T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

n-NORMLU LİNEER UZAYLARDA I-LACUNARY YAKINSAK GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİLERİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

NURTEN FISTIKÇI

TEMMUZ 2011

n-Normlu Lineer Uzaylarda I-Lacunary Yakınsak Genelleştirilmiş Fark Dizileri

Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Nurten FISTIKÇI
Temmuz 2011

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: n-Normlu Uzaylarda I-Lacunary Yakınsak Genelleştirilmiş Fark Dizileri
Öğrencinin, Adı Soyadı: Nurten FISTIKÇI
Tez Savunma Tarihi: 21.07.2011

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ramazan KOÇ
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca (tarafımızca) okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

	İmza
Prof. Dr. Adil KILIÇ	
Doç. Dr. Ayhan ESİ	
Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ	

ÖZET

n-NORMLU LİNEER UZAYLARDA I-LACUNARY YAKINSAK GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİLERİ

FISTIKÇI, Nurten
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ
Temmuz 2011, 61 sayfa

Bu çalışmada, klasik yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklığın bir genellemesi olan I-yakınsaklık (ideal yakınsaklık), I-lacunary yakınsaklık, modülüs fonksiyonları yardımıyla tanımlanan n-normlu genelleştirilmiş fark dizi uzaylarıyla birleştirilerek bazı yeni dizi uzayları elde edilmiştir.

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

İkinci bölümde; ℓ_∞, c ve c_0 sırasıyla sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak dizi uzaylarını göstermek üzere, bu dizilerin Δ-dizi uzaylarına genişletilmesiyle oluşturulmuş pozitif bir m sayısı için $\ell_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$ ve $c_0(\Delta^m)$ genelleştirilmiş fark dizi uzaylarına ve bu uzaylar için birtakım teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde; topolojideki ideal kavramı ele alınarak bu kavram üzerinden ideal yakınsaklık ya da kısaca *I*-yakınsaklık tanımı ve bazı özellikleri verilmiştir. Ayrıca n-normlu lineer uzaylar için tanım ve örneklere değinilmiş ve son olarak, n-normlu lineer uzaylarda *I*- yakınsaklık kavramı verilmiştir.

Çalışmamızın orjinal kısmı olan son bölümde ise; $\left[N_\theta,\Omega,\Delta^m,p,\|.,\ldots,.\|,X_s\right]^I$, $\left[N_\theta,\Omega,\Delta^m,p,\|.,\ldots,.\|,X_s\right]_0^I$ ve $\left[N_\theta,\Omega,\Delta^m,p,\|.,\ldots,.\|,X_s\right]_\infty^I$ dizi uzayları inşa edilmiş ve bu uzaylardaki çeşitli kapsam bağıntıları verilmiştir. Amacımız n-normlu lineer uzaylarda modülüs fonksiyonlarının bir dizisi kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş fark dizilerinin *I*-lacunary yakınsaklığını incelemektir.

Anahtar Kelimeler: n-normlu uzaylar, Lacunary dizileri, Fark dizileri, *I*-yakınsaklık.

ABSTRACT

I-LACUNARY GENERALIZED DIFFERENCE CONVERGENT SEQUENCES IN N-NORMED SPACES

FISTIKÇI, Nurten
M.Sc. in Department of Mathematics
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ
July 2011, 61 pages

In this thesis, we obtained some new sequence spaces by combining the properties of the ideal convergence which is a generalization of ordinary convergence and statistical convergence, and the ideal lacunary convergence, of generalized difference sequences by using a sequence of moduli in n-normed space.

In the first chapter of this thesis that consisting of four chapters, we give some fundamental definitions which will be used in later chapters.

In the second chapter, to demonstrate ℓ_∞, c and c_0 respectively, bounded, convergent and null convergent sequence spaces, $\ell_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$ ve $c_0(\Delta^m)$ generalized difference sequence spaces and some theories about these spaces are taken place for an "*m*" number which is generated by expanding these sequences to Δ-sequence spaces.

In the third chapter, the concept of ideal in topology is considered, and over this concept, the definiton and some properties of ideal convergence (I-convergence) are given. And also definitions and examples for n-normed linear spaces are taken place and finally the concept of ideal convergence in n-normed linear spaces is given.

