T.C.

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EULER VE q-EULER POLİNOMLARI VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NURGÜL ASLAN

TEMMUZ 2011

Euler ve q-Euler Polinomları
ve
Yaklaşım Özellikleri

Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Nurgül ASLAN
TEMMUZ 2011

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Euler ve q-Euler Polinomları ve Yaklaşım Özellikleri
Öğrencinin, Adı Soyadı: Nurgül ASLAN
Tez Savunma Tarihi: 21.07.2011

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ramazan KOÇ
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca (tarafımızca) okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyeleri</u>:

	İmza
Prof. Dr. Adil KILIÇ	
Doç. Dr. Ayhan ESİ	
Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ	

ÖZET

EULER VE q-EULER POLİNOMLARI

VE

YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

ASLAN, Nurgül

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Temmuz 2011, 54 sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümü giriş niteliğindedir ve önemli ön bilgileri ayrıntılarıyla anlatmaktadır. Diğer bölümler ise çalışmanın temel bölümlerini içermektedir.

Birinci bölüm, beş ana başlık altında incelenmektedir. Bu bölümde her ana başlıkta analiz için çok önemli olan bilgiler verilmektedir. Özelikle çalışmanın temel yapı taşlarından olan p-adik analiz; son zamanlarda pek çok alanda hızlı gelişmeye sahip olan Quantum calculus; birçok sayıyı ve polinomu inşa etmeye yarayan q-Volkenborn integrali; Euler sayı ve polinomları ile ilişkileri kurulacak olan Bernoulli sayı ve polinomları, Zeta fonksiyonu gibi birtakım sayı, fonksiyon ve polinomlar verilerek önemli teorem ve sonuçlar incelenmektedir.

İkinci bölümde Euler sayı ve polinomları tanımlanarak genelleştirilmektedir. Ayrıca diğer polinom, sayı ve fonksiyonlarla aralarında ilişkiler kurulmaktadır.

Üçüncü bölümde q-Euler sayı ve polinomları inşa edilip önemli sonuçlar verilmektedir.

Dördüncü ve son bölümde ağırlıklı genelleştirilmiş q-Euler sayı ve polinomları tanıtılarak, önemli teorem, sonuç ve ispatlar verilmektedir. Benzer şekilde α ağırlıklı twisted q-Euler polinomlarının q-açılım Zeta tipi fonksiyonlarına yaklaşımları incelenmektedir. Ayrıca çalışma boyunca elde edilen sonuç ve bulgular verilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Bernoulli sayıları, Bernoulli Polinomları, q-Bernoulli sayıları, q-Bernoulli polinomları, Dirichlet karekteri, p-adik q-integral, İkinci Stirling sayıları, Mellin dönüşümü, Riemann Zeta fonksiyonu, q-Euler sayıları, q-Euler polinomları.

ABSTRACT

EULER AND q-EULER POLYNOMIALS AND THEIR APPROXIMATION PROPERTIES

ASLAN, Nurgül
M.Sc. in Maths Department
Supervisor: Assist. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

July 2011, 54 pages

This study consists of four parts. The first section is introduction and detailed description of important advance information. The other sections include the basic parts of the study.

The first chapter is examined under five main headings. Very important information is given in this chapter to analysis each main topic. Especially, important theorems and results are examined by giving the p-adic analysis of the basic building blocks of work; Quantum calculus with the rapid development in many areas recently; q-Volkenborn integral is used to build many numbers and polynomials; Bernoulli numbers and polynomials, some functions such as the Zeta function, some numbers and polyonomials, which has got relations with Euler numbers and polynomials,

The second part is defined and the generalizations of Euler numbers and polynomials. In addition, other polynomials, the numbers and functions are related to each other.

In the third section q-Euler numbers and polynomials are constructed and their important results are given.

In the fourth and final section, the weighted generalized q-Euler numbers and polynomials are introduced and also important theorems, proofs and result are given. Similarly, approaches to q-extension Zeta type functions of α-weighted twisted q-Euler polynomials are examined. In addition, the results and findings gained in the work are given.

Key words: Bernoulli numbers, Bernoulli polynomials, q-Bernoulli numbers, q-Bernoulli polynomials, Dirichlet character, p-adic q-integral, Second kind Stirling numbers, Mellin transform, Riemann Zeta function, Euler numbers, Euler polynomials, q-Euler numbers, q-Euler polynomials.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince, her türlü yardımı ve katkılarını esirgemeyen kıymetli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet Açıkgöz'e, ders aşamasında bilgilerinden yararlandığım bölüm hocalarıma, tez jüri üyelerine, maddi ve manevi desteklerini her zaman arkamda hissettiğim canım aileme ve özellikle desteklerini esirgemeyen diğer arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	:Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}^{+}$	:Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	:Rasyonel sayılar kümesi
C_p	:Devirli grup
T_p	:Yerel sabit uzay
(X,Σ)	:Ölçüm uzayı
μ	:Ölçüm
$ord_p x$	: x in p -adik değeri
$\lvert x\rvert_p$	: x in p -adik normu
$\mathbb{Q}_p$	: p -adik rasyonel sayılar
$\bar{\mathbb{Q}}_p$	: $\mathbb{Q}_p$ nin cebirsel kapanışı
$\mathbb{C}_p$	: $\bar{\mathbb{Q}}_p$ cisminin p -adik norma göre tamlaması
$[r]_q$	: q -integer noktası
$[r]_q!$	: q -faktöriyel
$\chi(a)$	:Dirichlet karakteri
$F(t,z)$	:Üreteç fonksiyonu
B_n	: n -inci Bernoulli sayısı
$B_n(x)$	: n -inci Bernoulli polinomu
$\zeta(s)$	:Riemann zeta fonksiyonu
$\varsigma(s,a)$	:Hurwitz zeta fonksiyonu
$\Gamma(x)$	:Gama fonksiyonu
G_n	:Genocchi sayısı
$S(n,k)$	:İkinci Stirling sayısı
E_n	: n -inci Euler sayısı
$E_n(x)$	: n -inci Euler polinomu
$E_{n,q}$	: n -inci q -Euler sayısı
$E_{n,q}(x)$	: n -inci q -Euler polinomu
$E_{n,\chi,q}$	: χ ya bağlı genelleştirilmiş q -Euler sayıları
$\tilde{E}(\alpha,w\mid q)$	: α ağırlıklı twisted q -Euler sayıları

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1. TEMEL TANIMLAR

Tanım 1.1.1: Doğal sayılar kümesinde tanımlı bir fonksiyona dizi denir. f bir dizi ise her bir n doğal sayısına bir a_n sayısı karşılık geleceğinden f dizisi $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.2: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi verildiğinde $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için her $n \geq N$ iken $|a_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon, a) \in \mathbb{N}$ bulunabilirse $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi a ya yakınsar denir ve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ile gösterilir. $\{a_n\}$ dizisinin bir limiti varsa bu diziye yakınsak dizi, yakınsak olmayan diziye de ıraksak dizi denir.

Tanım 1.1.3: $A \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisi verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ sayısı, $\forall x \in A$ ve her $n \geq N$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ bulunabilirse $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir.

Tanım 1.1.4: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n = b_n$ ise (a_n) ve (b_n) dizileri eşittir denir ve $(a_n) = (b_n)$ ile ifade edilir.

Tanım 1.1.5: $a, r \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(a_n) = (ar^{n-1}) = (a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}, ...)$ dizisine geometrik dizi denir. Geometrik dizinin ilk n terim toplamı $S_n = a\dfrac{1-r^n}{1-r}$ dir.

Tanım 1.1.6: $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n = c$ ise (a_n) dizisine bir sabit dizi denir ve $(a_n) = (c, c, ..., c) = (c)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.7: $a, r \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(a_n) = (a + (n-1)r) = (a, a+r, a+2r, ..., a+(n-1)r, ...)$$

dizisine aritmetik dizi denir. Aritmetik dizinin ilk n terim toplamı

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)r\right]$$

dir.

Tanım 1.1.8: (a_n) dizisinin Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sayısı için

$$n, m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

şartını sağlayan ε a bağlı bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısının var olmasıdır.

Tanım 1.1.9: $(a_n) = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ gibi bir dizi verilmiş olsun. Bu diziden hareketle oluşturulan,

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

toplamına sonsuz seri veya kısaca seri denir.

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

olmak üzere $\{S_n\}$ dizisine $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi denir. $\{S_n\}$ kısmi toplamlar dizisi yakınsak ve $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine yakınsak seri denir. s sayısına serinin toplamı veya limiti denir. Yakınsak olmayan serilere ıraksak seri denir.

Tanım 1.1.10: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + ... + c_k (x-a)^k + ...$

şeklindeki bir seriye kuvvet serisi denir.

$a = 0$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_k x^k + ...$$

elde edilir.

Tanım 1.1.11: f , $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun. Eğer

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti varsa f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilir denir.

Tanım 1.1.12: f fonksiyonu, a noktasını ihtiva eden bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

serisine a noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor serisi adı verilir. Taylor açılımında özel olarak $a = 0$ alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

serisi elde edilir ki bu seriye Maclaurin serisi adı verilir.

Tanım 1.1.13: $a \neq 1$ bir pozitif reel sayı olmak üzere $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x)=a^x$ ile tanımlı fonksiyona üstel fonksiyon denir.

Tanım 1.1.14: Katsayıları tamsayılar olan bir polinomun kökü olarak ifade edilebilen sayılara cebirsel sayı denir.

Tanım 1.1.15: X boş olmayan bir küme olsun ve bir $d: X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu için $\forall x, y, z \in X$ olmak üzere

$M_1)$ $d(x,y) \geq 0$,

$M_2)$ $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$,

$M_3)$ $d(x,y)=d(y,x)$,

$M_4)$ $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$

şartları sağlanıyorsa d ye X de bir metrik denir. (X,d) ikilisine ise metrik uzay denir.

Tanım 1.1.16: X boş olmayan bir küme ve F, reel veya kompleks sayı cismi olsun. Eğer X, F üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X e vektör uzay denir.

i) X, + işlemine göre değişmeli gruptur.

$G_1)$ $\forall x, y, z \in X$ için $x+y \in X$ (kapalılık)

$G_2)$ $\forall x, y, z \in X$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$ (birleşme)

$G_3)$ $\forall x \in X$ için $x+\theta=\theta+x=x$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır.

$G_4)$ $\forall x \in X$ için $x+(-x)=(-x)+x=\theta$ olacak şekilde $(-x) \in X$ vardır.

$G_5)$ $\forall x, y \in X$ için $x+y=y+x$ dir.

ii) $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere

$L_1)$ $\alpha x \in X$,

$L_2)$ $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$,

$L_3)$ $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$,

$L_4)$ $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$,

$L_5)$ $1.x=x$.

