhd R$	I R nin ideali

BÖLÜM 1

GENEL BİLGİLER

1. GİRİŞ

Bulanık küme teorisi 1965 tarihinde L.A. Zadeh tarafından ortaya atılmıştır. "Fuzzy" sözcüğü dilimizde "bulanık" veya "belirsiz" sözcüğü olarak kullanılmaktadır.

1965 yılına kadar matematikte incelenen konuların önceden belirlenen kurallara kesin olarak uyup uymadığı araştırılmış, bu incelemelerde her zaman bir kesinlik aranmıştır. Bir önerme için belirlenen kurallara uyuyorsa doğru, uymuyorsa yanlış denilmiştir. Yaşadığımız dünyada bir çok olay vardır ki bunlarla ilgili önermelerin doğru yada yanlış olduğunu ifade etmek bizi zor durumda bırakabilir. Karar veren kişinin ne hakkında karar vereceğini bilmesi çoğu zaman doğru karar için yeterli değildir. Karar vereceği ortamda kendisine doğru karar vermede yardımcı olacak ne gibi verilerin olduğunu bilmesi de gerekir. Bulanık kümesi bu karmaşıklığı azaltmak için eleman olanları eleman olmayanlardan ayıran kesinliği ortadan kaldırır.

Zadeh 'in bu çalışmasında değer kümesi [0,1] olarak alınmıştır. 0 ile 1 arasına da sınırdaki elemanların ait olma derecelerini yerleştirebiliriz. Olası bir elemanın üyelik derecesinin 1'e daha yakın olması kümeye daha fazla ait olması anlamına gelir.[26]

Teori 1971 de Rosenfeld tarafından bulanık cebirsel yapılara taşınarak bir grubun bulanık alt grubu tanımlanmıştır. Das, sonlu devirli bir grubun tüm bulanık alt grupların bir karakterizasyonunu seviye alt gruplarının yardımı ile vermiştir.[26]

Daha sonra birçok bilim adamı tarafından bulanık kavramı geliştirilmiştir. Sidky ve Mishref bulanık normal alt gruplar ve bulanık kosetleri tanımlamışlardır. Gang ve Yun bulanık halkaları çalışmıştır ve Malik and Mordeson'un halkalar ve gruplar üzerindeki bulanık bağıntıları anlatmıştır.[26]

Bu teori son çeyrek yüzyılda büyük ilgi görmüştür. Halen birçok bilim adamı bu konuda çalışmalar yapmaktadır. Matematik bulanık mantığı ile yeniden yazılmaktadır. Eksik tanım ve teoremler zaman içinde yapılmaya devam etmektedir.

Bulanık mantığın uygulama alanları çok geniştir. Sağladığı en büyük fayda ise "insana özgü tecrübe ile öğrenme" olayının kolayca modellenebilmesi ve belirsiz kavramların bile matematiksel olarak ifade edilmesine olanak tanımasıdır.[25] Bu şekilde zor ve karışık Aristo mantığı yerine son 40 - 45 yıldır geliştirilen bulanık mantık ile çok karmaşık sorunların çok basit şekilde çözülebileceğini gösterdi [4].

L.A.Zadeh'in öğrencisi C.L.Chang 1968 de "Bulanık Topolojik Uzaylar"adlı makalesinden sonra bir cebirci olan Azriel Rosenfeld, "Eğer Chang bunu topolojik uzaylar için yapabiliyorsa, bende bunu cebirsel yapılar için yapabilirim", diyerek büyük bir uğraş sergiledi ve 1971 yılında "Bulanık Gruplar" adlı makalesini yayınladı. Bu bulanık cebir alanında yayınlanan ilk eser oldu. Bu eser daha sonra birçok bilim adamına örnek teşkil etmiştir. Bilim adamları bu makaleyi hemen hemen bütün yapılarda kullanarak geliştirmiştir.

Ölçüm kavramı matematiğin temel konularından bir tanesidir. Önceleri sürüdeki koyunların sayısı, ipin uzunluğu, tarlanın alanı, küpün hacmi basit sonlu kümelerle ifade edilebilen kavramlar için ölçüm kuralı bulunmuş ancak sonraları bilimin, özellikle matematiğin gelişmesiyle karşılaşılan, sonsuz kümelerle ifade edilebilen daha karmaşık yapıların veya olayların ölçümü için çalışılmıştır. Örneğin reel doğru üzerinde "0" ile "1" arasındaki reel sayılarının kümesinin [0,1] kapalı aralığı ölçümünün ne olacağı, bu kümeden "0" ile "1" arasındaki reel sayıların kümesinin [0,1] kapalı aralığı ölçümünün ne olacağı, bu kümeden "0" ve "1" in çıkarılmasıyla oluşan kümenin (0,1) açık aralığı veya reel doğru üzerinde ki herhangi bir açık aralık ölçümünün ne olacağı veya bu kümeden bütün rasyonel sayıların çıkarılmasıyla oluşan kümenin ölçümünün ne olacağı gibi sorular üzerinde durulmuştur. Ayrıca basit yapılar için belirlenmiş olan ölçüm kurallarının bunları kapsayan daha karmaşık yapılara nasıl genişletileceği önemli bir sorun olmuştur

Bulanık mantığın ilk kez 1965 yılında L.A. Zadeh tarafından konulmasına rağmen, bu mantığa olan gereksinim, ona karşı olan ilginin hızla büyümesiyle kanıtlanmıştır. Özellikle 1980'li yılların ortalarından itibaren gerek bilimde gerek teknolojide gerekse sanayi alanlarında kullanılmasıyla bu alanlarda inanılmaz başarılara imza atılmıştır. Örneğin akıllı asansörlerin yapısında bulanık kullanılmıştır.

.

BÖLÜM 2

2.1. KÜME BİLGİLERİ

Ölçüm kavramı bir küme fonksiyonu olduğundan dolayı kümelerin cebirsel yapıları önemlidir. Bu bölümde üzerinde ölçüm kuramının tanımlanacağı küme sınıfları ve bu küme sınıflarının ürettikleri halkalar, cebirler ile bulanık kümeler ve bulanık kümeler üzerindeki cebirsel yapılar ile ilgili temel tanım ve teoremler verilerek, incelenmiştir. Bu bölümde küme sınıfları ile ilgili kısım [6,7,11,14] bulanık kümelerle ilgili kısım Zadeh'in [15] çalışmasından derlenmiştir.

2.1.1 Küme Sınıfları:

Tanım 2.1.1.1: X kümesinin tüm alt kümeleri sınıfına *kuvvet kümesi* denir ve $P(X)$ ile gösterilir. $P(X)$ in alt kümelerine sınıf denir.

Tanım 2.1.1.2: Aşağıdaki şartları sağlayan boş kümeden farklı bir R sınıfına *halka* denir.

$$\forall E, F \in R \;\; ; \;\; E \cup F \in R \quad ve \quad E - F \in R$$

Önerme 2.1.1.3: Boş küme her halkanın elemanıdır.

Teorem 2.1.1.4: Her halka birleşim, kesişim ve simetrik fark işlemleri altında kapalıdır ve tersine arakesit ve simetrik fark işlemleri altında kapalı olan boş olmayan bir küme sınıfı bir halkadır.

İspat:

$$E \Delta F = (E - F) \cup (F - E) \quad ve \quad E \cap F = (E \cup F) - (E \Delta F)$$

bu şekilde birinci sonuç bulunur. Şimdi tersine

$$E \cup F = (E \Delta F) \Delta (E \cap F) \quad ve \quad E - F = (E \Delta F) \cap E$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.1.1.5: Kesişim, fark ve ayrık kümelerin birleşimleri altında kapalı olan boş olmayan her küme sınıfı bir halkadır.

İspat: Teorem 2. 1. 1.4 ve aşağıdaki eşitlikten sonuç bulunur.

$$E \Delta F = \left[E - \left(E \cap F \right) \right] \cup \left[F - \left(E \cap F \right) \right]$$

Örnek 2.1.1.6: X kümesinin sonlu bütün alt kümelerinin sınıfı bir halkadır.

Tanım 2.1.1.7 Aşağıdaki şartları sağlayan boş kümeden farklı bir R sınıfına *cebir* denir.

i. $\forall E, F \in R$; $E \cup F \in R$
ii. $\forall E \in R$; $\bar{E} \in R$

Teorem 2.1.1.8: Cebir, X kümesini içeren bir halkadır ve tersine X kümesini içeren bir halka, cebirdir.

İspat: R bir cebir olsun.

$$E - F = E \cap \bar{F} = \overline{\left(\bar{E} \cup F \right)}$$

ve $E \in R$ ise

$$X = E \cup \bar{E} \in R$$

o halde teoremin birinci kısmı tamamlanmış olur. Tersine R, X kümesini içeren bir halka ise $\forall E \in R$ için

$$\bar{E} = X - E \in R$$

olduğundan teoremin ikinci kısmı da gösterilmiş olup ispat tamamlanır.

Örnek 2.1.1.9: Bütün sonlu kümeler ve onların tümleyenlerinin sınıfı bir cebirdir.

Tanım 2.1.1.10: φ boş olmayan bir sınıf aşağıdaki şartları sağlıyorsa φ küme sınıfına *yarı halka* denir.

i. $\forall E, F \in \varphi$; $E \cap F \in \varphi$

ii. $\forall E \subset F \in \varphi$; $i = 1, 2, 3, ..., n$ *için*

$$E = C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset ... \subset C_n = F$$
$$D_i = C_i - C_{i-1} \in \varphi$$

olacak biçimde φ nin içinde sonlu bir $\{C_0, C_1, C_2, ..., C_n\}$ küme sınıfı vardır. Her halka yarı halkadır ve boş küme her yarı halkanın bir elemanıdır.

Örnek 2.1.1.11: X kümesinin tek elemanlı tüm alt kümelerini ve boş kümeyi içeren küme sınıfı bir yarı halkadır.