In the last chapter, which is the original part, of this thesis; $\left[N_\theta,\Omega,\Delta^m,p,\|.,...,.\|,X_s\right]^I$, $\left[N_\theta,\Omega,\Delta^m,p,\|.,...,.\|,X_s\right]_0^I$ and $\left[N_\theta,\Omega,\Delta^m,p,\|.,...,.\|,X_s\right]_\infty^I$ sequence spaces are built, and various content connections in these spaces are given. Our aim is to investigate I-lacunary convergence of generalized difference sequences by using a sequence of moduli in n-normed space.

Key Words: n-normed space, Lacunary sequence, Difference sequence, I-convergence.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında ve düzenli bir şekilde yürütülmesinde gerekli bütün imkanlarını sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve yardımlarını benden esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ' e minnet ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca bu çalışmanın oluşumunda değerli öneri ve uyarılarıyla önümü açan ve benimle fikirlerini paylaşmaktan çekinmeyen değerli hocam Doç. Dr. Ayhan ESİ' ye, bölüm hocalarıma, çalışmalarım esnasında daima yanımda olarak beni her konuda destekleyen aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ŞEKİL DİZİNİ

sayfa

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$x=(x_k)$	: Reel ya da Kompleks sayı dizisi
sup	: En küçük üst sınır
inf	: En büyük alt sınır
δ	: Yoğunluk fonksiyonu
I	: Pozitif tamsayıların alt kümelerinin ideali
ω	: Reel ya da Kompleks terimli tüm diziler uzayı
$2^{\mathbb{N}}$	: $\mathbb{N}$ nin tüm alt kümelerinin ailesi
$I-\lim_{n\to\infty} x_n=\xi$	: x dizisinin ξ ye ideal yakınsak olması
$\Omega=(f_k)$	: Modülüs fonksiyonlarının bir dizisi
$\omega(n-X)$	: n-normlu $\left(X,\|.,...,.\|\right)$ uzayında tanımlı tüm diziler uzayı
ℓ_∞	: Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
c	: Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
c_0	: Kompleks terimli sıfır diziler uzayı
Δ^m	: Genelleştirilmiş fark operatörü

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Tanım 1.1.1 : $X \neq \varnothing$ bir küme ve K, reel ya da kompleks sayıların bir cismi olsun. Eğer

$$+ : X \times X \to X \qquad\qquad \cdot : K \times X \to X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X kümesine K cismi üzerinde bir "$Lineer\,(Vektör,\ doğrusal)\,Uzay$" adı verilir.

$\forall\, x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in K$ için,

$L_1)$ $x + y = y + x$,

$L_2)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$,

$L_3)$ $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır,

$L_4)$ Her bir $x \in X$ için; $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır,

$L_5)$ $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

$L_6)$ $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

$L_7)$ $\alpha(\beta x) = (\alpha \beta)x$,

$L_8)$ $1.x = x$

Bazı lineer uzay örnekleri verelim:

Örnek 1.1.2 : $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ ya da $x_i, y_i \in \mathbb{C}$,

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ ve $\alpha \in K$ olmak üzere,

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

ve

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$$

tanımları altında $\mathbb{R}^n$ kümesi gerçel lineer uzay ve $\mathbb{C}^n$ kümesi de karmaşık bir lineer uzay olurlar.

Örnek 1.1.3 : $C[a,b]$ kümesi de $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t)$$

ve

$$(\alpha x)(t) = \alpha\, x(t)$$

tanımları altında gerçel bir lineer uzay örneğidir.

Örnek 1.1.4 : Gerçel ya da karmaşık terimli ve sınırlı bütün $x = (x_k)$ dizilerinin sırasıyla sınırlı, yakınsak,

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_k): \quad \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

$$c = \left\{ x = (x_k): \quad \lim_{k\to\infty} x_k = L, \; mevcut \right\}$$

ve özel olarak $L = 0$ için,

$$c_0 = \left\{ x = (x_k): \quad \lim_{k\to\infty} x_k = 0 \right\}$$

sıfıra yakınsak dizi uzayları, $\alpha \in K$ olmak üzere,

$$x + y = (x_k + y_k) \qquad \text{ve} \qquad \alpha x = (\alpha x_k)$$

tanımları altında gerçel ya da karmaşık birer lineer uzay olurlar.

Örnek 1.1.5 : ℓ_p dizi uzayı,

$$\ell_p = \left\{ x = (x_k): \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \,,\, x_k \in \mathbb{C} \right\}$$

$1 \le p < \infty$ olmak üzere

$$x + y = (x_k + y_k) \qquad \text{ve} \qquad \alpha x = (\alpha x_k)$$

tanımları altında bir lineer uzaydır.