Tanım 1.1.17: X bir vektör uzay olsun. $\|.\|: X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonunun x deki değeri $\|x\|$ ile gösterilsin. Bu fonksiyon için

$N_1)$ $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=\theta$,

$N_2)$ $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$ $(\alpha \in F)$,

$N_3)$ $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde norm denir. $(X,\|.\|)$ ikilisine ise normlu uzay denir.

Tanım 1.1.18: X bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için $D(x,r) \subseteq A$ olacak şekilde bir r pozitif sayısı varsa A ya X in açık alt kümesi veya A, X de açıktır denir.

Tanım 1.1.19: X boş olmayan bir küme ve τ, X in alt kümelerinin bir ailesi olsun.

$T_1)$ $X,\varnothing \in \tau$,

$T_2)$ τ ya ait keyfi sayıdaki kümenin birleşimi τ ya aittir,

$T_1)$ τ ya ait iki kümenin kesişimi τ ya aittir,

şartlarını sağlayan τ ya X için bir topoloji ve (X,τ) ikilisine de topolojik uzay denir.

Tanım 1.1.20: X bir metrik uzay olsun. X deki her bir dizi yakınsak bir alt diziye sahip ise X e kompakt denir.

Tanım 1.1.21: $(A,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ ve $(B,\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$ aynı türden iki matematiksel yapı , $f: A\to B$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu $\{1,2,3,...,n\}$ kümesinin her i elemanı için α_i bağıntısını β_i bağıntısına dönüştürüyorsa, f fonksiyonuna homomorfizm denir.

Tanım 1.1.22: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ gibi mutlak yakınsak iki serinin Cauchy çarpımı

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

olarak ifade edilir.

Tanım 1.1.23: $C_{p^n} = \{w \mid w^{p^n} = 1\}$, p^n in devirli grubu olsun. O halde

$$T_p = \lim_{n\to\infty} C_{p^n} = C_{p^\infty} = \bigcup_{n\geq 0} C_{p^n}$$

olarak tanımlı T_p ye yerel sabit uzay denir.

Tanım 1.1.24: X bir küme olsun. X in bir Σ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa

i) $X \in \Sigma$

ii) $\forall A \in \Sigma$ için $E^c = X \setminus E \in \Sigma$

iii) $k = 1,2,...,n$ için $E_k \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \Sigma$

bu Σ sınıfına X üzerinde bir cebir denir. *iii)* yerine $\forall n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$ şartı alınırsa Σ ya σ -cebiri denir. (X,Σ) ikilisine de ölçüm uzayı denir.

Tanım 1.1.25: (X,Σ) bir ölçüm uzayı olsun. Σ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

i) $\mu(\emptyset)=0$,

ii) $\forall A\in\Sigma$ için $\mu(A)\geq 0$,

iii) Her ayrık (A_n) dizisi için

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

koşullarını sağlıyorsa μ ye bir ölçüm denir.

Tanım 1.1.26: (Rezidü Teoremi) C basit kapalı bir eğri ve $z_1,z_2,...,z_n$ de bu çevrenin içinde n tane nokta olsun. f fonksiyonunun bu noktalar hariç C nin içinde ve üzerinde analitik ve tek değerli olduğu kabul edilsin. O zaman

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\sum_{i=0}^{n}\operatorname{Re}s(f,z_i)$$

dır.

Tanım 1.1.27: (Fourier İntegral Teoremi) f bir fonksiyon ve f', f nin türevi olmak üzere

i) f ve f' fonksiyonları x in her kapalı aralığında parçalı süreklidir,

ii) f fonksiyonunun her x noktasında $f(x^+)$ sağ limiti ve $f(x^-)$ sol limiti vardır,

iii) $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<\infty$ ise f, x noktasında süreklidir ve

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos[s(t-x)]dtds \tag{1.1}$$

dir. x, f nin bir süreksizlik noktası ise (1.1) integrali

$$\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]$$

değerine yakınsar.

Tanım 1.1.28: (Mellin Dönüşümü) f ve f' fonksiyonları her kapalı aralıkta parçalı sürekli ve $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|<\infty$ ise f, x noktasında süreklidir ve

$$M\{f(t);f\}=F(s)=\int_0^{\infty} f(t)t^{s-1}dt$$

integraline, $f(x)$ fonksiyonunun Mellin dönüşümü denir.

Tanım 1.1.29: $K\in\mathbb{R}$ için $|t|<K$ bölgesinde

$$F(t,z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)t^n$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa $F(t,z)$ fonksiyonuna $f_n(z)$ fonksiyonunun üreteç fonksiyonu denir.

1.2. p-ADİK ANALİZ

Bu bölümde p-adik analiz ile ilgili temel bilgiler verilerek önemli önermeler ve teoremler incelendi.

Tanım 1.2.1: p herhangi bir asal sayı olmak üzere, $0\neq x\in\mathbb{Z}$ olsun. O halde x in p-adik değeri,

$$ord_p x=\max\{r:p^r\mid x\}\geq 0$$

olarak tanımlanır. Bu tanımdan $ord_p x$ ile ilgili örneklerden bazıları

$$ord_5 5=1,\ ord_5 25=2,\ ord_5 45=1,\ ord_7 21=1$$

şeklinde bulunur.

Rasyonel olarak verilen $\frac{a}{b} \in Q$ için p -adik değer

$$ord_p\left(\frac{a}{b}\right) = ord_p a - ord_p b$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca $ord_p 0 = \infty$ alınır, (Baker 2007).

Önerme 1.2.1: Eğer $x, y \in \mathbb{Q}$ ise ord_p aşağıda verilen özellikleri sağlar;

a) $ord_p x = \infty \Leftrightarrow x = 0$,

b) $ord_p(xy) = ord_p x + ord_p y$,

c) $ord_p(x+y) \geq \min\{ord_p x, ord_p y\}$ ve $ord_p x \neq ord_p y$, (Baker 2007).

Tanım 1.2.2: $x \in \mathbb{Q}$ için x in p -adik değeri verildiğinde p -adik normu;

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-ord_p x} & ; x \neq 0 \\ p^{-\infty} & ; x = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlıdır, (Baker 2007).

Önerme 1.2.2: $|.|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar;

a) $|x|_p\ x = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

b) $|xy|_p\ x = |x|_p |y|_p$,

c) $|x+y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$ ve $|x|_p \neq |y|_p$, (Baker 2007).

p -adik norm ile ilgili bazı örnekler

$$|9|_3 = \frac{1}{9},\ |12|_3 = \frac{1}{3},\ |97|_5 = 1,\ \left|\frac{3}{4}\right|_2 = 4$$

şeklinde verilir.

p -asal sayısı için p-adik norm, $N = |.|_p$ normu ile aşağıdaki gibi donatılır.

Tanım 1.2.3: p bir asal sayı ve $a_i \in \{0,1,...,p-1\}$ olmak üzere $\sum_{i\geq 0} a_i p^i$ şeklinde ifade edilen sayılara p-adik tamsayı denir. Tüm p-adik tamsayıların oluşturduğu halka $\mathbb{Z}_p$ ile gösterilir, (Koblitz 1948, Özden 2009).

p-adik tamsayılar kümesi

$$\mathbb{Z}_p = \left\{\alpha \in \mathbb{Q}_p : |\alpha|_p \leq 1\right\}$$

olarak tanımlıdır, (Baker 2007).

$p\mathbb{Z}_p = \{py : y \in \mathbb{Z}_p\}$ olsun. $p\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p$ nin bir maksimal idealidir. $\mathbb{Z}_p \backslash p\,\mathbb{Z}_p$ cisminin p tane elemanı vardır. Bu elemanlar $p\mathbb{Z}_p, 1+p\mathbb{Z}_p, ..., p-1+p\mathbb{Z}_p$ kosetleridir. $j \in \{0,1,2,...,p-1\}$ olmak üzere

$$j + p\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x-j|_p < 1\} = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x-j|_p < p^{-1}\}$$

dır. O halde

$$p^n\mathbb{Z}_p = \{p^n y : y \in \mathbb{Z}_p, n \in \mathbb{N}\}$$

şeklinde tanımlıdır. Buradan

$$j + p^n\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x-j|_p \leq p^{-n}\}$$

dir. Bu nedenle

$$\mathbb{Z}_p \supset p\mathbb{Z}_p \supset ... \supset p^k\mathbb{Z}_p \supset \bigcap_{k\geq 0} p^k\mathbb{Z}_p = 0$$

olur, (Schikhof 1984, Özden 2009). p-adik birimlerin kümesi ise

$$\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p = 1\}$$

olarak tanımlıdır. Buna denk olarak

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_p^* &= \{x = a_0 + a_1 p + \ldots : 0 \le a_i \le p-1, a_0 \ne 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}_p : x \ne 0 (\mathrm{mod}\, p)\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{Z}_p : \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}_p \right\}\end{aligned}$$

olur, (Koblitz 1948, Schikhof 1984, Özden 2009).

Tanım 1.2.4: p -adik rasyonel sayılar $\mathbb{Q}_p$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ x = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n p^n : 0 \le a_{i \le p-1} \right\}.$$

Burada yeterince büyük n değerleri için $a_{-n} = 0$ olur. Yani $x \in \mathbb{Q}_p$ ise

$$x = \ldots + a_2 p^2 + a_1 p + \frac{a_{-1}}{p} + \ldots + \frac{a_{-k}}{p^k}$$

dır. Özel olarak $a_{-1} = a_{-2} = \ldots = 0$ ise $x \in \mathbb{Z}_p$ dır. $\mathbb{Q}_p$ bir cisimdir. $\mathbb{Q}_p$ nin cebirsel kapanışı $\bar{\mathbb{Q}}_p$ olmak üzere $\mathbb{C}_p$, $\bar{\mathbb{Q}}_p$ cisminin $|.|_p$ norma göre tamlamasıdır, (Koblitz 1948, Schikhof 1984, Özden 2009).

Tanım 1.2.5: Bir (a_n) dizisi için p -adik norma göre

$$\lim_{n \to \infty}{}^{N} a_n = 0$$

ise (a_n) dizisine sıfır dizisi denir, (Baker 2007).

Önerme 1.2.3: (α_n), $\mathbb{Q}_p$ içinde bir Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow$ $(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$ bir sıfır dizisidir, (Baker 2007).

$\mathbb{Q}_p$ üzerinde bir serinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul genel teriminin limitinin sıfır olmasıdır. Bu ise aşağıdaki önerme ile verilir.

Önerme 1.2.4: $\mathbb{Q}_p$ içinde $\sum a_n$ serisi yakınsaktır $\Leftrightarrow$ (a_n) sıfır dizisidir.

İspat : $\sum a_n$ yakınsak ise o zaman Önerme 1.2.3. gereğince (s_n) kısmi toplamlar dizisi Cauchy dizisidir. Buradan

$$s_{n+1} - s_n = a_n$$

bir sıfır dizisidir. Aksine, eğer (a_n) sıfır dizisi ise o zaman Önerme 1.2.3 den (s_n) dizisi Cauchy dizisi olur ve bu nedenle de yakınsaktır, (Baker 2007).