Tanım 2.1.1.12: F boş olmayan bir küme sınıfı aşağıdaki şartları sağlıyorsa F küme sınıfına σ - *halka* denir.

i. $\forall E, F \in \mathrm{F}$; $E - F \in \mathrm{F}$

ii. $\forall E_i \in \mathrm{F}$; $i = 1, 2, 3, ...,$ $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathrm{F}$

Bir σ - halka sayılabilir birleşim altında kapalı olan bir halkadır.

Önerme 2.1.1.13: Bir σ - halka sayılabilir arakesit altında kapalıdır. Bundan dolayı F bir σ - halka ve $\{E_n\} \in \mathrm{F}$ bir küme dizisi ise;

$$\limsup_n E_n \in \mathrm{F} \quad ve \quad \liminf_n E_n \in \mathrm{F} \quad \text{olur.}$$

Örnek 2.1.1.14: Tüm sayılabilir kümelerin sınıfı bir σ - halkadır.

Tanım 2.1.1.15: X kümesini içeren bir σ - halkaya σ - cebiri denir.

Örnek 2.1.1.16: Tüm sayılabilir kümeler ve onların tümleyenlerinin sınıfı bir σ - cebirdir

Önerme 2.1.1.17: F bir σ - halka ise $\mathrm{F} \cup \{E : \bar{E} \in \mathrm{F}\}$ bir σ - cebirdir.

Tanım 2.1.1.18: Boş olmayan ve her $\{E_n\} \subset M$ monoton küme dizisi için eğer $\lim_n E_n \in M$ ise M küme sınıfına *monoton sınıf* denir.

Önerme 2.1.1.19: Bir σ - halka bir monoton sınıftır.

Önerme 2.1.1.20: Bir halka aynı zamanda bir monoton sınıf ise bu bir σ -halkadır.

Tanım 2.1.1.21: F_p boş olmayan bir sınıf ve T keyfi indeks kümesi olmak üzere

$\forall \{E_t : t \in T\} \subset \mathrm{F}_p$ için

$$\bigcup_t E_t \in \mathrm{F}_p \qquad \text{ve} \qquad \bigcap_t E_t \in \mathrm{F}_p$$

ise F_p sınıfına *düzenli sınıfı* denir.

Önerme 2.1.1.22: Düzenli sınıf bir monoton sınıftır.

Örnek 2.1.1.23: $X = [0,1]$ kapalı birim aralık olsun. $a \in [0,1]$ olmak üzere $[0,a)$ ya da $[0,a]$ biçimindeki tüm kümelerin sınıfı düzenli bir sınıftır.

Önerme 2.1.1.24: E sabit bir küme olsun. φ bir σ - halka ise (sırasıyla halka, yarı halka, monoton sınıf, düzenli sınıfı) $\varphi \cap E$ de σ - halkadır.

Teorem 2.1.1.25: φ bir küme sınıfı olsun. φ sınıfını kapsayan en küçük bir R_0 halkası vardır.

$$\forall R \ ve \ R_0 \supset \varphi \ için \ R \supset \varphi \Rightarrow R \supset R_0$$

R_0, φ sınıfının ürettiği halka olarak adlandırılır ve $R(\varphi)$ ile gösterilir.

İspat: $P(X)$, φ sınıfını içeren bir halkadır. φ yi içeren halkaların kesişimi de yine φ yi içeren bir halkadır. Bu R_0 halkası ile gösterilir. R_0 ın tekliği aşikârdır.

Benzer şekilde φ nin ürettiği σ - halka, monoton sınıf ve düzenli sınıf için tanımlanıp sırasıyla $\mathrm{F}(\varphi)$, $M(\varphi)$, $\mathrm{F}_p(\varphi)$ ile gösterilebilir.

Örnek 2.1.1.26: X sonsuz bir küme olsun. φ bütün tek elemanlı kümelerin sınıfı ise R(φ) bütün sonlu kümelerin ve $\mathrm{F}(\varphi)$ bütün sayılabilir kümelerin sınıfıdır.

Örnek 2.1.1.27: X reel doğru olsun. φ tüm açık aralıkların sınıfı ise $M(\varphi)$ tüm açık aralıkların sınıfı ve $\mathrm{F}_p(\varphi)= P(X)$ dir.

Önerme 2.1.1.28: $\varphi_1 \subset \varphi_2$ ise $\mathrm{K}(\varphi_1) \subset \mathrm{K}(\varphi_2)$ dir. Burada K yerine R, M, F_p veya F den herhangi biri alınabilir.

Teorem 2.1.1.29: φ bir yarı halka olsun. $R(\varphi)$, φ deki bütün kümelerin sonlu, ayrık birleşimlerinin sınıfıdır.

Teorem 2.1.1.30: $\mathrm{F}(\varphi) = \mathrm{F}\ (R(\varphi))$.

İspat: İlk olarak $\varphi \subset R(\varphi)$ olduğundan Önerme 2. 1. 8 e göre;

$$\mathrm{F}(\varphi) \subset \mathrm{F}(R(\varphi))$$

İkinci olarak $\mathrm{F}(\varphi) \supset \varphi$ ve $\mathrm{F}(\varphi)$ bir halka olduğundan

$$\mathrm{F}(\varphi) \supset R(\varphi) \qquad \text{olur.}$$

Ayrıca $\mathrm{F}(\varphi)$ bir σ - halka olduğundan,

$$\mathrm{F}(\varphi) \supset \mathrm{F}(R(\varphi)) \qquad \text{olur.}$$

Böylece

$$\mathrm{F}(\varphi) = \mathrm{F}\ (R(\varphi)) \qquad \text{bulunur.}$$

Örnek 2.1.1.31: X reel doğru ve φ de Örnek 2.1.3 deki yarı halka olsun. Bu durumda $\mathrm{F}(\varphi)$ ye Borel cebiri denir ve "B" ile gösterilir. B deki kümeler Borel kümesi olarak adlandırılır. B aynı zamanda sırasıyla tüm açık aralıkların sınıfı, tüm kapalı aralıkların sınıfı, tüm soldan açık sağdan kapalı aralıkların sınıfı, bütün soldan kapalı sağdan açık aralıkların sınıfı veya tüm aralıkların sınıfı tarafından üretilen bir σ - halkadır.

Teorem 2.1.1.32: φ bir küme sınıfı ise,

$$\mathrm{F}_p(\varphi)=\left\{\bigcup_{t\in T}\ \bigcap_{s\in S_t} E_s : E_s\in\varphi \quad S_t \text{ ve } T \text{ keyfi indeks kümeleri}\right\}$$

olur.

İspat: Eşitliğin sağ tarafını V ile gösterelim.

i. S_t ve T tek elemanlı olabileceklerinden $V\supset\varphi$

ii. Bileşke işleminin birleşme özelliğinden V, bileşke işlemine göre kapalıdır.

iii. φ deki kesişim ve birleşim işleminin yer değiştirebilmesinden ve kesişimin birleşme özelliğinden V, kesişim işlemine göre kapalıdır.

Bu yüzden V, φ yi içeren bir düzenli sınıftır ve $V\supset\mathrm{F}(\varphi)$.

Tersine φ yi içeren her düzenli sınıf V i de kapsar buradan $\mathrm{F}_p(\varphi)\supset V$.

Sonuç olarak

$\mathrm{F}_p(\varphi)=V$ bulunur.

Teorem 2.1.1.33: φ herhangi bir sınıf ve A herhangi bir küme ise,

$$\mathrm{F}(\varphi)\cap A=\mathrm{F}(\varphi\cap A) \quad \text{dır.}$$

Benzer şekilde halka, monoton sınıf ve düzenli sınıf içinde aynı ifade geçerlidir.

İspat: *i.* $\mathrm{F}(\varphi)\cap A$ bir σ -halkadır ve $\varphi\cap A$ yı kapsar, bu yüzden

$$\mathrm{F}(\varphi)\cap A\supset\mathrm{F}(\varphi\cap A) \quad \text{olur.}$$

ii. $V=\{E : E\cap A\in\mathrm{F}(\varphi\cap A),\ E\in\mathrm{F}(\varphi)\}$ olsun. V bir σ -halka ve $V\supset\varphi$ olur.

$V \supset \mathrm{F}(\varphi)$ olduğundan $\forall E \in \mathrm{F}(\varphi)$ için

$$E \cap A \in \mathrm{F}(\varphi \cap A) \qquad \text{olur.}$$

Buradan,

$$\mathrm{F}(\varphi) \cap A \subset \mathrm{F}(\varphi \cap A) \quad \text{bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$\mathrm{F}(\varphi) \cap A = \mathrm{F}(\varphi \cap A) \qquad \text{elde edilir.}$$

Örnek 2.1.1.34: B reel doğru üzerinde bir borel cebiri olsun. $\mathrm{B} \cap [0,1]$ birim aralık üzerindeki borel cebiri olarak adlandırılır. Bu, [0,1] deki tüm aralıkların sınıfı tarafından üretilen σ -halkadır.

Teorem 2.1.1.35: Eğer R bir halka ise $M(R) = \mathrm{F}(R)$ olur.

Sonuç 2.1.1.36: Bir halkayı kapsayan monoton sınıf, bu halkanın ürettiği σ -halkayı da kapsar.