Tanım 1.1.6 : X, K cismi üzerinde bir lineer uzay ve Y, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall\alpha,\beta\in K$ ve $x,y\in Y$ için

$$\alpha x+\beta y\in Y$$

oluyorsa Y ye X in bir "*lineer alt uzayı*" denir.

Tanım 1.1.7 : $X\neq\varnothing$ bir küme olmak üzere

$$d:X\times X\to\mathbb{R}^{+}\cup\{0\}$$

şeklinde tanımlanmış negatif olmayan d fonksiyonu olsun. Eğer bu d fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa d ye X kümesi üzerinde bir "*metrik*", (X,d) ikilisine de "*metrik uzay*" denir.

$\forall x,y,z\in X$ için

$M_1)$ $x\neq y$ için $d(x,y)>0$,

$M_2)$ $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$ $(M_1$ *ve* M_2 *pozitif değerlilik özelliği*$)$,

$M_3)$ $d(x,y)=d(y,x)$ (*simetri özelliği*),

$M_4)$ $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ (*üçgen eşitsizliği özelliği*),

Şimdi de birkaç metrik uzay örneği verelim:

Örnek 1.1.8 : $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi,

$$d(x,y)=|x-y|$$

uzaklığı ile aşikar bir metrik uzaydır.

Örnek 1.1.9 : $n-$*boyutlu* Öklid uzayı olarak isimlendirilen $\mathbb{R}^n$ uzayı da, $x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R}$ için $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ biçiminde sıralı n - liler kümesi olmak üzere

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2} \qquad (1.1)$$

uzaklığı ile bir metrik uzaydır.

(1.1) ile tanımlanan $d(x,y)$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metrik olduğunu gösterelim: $d(x,y)$ fonksiyonunun (M_1), (M_2) *ve* (M_3) özelliklerini sağladığı kolayca gösterilebilir. Ayrıca $d(x,y)$ fonksiyonu (M_4) üçgen eşitsizliğini de sağlar. Gerçekten,

$x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)$, $z=(z_1,z_2,...,z_n)$ olacak biçimde $\mathbb{R}^n$ de üç nokta alalım ve

$$a_k=(x_k-y_k) \qquad \text{ve} \qquad b_k=(y_k-z_k) \qquad k=(1,2,...,n)$$

olsun. Bu durumda üçgen eşitsizliği,

$$d(x,z)<d(x,y)+d(y,z)$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-z_k)^2}<\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-z_k)^2} \qquad (i)$$

ya da

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2}<\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^{\,2}}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^{\,2}} \qquad (ii)$$

şeklindeki eşitsizliğe denktir.

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k)^2}<\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^{\,2}}\;\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^{\,2}}$$

$Cauchy-Schwarz$ eşitsizliğine göre;

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^{\,2}+2\sum_{k=1}^{n}a_k\,b_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^{\,2}$$

$$<\sum_{k=1}^{n}a_k^{\,2}+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^{\,2}\sum_{k=1}^{n}b_k^{\,2}}+\sum_{k=1}^{n}b_k^{\,2}$$

$$=\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^{\,2}}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^{\,2}}\right)^2$$

elde edilir. Her iki tarafın karekökü alındığında (ii), buradan da (i) elde edilir.

Örnek 1.1.10 : $\mathbb{R}^n$ kümesini göz önüne alalım. Burada uzaklık fonksiyonunu,

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\left|x_k-y_k\right| \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlayalım. $d(x,y)$ fonksiyonunun metrik özelliklerini sağladığı kolayca görülebilir. Bu uzaya karşılık gelen metrik uzay da $\mathbb{R}_1^n$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.11 : $\mathbb{R}^n$ kümesini göz önüne alalım. İki nokta arasındaki uzaklığı, $x=(x_1,x_2,...,x_n),\ y=(y_1,y_2,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$d_0(x,y)=\max_{1\le k\le n}\left|x_k-y_k\right|$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda, $\mathbb{R}_0^n$ olarak gösterilen ve çoğu zaman $\mathbb{R}^n-$*Öklid uzayı* kadar kullanışlı olan bir metrik uzay elde etmiş oluruz.