Tanım 1.2.6: $\mathbb{Q}_p$, p-adik tamsayılar halkasının $|.|_p$ p-adik norma göre metrik uzayının tüm açık kümeleri $a \in \mathbb{Q}_p$ ve $N \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$a + p^N \mathbb{Z}_p = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p \leq \frac{1}{p^N} \right\}$$

şeklindeki açık kümelerin birleşimidir. $\mathbb{Q}_p$ nin açık bir altkümesinin kompakt olabilmesi için gerek ve yeter koşul açık alt kümelerin sonlu bileşimi olarak yazılabilmesidir. Bu kümelere kompakt-açık küme denir, (Koblitz 1948, Özden 2009).

Tanım 1.2.7: $a \in X \subset \mathbb{C}_p$ ve $f : X \to \mathbb{C}_p$ şeklinde bir fonksiyon olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır öyle ki eğer $\gamma \in D_x(\alpha, \delta) \Rightarrow f(\gamma) \in D_x(f(\alpha), \delta)$ oluyor ise f, $\alpha \in X$ üzerinde süreklidir denir. Eğer f, X içinde sürekli ise o zaman f, X üzerinde süreklidir denir. Burada $D_x(\alpha, \delta)$ X içinde α merkezli γ yarıçaplı açık bir yuvardır, (Baker 2007).

Tanım 1.2.8: X ve Y iki topolojik uzay ve f, X den Y ye bir dönüşüm olsun. Her $x \in X$ in bir U komşuluğu, $f(U)$, Y nin bir tek elemanı olacak şekilde bulunabilirse f ye yerel olarak sabit fonksiyon denir, (Koblitz 1948, Özden 2009).

Tanım 1.2.9: X, $\mathbb{Q}_p$ nin bir kompakt-açık altkümesi olsun. X üzerinde yerel olarak sabit fonksiyonların $\mathbb{Q}_p$-vektör uzayından $\mathbb{Q}_p$ ye tanımlı bir $\mathbb{Q}_p$-lineer vektör uzayı homomorfizmine bir p-adik dağılım denir. Eğer $f : X \to \mathbb{Q}_p$ yerel olarak sabit ise p-adik μ-dağılımının f deki değeri için $\mu(f)$ yerine $\int f\mu$ yazılacaktır, (Koblitz 1948, Özden 2009).

Teorem 1.2.1: X, $\mathbb{Q}_p$ nin kompakt-açık altkümesi olsun. X in açık alt aralıklarından $\mathbb{Q}_p$ ye tanımlı her μ dönüşümü $a + p^N\mathbb{Z}_p \subset X$ olmak üzere

$$\mu(a + p^N\mathbb{Z}_p) = \sum_{b=0}^{p-1} \mu(a + bp^N + p^{N+1}\mathbb{Z}_p)$$

şartını sağlıyorsa X üzerinde tek bir şekilde p-adik dağılıma genişletilebilir, (Koblitz 1948, Özden 2009).

p-adik Volkenborn integralinde çok önemli rolü olan p-adik Haar dağılımı aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 1.2.10: Haar dağılımı μ_{Haar} olmak üzere

$$\mu_{Haar}(a + p^N\mathbb{Z}_p) = \frac{1}{p^N}$$

olarak tanımlıdır.

μ_{Haar} ın bir p-adik dağılım olduğu aşağıdaki gibi gösterilir. Bir önceki teoremden,

$$\sum_{b=0}^{p-1}\mu_{Haar}(a+bp^N+p^{N+1}\mathbb{Z}_p)=\sum_{b=0}^{p-1}\frac{1}{p^{N+1}}=p\frac{1}{p^{N+1}}$$
$$=\frac{1}{p^N}=\mu_{Haar}(a+p^N\mathbb{Z}_p)$$

elde edilir. O halde μ_{Haar}, $\mathbb{Z}_p$ üzerinde bir p-adik dağılımdır, (Özden 2009).

Her N pozitif tamsayısı ve $q\in\mathbb{C}_p$ ile $|1-q|_p<p^{\frac{-1}{p-1}}$ için

$$\mu_{-q}(a+dp^N\mathbb{Z}_p)=(1+q)\frac{(-1)^a q^a}{1+q^{dp^N}}=\frac{(-q)^a}{\left[dp^N\right]_{-q}}$$

dır ve bu X üzerinde bir dağılıma genişletilir, (Kim 2007b).

Teorem 1.2.2: μ_{-q}, X üzerinde bir dağılımdır.

İspat : μ_{-q} nun dağılım olduğunu göstermek için

$$\sum_{i=0}^{p-1}\mu_{-q}(a+idp^N+dp^{N+1}\mathbb{Z}_p)=\mu_{-q}(a+dp^N\mathbb{Z}_p)$$

olduğu gösterilmelidir. Burada

$$\sum_{i=0}^{p-1}\mu_{-q}(a+idp^N+dp^{N+1}\mathbb{Z}_p)=(1+q)\sum_{i=0}^{p-1}\frac{(-q)^{a+idp^N}}{1+q^{dp^N+1}}$$
$$=(1+q)\sum_{i=0}^{p-1}\frac{(-1)^{a+idp^N}(q)^{a+idp^N}}{1+q^{dp^N+1}}$$
$$=(1+q)\sum_{i=0}^{p-1}\frac{(-1)^a q^a}{1+q^{dp^N+1}}\sum_{i=0}^{p-1}q^{idp^N}(-1)^i$$
$$=(1+q)\frac{(-1)^a q^a}{1+q^{dp^N+1}}.\frac{1+q^{dp^N}}{1+q^{dp^N+1}}\sum_{i=0}^{p-1}q^{idp^N}(-1)^i$$
$$=\frac{(-1)^a q^a(1+q)}{1+q^{dp^N}}$$

$$= \mu_{-q}(a + dp^N + \mathbb{Z}_p)$$

elde edilir. Bu da μ_{-q} nun dağılım olduğunu gösterir, (Kim 2007b).

Tanım 1.2.11: μ , X üzerinde bir p -adik dağılım olsun. Her $U \subset X$ kompakt-açık altkümesi için

$$|\mu(U)|_p \leq B$$

olacak şekilde $B \in \mathbb{R}$ varsa μ ye p -adik ölçüm denir, (Koblitz 1948, Özden 2009).

Tanım 1.2.14: X , $\mathbb{C}_p$ nin ayrık olmayan bir altkümesi olsun. $f : X \to \mathbb{C}_p$ fonksiyonu ve

$$\Phi_1 f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \qquad x, y \in X,\ x \neq y$$

olarak tanımlanan iki değişkenli $\Phi_1 f(x, y)$ fonksiyonu için

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} \Phi_1(x, y)$$

mevcut ise f fonksiyonuna $a \in X$ noktasında sürekli (düzgün) diferensiyellenebilirdir denir. X in her noktasında sürekli diferensiyellenebilen bir f fonksiyonuna da sürekli diferensiyellenebilir fonksiyon denir. Bütün sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi

$$\mathbb{C}'(X \to \mathbb{C}_p) = \{f \mid f : X \to \mathbb{C}_p, f \text{ sürekli diferensiyellebilir}\}$$

ile gösterilir, (Schikhof 1984, Özden 2009).

Tanım 1.2.15: $f \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{C}_p) = \{f \mid f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p, f$ sürekli$\}$ olsun. f nin belirsiz toplamı Sf ile gösterilir ve

$$Sf(n) = \sum_{j=0}^{n} f(j), \; n \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlanır. $f \in \mathbb{C}'(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p)$ ise $Sf \in \mathbb{C}'(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p)$ dır, (Schikhof 1984, Özden 2009).

1.3. q-CALCULUS

Bu bölümde Quantum Calculusun iki türünden biri olan q-calculus (diğeri h-calculus) üzerinde durulacaktır. Son zamanlarda hızlı gelişmesiyle dikkat çeken bu konu birçok bilim adamının çalışma alanına girmiştir. Özellikle Sayılar Teorisinde q-Bernoulli, q-Euler, q-Genocchi gibi birtakım sayı ve polinomun inşasında önemli rol oynamaktadır. Bu nedenle q-calculusun diferensiyel, türev tanımı verilerek çalışma boyunca kullanılacak olan birtakım özellikleri üzerinde durulacaktır.

Tanım 1.3.1: $f(x)$ keyfi bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun q-diferensiyeli

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $d_q x = (q-1)x$ ile gösterilmektedir, (Kac-Cheung 2000).

Tanım 1.3.2: $f(x)$ keyfi bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun q-türevi

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}$$

olarak tanımlıdır, (Kac-Cheung 2000).

Özel olarak eğer f diferensiyellenebilir ise

$$\lim_{q\to 1} D_q f(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

olur.

Örnek 1.3.1: $f(x) = x^n$ fonksiyonunun q-türevini hesaplayalım. Burada n pozitif bir tamsayıdır. Tanımdan,

$$D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n - 1}{q-1} x^{n-1}$$

olarak bulunur. Bundan sonraki bölümlerde $\frac{q^n - 1}{q-1}$ ifadesi çok sık kullanılacağından her n pozitif tamsayısı için

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q-1} = q^{n-1} + q^{n-2} + ... + 1$$

şeklinde gösterilecektir, (Kac-Cheung 2000).

Uyarı 1.3.1: $\lim_{q\to 1} [n]_q = n$ dır.

Şimdi $[n]_q$ nın bazı özellikleri

1) $[n+m]_q = [n]_q + q^x [m]_q$

2) $[n]_{q^{-1}} = q^{1-n} [n]_q$

3) $[-n]_q = q^{-n} [n]_q$

4) $[-n]_{q^{-1}} = -q[n]_q$

5) $[1-n]_q = 1 - [n]_{q^{-1}}$

6) $[n]_q + q^r [n-r]_q = [n]_q$

olarak verilir.

Özel olarak q yerine $-q$ alınırsa

$$[n]_{-q}=\frac{1-(-q)^n}{1+q}=1-q+q^2-q^3+...+(-1)^{n-1}q^{n-1}$$

olur.

Tanım 1.3.2: q-binom katsayıları $t,r\geq 0$ tamsayıları için

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q=\frac{[n]_q[n-1]_q...[n-r+1]_q}{[r]_q!}$$

olarak tanımlıdır. Eğer $n\geq r\geq 0$ ise

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q=\frac{[n]_q!}{[n-r]_q![r]_q!}$$

şeklinde gösterilir. Ayrıca,

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q=\begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}_q+q^r\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}_q$$

ve

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q=q^{n-r}\begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}_q+\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}_q$$

dır, (Kac-Cheung 2000).

1.4. q-VOLKENBORN İNTEGRALİ VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde 1971 yılında Köln Üniversitesi'nde Arnt Volkenborn'un tezinde geliştirdiği p-adik integrale entegre olan Volkenborn integrali ve özellikleri incelendi.