2.1.2 Bulanık Kümeler

1965 yılına kadar matematikte, incelenen konuların (olayların) daha önce saptanmış olan kurallara kesin olarak uyup uymadığı incelenmiştir. Bu incelemeler de her zaman kendimize göre bir kesinlik aranmıştır. Araç olarak, düşünce sistemimizde, iki değerli mantık kullanılmıştır. Örneğin bir önerme için, daha önce saptanan kurallara uyuyorsa doğru, uymuyorsa yanlış denilmiştir. Buna karşın yaşadığımız evrende birçok olay vardır ki, bunlarla ilgili önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu ayırt etmek çoğu kez bizi güç durumda bırakabilir. Başka bir deyişle bizi yanılgıya düşürebilir. Örneğin elinizdeki armutun bir parçasını ısırın ve şu soruyu sorun;"elimdeki nedir?" yanıt "armut" olacaktır. Bir parça daha alın ve yine aynı soruyu sorun. Yanıtınız belki yine "armut" olacaktır ama içinizden bu yanıtı biraz daha açmak geçecektir. Örneğin, "biraz yenmiş bir armut" gibi. Isırmaya ve soruyu sormaya devam edin. Öyle bir an gelecektir ki, elinizde tuttuğunuz, her neye benziyor ise, artık sadece "armut" sözcüğü ile açıklanamayacaktır. Yemeye devam edin. Sonunda armut yok olacak ve sorunun yanıtı da "hiçbir şey" olacaktır. Şimdi sorunuzu değiştirin, "armut ne zaman armut olmaktan çıktı? ". Bu soruya bir yanıt bulamayacaksınız. Burada verilen örnek, bulanık mantığın mantığını anlatan çok güzel bir örnektir.

Soruda, "ne zaman" sözcüğü, içerisinde bir kesinlik taşımaktadır. Yani yanıtın "5.ısırıktan sonra", ya da "armut yemeye başladıktan 5 dk. sonra" gibi, kesin bir şekilde ifade beklenmektedir.

Bulanık mantık, " armutun, armut değile geçişi" bir derece meselesi olarak algılar, klasik mantık (Aristo mantığı) ise, kesin bir an ister [1].

Bu gözlemler ve çeşitli araştırmacılar, iki değerli mantığa dayanan bugünkü matematiğin kesinlik göstermeyen birçok olayları tam olarak açıklayamayacağı düşüncesini doğurmuştur. Bu durumu ilk kez 1965 yılında Zadeh yayınladığı "Bulanık Sets" [15] , adlı makalesiyle ortaya koydu ve bulanık küme (Bulanık set) kavramını tanıttı. Zadeh daha sonra bulanık kümelerle ilgili birçok çalışma yaptı .[16-18].

2.1.3 Bulanık Küme Kavramı

Şimdiye kadar, bir kümenin belirtilmesini bu kümenin iyi tanımlanmış olması koşuluna bağladık. Başka bir deyişle, A kümesinin tanımlı olması için evrensel kümeden seçtiğimiz bir X elemanı A kümesinin elemanı mıdır? Sorusuna kesinlikle evet ya da hayır dememiz gerekirdi. Bunu $X \neq \varnothing$ bir küme olmak üzere, A kümesinin

$$\forall x \in X \;\; için \;\; \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

ile tanımlı $\mu_A : X \to \{0,1\}$ üyelik fonksiyonu ile ifade ediyorduk [8]. Zadeh'in [15] de ortaya koyduğu aşağıdaki tanıma göre $0 \le r \le 1$ olmak üzere $x \in X$ elemanı, A kümesinin üyelik derecesi r olan bir elemanı olmaktadır [12,13].

Tanım 2.1.3.1: $X = \{x : x \in X\}$ kümesi verilmiş olsun. $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \in [0,1]$ olmak üzere

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

kümesine X in A *bulanık kümesi* denir. μ_A fonksiyonuna A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu, $\mu_A(x)$ değerine x n üyelik derecesi (ya da değeri) ve $\mu_A(x)$ kümesine de A bulanık kümesine ait elemanların üyelik derecelerinin kümesi denir [15].

0 ve 1 sayıları [0,1] aralığının elemanları olduğundan her kümeyi bir bulanık küme olarak düşünebiliriz.

Eğer;

$$\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1$$

ise bulanık kümeye normal denir [9,10,17].

Tanım 2.1.3.2: Eğer her $x \in X$ için $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$ ise $A \subset B$ denir.

Tanım 2.1.3.3: Bulanık kümelerde birleşme işlemi $A \cup B$, " $\vee$ " verilen bulanık kümelerin en büyük işlemi olmak üzere aşağıdaki biçimde tanımlanır;

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \qquad \forall x \in X$$

Tanım 2.1.3.4: Bulanık kümelerde kesişim işlemi, $A \cap B$,” $\wedge$ ” verilen bulanık kümelerin en küçük işlemi olmak üzere aşağıdaki biçimde tanımlanır;

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \qquad \forall x \in X$$

Benzer biçimde eğer $\{A_t : t \in T\}$ bulanık kümelerinin bir sınıfı ise $\cup_{t \in T} A_t$ *ve* $\cap_{t \in T} A$ bulanık kümeleri de aynı üyelik fonksiyonları kullanılarak;

$$\sup_{t \in T} \mu_{A_t}(x) \text{ ve } \inf_{t \in T} \mu_{A_t}(x)$$

ile bulunur [19].

Tanım 2.1.3.5: A bir bulanık küme olsun. A nın tümleyeni $\bar{A}$, aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad \forall x \in X$$

Teorem 2.1.3.6: Bulanık kümelerde birleşim, kesişim ve tümleyen işlemleri aşağıdaki özelliklere sahiptir [2,20] ;

Tek kuvvet $A \cup A = A$

$A \cap A = A$

Değişme $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Tümleme $\bar{\bar{A}} = A$

Yutma $A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

Evrensel ve boş kümede yutma $A \cup X = X$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

Özdeşlik $A \cap X = A$

$A \cup \varnothing = A$

Birleşme $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Dağılma $$B \cap \left(\bigcup_{t \in T} A_t \right) = \bigcup_{t \in T} \left(A_t \cap B \right)$$

$$B \cup \left(\bigcap_{t \in T} A_t \right) = \bigcap_{t \in T} \left(A_t \cup B \right)$$

De Morgan kuralı $$\overline{\left(\bigcup_{t \in T} A_t \right)} = \bigcap_{t \in T} \bar{A}_t$$

$$\overline{\left(\bigcap_{t \in T} A_t \right)} = \bigcup_{t \in T} \bar{A}_t$$

Klasik kümelerde farklı olarak;

$$\mu_{A \cup \bar{A}}(x) \neq \mu_X(x)$$

$$\mu_{A \cap \bar{A}}(x) \neq \mu_{\varnothing}(x)$$

olabilir.

Örnek 2.1.3.7: X={a,b} ve A, B bulanık kümelerin üyelik fonksiyonları için bulanık küme işlemleri aşağıdaki gibi olur;

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0,3 & x = a \\ 0,8 & x = b \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0,9 & x = a \\ 1 & x = b \end{cases}$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \begin{cases} 0,9 & x = a \\ 1 & x = b \end{cases}$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 0,3 & x = a \\ 0,8 & x = b \end{cases}$$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 0,7 & x = a \\ 0,2 & x = b \end{cases}$$

$$\mu_{\bar{B}}(x)=\begin{cases}0,1 & x=a\\ 0 & x=b\end{cases}$$

$$\mu_{A\cup\bar{A}}(x)=\begin{cases}0,7 & x=a\\ 1 & x=b\end{cases}$$

$$\neq \mu_X(x)$$

$$\mu_{A\cap\bar{A}}(x)=\begin{cases}0,3 & x=a\\ 0 & x=b\end{cases}$$

$$\neq \mu_\varnothing(x)$$

Tanım 2.1.3.8: $A\in V(x)$ olsun. $\{x:\mu_A(x)>0\}$ klasik kümesi A *nın desteği* olarak isimlendirilir ve suppA ile gösterilir.

Tanım 2.1.3.9: $A\in V(x)$ olsun. $\forall\alpha\in[0,1]$ için

$$\{x:\mu_A(x)\geq\alpha\} \quad ve \quad \{x:\mu_A(x)>\alpha\}$$

klasik kümelerine α - *kesim* ve *güçlü* α - *kesim* kümeleri denir ve sırasıyla A_α, A_{α^+} ile gösterilir [3].

Tanım 2.1.3.10: $X=(-\infty,\infty)$ olsun. Eğer $\forall\alpha\in(0,1]$ için A_α bir sonlu kapalı aralık ise $A\in V(x)$ bulanık kümesine *bulanık sayı* denir. Eğer A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu $a,b\in R$ ve $b\geq 0$ olmak üzere;

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0 & ,x<a-b \quad veya \quad x>a+b\\ (x-a+b)/b & ,a-b\leq x<a\\ (a+b-x)/b & ,a\leq x<a+b\\ 1 & ,x=a\end{cases}$$

ise A ya *üçgensel bulanık sayı* denir [5].

Her üçgensel bulanık sayı bir bulanık sayı, her reel sayı özel bir üçgensel bulanık sayı ve buradan her reel sayı aynı zamanda bulanık sayıdır.

Tanım 2.1.3.11: $X=(-\infty,\infty)$ olsun. Eğer $\forall x_1,x_2,x_3\in X$ için $x_1\le x_2\le x_3$

$$\mu_A(x_2)=\mu_A(x_1)\wedge\mu_A(x_3)$$

ise $A\in V(x)$ bulanık kümesine *konveks* denir [2].

Teorem 2.1.3.12: Her bulanık sayı $(-\infty,\infty)$ un konveks bulanık alt kümesidir ve bunların üyelik fonksiyonları üstten yarı süreklidir.

Tanım 2.1.3.13: A, B bulanık sayılar olsun. Bu durumda $A+B,\ A-B,\ A.B,\ A/B$ aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mu_{A+B}(z)=\sup_{x+y=z}\left[\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)\right]$$

$$\mu_{A-B}(z)=\sup_{x-y=z}\left[\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)\right]$$

$$\mu_{A.B}(z)=\sup_{x.y=z}\left[\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)\right]$$

$$\mu_{A/B}(z)=\sup_{\frac{x}{y}=z,\,y\neq 0}\left[\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)\right]$$

BÖLÜM 3

3.1. HALKALAR VE MODÜLLER

Tanım 3.1.1: $R \neq \emptyset$ üzerinde tanımlı ikili işlem olsun. Genellikle bu işlemler toplama ve çarpma sembolü ile gösterilir. Aşağıdaki şartları sağlayan $(R,+,\cdot)$ 'ya bir halka denir.