Not: Verilen son üç örnekte aynı uzayın $\left(\mathbb{R}^n\right)$, üç farklı metrik kullanılarak farklı yollarla metrikleştirilip metrik uzaylar elde edilmesi gösterilmiştir.

Örnek 1.1.12 : $\left[a,b\right]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlanmış bütün sürekli fonksiyonların kümesi $C\left[a,b\right]$,

$$d(f,g)=\max_{a\le t\le b}\left|f(t)-g(t)\right|$$

uzaklık fonksiyonu ile bir metrik uzaydır. $C\left[a,b\right]$ uzayı, elemanları fonksiyonlardan oluştuğu için genellikle "*fonksiyon uzayı*" olarak isimlendirilir.

Örnek 1.1.13 : ω-dizi uzayı (reel veya kompleks terimli bütün dizilerin uzayı), $x=(x_k),\ y=(y_k)\in\omega$ ve $\alpha-skaler$ olmak üzere,

$$x+y=(x_k+y_k) \qquad \text{ve} \qquad \alpha x=(\alpha\, x_k)$$

koordinat dönüşümleri altında bir lineer uzaydır ve

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\,\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}$$

şeklinde tanımlanan d metriğiyle birlikte de bir metrik uzaydır. Burada 2^{-k} terimi serinin yakınsaklığını garanti altına almak için kullanılmıştır.

Örnek 1.1.14 : ℓ_∞ reel ya da kompleks terimli bütün sınırlı diziler uzayı,

$$d_\infty:\ell_\infty\times\ell_\infty\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\ \to d_\infty(x,y)=\sup_k|x_k-y_k|$$

c yakınsak diziler uzayı,

$$d_\infty:c\times c\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\ \to d_\infty(x,y)=\sup_k|x_k-y_k|$$

c_0 sıfıra yakınsak diziler uzayı,

$$d_\infty:c_0\times c_0\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\ \to d_\infty(x,y)=\max_k|x_k-y_k|$$

şeklinde tanımlanan d_∞ metriğiyle birlikte birer metrik uzaylardır.

Tanım 1. 1. 15 : (X,d) bir metrik uzay ve $x=(x_k)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ için $k>k_0$ olduğunda

$$d(x_k,L)<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $k_0\in\mathbb{N}$ ve $L\in X$ varsa, $x=(x_k)$ dizisi X de "*yakınsaktır*" denir ve

$$x_k \to L \qquad \text{veya} \qquad \lim_{k\to\infty} x_k = L$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1. 1. 16 : X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer,

$$\|.\| : X \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$$

$$x \to \|x\|$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu $\|.\|$ dönüşümüne X üzerinde bir "*norm*" $(X, \|.\|)$ ikilisine de bir "*normlu uzay*" adı verilir.

$\forall x, y \in X$ için,

$N_1)$ $\|x\| \geq 0$,

$N_2)$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

$N_3)$ $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\alpha \text{ skaler})$,

$N_4)$ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(N_3) şartı, $\|\alpha x\| = |\alpha|^p \|x\| \quad (\alpha \in K)$ şeklinde olursa bu taktirde X e bir "$p-$*normlu uzay*" denir.

Örnek 1. 1. 17 : $\mathbb{R}^n$; $n-$*boyutlu Öklid uzayı*, $\mathbb{R}$ üzerinde bir normlu lineer uzaydır ve $\mathbb{R}^n$ üzerindeki norm,

$$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{için} \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

şeklinde tanımlıdır, *Raymond vd. ,(2001).*

Örnek 1. 1. 18 : $\ell_2 = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \,,\, x_k \in \mathbb{C} \right\}$ şeklinde tanımlı "*Hilbert dizi uzayı*" , $x = (x_k) \in \ell_2$ olmak üzere,

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

normu ile birlikte bir normlu uzaydır.

Tanım 1. 1. 19 : $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $x=(x_k)$, bu uzayda bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall k > k_0$ iken

$$\|x_k - x\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa "$x=(x_k)$ *dizisi* x *noktasına yakınsaktır*" denir. $x=(x_k)$ dizisi x noktasına yakınsak ise;

$$x_k \to x \qquad \text{veya} \qquad \lim_{k\to\infty} x_k = x$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1. 1. 20 : $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve bu uzayda bir dizi $x=(x_k)$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall k, \ell > k_0$ iken

$$\|x_k - x_\ell\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x=(x_k)$ dizisine $(X, \|.\|)$ uzayında bir "*Cauchy dizisi*" denir.