Tanım 1.4.1: $f\in\mathbb{C}'(\mathbb{Z}_p\to\mathbb{C}_p)$ olsun. f nin Volkenborn integrali

$$\int_{Z_p} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^n} \sum_{x=0}^{p^n-1} f(x)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\mathbb{C}'(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p) = \left\{ f \mid f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p, f \text{ sürekli diferensiyellenebilir} \right\}$$

dır.

Teorem 1.4.1: $d_\mu(x) = \dfrac{1}{p^n}$ olsun.

1) $$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x) d_\mu x = \lim_{n\to\infty} \frac{Sf(p^n) - Sf(0)}{p^n} = (Sf)^{'}(0)$$

dır. Burada

$$(Sf)'(x) = \frac{d}{dx} Sf(x)$$

olarak tanımlıdır.

2) $$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x) d_\mu x = \lim_{n\to\infty} \frac{f(0) + f(1) + ... + f(p^n - 1)}{p^n}.$$

3) $$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+1) d_\mu x = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x) d_\mu x + f^{'}(0).$$

4) $$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+n) d_\mu x = \sum_{x=0}^{n-1} f^{'}(x) + \int_{\mathbb{Z}_p} f(x) d_\mu x$$

dır, (Schikhof 1984, Özden 2009).

f, $a \in \mathbb{Z}_p$ noktasında düzgün diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Bu özelliği ise

$$f \in UD(\mathbb{Z}_p)$$

ile gösterilsin. Eğer f farkların bölümü ise

$$F_f(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

olur ve $(x,y) \to (a,a)$ iken $l = f'(a)$ limiti vardır.

Tanım 1.4.2: $f \in UD(\mathbb{Z}_p)$ olmak üzere f fonksiyonunun

$$\sum_{0 \le j < p^n} f(j)\mu_q(j + p^N \mathbb{Z}_p) = \frac{1}{[p^N]_q} \sum_{0 \le j < p^n} q^j f(j)$$

şeklindeki ifadesi Riemann toplamlarının q-benzerlerini temsil eder. $\mathbb{Z}_p$ üzerinde f fonksiyonunun integrali, sağdaki toplamın $n \to \infty$ için limit değeridir., (Kim 2005a).

Tanım 1.4.3: $f \in UD(\mathbb{Z}_p)$ fonksiyonunun

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x) d_\mu x = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{[p^N]_q} \sum_{0 \le j < p^N} f(j) q^j$$

integraline q-Volkenborn integrali denir.

Eğer $f_n \to f$ alınırsa $UD(\mathbb{Z}_p)$ de

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f_n(x) d_{\mu_q}(x) \to \int_{\mathbb{Z}_p} f(x) d_{\mu_q}(x)$$

olarak bulunur, (Kim 2005a).

1.5. BAZI ÖZEL POLİNOMLAR VE FONKSİYONLAR ÜZERİNE

Bu bölümde Euler sayıları ve polinomları ile ilişkisi kurulacak olan özel sayılar, polinomlar, fonksiyonlar ve Dirichlet karakteri gibi ifadeler tanımlanarak birtakım özellikleri hakkında bilgiler verilecektir.

Tanım 1.5.1: $k \in \mathbb{N}$, $n \equiv 1(\text{mod } k)$ ve $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ olmak üzere eğer $\left(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}\right)^*$ grubunda

$$\chi(k) = \begin{cases} \varphi(k), & (k,n) = 1 \\ 0 \quad , & (k,n) \neq 1 \end{cases}$$

φ gibi bir karakter bulunabiliyorsa, χ ye k modül Dirichlet karakteri denir.

χ Dirichlet karakteri aşağıdaki özellikleri sağlar;

i) $\chi(k+n) = \chi(k),\ k \in \mathbb{N}$,

ii) $\chi\left(k.n\right) = \chi\left(k\right).\chi\left(n\right)$,

iii) $\chi(k) = 0 \Leftrightarrow (k,n) \neq 1$.

Sayılar teorisinde ilk N doğal sayının toplamı

$$\sum_{n=1}^{N} n = 1+2+3+...+N = \frac{N(N+1)}{2},$$

ilk N doğal sayının karelerinin toplamı

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = 1^2+2^2+3^2+...+N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6},$$

ve ilk N doğal sayının küplerinin toplamı

$$\sum_{n=1}^{N} n^3 = 1^3+2^3+3^3+...+N^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$$

olarak bilinen formüllerle verilmiştir. Jacob Bernoulli ise bu denklemlerin daha yüksek mertebeleri üzerine çalışmıştır. Yaklaşık 300 yıl önce “Ars Conjectandi” adlı eserinde ise Bernoulli sayılarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 1.5.3: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}, \qquad |t| < 2\pi$$

şeklinde tanımlanan B_n katsayılarına Bernoulli sayıları denir. Burada $B_0 = 1,\ B_1 = \frac{-1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = \frac{-1}{30}, B_5 = 0, \ldots$ olarak bulunur. $n \geq 1$ ve $n \equiv 1 \pmod{2}$ olmak üzere $B_{2n+1} = 0$ olduğu kolayca görülür.

Tanım 1.5.4: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$t\frac{e^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}, \qquad |t| < 2\pi$$

olarak tanımlanan $B_n(x)$ katsayılarına ise Bernoulli polinomları denir.

Bernoulli sayıları ve polinomları arasında aşağıdaki ilişki vardır:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}.$$

Bu ilişki Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonu yardımıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = t\frac{e^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} . \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{n!}$$

olarak gösterilir. Buradan yukarıdaki eşitlikte Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k} \frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Her iki ifade de $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları eşitlenirse;

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}$$

görülür. İlk birkaç Bernoulli polinomunun ise

$$B_0(x) = 1,$$
$$B_1(x) = x - \frac{1}{2},$$
$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$
$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$
$$\vdots$$

olduğu görülür. Burada $B_n(0) = B_n$ dır.

Tanım 1.5.5: $z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}^+,\ \operatorname{Re}(z) > 1$ olmak üzere

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

fonksiyonuna Riemann Zeta fonksiyonu denir.

Tanım 1.5.6: $\operatorname{Im}(s) > 0$ olmak üzere

$$\varsigma(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$$

fonksiyonuna Hurwitz zeta fonksiyonu denir.

$a = 1$ ise; Hurwitz zeta fonksiyonu, Riemann zeta fonksiyonuna indirgenir.

Tanım 1.5.7: $0 < x < \infty$ ve $\operatorname{Re} s\, x > 0$ için Euler integrali olarak adlandırılan Gama fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

şeklinde tanımlanır.

Gama fonksiyonun birkaç özelliği aşağıdaki gibi verilir;

i) $\Gamma(1) = 1$,

ii) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (x > 0)$,

iii) $\Gamma(x+1) = x! \quad (x \geq 0)$,

iv) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

v) $\Gamma(x) = \infty \quad \left(x \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}\right)$.

Daha önceki bölümlerde bahsedilen p-adik analiz, q-calculus ve q-Volkenborn integrali yardımıyla q-Bernoulli sayıları ve polinomları aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 1.5.8: $|q| < 1$ ve $q \in \mathbb{C}$ olmak üzere $B_{n,q}$, n-inci dereceden q-Bernoulli sayıları

$$B_{n,q} = \int_{\mathbb{Z}_p} [x]_q^n d_{\mu_q}(x)$$

olarak tanımlanır. Benzer şekilde $B_{n,q}(x)$, n-inci dereceden q-Bernoulli polinomları

$$B_{n,q}(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} [x+y]_q^n d_{\mu_q}(y)$$

ile tanımlanır. Her iki ifade de $q \to 1$ için limit alınırsa

$$B_n = \int_{\mathbb{Z}_p} x^n d\mu(x)$$

klasik Bernoulli sayılarını;

$$B_n(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} (x+y)^n d\mu(x)$$

klasik Bernoulli polinomlarını temsil eder.

Tanım 1.5.9: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$F(t) = \frac{2t}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!}, \quad (|t| < \pi)$$

şeklinde tanımlı G_n sayıları Genocchi sayıları olarak adlandırılır. $n \equiv 0 \pmod{2}$ olmak üzere $G_n = 2(1-2^{2n})B_{2n}$ dır. Burada B_n n-inci Bernoulli sayısıdır. Ayrıca $G_1 = 1,\ G_3 = G_5 = G_7 = ... = 0$ olduğu kolayca görülebilir, (Kim 2005b).

Tanım 1.5.10: $n \in N$ olmak üzere

$$F(t,x) = \frac{2t}{e^t+1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad (|t| < \pi)$$

şeklinde tanımlı $G_n(x)$ polinomları Genocchi polinomları olarak adlandırılır, (Kim 2005b).

Tanım 1.5.11: İkinci Stirling sayıları (n,k) parametresi ile $S(n,k)$ biçiminde gösterilir. İkinci Stirling sayılarının üreteç fonksiyonu;

$$F(t,k) = \frac{(-1)^k}{k!}(1-e^t)^k = \sum_{n=0}^{\infty} S(n,k) \frac{t^n}{n!}$$

şeklinde verilir.

BÖLÜM 2

2.1 EULER SAYILARI VE POLİNOMLARI

Bu bölümde Euler sayıları ve polinomları tanımlanarak, bazı özellikleri verilecektir. Daha sonra diğer sayılarla, polinomlarla ve fonksiyonlarla ilişkileri incelenecektir.

Tanım 2.1.1: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Taylor seri açılımı yardımıyla E_n, n-inci Euler sayıları

$$F(t) = \frac{2}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi \tag{2.1}$$

olarak tanımlanır, (Kim 2008).

Tanım 2.1.2: $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $E_n(x)$ n-inci Euler polinomları

$$F(x,t) = F(t)e^{xt} = \frac{2}{e^t + 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi \tag{2.2}$$

olarak tanımlanır, (Kim 2008).

(2.1) denklemindeki $\frac{2}{e^t + 1}$ ifadesinin seri açılımını incelenirse,

$$\frac{2}{e^t + 1} = \frac{2}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + 1}$$

olmak üzere sağ taraftaki ifade de polinom bölmesi yapılırsa Euler sayılarının ilk birkaç terimi $E_0 = 1,\ E_1 = -\frac{1}{2},\ E_2 = 0,\ E_3 = +\frac{1}{4},\ E_4 = 0...$ şeklinde bulunur. Buradan anlaşılacağı üzere çift dereceden Euler sayıları 0 (sıfır) dır. İlk birkaç Euler polinomu ise

$$E_0(x) = 1,$$

$$E_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$E_2(x) = x^2 - x,$$

$$E_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4},$$

$$\vdots$$

olarak bulunur. Ayrıca Euler polinomları, Euler sayıları cinsinden

$$E_n(x) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} E_l x^{n-l} \tag{2.3}$$

olarak ifade edilir. Burada

$$\binom{n}{l} = \frac{n(n-1)...(n-l+1)}{l!}$$

dır. (2.1) denkleminden, Euler sayıları için aşağıdaki yineleme bağıntısı verilir;

$$E_0 = 1 \text{ ve } \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} E_l + E_n = 2\delta_{0,n} \ . \tag{2.4}$$

Burada $\delta_{0,n}$ sembolü Kronecker sembolüdür.