1) $(R,+)$ bir değişmeli gruptur.

2) $\forall\ a,b \in R$ için $ab \in R$ ‘dir.

3) $\forall\ a,b,c \in R$ için $a(bc) = (ab)c$ ‘dir.

4) $\forall\ a,b,c \in R$ için $(a+b)c = ac + bc$

$$a(b+c) = ab + ac \text{ ‘dir.}$$

Eğer $\forall\ ab \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa R 'ye değişmeli halka denir.

$\forall\ a \in R$ için $I_R \cdot a = a \cdot I_R = a$ oluyorsa R 'ye birim elemanlı halka denir.

Tanım 3.1.2: R bir halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun.

1) $\forall x, y \in I$ için $x - y \in I$

2) $\forall r \in R$ ve $x \in I$ için $xr \in I$ ve $rx \in I$ şartlarını sağlayan I kümesine R 'nin bir ideali denir ve $I \lhd R$ ile gösterilir. Sadece $xr \in I$ oluyorsa I 'ya sağ ideal, $rx \in I$ oluyorsa I 'ya sol ideal denir.

Tanım 3.1.3: R bir halka ve $X \subseteq R$ olsun.

$$\{I_i : \forall i \in I,\ I_i \lhd R \ ve\ X \subseteq I_i\}$$

idealler ailesi olsun. O zaman $\bigcap_{i \in I} I_i$ ‘ye X kümesi tarafından üretilen ideal denir ve

(X) ile gösterilir. X ’in elemanlarına (X) idealinin üreteçleri denir.

$X=\{x_1,...,x_n\}$ ise $(X)=(x_1,...,x_n)$ ile gösterilir ve (X) idealine sonlu üretilmiştir denir.

Tek bir eleman tarafından üretilen ideale temel ideal denir.

Tanım 3.1.4: R bir halka ve $P\neq R$ olacak şekilde $P\lhd R$ olsun. $\forall a\,,b\ \in R$ idealleri için;

$a\,,b\in P\Rightarrow a\in P$ veya $b\in P$ oluyorsa P ’ye bir asal ideal denir.

Tanım 3.1.5: R bir halka ve $M\neq R$ olacak şekilde $M\lhd R$ olsun. $M\subseteq N\subseteq R$ olacak şekilde her $N\lhd R$ ideali için $M=N$ veya $N=R$ oluyorsa M ’ye R ’nin bir maksimal ideali denir.

Tanım 3.1.6: R değişmeli bir halka, M değişmeli bir grup olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan M ‘ye R -modül denir.

$\cdot: R\times M\to M$

i) $\forall\ r\in R\ ,\ m,m'\in M$ için $r(m+m')=rm+rm'$

ii) $\forall\ r,r'\in R\ ,\ m\in M$ için $(r+r')m=rm+r'm$

iii) $\forall\ r,r'\in R\ ,\ m\in M$ için $(r.r')m=r(r'm)$

iv) $\forall\ m\in M$ için $1_R m=m$

Örnek 3.1.7: Bir K cismi üzerinde modül, K üzerinde bir vektör uzayıdır.

Örnek 3.1.8:

1- Her değişmeli halka, tamsayılar halkası üzerinde bir Z -modül olarak düşünülebilir. G değişmeli halka olsun.

$\mu: Z\times G\to G$

$(n,g)\to\mu(n,g)=ng=g+g+..........+g\ ,\ g\in G,\ \ n\in Z$

modül yapısı vardır.

2- R değişmeli halka, $I \lhd R$

i) R ’ nin kendisi R-modüldür.

ii) I , R modüldür.

iii) R/I bölüm halkası bir R-modüldür. (R/I bir doğal değişmeli grup yapısına sahiptir. $r \in R$ ve R/I içinde $s, s' \in R$ $s+I = s'+I$

$\Rightarrow s-s' \in I \Rightarrow rs-rs' = r(s-s') \in I \Rightarrow rs+I = rs'I$

$$\begin{aligned} R \times R/I &\to R/I \\ (r, s+I) &\to rs+I \end{aligned} \quad R\text{-modül yapısı vardır.}$$

3- R değişmeli halka ve $f: R \to S$ halka homomorfizması yapısı ile S bir R cebir olsun. O zaman S bir R-modüldür ve

$$\begin{aligned} R \times S &\to S \\ (r, s) &\to f(r)s \end{aligned}$$

yapısı kurulur.

4- R, S değişmeli halka ve $f: R \to S$ halka homomorfizması olsun. Eğer G , S-modül ise G aynı zamanda R-modüldür.

$$\begin{aligned} R \times G &\to G \\ (r, g) &\to f(r)g \end{aligned}$$

Tanım 3.1.9: M R-modül ve $G \subseteq M$ olsun. G R-modül ise G ’ye M ’nin alt modülü denir.

Önerme 3.1.10: R değişmeli halka ve G, M R-modülünün bir altkümesi olsun. O zaman G, M ‘nin alt modülüdür. $\Leftrightarrow \forall g_1, g_2 \in G$ $\forall r \in R$ için $g_1 + g_2 \in G$ ve $rg \in G$ ‘dir.

Önerme 3.1.11: M ’nin alt modüllerinin boş olmayan herhangi bir ailesinin kesişimi yine bir alt modüldür.

R değişmeli halka, M R-modül, $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ M ’nin alt modüllerinin bir ailesi olsun.

$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ tarafından üretilen M 'nin alt modüllerinin toplamını $\sum_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ ile göstereceğiz. $\Lambda=\varnothing$ ise $\sum_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda = 0$ 'dır.

i) $\sum_{i=1}^{n} G_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} g_i : \ g_i \in G_i \quad \text{için} \quad i=1,.......n \right\}$

ii) $j_1, j_2, ..., j_n \in M$ olsun. $j_1, j_2, ..., j_n$ tarafından üretilen M 'nin alt modülü $Rj_1 + Rj_2 + ... + Rj_n$ 'dır.

Tanım 3.1.12: R değişmeli halka, M R-modül, I , $J \lhd R$ ve IM , M 'nin alt modülü olsun.

IM , $\{rg \ : \ \mathrm{r} \in I, \ \ \mathrm{g} \in M\}$ kümesi tarafından üretilir. Aşağıdaki özelliklere sahiptir;

i) $IM = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i g_i : r_i \in I, g_i \in M, n \in IN \right\}$

ii) $I(JM) = (IJ)M$

iii) $a \in R$ için $(Ra)M$ 'nin yerine aM yazılır.

$$(Ra)M = \{am \ : \ m \in M\}$$

Tanım 3.1.13: R değişmeli halka, M R-modül, G M 'nin alt modülü $I \lhd R$ olsun. O zaman $(G :_m I)$, $\{m \in M \ : \forall r \in I \ için \ rm \in G\}$ M 'nin alt modülü ve $G \subseteq (G :_m I)$ dir.

Eğer $G = 0 \Rightarrow (0 :_m I) = \{ \ m \in M : \forall r \in I \ için \ rm = 0\}$ 'dır.

Önerme 3.1.14: R değişmeli halka, M R-modül, G M 'nin alt modülü $(G_\theta)_{\theta\in\theta}$ M 'nin alt modüllerinin bir ailesi, $K, I, J \lhd R$, $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ R'nin ideallerinin bir ailesi olsun.

i) $((G :_m J) :_m K) = (G :_m JK) = ((G :_m K) :_m J)$

ii) $(\bigcap_{\theta\in\theta} G_\theta :_m I) = \bigcap_{\theta\in\theta}(G_\theta :_m I)$

ii) $(G :_m \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(G :_m I_\lambda)$

Tanım 3.1.15: R değişmeli halka, M R-modül ve G, M nin bir alt modülü olsun. (G, M toplamsal değişmeli grubunun bir alt grubudur.) $M/G = \{m+G : m \in M\}$ bölüm grubunu oluşturabiliriz.

$m+G = m'+G \Leftrightarrow m-m' \in G$

$\forall$ $m, x \in G$ için $(m+G)+(x+G) = (m+x)+G$

Böylece $\begin{array}{l} R \times M/G \to M/G \\ (r, m+G) \to rm+G \end{array}$

M/G değişmeli grubu bir R-modüldür. Bu M, R-modüle M 'nin bölüm modülü denir ve M/G ile gösterilir.

Önerme 3.1.16: R değişmeli halka, M R-modül ve G, M 'nin bir alt modülü

i) G', M 'nin alt modülü yani $G' \supseteq G$ ise G'/G , M/G 'nin bir alt modülüdür.

ii) M/G 'nin herhangi bir alt modülü $G'' \supset G$ gibi M 'nin G'' bir alt modülü için G''/G şeklindedir.

iii) G_1, G_2 G 'yi içeren M 'nin alt modülleri

$G_1 \subseteq G_2 \Leftrightarrow G_1/G \subseteq G_2/G$

Tanım 3.1.17: M, N R değişmeli halkası üzerinde modüller olsun. $f : M \to N$ dönüşümü

$\forall$ $m, m' \in M$ için $f(m+m') = f(m) + f(m')$

$\forall$ $m \in M$ ve $r \in R$ için $f(rm) = rf(m)$

şartlarını sağlıyorsa bu dönüşüme R -modül homomorfizması denir. $Z : M \to N$ dönüşümü her $m \in M$ için $Z(m) = 0_N$ tanımlanarak bir R -modül homomorfizmasıdır ve buna sıfır homomorfizma denir ve 0 ile gösterilir.