Lemma 2.1.1: $n \in \mathbb{N}$ için

$$E_n'(x) = nE_{n-1}(x)$$

dır.

İspat: (2.3) ifadesinden kolayca

$$\frac{dE_n(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k x^{n-k} \tag{2.5}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k(n-k)x^{n-k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!(n-k)}{(n-k)!k!}E_k x^{n-k-1}$$

$$= n\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-l)!}{(n-k-l)!k!}E_k x^{n-k-1}$$

$$= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}E_k x^{n-k-1}$$

$$= nE_{n-1}(x)$$

olduğu görülür, (Kim 2008). Benzer şekilde aşağıdaki lemma verilir;

Lemma 2.1.1: $n \geq 0$ için

$$\int_0^x E_n(t)dt = \frac{1}{n+1}E_{n+1}(x)$$

olur.

İspat: $E_n() = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_l t^{n-l}$ olmak üzere

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k t^{n-k}dt = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k\int_0^x t^{n-k}dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k\frac{x^{n-k+1}}{n-k+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!(n-k+1)}E_k x^{n-k+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)n!}{(n-k+1)!k!(n+1)}E_k x^{n-k+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}E_k x^{n+1-k}$$

$$=\frac{1}{n+1}E_{n+1}(x)$$

olarak bulunur, (Kim 2008).

Euler polinomlarının bazı özellikleri

i) $E_n(x+1)+E_n(x)=2x^n$,

ii) $x=0$ için $E_n(0)=E_n$,

iii) $E_n+2^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{E_k}{2^k}=1$,

iv) $E_n(x+1)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}E_n(x)$

olarak verilir. Sayılar teorisi ve analizde oldukça önemli olan Euler sayıları, trigonometrik fonksiyonların seri açılımı gösterimi olarak aşağıdaki teoremde incelenmiştir.

Teorem 2.1.1: E_k , Euler sayıları hiperbolik fonksiyonlar yardımıyla

$$\sec ht=\frac{2e^t}{e^{2t}+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k 2^k\frac{t^n}{n!}$$

olarak tanımlıdır.

İspat: secht fonksiyonun Taylor açılımından

$$\sec ht = \frac{2e^t}{e^{2t}+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n(2t)^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

olmak üzere yukarıdaki eşitlikte Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\sec ht = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{E_k(2t)^k}{k!}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{E_k 2^k n! t^n}{k!(n-k)!n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k 2^k \frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur, (Luo vd. 2002).

Ayrıca Euler fonksiyonları da aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.1.3: $0 \le x < 1$ ve $x \in \mathbb{R}$ için, Euler polinomları Euler fonksiyonları olarak adlandırılır.

2.2 EULER SAYILARI VE POLİNOMLARININ GENELLEŞTİRİLMESİ

Bu bölümde Euler sayı ve polinomlarının genelleştirilmesi üzerine iki tanım verilecektir. Daha sonra bu genelleştirmelerin bazı özellikleri üzerinde durulacaktır.

Tanım 2.2.1: $a,b,c \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere Euler sayılarının genelleştirilmesi $E_k(a,b,c)$

$$\frac{2c^t}{b^{2t}+a^{2t}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{E_k(a,b,c)}{k!}t^k \tag{2.6}$$

olarak tanımlıdır, (Luo vd. 2002).

Tanım2.2.2: $a,b,c \in \mathbb{Z}^+$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere Euler polinomlarının genelleştirilmesi $E_k(x;a,b,c)$

$$\frac{2c^{xt}}{b^t + a^t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k(x;a,b,c)}{k!} t^k \tag{2.7}$$

olarak tanımlıdır, (Luo vd. 2002).

(2.6) tanımında $a=1$ ve $b=c=e$ alınırsa

$$\frac{2e^t}{e^{2t}+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k(1,e,e)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k}{k!} t^k$$

olur. Benzer şekilde (2.7) tanımında $a=1$ ve $b=c=e$ alınırsa

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k(x;1,e,e)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k(x)}{k!} t^k$$

bulunur.

Genelleştirilmiş Euler sayılarının bazı temel özellikleri aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 2.2.1: $a,b,c \in \mathbb{Z}^+$ ve olmak üzere

i) $E_0(a,b,c)=1$,

ii) $E_k(1,e,e)=E_k$,

iii) $E_k(1,e^{\frac{1}{2}},e^x)=E_k(x)$,

iv) $E_k(a,b,c)=2^k(\ln b-\ln a)^k E_k\left(\dfrac{\ln c-2\ln a}{2(\ln b-\ln a)}\right)$,

v) $E_k(a,b,c)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(\ln b-\ln a)^j(\ln c-\ln a-\ln b)^{k-j}E_j$

Bu özelliklerden *i), ii), iii)* tanım (2.6) da değerler yerleştirilerek kolayca bulunur. *iv)* özelliği aşağıdaki gibi incelenerek

$$\sum_{k=0}^{\infty} E_k(a,b,c)\frac{t^k}{k!} = \frac{2c^t}{b^{2t}+a^{2t}}$$
$$= \frac{2\exp((\ln c - 2\ln a)/2(\ln b - \ln a)2t(\ln b - \ln a))}{\exp(2t(\ln b - \ln a))+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left(\ln b - \ln a\right)^k E_k\left(\frac{\ln c - 2\ln a}{2(\ln b - \ln a)}\right)\frac{t^k}{k!}$$

ise

$$E_k(a,b,c) = 2^k(\ln b - \ln a)^k E_k\left(\frac{\ln c - 2\ln a}{2(\ln b - \ln a)}\right)$$

olarak bulunur, (Luo vd. 2002).

Genelleştirilmiş Euler polinomları için bazı özellikler aşağıdaki gibi verilir.

Teorem 2.2.1: $a,b,c \in \mathbb{Z}^+$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

i) $E_k(x;a,b,c) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(\ln c)^{k-j}}{2^j}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{k-j} E_j(a,b,c)$,

ii) $E_k(x;a,b,c) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(\ln c)^{k-j}\ln\left(\frac{b}{a}\right)^{j}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{k-j} E_j\left(\frac{\ln c - 2\ln a}{2/\ln b - \ln a}\right)$,

iii) $E_k(x;a,b,c) = 2^k E_k\left(\frac{1}{2};a,b,c\right)$,

iv) $E_k(x) = E_k\left(x;1,e,e\right)$,

v) $E_k(x;a,b,c) = \sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{j}\binom{k}{j}\binom{j}{l}\frac{(\ln c)^{k-j}}{2^j}\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{l}\left(\ln\frac{c}{ab}\right)^{j-l}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{k-j} E_l$

(2.6) ve (2.7) tanımlarından

$$\frac{2c^{2xt}}{b^{2t}+a^{2t}}=\frac{2c^{t}}{b^{2t}+a^{2t}}c^{(2x-1)t} \tag{2.8}$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{E_k(a,b,c)}{k!}t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2x-1)^k\left(\ln c\right)^k}{k!}t^k\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\ln c\right)^{k-j}(2x-1)^{k-j}E_j(a,b,c)\right)\frac{t^k}{k!}$$

olduğu görülür. (2.8) ifadesinde $\frac{t^k}{k!}$ ın katsayıları eşitlenirse

$$2^k E_k(x;a,b,c)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(\ln c)^{k-j}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{k-j}E_j(a,b,c)$$

bulunur ki bu teoremin *i)* maddesini doğrular. Teoremdeki diğer maddeler ise (2.6) ve (2.7) tanımlarında $x=\frac{1}{2}$ alınarak bulunur, (Luo vd. 2002).

2.3 EULER POLİNOMLARININ DİĞER POLİNOMLARLA İLİŞKİSİ

Bu bölümde $E_n(x)$ Euler polinomlarının Sayılar teorisinde önemli yeri olan Bernoulli polinomları, Genocchi polinomları ve Stirling sayıları ile olan ilişkisi verilecektir.

Teorem 2.3.1: $B_n(x)$, n -inci Bernoulli polinomu ve B_k, n -inci Bernoulli sayısı olmak üzere

$$B_n(x)=\sum_{\substack{k=0\\k\neq 1}}^{n}\binom{n}{k}B_kE_{n-k}(x)$$

olarak ifade edilir. Bu ilişkiden

$$\begin{aligned}
B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\
&= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \\
&= E_3(x) + \frac{1}{2}E_1(x)
\end{aligned}$$

olarak bulunur, (Cheon 2003).

Teorem 2.3.2: B_k, n -inci Bernoulli sayısı ve $E_n(x)$, n -inci Euler polinomu olmak üzere

$$E_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\left(2-2^{k+1}\right)\binom{n+1}{k}B_k x^{n+1-k}$$

olarak tanımlanır. Burada $B_k = B_k(0)$ dır, (Cheon 2003).

Teorem 2.3.3: $E_n(x)$, n -inci Euler polinomu ve G_k, Genocchi sayısı olmak üzere

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{G_{k+1}}{k+1}x^{m-k}$$

şeklinde bir ilişki vardır, (Kim 2005b).

Teorem 2.3.4: $S_2(m,n)$ ikinci çeşit Stirling sayısı ve E_n n -inci Euler sayısı olmak üzere

$$E_m = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n!S_2(m,n)$$

şeklinde bir ilişki vardır, (Kim 2008).

BÖLÜM 3

3.1. q-EULER SAYILARI VE POLİNOMLARI

İkinci bölümde klasik Euler polinomları

$$F(x,t)=F(t)e^{xt}=\frac{2}{e^{t}+1}e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n(x)\frac{t^n}{n!},\quad |t|<\pi$$

olarak tanımlanmıştı ve eğer $E_n(0)=E_n$ alınırsa n-inci Euler sayısının elde edileceği belirtilmişti.

Bu bölümde q-Volkenborn integrali ve özellikleri kullanılarak q-Euler sayıları ve polinomları tanımlanacaktır. Bu sayı ve polinomların bazı özellikleri incelenerek önemli teoremler ve sonuçlar verilecektir.

p sabit tek asal sayı olsun ve $\mathbb{C}_p$, $\mathbb{Q}_p$ nin cebirsel kapanışının p-adik tamlanışını göstersin. d sabit tamsayısı için $(p,d)\equiv 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
X&=X_d=\lim_{\overleftarrow{N}}\mathbb{Z}/d_{p^N}\mathbb{Z},\\
X_1&=\mathbb{Z}_{p,}\\
X^*&=\bigcup_{\substack{0<a<d_p\\(a,p)=1}}\left(a+d_p\mathbb{Z}_p\right),\\
a+d_{p^n}\mathbb{Z}_p&=\left\{x\in X\mid x\equiv a\left(\mathrm{mod}\ d_{p^n}\right)\right\}
\end{aligned}$$

olarak tanımlansın. $\mathbb{C}_p$ üzerindeki p-adik mutlak değer

$$|p|_p=\frac{1}{p}$$

olarak tanımlansın.

q, $\mathbb{C}$ nin veya $\mathbb{C}_p$ nin elemanı olmasına göre farklı değerler alır. Eğer $q \in \mathbb{C}$ ise $|q| < 1$; $q \in \mathbb{C}_p$ ise $|q-1|_p < p^{\frac{-1}{p-1}}$ olur. Ayrıca $|x|_p \leq 1$ için $\exp(x \log q) = q^x$ dir. Bu bölümde

$$[x]_q = \frac{q^x - 1}{q - 1} = q^{x-1} + q^{x-2} + \ldots + 1$$

alınacaktır. f, $a \in \mathbb{Z}_p$ noktasında düzgün diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere bu özellik $f \in UD(\mathbb{Z}_p)$ ile gösterilsin. Eğer

$$F_f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

ise $(x, y) \to (a, a)$ giderken

$$f'(a) = l$$

olarak kullanılacaktır.

$f \in UD(\mathbb{Z}_p)$ için aşağıdaki ifade yazılabilir;

$$\frac{1}{\left[p^N\right]_q} \sum_{0 \leq j < p^N} q^j f(j) = \sum_{0 \leq j < p^N} f(j) \mu_q\left(j + p^N \mathbb{Z}_p\right).$$

$\mathbb{Z}_p$ de bu toplam $N \to \infty$ için f nin integrali ile tanımlıdır. Bu ifade de

$$\mu_q\left(j + p^N \mathbb{Z}_p\right) = \frac{q^j}{\left[p^N\right]_q}$$

olduğu görülür. $f \in UD(\mathbb{Z}_p)$ fonksiyonunun q-Volkenborn integrali

$$I_q(f)=\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)d\mu_q(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\left[p^N\right]_q}\sum_{0\le x<p^N} f(x)q^x \tag{3.1}$$

olarak tanımlıdır, (Kim 2006).

$[x]_q$ nin tanımından

$$[x]_{-q}=\frac{1-(-q)^x}{1-(-q)}=\frac{1+q^x}{1+q}=1-q+q^2-q^3+\ldots+(-1)^{x-1}q^{x-1}$$

olduğu biliniyor. (3.1) tanımda $f(x)=e^{[x]_q^n t}$ alınırsa

$$\int_{\mathbb{Z}_p} e^{[x]_q^n t}d\mu_q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}B_{n,q}\frac{t^n}{n!}$$

n-inci q-Bernoulli sayısının üreteç fonksiyonu, benzer şekilde $f(x)=e^{[x+y]_q^n t}$ alınırsa

$$\int_{Z_p} e^{[x+y]_q^n t}d\mu_q(y)=\sum_{n=0}^{\infty}B_{n,q}(x)\frac{t^n}{n!}$$

n-inci q-Bernoulli polinomunun üreteç fonksiyonu bulunur, (Kim 2006).

(3.1) tanımında q yerine $-q$ alınırsa

$$I_{-q}(f)=\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)d\mu_{-q}(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\left[p^N\right]_{-q}}\sum_{0\le x<p^N} f(x)(-q)^x \tag{3.2}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde $f(x)=e^{[x]_q t}$ alınırsa

$$\int_{\mathbb{Z}_p} e^{[x]_q}d\mu_{-q}(x)=\int_{\mathbb{Z}_p}\sum_{n=0}^{\infty}[x]_q^n\frac{t^n}{n!}d\mu_{-q}(x)$$

$$=\int_{\mathbb{Z}_p}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-q^x}{1-q}\right)^n\frac{t^n}{n!}d\mu_{-q}(x)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q)^n}\int_{\mathbb{Z}_p}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(-1)^l q^{xl}\frac{t^n}{n!}d\mu_{-q}(x)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q)^n}\sum_{l=}^{n}\binom{n}{l}(-1)^l\left(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\left[p^N\right]_q}\sum_{0\le m<p^N}q^{ml}(-q)^m\right)\frac{t^n}{n!}$$

$$=[2]_q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q)^n}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(-1)^l\left(\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(q^{l+1}\right)^m\right)\frac{t^n}{n!}$$

$$=[2]_q\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^m\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{(-1)^l q^{ml}}{(1-q)^n}\frac{t^n}{n!}$$

$$=[2]_q\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^m\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-q^m}{1-q}\right)^n\frac{t^n}{n!}$$

$$=[2]_q\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^m e^{[m]_q t}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}E_{n,q}\frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Burada

$$\int_{\mathbb{Z}_p}[x]_q^n d\mu_{-q}(x)=E_{n,q}$$

olduğunu kolayca görülür. Eğer $q\to 1$ için limit alınırsa

$$\lim_{q\to 1}E_{n,q}=E_n=\int_{\mathbb{Z}_p}x^n d_{\mu_{-q}}(x)$$

bulunur, (Kim 2006). Benzer şekilde $f(x)=e^{[x+y]_q t}$ alınırsa

$$\int_{\mathbb{Z}_p}e^{[x+y]_q t}d\mu_{-q}(y)=[2]_q\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^m e^{[x+m]_q t}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty} E_{m,q}\left(x\right)\frac{t^m}{m!}$$

q-Euler polinomları bulunur. Buradan da $n \geq 0$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p} [x+y]_q^n d\mu_{-q}\left(y\right) = E_{n,q}\left(x\right)$$

ifadesi ile n-inci q-Euler polinomu bulunur. Eğer $q \to 1$ için limit alınırsa

$$\lim_{q\to 1} E_{n,q}(x) = E_n\left(x\right) = \int_{\mathbb{Z}_p} \left(x+y\right)^n d_{\mu_{-1}}\left(y\right)$$

olduğu görülür, (Kim 2006).

q-calculus ve q-Volkenborn integralinin birkaç özelliği incelenerek q-Euler sayılarının birtakım özellikleri elde edilecektir.

i) $[x+1]_q = \dfrac{1-q^{x+1}}{1-q} = \dfrac{1-q+q-q^{x+1}}{1-q} = \dfrac{1-q}{1-q} + \dfrac{1-q^x}{1-q}q$

$$=1+q\left[x\right]_q$$

ii) $f_n\left(x\right) = f\left(x+n\right)$ olmak üzere

$$qI_{-q}\left(f_1\right)+I_{-q}\left(f\right) = q\int_{\mathbb{Z}_p} f\left(x+1\right)d_{\mu_{-q}}\left(x\right) + \int_{\mathbb{Z}_p} f\left(x\right)d_{\mu_{-q}}\left(x\right) \tag{3.2a}$$

$$= q\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\left[p^N\right]_{-q}}\sum_{x=0}^{p^N-1} f\left(x+1\right)\left(-q\right)^x + \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\left[p^N\right]_{-q}}\sum_{x=0}^{p^N-1} f\left(x\right)\left(-q\right)^x$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\left[p^N\right]_{-q}}\left(\sum_{x=0}^{p^N-1} f\left(x+1\right)\left(-1\right)^x q^{x+1} + \sum_{x=0}^{p^N-1} f\left(x\right)\left(-1\right)^x q^x\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\left[p^N\right]_{-q}} f\left(0\right)$$

$$=\lim_{N\to\infty} f(0)\frac{1+q}{1+q^{p^N}}$$

$q\in\mathbb{C}$ için $|q|<1$ olduğundan

$$\lim_{N\to\infty} f(0)\frac{1+q}{1+q^{p^N}}=f(0)(1+q)$$

$$=[2]_q f(0)$$

olarak bulunur. Burada $f(x)=e^{[x]_q t}$ alınırsa

$$q\int_{\mathbb{Z}_p} e^{[x+1]_q t} d_{\mu_{-q}}(x)+\int_{\mathbb{Z}_p} e^{[x]_q t} d_{\mu_{-q}}(x)=[2]_q$$

olur. Buradan da

$$[2]_q=\sum_{n=0}^{\infty}\left(q\int_{\mathbb{Z}_p}[x+1]_q^n\, d_{\mu_{-q}}(x)+\int_{\mathbb{Z}_p}[x]_q^n\, d_{\mu_{-q}}(x)\right)\frac{t^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(q\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}q^l\int_{\mathbb{Z}_p}[x]_q^l\, d_{\mu_{-q}}(x)+\int_{\mathbb{Z}_p}[x]_q^n\, d_{\mu_{-q}}(x)\right)\frac{t^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(q\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}q^l E_{l,q}+E_{n,q}\right)\frac{t^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(q\left(qE_q+1\right)^n+E_{n,q}\right)\frac{t^n}{n!}$$

olduğu görülür. q-Euler sayılarının yineleme formülü bu denklem sayesinde

$$q\left(qE_q+1\right)^n+E_{n,q}=\begin{cases}[2]_q & ;\ n=0\\ 0 & ;\ n>0\end{cases}$$

olarak bulunur, (Kim 2006). (3.2a) eşitliği n-inci dereceden

$$q^n I_{-q}(f_n)+(-1)^{n-1} I_{-q}(f)=[2]_q \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{n-1-l} q^l f(l) \tag{3.3}$$

olarak ifade edilir. Burada $n=1$ alınırsa

$$qI_{-q}(f_1)+I_{-q}(f)=[2]_q f(0) \tag{3.4}$$

bulunur. $n \in N$ için $f_n(x)=f(x+n)$ dir. Eğer (3.3) de n pozitif tek tamsayı olursa

$$q^n I_{-q}(f_n)+I_{-q}(f)=[2]_q \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l q^l f(l) \tag{3.5}$$

olur ve $f(x)=[x]_q^m$ alınırsa

$$q^n \int_{z_p} [x+n]_q^m \, d_{\mu_{-q}}(x)+\int_{\mathbb{Z}_p} [x]_q^m \, d_{\mu_{-q}}(x)=[2]_q \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l q^l [l]_q^m$$

$$q^n E_{m,q}(n)+E_{m,q} =[2]_q \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l q^l [l]_q^m .$$

elde edilir. Eğer (3.3) de n çift tamsayı ise

$$q^n \int_{\mathbb{Z}_p} [x+n]_q^m \, d_{\mu_{-q}}(x)-\int_{\mathbb{Z}_p} [x]_q^m \, d_{\mu_{-q}}(x)=[2]_q \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{l-1} q^l [l]_q^m$$

$$q^n E_{m,q}(n)-E_{m,q} =[2]_q \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{l-1} q^l [l]_q^m$$

olarak bulunur, (Kim 2006).

$E_{n,q}$ nun üreteç fonksiyonu $F_q(t)$

$$F_q(t)=\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,q} \frac{t^n}{n!}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\left[p^N\right]_{-q}} \sum_{x=0}^{p^N-1} (-q)^x e^{[x]_q t}$$

$$= [2]_q \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^m e^{[m]_q t}$$

olarak gösterilir, (Cangül vd. 2007).