Tanım 3.1.18: $f : M \to N$ birebir ve örten bir modül homomorfizması ise bu homomorfizmaya bir izomorfizma denir ve $M \cong N$ ile gösterilir.

Önerme 3.1.19: R değişmeli halka M, N R -modül ve $f : M \to N$ bir izomorfizma olsun. O zaman $f^{-1} : N \to M$ de aynı zamanda bir izomorfizmadır ve $M \cong N$ ile gösterilir.

Önerme 3.1.20: $f : M \to N$, $g : N \to G$ R-modül homomorfizmaları ve gof de R -modül homomorfizmasıdır.

$f : M \to N$, $g : N \to G$ R -modül izomorfizması ise gof de R -modül izomorfizmasıdır.

Tanım 3.1.21: M R değişmeli halkası üzerinde modül ve G, M **'**nin alt modülü olsun. Her $m \in M$ için $m \to f(m) = m + G$ olarak tanımlanan $f : M \to M/G$ dönüşümü doğal (kanonik) homomorfizma diye adlandırılır ve f örtendir.

Tanım 3.1.22: R değişmeli halka, M R-modül olsun.

i) N R -modül ve $f : M \to N$ R -modül homomorfizması ise f 'nin çekirdeği $Çekf = \{m \in M \ : \ f(m) = 0_N\}$ ile gösterilir. $Çekf$, M 'nin bir alt modülüdür. $Çekf = 0 \Leftrightarrow f$ monomorfizmadır. f 'nin görüntüsü $\operatorname{Im} f$ ile gösterilir ve $f(M) = \{ f(m) \ : \ m \in M\}$ kümesi N ‘nin alt kümesidir. $\operatorname{Im} f$ N 'nin alt modülüdür.

ii) $f : M \to M/G$, $Çekf = G$ ve $M/0 \cong M$ ‘dır.

iii) $H \subseteq M$ alt kümesi M **'**nin bir alt modülüdür. $\Leftrightarrow$ $Çekf = H$ olacak şekilde

$f : M \to M'$ homomorfizması vardır .

($\Leftrightarrow \exists f : M \to M'$ homomorfizma $Çekf = H$ dır.)

Teorem 3.1.23: R değişmeli halka M, N R-modül ve $f: M \to N$ R-modül homomorfizması olsun. O zaman f $\forall$ $m \in M$ için $\overline{f}(m + Çekf) = f(m)$ olacak şekilde $\overline{f}: M/Çekf \to \operatorname{Im} f$ izomorfizması vardır. $\left(M/Çekf \cong \operatorname{Im} f\right)$

BÖLÜM 4

4.1.BULANIK SONLU ÜRETEÇLİ MODÜLLER

4.1.1. Bulanık Modül Kategorisi

R bir halka ve M bir sol (veya sağ) R-modül olsun. Burada Negoita ve Ralescu [21] tarafından üretilen bulanık modül yapısını inceleyeceğiz.

$\mathcal{X}: M \longrightarrow [0,1]$ tanımlı ve aşağıdaki şartları sağlarsa $(M, \mathcal{X})$ cebirsel yapısına bulanık sol R-modül denir.

1-$\forall$ a, b $\in M$ için $\mathcal{X}(a+b) \geq min\{\mathcal{X}$ (a), $\mathcal{X}$ (b)$\}$

2-$\forall$ a $\in M$ için $\mathcal{X}$ (-a) = $\mathcal{X}$ (a)

3- $\mathcal{X}$ (0)=1

4-$\forall$ a $\in M$, r $\in R$ için $\mathcal{X}$ (r a) $\geq \mathcal{X}$ (a)

Kısaca bu yapı $\mathcal{X}_M$ ile gösterilir.

Bulanık küme kategorisi 1967 de Goguen [21] tarafından tanımlanmasına rağmen bulanık modül kategorisini tanımlamak hala güncelliğini korumaktadır.

Tanım 4.1.1.1: $\mathcal{X}_M, \eta_N$ bulanık bir sol R- modüller olsunlar. Aşağıdaki şartları sağlayan $\tilde{f} : \mathcal{X}_M \longrightarrow \eta_N$ dönüşümüne bulanık R-modül homomorfizmaması denir.

1-f:$M \longrightarrow N$ bir R-modül homomorfizmasıdır.

2- η (f(a)) $\geq \mathcal{X}$ (a) $\forall$ a $\in M$

Yardımcı Teorem 4.1.1.2: Hom($\mathcal{X}_M$,η_N), $\mathcal{X}_M$ den η_N ye giden bütün bulanık R-modül homomorfizmasının bir kümesi olsun. O zaman Hom($\mathcal{X}_{M,}\eta_N$) toplamsal bir gruptur. Ayrıca R-değişmeli ise Hom($\mathcal{X}_M, \eta_N$)üzerinde bir bulanık sol R-modül yapısı kurulabilir.

İspat: İlk olarak

$\forall$a$\in M$ için

$$\eta\,(0(\mathrm{a})) = \eta\,(0) = 1 \geq \mathcal{X}\,(\mathrm{a})$$

olduğundan

$$\tilde{0}\colon \mathcal{X}_M \longrightarrow \eta_N$$

bulanık R-modül homomorfizması vardır.

$\tilde{f}$, $\tilde{g} \in$ Hom($\mathcal{X}_M, \eta_N$) için

$$\eta((f\text{+g})) = \eta\,(f(a) + \mathrm{g}(a)) \geq min\{\eta(f(\mathrm{a})),\ \eta(\mathrm{g}(\mathrm{a}))\} \geq \{\mathcal{X}(a), \mathcal{X}(\mathrm{a})\} = \mathcal{X}\,(\mathrm{a})$$

($\forall\, a \in M$) için

olduğundan $\tilde{f}+\tilde{g} = \widetilde{f+g} \in$ Hom($\mathcal{X}_M, \eta_n$) olarak tanımlayabiliriz. Toplama işlemi değişme ve birleşme özelliğini sağlar. Ayrıca $\forall \tilde{f} \in$ Hom($\mathcal{X}_M, \eta_N$) için $-\tilde{f} = \widetilde{-f}$ olarak tanımlanır. Tanıma uygun olarak

$\forall$ a$\in M$ için

$$\eta\,(\,(-f\,)(\mathrm{a})) = \eta\,(-f\,(\mathrm{a})\,) = \eta\,(\,f\,(\mathrm{a})\,) \geq \mathcal{X}\,(\mathrm{a})$$

bulunur.

$\tilde{f}+\tilde{0}=\tilde{0}+\tilde{f}$ ve $\tilde{f}+\widetilde{-f} = \widetilde{-f} + \tilde{f} = \tilde{0}$ olup Hom($\mathcal{X}_M, \eta_N$) nin birim elemanı $\tilde{0}$ ve her elemanının tersi vardır. O halde Hom($\mathcal{X}_M, \eta_N$) bir toplamsal gruptur.

Şimdi de Hom($\mathcal{X}_M, \eta_N$) üzerinde bir bulanık sol R-modül yapısı kuralım.

$$\mu\colon R \times \mathrm{Hom}(\mathcal{X}_M, \eta_N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{X}_M, \eta_N)$$

$$(\mathrm{r}, \tilde{f}) \longrightarrow (\mathrm{r}\,\tilde{f})(\mathrm{a}) = \tilde{f}(\,\mathrm{r}\,\mathrm{a}\,)\ (\forall a \in M\,)$$

olarak tanımlansın. a⟶f(r a) M den N ye tanımlanan bir R- modül homomorfizması olduğu ve

$$\eta((r\,\tilde{f})(a)) = \eta(\tilde{f}(r\,a)) \geq \mathcal{X}(r\,a) \geq \mathcal{X}(a)$$

olduğu için r$\tilde{f}$ ∈ Hom($\mathcal{X}_M$,η_N) elde edilir.

R nin değişmeli olduğunu varsayalım. O zaman

$(r(\tilde{f}+\tilde{g}))(a) = (r\,\widetilde{f+g})(a) = \widetilde{f+g}\,(ra) = (\tilde{f}+\tilde{g})(ra) = \tilde{f}(ra)+\tilde{g}(ra)$

$$= (r\,\tilde{f})(a)+(r\,\tilde{g})(a) = (r\,\tilde{f}+r\,\tilde{g})(a)$$

$((r_1+r_2)\tilde{f})(a) = \tilde{f}((r_1+r_2)(a)) = \tilde{f}(r_1a+r_2a) = \tilde{f}(r_1a)+\tilde{f}(r_2a)$

$$= (r_1\tilde{f})(a)+(r_2\tilde{f})(a)$$

$$= (r_1\tilde{f}+r_2\tilde{f})(a),$$

$((r_1r_2)\tilde{f})(a) = \tilde{f}((r_1r_2))(a) = \tilde{f}(r_2(r_1a)) = (r_2\tilde{f})(r_1a) = (r_1(r_2\tilde{f}))(a),$

$1\tilde{f}(a) = \tilde{f}(1a) = \tilde{f}(a)$

Böylece $r(\tilde{f}+\tilde{g}) = r\tilde{f}+r\tilde{g}$, $(r_1+r_2)\tilde{f} = r_1\tilde{f}+r_2\tilde{f}$,$(r_1r_2)\tilde{f} = r_1(r_2\tilde{f})$, $1\tilde{f} = \tilde{f}$ Hom($\mathcal{X}_{M,}\eta_N$) bulanık bir sol R-modül olur.

Şimdi de

$$\mathcal{X}_M \xrightarrow{\tilde{f}} \eta_N \xrightarrow{\tilde{g}} \rho_S$$

verilsin .

∀a ∈ M için

$$\rho((g\,f)(a)) = \rho(g(f(a))) \geq \eta(f(a)) \geq \mathcal{X}(a)$$

olduğundan $\tilde{g}$ o $\tilde{f} = \widetilde{gf}$ bileşke işlemi tanımlanabilir. Ayrıca bulanık modüller homomorfizmalarının içinde

$$(\tilde{h}\,\tilde{g})\,\tilde{f} = \tilde{h}\,(\tilde{g}\tilde{f})$$

dir.

$$\mathcal{X}_M \xrightarrow{\tilde{f}} \eta_N \xrightarrow{\tilde{g}} \rho_S \xrightarrow{\tilde{h}} \emptyset_P$$

için

$$\tilde{f}\,\widetilde{1_M} = \tilde{f} \quad (\tilde{f} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{X}_M, \eta_N)),$$

$$\widetilde{1_M}\tilde{g} = \tilde{g} \quad (\tilde{g} \in \mathrm{Hom}(\rho_S, \mathcal{X}_M))$$

olacak şekilde

$$\widetilde{1_M} : \mathcal{X}_M \longrightarrow \mathcal{X}_M$$

bulanık birim *R*-dönüşümü vardır.

Tanım 4.1.1.3: $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{X}_M, \eta_P)$ olsun. $\tilde{f}\,\tilde{g} = \widetilde{1_P}$ olacak şekilde $\tilde{g} \in \mathrm{Hom}(\eta_P, \mathcal{X}_M)$ varsa $\tilde{f}$ bulanık *R*-modül homomorfizmasına bulanık split homomorfizması denir.

Teorem 4.1.1.4 : $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{X}_M, \eta_P)$ olsun. O zaman $\tilde{f}$ bulanık splittir ancak ve ancak $\forall$ y$\in$ P için

$$\eta(y) = max\{(\mathcal{X}(x) | x \in f^{-1}(y)\}$$

İspat:

$\Longrightarrow$) $\tilde{f}$ bulanık split olsun. O zaman $\tilde{f}\tilde{g} = \widetilde{1_P}$ olacak şekilde $\tilde{g} \in \mathrm{Hom}(\eta_P, \mathcal{X}_M)$ vardır.

$\forall y \in P$ *için*

$$\eta(y) = \eta(f\,g(y)) \geq \mathcal{X}(g(y)) \geq \eta(y)$$

elde edilir. f (g (y)) = y olduğundan g(y)$\in f^{-1}$(y) dir.

Böylece

$$x = g(y) \in f^{-1}(y)$$

için

$$\eta(y) = \mathcal{X}(x)$$

eşitliği bulunur.

Başka bir deyişle $\forall x' \in f^{-1}(y)$ için $f(x')$ = y dir.

Böylece

$$\eta\,(\mathrm{y}) = \eta\,(f(x'))\geq\ \mathcal{X}\,(x')$$

bulunur ve buradan

$$\eta\,(\mathrm{y}) = max\,\{\mathcal{X}(x)|x \in \mathrm{f}^{-1}(y)\}$$

elde edilir.

$\Leftarrow)\forall$ y$\in P$ için

$$\eta\,(\mathrm{y}) = max\{\mathcal{X}(x)|x \in \mathrm{f}^{-1}(y)\}$$

olsun.

$\forall x' \in \mathrm{f}^{-1}(y)$ için $x \in \mathrm{f}^{-1}(y)$ ve

$$\mathcal{X}\,(x)\geq\ \mathcal{X}\,(x')$$

olacak şekilde

$$\mathrm{g}\colon P \longrightarrow M$$

R-modül homomorfizması tanımlansın.

$\forall x\in P$ için

$$f\,(\mathrm{g}\,(\mathrm{y})) = f(x) = \mathrm{y}$$

böylece $f\mathrm{g} = 1$ olur.

Ayrıca

$$\mathcal{X}\,(\mathrm{g}(\mathrm{y})) = \mathcal{X}\,(x) = max\{\mathcal{X}(x')|x' \in \mathrm{f}^{-1}(y)\} = \eta\,(\mathrm{y})$$

olduğundan böylece tanım 1.1 in 2. şartı sağlanır.

Sonuç olarak

$$\tilde{\mathrm{f}}\,\tilde{\mathrm{g}} = \widetilde{1_P}$$

olacak şekilde bir $\tilde{\mathrm{g}} \in \mathrm{Hom}(\eta_P, \mathcal{X}_M)$ bulanık *R*-modül homomorfizması elde edilir. Yani $\tilde{\mathrm{f}}$ bulanık splittir.

Not: P projective R-modül olsun. O zaman η_P ye bulanık projective R-modül denir. $\tilde{f}$ ∈Hom($\mathcal{X}_M$,η_P) olsun. Eğer $\tilde{f}$ bir bulanık split homomorfizma ise o zaman

$$\tilde{f}\,\tilde{g} = \widetilde{1_P}$$

olacak şekilde bir $\tilde{g}$ ∈ Hom(η_P,$\mathcal{X}_M$) bulanık homomorfizması vardır.

Bu durumda

$$f\,g = 1_P$$

dir.

Yani P projective R-modüldür. η_P bulanık projective modül ise $\tilde{f}$ bulanık projective modül ise $\tilde{f}$ bulanık split homomorfizma olmak zorunda değildir. Böyle bir durumda

$$\tilde{f}\,\tilde{g} = \widetilde{1_P}$$

olacak şekilde bir $\tilde{g}$ bulanık homorfizma bulunmayabilir.

4.1.2. Bulanık Sonlu Üreteçli Modüller:

Bulanık R-modüller için

1) Singuler bulanık R-modüller :∀a∈M için $\mathcal{X}$(a) =1

2) Tam bulanık R-modüller :∀a∈M için (a≠0) $\mathcal{X}$ (a) = 0 olarak tanımlanır.

Önerme 4.1.2.1: M sonlu üreteçli bir R-modül olsun.O zaman $\mathcal{X}_M$ singülerdir ancak ve ancak

$$\mathcal{X}\ (m_i) = 1 \ (i = 1\ldots n)$$

olacak şekilde $\{m_i \in M | i = 1 \ldots n\}$ üreteçler kümesi vardır.

İspat:

⟹)Açıktır.

⟸)∀ a∈M olsun. O zaman a=$\sum_{i=1}^{n} r_i\, m_i$ ($r_i \in R$) olsun.

$\mathcal{X}$(a) =$\mathcal{X}(\sum_{i=1}^{n} r_i\, m_i) \geq min\{\mathcal{X}(r_i m_i) | i = 1 \ldots n\} \geq\ min\{\mathcal{X}(m_i) | i = 1 \ldots n\}$=1 olduğundan

$$\mathcal{X}\text{ (a) =1}$$

dir.

Böylece $\mathcal{X}_M$ singüler olur.

Teorem 4.1.2.2: *M R*-modül ve $\mathcal{X}_M$ sonlu üreteçli bulanık R-modül olsun. O zaman

$$\mathcal{X}\ (m_1) = \mathcal{X}\ (m_2) = \ldots = \mathcal{X}\ (m_n) = min\{\mathcal{X}(a)|a \in M\}$$

olacak şekilde *M* nin

$$\{m_1, \ldots, m_n\}$$

üreteçlerinin kümesi vardır.

İspat: M nin $\{b_i|i = 1 \ldots n\}$ şeklinde keyfi bir grup elemanı alalım. Herhangi bir a∈M için a= $\sum_{i=1}^{n} r_i\, b_i$ (r_i∈R: i= 1…n)

$$\mathcal{X}\text{ (a)} = \mathcal{X}\ (\textstyle\sum_{i=1}^{n} r_i\, b_i) \geq\ min\{\mathcal{X}(r_i b_i)|i = 1 \ldots n\}$$

$$\geq min\{\mathcal{X}(b_i)|i = 1 \ldots n\}$$

olur.

Kabul edelim ki

$$min\{\mathcal{X}(b_i)|i = 1 \ldots n\} = \mathcal{X}(b_1)$$

olsun.

Böylece

$$\mathcal{X}(b_1) = min\{\mathcal{X}(a)|a \in M\}$$

buradanda m_1= b_1 olur.

$$\mathcal{X}(b_2) = \mathcal{X}(b_1)$$

ise buda gösterir ki

$$b_2 = m_2$$

dir.

$$\mathcal{X}(b_2) > \mathcal{X}(b_1)$$

ise

a=$\sum_{i=1}^{n} r_i\, b_i \in M$ için ($r_i \in R$, i=1…n)

$$a = (r_1 - r_2)b_{1+}r_2(b_1 + b_2) + r_3b_3 + \cdots + r_nb_n$$

buradan *M* nin elemanlarının grubu

$b_1, b_1 + b_2, b_3, \dots, b_n$ dir.

$\mathcal{X}\ (b_1) = \mathcal{X}[(b_1 + b_2) + (-b_2)] \geq min\{\mathcal{X}(b_1 + b_2), \mathcal{X}(-b_2)\}$

$$\geq\ min\{\mathcal{X}(b_1 + b_2), \mathcal{X}(b_2)\}$$

$$\mathcal{X}\ (b_1) < \mathcal{X}(b_2)$$

olduğundan

$$\mathcal{X}\ (b_1) = \mathcal{X}(b_1 + b_2)$$

dir.

Öyle bir m_2 elemanı vardır ki m_2=$b_1 + b_2$ dir.

$$\mathcal{X}\ (m_1) = \mathcal{X}\ (m_2) = min\{\mathcal{X}(a) | a \in M\}$$

olduğunu gösterir.

Bu metotla $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ elemanlarının kümesini elde edebiliriz ve bunların arasında ki ilişki

$\mathcal{X}\ (m_1) = \mathcal{X}\ (m_2) = \ldots = \mathcal{X}\ (m_n) = min\{\mathcal{X}(a) | a \in M\}$ dir.

Bu üreteç kümesine *M* nin bulanık minimal homojen üreteçlerinin kümesi denir.

$$\{\mathcal{X}_i | i \in I\}$$

M nin bir bazı olsun.$R_{\mathcal{X}_\text{i}} \cong R$ olmak üzere *M* *R*- modülü serbest modüldür ancak ve ancak $M \oplus R_{\mathcal{X}_\text{i}}$ dir.