Teorem 3.1: $F_q(t)$, $E_{n,q}$ q-Euler sayısının üreteç fonksiyonu olmak üzere

$$F_q(t) = -qe^t F_q(qt) + 1$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $E_{n,q}$, q-Euler sayısının üreteç fonksiyonu $F_q(t)$ olmak üzere

$$F_q(t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\left[p^N\right]_{-q}} \sum_{x=0}^{p^N-1} (-q)^x e^{[x]_q t}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\left[p^N\right]_{-q}} \sum_{x=0}^{p^N-1} (-q)^{x+1} e^{[x+1]_q t} + 1$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\left[p^N\right]_{-q}} \sum_{x=1}^{p^N-1} (-q)^x e^{[x]_q t} + 1$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\left[p^N\right]_{-q}} \sum_{x=0}^{p^N-1} (-q)^{x+1} e^{[x]_q qt} + 1$$

$$= -qe^t \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\left[p^N\right]_{-q}} \sum_{x=0}^{p^N-1} (-q)^{x+1} e^{[x]_q qt} + 1$$

$$= -qe^t F(qt) + 1$$

olarak bulunur ve ispat tamamlanır.

BÖLÜM 4

4.1. AĞIRLIKLI GENELLEŞTİRİLMİŞ q-EULER SAYILARI VE POLİNOMLARI

χ, Dirichlet karakteri olmak üzere $d\left(=tek\right)\in\mathbb{Z}^{+}$ kümesi ile tanımlı olsun. O zaman $E_{n,\chi,q}$ genelleştirilmiş q-Euler sayıları aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 4.1.1: χ ye bağlı $E_{n,\chi,q}$ genelleştirilmiş q-Euler sayıları

$$
\begin{aligned}
E_{n,\chi,q} &= \int_X \chi(a)[a]_q^n \, d_{\mu_{-q}}(a) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{a=0}^{dp^N-1} [a]_q^n \chi(a) \frac{(-q)^a}{\left[dp^N\right]_{-q}} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\left[dp^N\right]_{-q}} \sum_{a=0}^{dp^N-1} [a]_q^n \chi(a)(-1)^a q^a
\end{aligned}
$$

olarak tanımlanır. Ayrıca

$$\lim_{q\to1} E_{n,\chi,q} = E_{n,\chi}$$

olduğu kolayca görülebilir. Benzer şekilde $F_{q,\chi}(t)$, χ ye bağlı $E_{n,\chi,q}$ genelleştirilmiş q-Euler sayılarının üreteç fonksiyonu için

$$
\begin{aligned}
F_{q,\chi}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,\chi,q} \frac{t^n}{n!} \\
&= [2]_q \sum_{k=0}^{\infty} \chi(k)(-q)^k e^{kt} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left([2]_q \sum_{k=0}^{\infty} \chi(k)(-q)^k k^n \right) \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(d^n \sum_{a=0}^{d-1} \chi(a)(-q)^a E_{n,q^d}\left(\frac{a}{d}\right) \right) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

yazılır. Burada $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları

$$E_{n,\chi,q} = [2]_q \sum_{k=0}^{\infty} \chi(k)(-q)^k k^n = d^n \sum_{a=0}^{d-1} \chi(a)(-q)^a E_{n,q^d}\left(\frac{a}{d}\right)$$

şeklinde kıyaslanınca χ ye bağlı $E_{n,\chi,q}$ genelleştirilmiş q-Euler sayıları bulunur, (Park vd. 2009).

Tanım 4.1.2: $\alpha, n \in \mathbb{N}^+$ ve $w \in T_p$ olsun. O zaman α-ağırlıklı twisted q-Euler sayıları

$$\tilde{E}_n(\alpha, w \mid q) = [2]_q \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m w^m q^m [m]_{q^\alpha}^n \tag{4.1}$$

şeklinde bulunur, (Ryoo vd. 2011). (4.1) den

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_n(\alpha, w \mid q) &= \frac{[2]_q}{(1-q^\alpha)^n} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m w^m q^m (1-q^{m\alpha})^n \\
&= \frac{[2]_q}{(1-q^\alpha)^n} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m w^m q^m \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (-1)^l (q^{m\alpha})^l \right] \\
&= \frac{[2]_q}{(1-q^\alpha)^n} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (-1)^l \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m w^m q^{\alpha ml+m} \\
&= \frac{[2]_q}{(1-q^\alpha)^n} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (-1)^l \frac{1}{1+wq^{\alpha l+1}}
\end{aligned}$$

olarak bulunur, (Ryoo vd. 2011). Buna bağlı olarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.1: $\alpha, n \in \mathbb{N}^+$ ve $w \in T_p$ olsun. O zaman

$$\tilde{E}_n(\alpha, w \mid q) = \frac{[2]_q}{(1-q^\alpha)^n} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (-1)^l \frac{1}{1+wq^{\alpha l+1}} \tag{4.2}$$

olduğu görülür. (3.2) de, $f(x)=w^x[x]_{q^\alpha}^n$ alınırsa,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} w^x [x]_{q^\alpha}^n d\mu_{-q}(x) = \frac{1}{\left(1-q^\alpha\right)^n}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(-1)^l \int_{\mathbb{Z}_p} w^x q^{x\alpha l} d\mu_{-q}(x) \tag{4.3}$$

$$= \frac{1}{\left(1-q^\alpha\right)^n}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(-1)^l \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\left[p^N\right]_{-q}}\sum_{x=0}^{p^N-1}\left(-wq^{\alpha l+1}\right)^x$$

$$= \frac{1}{\left(1-q^\alpha\right)^n}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(-1)^l \frac{1+q}{1+wq^{\alpha l+1}}\lim_{N\to\infty}\frac{1+\left(wq^{\alpha l+1}\right)^{p^N}}{1+q^{p^N}}$$

$$= \frac{[2]_q}{\left(1-q^\alpha\right)^n}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(-1)^l \frac{1}{1+wq^{\alpha l+1}}$$

$$= \tilde{E}_n(\alpha, w \mid q)$$

olur. (4.3) den α -ağırlıklı twisted q -Euler sayıları aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir.

Teorem 4.1.2: $\alpha, n \in \mathbb{N}^+$ ve $w \in T_p$ olsun. O zaman

$$\tilde{E}_n(\alpha, w \mid q) = \int_{\mathbb{Z}_p} w^x [x]_{q^\alpha}^n d\mu_{-q}(x) \tag{4.4}$$

bulunur, (Ryoo vd. 2011). (4.1) den kolayca

$$\int_{\mathbb{Z}_p} w^x e^{t[x]_{q^\alpha}} d\mu_{-q}(x) = [2]_q \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m w^m q^m [m]_{q^\alpha}^n \tag{4.5}$$

olduğu görülebilir. (4.5) den ise

$$\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{E}_n(\alpha, w \mid q)\frac{t^n}{n!} = [2]_q \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m w^m q^m e^{t[m]_{q^\alpha}}$$

olur. Bu nedenle aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 4.1.1: $\alpha, n \in \mathbb{N}^{+}$ ve $w \in T_p$ olmak üzere α -ağırlıklı twisted q -Euler sayılarının üreteç fonksiyonu

$$F^{(\alpha,w)}(t \mid q) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{E}_n(\alpha, w \mid q) \frac{t^n}{n!}$$

olsun. O zaman

$$F^{(\alpha,w)}(t \mid q) = [2]_q \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m w^m q^m e^{t[m]_{q^\alpha}}$$

şeklinde yazılır, (Ryoo vd. 2011). O halde $\alpha, n \in \mathbb{N}^{+}$ ve $w \in T_p$ olmak üzere α -ağırlıklı twisted q -Euler polinomları

$$\tilde{E}_n(x, \alpha, w \mid q) = \int_{\mathbb{Z}_p} w^y [x+y]_{q^\alpha}^n \, d\mu_{-q}(y) \tag{4.6}$$

olarak yazılır. (4.6) dan

$$\begin{aligned} \tilde{E}_n(x, \alpha, w \mid q) &= \frac{[2]_q}{(1-q^\alpha)^n} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (-1)^l q^{\alpha l x} \frac{1}{1+wq^{\alpha l+1}} \\ &= [2]_q \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m w^m q^m [m+x]_{q^\alpha}^n \end{aligned}$$

olduğu görülür. O zaman

$$F^{(\alpha,w)}(x, t \mid q) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{E}_n(x, \alpha, w \mid q) \frac{t^n}{n!}$$

olur. Böylece

$$F^{(\alpha,w)}(x, t \mid q) = [2]_q \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m w^m q^m e^{t[m+x]_{q^\alpha}} \tag{4.7}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{E}_n\left(x,\alpha,w\mid q\right)\frac{t^n}{n!}$$

yazılır, (Ryoo vd. 2011). (4.7) den

$$F^{(\alpha,w)}\left(x,t\mid q\right)=e^{t[x]_{q^\alpha}}F^{(\alpha,w)}\left(q^{\alpha w}t\mid q\right)$$

fonksiyon eşitliği yazılabilir. $F^{(\alpha,w)}\left(x,t\mid q\right)$ üreteç fonksiyonunun tanımı kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{E}_n\left(x,\alpha,w\mid q\right)\frac{t^n}{n!}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}[x]_{q^\alpha}^n\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^{n\alpha x}\tilde{E}_n\left(\alpha,w\mid q\right)\frac{t^n}{n!}\right)$$

olduğu görülür. Bu eşitliğe Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{E}_n\left(x,\alpha,w\mid q\right)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}q^{l\alpha x}\tilde{E}_l\left(\alpha,w\mid q\right)[x]_{q^\alpha}^{n-l}\right)\frac{t^n}{n!}$$

ifadesi bulunur. Her iki yandaki $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları kıyaslanırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.3: $\alpha,n\in\mathbb{N}^+$ ve $w\in T_p$ olsun. O zaman

$$\tilde{E}_n\left(x,\alpha,w\mid q\right)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}q^{\alpha xl}\tilde{E}_l\left(\alpha,w\mid q\right)[x]_{q\alpha}^{n-l} \tag{4.8}$$

bulunur, (Ryoo vd. 2011). (4.8) den

$$\tilde{E}_n\left(x,\alpha,w\mid q\right)=\left(q^{\alpha xl}\tilde{E}_l\left(\alpha,w\mid q\right)+[x]_{q\alpha}\right)^n \tag{4.9}$$

olur. Burada $\tilde{E}^n(\alpha,w|q)$, $\tilde{E}_n(\alpha,w|q)$ yerine kullanılmıştır. O halde (3.4) e benzer şekilde aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 4.1.4: $\alpha,n\in\mathbb{N}^+$ ve $w\in T_p$ olmak üzere

$$w^n q^n \tilde{E}_m(n,\alpha,w|q)+(-1)^{n-1}\tilde{E}_m(\alpha,w|q)=[2]_q\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{n-l-1}w^l q^l [l]_{q^\alpha}^m$$

olur, (Ryoo vd. 2011). Yine (3.4) den

$$qI_{-q}(f_1)+I_{-q}(f)=[2]_q f(0)$$

olduğu bilindiğine göre bu eşitlikte $f(x)=w^x e^{t[x]_{q^\alpha}}$ alınırsa o zaman

$$\begin{aligned}[2]_q&=q\int_{\mathbb{Z}_p} w^{(x+1)}e^{t[x+1]_{q^\alpha}}d_{\mu_{-q}}(x)+\int_{\mathbb{Z}_p} w^x e^{t[x]_{q^\alpha}}d_{\mu_{-q}}(x)\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\left(qw\tilde{E}_m(1,\alpha,w|q)+\tilde{E}_m(\alpha,w|q)\right)\frac{t^m}{m!}\end{aligned}\tag{4.10}$$

bulunur, (Ryoo vd. 2011). Bu nedenle aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.5: $\alpha,n\in\mathbb{N}^+$ ve $w\in T_p$ olmak üzere

$$\tilde{E}(\alpha,w|q)=\frac{[2]_q}{1+wq}$$

ve

$$qw\left(\tilde{E}_m(\alpha,w|q)+1\right)^n+\tilde{E}_m(\alpha,w|q)=\begin{cases}[2]_q & ;\ \mathrm{m}=0\\ 0 & ;\ \mathrm{m}\neq 0\end{cases}$$

olarak bulunur. (4.6) dan kolayca

$$\int_{\mathbb{Z}_p} w^y [x+y]_{q^\alpha}^n d\mu_{-q}(y) = \frac{[d]_{q\alpha}^n}{[d]_{-q}} \sum_{a=0}^{d-1} (-1)^a w^a q^a \int_{\mathbb{Z}_p} w^{dy} \left[\frac{x+a}{d}+y\right]_{q^{d\alpha}}^n d\mu_{(-q)^d}(y)$$
$$= \frac{[d]_{q\alpha}^n}{[d]_{-q}} \sum_{a=0}^{d-1} (-1)^a w^a q^a \tilde{E}_n\left(\frac{x+a}{d}, \alpha, w \mid q^d\right) \tag{4.11}$$

olduğu görülür. Bu nedenle (4.11) den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.6: $d \equiv 1 \pmod 2$ için $\alpha, n \in \mathbb{N}^+$ ve $w \in T_p$ olsun. O halde

$$\tilde{E}_m(x,\alpha,w \mid q) = \frac{[d]_{q\alpha}^n}{[d]_{-q}} \sum_{a=0}^{d-1} (-1)^a w^a q^a \tilde{E}_n\left(\frac{x+a}{d}, \alpha, w \mid q^d\right)$$

olduğu görülür.

4.2. $\tilde{E}_m(x,\alpha,w \mid q)$ POLİNOMUNUN İNTERPOLASYON FONKSİYONU

Bu bölümde α -ağırlıklı twisted q -Euler polinomlarının üreteç fonksiyonlarının interpolasyon fonksiyonları incelenecektir. $s \in \mathbb{C}$ ve $w \in T_p$ için (4.7) ye Mellin dönüşümü uygulanırsa

$$\zeta_q(x,\alpha,w \mid s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} F^{(\alpha,w)}(x,-t \mid q)\, dt$$

$$= [2]_q \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m w^m q^m \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t[m+x]_{q^\alpha}} dt$$

olduğu görülür. Buradan q -Zeta tipi fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 4.2.1: $s \in \mathbb{C}$, $w \in T_p, \alpha \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere

$$\zeta_q(x,\alpha,w \mid s) = [2]_q \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m w^m q^m}{[m+x]_{q^\alpha}^s} \tag{4.12}$$

olur. Burada $\zeta_q(x,\alpha,w\,|\,s)$ ifadesi q-Zeta tipi fonksiyondur.

Teorem 4.2.1: (4.12) de s ile $-n$ yer değiştirirse

$$\zeta_q(x,\alpha,w\,|-n)=\tilde{E}_n(x,\alpha,w\,|\,q) \tag{4.13}$$

olduğu görülür, (Ryoo vd. 2011).

$\zeta_q(0,\alpha,w\,|\,s)=\zeta_q(\alpha,w\,|\,q)$ twisted q-Euler zeta tipi fonksiyon bulunur.
Özel olarak zeta fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\Im_q(\alpha,F,w\,|\,s,\alpha)=[2]_q\sum_{m\equiv a(\mathrm{mod}\,F)}\frac{(-1)^m\,w^m q^m}{[m]_{q^\alpha}^s}. \tag{4.14}$$

(4.14) de F tek sayı ise o zaman

$$\begin{aligned}\Im_q(\alpha,F,w\,|\,s,\alpha)&=[2]_q\sum_{m\equiv a(\mathrm{mod}\,F)}\frac{(-1)^m\,w^m q^m}{[m]_{q^\alpha}^s}\\&=[2]_q\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{mF+a}\,w^{mF+a}q^{mF+a}}{[mF+a]_{q^{\alpha F}}^s}\\&=\frac{(-1)^a\,w^a q^a}{[F]_{q^\alpha}^s}\zeta_{q^F}\left(\frac{a}{F},\alpha,w^F\,|\,s\right)\end{aligned} \tag{4.15}$$

olarak bulunur. (4.13) ve (4.15) den ise aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 4.2.2: $F\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$, $w\in T_p$, $q,s\in\mathbb{C}$, $|q|<1$ ve $\alpha,n\in\mathbb{N}^+$ olmak üzere

$$\Im_q(\alpha,F,w\,|\,s,\alpha)=(-1)^a\,w^a q^a\,[F]_{q^\alpha}^n\,\tilde{E}_n\left(\frac{a}{F},\alpha,w^F\,|\,q^F\right)$$

özel tanımlı $\Im_q(\alpha,F,w\,|\,s,\alpha)$ Zeta tipi fonksiyon denir.

4.3. BULGULAR VE SONUÇLAR

i) p-adic analiz ve q- Volkenborn integrali yardımıyla Euler sayı ve polinomları, q-Euler sayı ve polinomları tanımlanmıştır ve bunların özellikleri verilmiştir.

ii) Euler sayı ve polinomları, q-Euler sayı ve polinomlarının üreteç fonksiyonları tanımlanmıştır.

iii) Euler polinomlarının Bernoulli ve Genocchi poinomları ile ilişkisi ve Euler sayılarının Stirling sayıları ile ilişkisi incelenmiştir.

iv) $E_{n,\chi,q}$ genelleştirilmiş q-Euler sayıları tanımlanmıştır.

v) α ağırlıklı q-Euler sayıları ve polinomları tanımlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Açıkgöz, M. and Şimsek, Y., (2009). On multiple interpolation functions of the Norlund-type q-Euler polynomials. *Abstract Applied Analysis, Article, ID* 382574, pp. 14.

[2] Baker A.J., (2007). *An Introductıon to p-adic numbers and p-adic Analysis.*

[3] Cangül İ. N., Kurt V., Şimşek Y., Pak H. K., Rim S.-H., (2007). An invariant p-adic q-integral associated with q-Euler numbers and polynomials, *Journal of nonlinear mathematical physics,* vol. 14, no. 1, pp. 8-14.

[4] Cheon G.-S., (2003). A note on the Bernoulli and Euler polynomials, *Applied Mathematics letters, ISSN 0893-9659,* vol.16, no. 3, pp.365-368.

[5] Hegazi A. S. and Mansour M., (2006). A note on q-Bernoulli numbers and polynomials, *Journal of nonlinear mathematical physics*, vol. 13, no. 1, pp. 9-18.

[6] Kac Victor, Cheung Pokman, (2000). *Quantum Calculus*, Springer.

[7] Kim, T., (2005a). A note on q-Volkenborn integration, *arxiv:math/0506006v1 [math. NT].*

[8] Kim, T., (2005b). q-Euler and Genocchi numbers*, arxiv:math/0506278v1 [math. NT].*

[9] Kim, T., (2005c). A new approach to q-Zeta function, *arxiv:math/0502005v1 [math. NT].*

[10] Kim, T., (2006). A note on q-Euler numbers and polynomials, *arxiv:math/0608649v1 [math. NT].*

[11] Kim, T., (2007a). Symmetry p- adic invariant integral on $\mathbb{Z}_p$ for Bernoulli and Euler polynomials, *arxiv:0712.0138v1 [math. NT].*

[12] Kim, T., (2007b). A note on p-adic q-integral associated with q-Euler numbers, *arxiv:0706.4341v1 [math. NT].*

[13] Kim, T., (2008). Note on the Euler numbers and polynomials, *arxiv:0808.1829x1 [math. NT].*

[14] Kim, T., (2009a). The fermionic p-adic integrals on $\mathbb{Z}_p$ associated with extended q-Euler numbers and polynomials, *arxiv:0901.2006x1 [math. NT].*

[15] Kim, T., (2009b). Some identities on the q-Euler polynomials of higher order and q-Stirling numbers by the fermionic p-adic integral on $\mathbb{Z}_p$, *Russian journal of mathematical physics* vol. 16, no. 4, pp.484-491.

[16] Kim, T., (2010). Some identities for the Bernoulli, the Euler and the Genocchi numbers and polynomials, *arxiv:0912.4931 [math. NT].*

[17] Kim, T., Jang L. C., Kım Y. H., Rım S. H., (2010). New approach to q-Euler numbers and polynomials, *Advances in Difference Equations*, vol. 2010, article ID 431436, 9 , doi:10.1155/2010/431436.

[18] Koblitz N., (1948). p-adic numbers, p-adic analysis and Zeta functions, *Springer-verlag*, pp.150.

[19] Koblitz N., (1980*).* p-adic analysis, A short course on recent work, *Cambridge University Pres*, pp. 168.

[20] Luo Q.-M., Ql F., Debnath L., (2002), Generalizations of Euler numbers and polynomials, *Hindawi publishing corp.*IJMMS2003:*61, PII. 016117120321108X*, pp.3893-3901.

[21] Özden H., Şimşek Y., Cangül İ.N., (2007*).* Euler polynomials associated with p-adic q-Euler measure, *General Mathematics*, vol.15, no. 2-3, pp. 24-37.

[22] Özden H., (2009). p-adik q-ölçüm ve uygulamaları, Uludağ Üniversitesi, doktora tezi.

[23] Pand H. and Sun Z., (2004). New identities involving Bernoulli and Euler polynomials *arxiv:Math.NT/0407363 [math. NT].*

[24] Ryoo C.S., Lee H. Y., Jung N.S., (2011). A note on the twisted q-Euler numbers and polynomialswith weight α, *Adv. Stud. Contemp. Math*. 21, pp.47-54.

[25] Schikhof W. H., (1984). Ultrametric calculus, *Cambridge University Pres,* pp. 306.

[26].Şimşek Y., (2009). Complete sum of products of (h,q)-extension of Euler polynomials and numbers*, Journal of difference equations and applications* vol. 15, no. 11, pp.1-18.