Teorem 2.1 ve serbest *R*-modül tanımına göre aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.2.3: $\mathcal{X}_M$ sonlu üretilmiş serbest *R*-modül olsun. O zaman $\mathcal{X}_M$ modülünün

$$\mathcal{X}\ (x_1) = \mathcal{X}\ (x_2) = \mathcal{X}\ (x_3) = \ldots = \mathcal{X}\ (x_n) = min\{\mathcal{X}(a) | a \in M\}$$

olacak şekilde bulanık minimal homojen baz kümesi $\{\mathcal{X}_i | i = 1 \ldots n\}$ kümesi vardır.

4.1.3. Noetherian Modüldeki Bulanık Modüller:

Bu bölümde bulanık modüllerden bulanık noetherian olan modülleri araştıracağız.

Eğer *M* sonlu boyutta vektör uzayı veya sonlu grup ise o zaman $\mathcal{X}_M$ nin sonlu olduğu biliniyor. Bu sonuçlar sırasıyla Laven [22] ve Das [23] tarafından ispat edilmişti.Sonlu üretilmiş bulanık $\mathcal{X}_M$ modülü için sonlu olacak şekilde *M* modüllerini karakterize edeceğiz. Önce serbest modüllerden başlayalım. *R* değişmeli halka olsun. Bir modülün rankı sadece serbest *R*-modüller için tanımlandığı bilinmelidir. Ayrıca bir temel ideal bölgesi ise *f* serbest *R*- Modül ve *A* onun alt modülü ise

$$\text{rank } A < \text{rank } f$$

olduğunu biliyoruz.[24]

Yardımcı Teorem 4.1.3.1: *R* bir temel ideal bölgesi olsun ve $\mathcal{X}_M$ bir bulanık sonlu üretilmiş serbest *R*-modül olsun. O zaman $\mathcal{X}_{M_\lambda}$-formunda bulanık alt modüllerinin sonlu bir zinciri vardır ve bu zincirler arasındaki maksimal zincir tektir.

Not: Herhangi bir $\lambda \in [0,1]$ için

$$\mathcal{X}_{M_\lambda} = \{a \in M | \mathcal{X}(a) \geq \lambda\}$$

dır.

$\mathcal{X}_{M_\lambda}$ burada $\mathcal{X}_M$ nin bir bulanık alt modülüdür.

Buradan

$$\mathcal{X}_{M_0} = \mathcal{X}_M \text{ ve } \mathcal{X}_{M_1} = \{a \in M | \mathcal{X}(a) = 1\}$$

dir.

İspat: İlk olarak

$$\lambda_1 > \lambda_2$$

ise

$$\mathcal{X}_{M_{\lambda_1}} \supseteq \mathcal{X}_{M_{\lambda_2}}$$

dir.

$\lambda \in (0,1)$ olsun.

$$M_\lambda = M_0$$

veya

$$M_\lambda = M_1$$

ise o zaman λ yerine λ_1 kullanılır.

$\forall \lambda \in (0,1)$ için

$$M_\lambda = M_1$$

olduğunda

$$M_\lambda = M_0 = M_1$$

olduğu görülür. Kabul edelim ki bazı a$\in M$ için

$$\mathcal{X}\,(a) = \lambda_1 < 1$$

olsun.

$\lambda_2 = \frac{\lambda_1 + 1}{2} \in (0,1)$ seçersek böylece

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$$

olur.

$$M_{\lambda_1} = M_{\lambda_2}$$

olduğu için a$\in M_{\lambda_1}$ ve a$\in M_{\lambda_2}$ olur.

Buda

$$\mathcal{X}\text{ (a)} = \lambda_1 < \lambda_2$$

gerçeğine çelişki olacak şekilde $\mathcal{X}$(a)$\geq \lambda_2$ olduğunu gösterir.

Böylece

$$M_\lambda = M_0 = M_1$$

dir.

$\mathcal{X}_{M_\lambda}$şeklinde bulanık alt modülerinin her bir zinciri sadece 1 terim içerir.

$\forall\lambda \in(0,1)$ için $M_\lambda = M_0$ olduğundan

$$M_\lambda = M_1 \cup \{a \in M \mid X(a) = 0\}$$

dır.

Bu durum

$$\{a \in M \mid X(a) = 0\} = \emptyset$$

ise

yukarıda ki duruma benzer.

Aksi halde

$$X_{M_1} \subsetneq X_{M_0} = X_M$$

gibi tek bir maksimal zinciri vardır.

Genel olarak

$$X_{M_1} \subsetneq X_{M_\lambda} \subsetneq X_{M_0} = X_M$$

olacak şekilde bazı $\lambda \in (0,1)$ elemanları vardır. (0, λ)ve (λ,1) aralıkların da benzer şekilde işleme devam edebiliriz.

Sonuç olarak

$$X_{M_1} \subsetneq X_{M_{\lambda_P}} \subsetneq \ldots \subsetneq X_{M_{\lambda_2}} \subsetneq X_{M_{\lambda_1}} \subsetneq X_M \ldots\ldots(1)$$

ve

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_p < 1$$

olacak şekilde λ_i (i=1…p) sayı sistemi elde edebiliriz.

Şimdi de

$$n = \text{rank } M$$

ise $p \leq n-1$ olduğunu ispatlayacağız. $p \geq n$ veya $p = \infty$ olduğunu kabul edelim. R bir temel ideal bölgesi olduğundan

$$X_{M_{\lambda_i}} \subsetneq X_{M_{\lambda_{i-1}}}$$

olup

$$\mathrm{rank}M_{\lambda_i} < \mathrm{rank}M_{\lambda_{i-1}}$$

buluruz. n sonlu olduğu için

$$0 \leq \mathrm{rank}M_1 \leq \mathrm{rank}M_{\lambda_p} < \ldots < \mathrm{rank}M_{\lambda_2} < \mathrm{rank}M_{\lambda_1} < \mathrm{rank}M_{\lambda_0} = n$$

ifadesi kesinlikle yanlıştır.

Sonuçta (1) ile gösterdiğimiz bazı maksimal zincirlerin göründüğü açıktır. Bu maksimal zincir aşağıdaki önemli özelliğe sahiptir. Herhangi bir $\lambda \in (0,1)$ için ve λ_i (i=1…n) için X_{M_λ} bu zincirin bazı terimlerine eşittir.

Şimdide X_M nin maksimal zincirleri arasında keyfi bir başka zinciri alalım.

$$X_{M_1} \subsetneq X_{M_{\eta_q}} \subsetneq X_{M_{\eta_q}} \ldots \subsetneq X_{M_{\eta_2}} \subsetneq X_{M_{\eta_1}} \subsetneq X_{M_0} \ldots..(2)$$

$\eta_i = \lambda_j$ ise $\forall X_{M_{\eta_i}}$ modülü için

$$X_{M_{\eta_i}} = X_{M_{\eta_j}}$$

dir.

zinciri maksimal zincir olmasından dolayı $\eta_i \in (\lambda_j, \lambda_{j+1})$ ise

$$X_{M_{\eta_i}} = X_{M_{\eta_j}} \text{ veya } X_{M_{\eta_i}} = X_{M_{\lambda_{j+1}}}$$

dir.

Benzer şekilde

$$\eta_i \in (0,\lambda_1) \text{ ise } X_{M_{\eta_i}} = X_{M_{\lambda_1}}$$

ve

$$\eta_i \in (\lambda_p,1) \text{ ise } X_{M_{\eta_i}} = X_{M_{\lambda_P}}$$

dir.

(2) zinciri (1) zincirinin alt zinciridir. Aynı şekilde (1) zinciri (2) zincirinin alt zinciridir. Böylece tek bir zincir vardır.

Buradan şu görülebilir ki maksimal zincirin t uzunluğu p+2 ye eşittir.
Yani

$$t \leq \text{rank } M + 1$$

dir.

Teorem 4.1.3.2: X_M bulanık sonlu üreteçli serbest R-modül olsun.
O zaman

$$0 < \lambda'_0 < \lambda'_1 < \ldots < \lambda'_p < 1$$

olacak şekilde aşağıdaki özellikleri sağlayan 1 ve $\{\lambda'_j \mid j=0,1\ldots p\}$ şeklinde sadece bir sayı sistemi vardır.

$$X_{M_1} \subsetneq X_{M\lambda'_P} \subsetneq \ldots \subsetneq X_{M\lambda'_2} \subsetneq X_{M\lambda'_1} \subsetneq X_{M\lambda'_0} = X_{M_0} \ \ldots.. \quad (3)$$

zinciri zincir (1) ile çakışır.

$X_{M\lambda'_P} = \{a \in M \mid X(a)=1,\ X(a)=\lambda'_p\}$

$X_{M\lambda'_{p-1}} = \{a \in M \mid X(a)=1,\ X(a)=\lambda'_p,\ X(a)=\lambda'_{p-1}\}$

.

.

.

$X_{M\lambda'_1} = \{a \in M \mid X(a)=1,\ X(a)=\lambda'_p,\ X(a)=\lambda'_{p-1} \ldots X(a) = \lambda'_1,\ X(a)=\lambda'_0\}$

İspat : M serbest olduğundan zincir (1) in her bulanık alt modülü $X_{M_{\lambda_i}}$ bir bulanık serbest modüldür. Sonuç 2.1 den

$$m = \text{rank} M_{\lambda_I}$$

ise $X_{M_{\lambda_i}}$ nin bir bulanık minimal homojen bazı

$$\{X_{i_j} \mid j=1\ldots m\}$$

olsun.

$$\lambda_i^{'} = \mathcal{X}\ (X_{i_1}) = \mathcal{X}\ (X_{i_2}) = \ldots = \mathcal{X}\ (X_{i_M}) = min\{X(\mathrm{a}) \,|\, \mathrm{a} \in M_{\lambda_i}\}$$

olsun.

$$\lambda_i^{'} \geq \lambda_i$$

olduğu açıktır.

Kabul edelim ki

$$\lambda_i^{'} \geq \lambda_{i+1}$$

olsun.

O zaman

$$X_{M_{\lambda_i}} \subsetneq X_{M_{\lambda_{i+1}}} \subsetneq X_{M_{\lambda_i}}$$

dir.

Diğer yönden

a=$\sum_{i=1}^{m} r_j X_{i_j} \in M_{\lambda_i}$($r_i \in R$, j=1…m) için

$$\mathcal{X}\ (\mathrm{a}) = X(\sum_{i=1}^{m} r_j X_{i_j}) \geq min\{X(r_j X_{i_j}) \,|\, j=1\ldots m\}$$

$$\geq min\{X(X_{i_j}) \,|\, j=1\ldots m\} = \lambda_1' \text{ dir.}$$

Böylece a $\in M_{\lambda_1'}$ ve $X_{M_{\lambda_i}'}$ dir. Bu ise bir önceki sonuç ile çelişir.

Böylece $\lambda_i < \lambda_{i+1}$ ve

$$X_{M_{\lambda_i}} \supseteq X_{M_{\lambda_i}'} \supseteq X_{M_{\lambda_{i+1}}}$$

olup

$$X_{M_{\lambda_i}'} = X_{M_{\lambda_i}}$$

dir.

Böylece her λ_i (i=1,2…p) için λ_i nin yerine $\lambda_i^{'}$ seçebiliriz. Benzer şekilde sıfırın yerine

$\lambda_0^{'} \in [0,\lambda_1)$ seçeriz.

Buradan

$$\lambda_0^{'}= min\{X(\mathrm{a})|\mathrm{a}\in M\}$$

olduğu görülür.

Elde edilen zincir (3) zincir (1) ile çakışır.

O halde 1 ve

$$\{\lambda_j^{'}|j=0,1,\ldots,p\}$$

kadar olan bir sayı sistemi vardır. Zincir (3) ün her terimi Teoremin (b) şıkkında ki kısmi gibi açıklanır.

Teorem 4.1.3.3: M bir herhangi halka üstünde bir Noetherian modül olsun. Keyfi bir bulanık modül X_M için sonludur.

İspat : $T_i > 0$ ve

$$1>T_1>\ldots>T_i>\ldots$$

olacak şekilde keyfi bir sonsuz dizi olan T_i alalım.

Böylece

$$M_1 \subsetneq M_{T_1} \subsetneq M_{T_2} \subsetneq\ldots\subsetneq M_{T_i} \subsetneq\ldots$$

olur.

Genelliği bozmaksızın

$$M_1\subsetneq M_{T_1}\subsetneq M_{T_2}\subsetneq\ldots\subsetneq M_{T_i} \subsetneq\ldots$$

verilsin.

Bu M nin alt modüllerinin artan zinciridir. M noetherian olduğu için bu zincir sonlanır ve böylece

$$M_{T_n}=M_{T_{n+1}}\ldots$$

olacak şekilde n tamsayısı vardır.

Böylece sonlu bir zincir

$$M_1 \subsetneq M_{T_1} \subsetneq M_{T_2} \subsetneq \ldots \subsetneq M_{T_{n-1}} \subsetneq M_{T_n}$$

elde ettik.

$$M_{T_n} \neq M_0$$

ise bu zinciri M_0 kadar uzatırız. Daha sonrada X_{M_λ} formunda

$$X_{M_1} \subsetneq X_{M_{T_1}} \subsetneq \ldots \subsetneq M_{T_n} \subsetneq X_{M_0} \ \ldots\ldots(1')$$

bulanık modüllerinin sonlu bir zincirini elde ederiz.

Lemma 3.1 deki benzer bir metot kullanılarak zincir $(1')$ den maksimal zincir elde edilir.

Teorem 4.1.3.4: *R* bir noetherian halka olsun ve *M* sonlu üreteçli *R*-modül olsun. Keyfi bir bulanık modül X_M için $\mathcal{X}$ (*M*) sonludur.

İspat : [7] (Sonuç 4. 7) *M* artan zincir şartını sağlar. Her temel ideal bölgesi Noetherian halkadır. Bu nedenle Teorem 3.1, Teorem 3.3 ün özel bir örneğidir . *M* sonlu üreteçli ise temel ideal bölgesi üzerinde bulanık bir X_M modülü için $\mathcal{X}$ (*M*) sonludur.

BÖLÜM 5

SONUÇ

Bulanık küme kavramı, kesin olarak tanımlanmış ölçülerin olmadığı fiziksel olaylara karşılık geldiği Zadeh tarafından geliştirilmiştir. Günümüzde istatistik, dil bilimi, bilgi işlem konularında faydalı uygulamaları bulunmaktadır. Birçok bilim adamı tarafından halen çalışılmaktadır.

Bu tezde boş olmayan bir X kümesindeki iki bulanık kümenin birleşiminin ve kesişiminin de X kümesinde bir bulanık küme olduğu anlaşılmaktadır.

Bir X kümesindeki bulanık kümelerde birleşim ve kesişim işlemlerinin her birinin diğeri üzerine dağılma özelliklerinin gerçeklendiği anlaşılmaktadır. Bulanık kümelerde birleşim ve kesişiminin, De Morgan özelliklerini gerçeklendiği görülmektedir.

Bulanık bağıntı ve bulanık kartezyen çarpım tanımları görülmektedir. Bir fonksiyon altında bulanık kümelerin görüntüsü ve ters görüntüsü bazı teoremler tespit edilmiş olup bunlar ispatlanmıştır ve gerekli örnekler verilmiştir.

Son bölümlerde ise klasik cebirde önemli bir yere sahip modül teorisinin bulanık değişmeli cebirdeki karşılığının ne olduğunu gösterdik.

KAYNAKLAR

[1] Bart Kosko.,(1993). *Bulanık Thinking: The New Science of Bulanık Logic,* New York: Hyperion.

[2] Baykal N., Timur B..(2004). *Bulanık Mantık İlke ve Temelleri*, Bıçakçılar Kitabevi, Matematik dizisi no:1

[3] Bojadziev G.,ve Bojadziev M.M..(1995). *Bulanık Set, Bulanık Logic Application Application and Theory* Vol.**5**,World Scientific, London

[4] Bozkurt E., Bulanık Logic http://www.turkmekatronik.com/mforum/index php./topic, . 3321msg6207.html#msg6207

[5] Civalek Ö. .(1999). *Dairesel Plakların Nöro-Bulanık Tekniği ile Analizi*, Dokuz Eylül Üni. Mühendislik Fakültesi, Fen ve Mühendislik Dergisi cilt 1 sy:**2**

[6] Dönmez A.,(2001). *Reel Analiz*, Ankara, Seçkin Yayıncılık

[7] Kahyaoğlu S. .(2008). *Bulanık Ölçümler Teorisinde Caratheodory Genişleme Teoremi*, Gaziantep Üni.,Fen Bilimleri Enst.

[8] Klir G.J.,and Floger T.A. .(1998). *Bulanık Set*, Uncertainly and İnformation Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

[9] Kosko B. .(1992). *Neural Networks and Bulanık Systems.,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

[10] Lee C.C.,(Mar/April,1990), *Bulanık Logic in Control Systems: Bulanık Logic Controller*. Parts 1 and 2,IEEE Trans. Syst. Man. Cybernet. **20**, 2, 404–435

[11] Mukherja A., and Pothoven K. .(1984). *Real and Functionaly Analysis Part A. Real Analysis*(2.ed) Universty of Florida: Plenum Press-New York and London

[12] Munakata T.,Jani Y..(1994). *Bulanık Systems*: An Overview,Communications of theACMvol.**37**,No:3

[13] Oberguggenberger M.,(2004). İntroductory remaks: Mathematical models of Uncertainly ZAMM.Z,Angew.Math.Mech.84.No:10–11/ www.zamm-journal.org

[14] Wang Z.and Klir G.J.,(1992). *Bulanık Measure and Theory*, New York, Plenum Press

[15] Zadeh L.A.,(1965). Bulanık Sets, *Information and Control*,8,338-353

[16] Terano T., Asai K.and Sugeno M..(1992). *Bulanık Systems Theory and Its Applications*. Academic Press. San Diego, Calif

[17] Zadeh L.A.,(1968). Probability Measure of Bulanık Events: *J.Math.Anal.Appl*.,23,421-427

[18] Zadeh L.A.,(1971). Quentitave Bulanık Semantics, *Information Sciences*,**3**,159-176

[19] Zadeh L.A.,(1973). Qutline of a new approach to the analysis of complex systems and decision process. *IEEE. Trans. Syst. Man Cybernet SME*–3,28–44

[20] Zimmermann H.J..(1985). *Bulanık Set Theory –and Its Applications*. Kluwer,Boston

[21] C.V. Negoita and D.A. Ralescu..(1975) . Applications of Bulanık sets to systems analysis (Birkhauser, Basel,).

[22] R.Lowen . (1980) . Convex bulanık sets , *Bulanık sets and systems* 3 291-310

[23] P. Sivaramakrishna Das ..(1981). *Bulanık groups and level subgroups*, , J . Math

Anal. Appl. 84

[24] J.J.Rotman .(1978).. An Introductions to Homologicial Algebra (Academic ,Press), New York,

[25] Uluçay V..(2011). *Bulanık Ölçüm Teorisi Üzerinde Tanımlı Bazı Bulanık İntegraller,* Gaziantep Üniv. Fen Bilimleri Enst.

[26] Kesgin E..(2006). *Fuzzy Cebirsel Yapılar,* Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniveristesi Fen Bilimleri Enst.