Tanım 1. 1. 21 : $(X, \|.\|)$ normlu uzayı tam ise; yani bu uzayda alınan her Cauchy dizisi, uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya "*Banach uzayı*" denir.

Örnek 1. 1. 22 : ℓ_∞, c ve c_0 dizi uzayları,

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

normu ile birlikte birer Banach uzayıdırlar.

Tanım 1. 1. 23 : Bir (X, d) metrik uzayında, her Cauchy dizisi yakınsak ise bu metrik uzaya "*Tam metrik uzay*" adı verilir.

Örnek 1. 1. 24 : $X \neq \varnothing$ bir küme ve bu küme üzerinde,

$$d(x,y)=\begin{cases} 0 \ , & x=y \ \ ise, \\ 1 \ , & x\neq y \ \ ise, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan metriğe "*ayrık metrik*" ve (X,d) ikilisine de "*ayrık uzay*" ya da "*ayrık metrik uzay*" denir. Her ayrık metrik uzay bir tam metrik uzaydır.

Tanım 1. 1. 25 : $(X,\|.\|)$ bir normlu uzay olsun. X bir Banach uzayı ve

$$\tau_k : X \to \mathbb{C}$$

$$x \to \tau_k(x)=x_k \qquad (k=1,2,3,...)$$

dönüşümü sürekli ise X e bir "$BK-uzayı$" denir.

Burada koordinat fonksiyonlarının sürekli olması aşağıdaki şekilde tanımlanır:

(x_n), X de bir dizi ve $x \in X$ olsun.

$$\tau : X \to Y$$

$$x_n \to x \quad iken \quad \tau(x_n) \to \tau(x)$$

dir. BK-uzayındaki B ve K harfleri "*Banach*" ve Almanca' daki "*Koordinate*" kelimelerinden gelmektedir.

Tanım 1. 1. 26 : Bir X vektör uzayının bir Y alt kümesi verilsin. Eğer $y_1, y_2 \in Y$ olduğunda,

$$M=\{y \in Y : y=\lambda y_1+(1-\lambda)y_2 \ , \quad 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset Y$$

oluyorsa, Y alt kümesine "*konveks küme*" denir.

Tanım 1. 1. 27 : f fonksiyonu, $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu f fonksiyonuna bir "*modülüs fonksiyonu*" adı verilir.

(i) $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$,

(ii) Her $x \geq 0$ ve her $y \geq 0$ için; $f(x+y) \leq f(x)+f(y)$,

(iii) f fonksiyonu artandır,

(iv) f fonksiyonu sıfır noktasında sağdan süreklidir.

(ii) ve (iv) özelliklerinden, f fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığının her yerinde sürekli olmak zorundadır.

(ii) şartından, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$f(n\,x) \leq n\,f(x)$$

yazabiliriz. Ayrıca bir modülüs fonksiyonu sınırlı ya da sınırsız bir fonksiyon olabilir. Örneğin;

$$f(x) = x(1+x)^{-1} \qquad \text{ve} \qquad f(x) = x$$

fonksiyonlarının her ikisi de modülüs fonksiyonu olup ilki sınırlı, ikincisi ise sınırsız bir fonksiyondur.

$\Omega = (f_k)$ modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. $\Omega = (f_k)$ dizisinin aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim:

(v) $\forall x \in [0,\infty)$ *için* $\sup\limits_k f_k(x) < \infty$,

(vi) $\forall k \in \mathbb{N}$ *için* $\lim\limits_{x\to 0} f_k(x) = 0$

olur. Eğer $\forall k \in \mathbb{N}$ için $f_k = f$ alınırsa (v) ve (vi) şartları otomatik olarak sağlanır.

Modülüs fonksiyonu kullanarak bazı yazarlar dizi uzayları tanımlamışlardır. Bunlardan bazıları *I.J.Maddox* (1986), *W.H.Ruckle* (1973) dır.

Tanım 1. 1. 28 : X bir lineer uzay ve

$$g : X \to \mathbb{R}$$

tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer g fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa g ye bir "*paranorm*", (X,g) ikilisine de bir "*paranormlu uzay*" adı verilir.

$P_1)$ $g(\theta) = 0$,

$P_2)$ $g(x) = g(-x)$,

$P_3)$ $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$,

$P_4)$ $\lambda \to \lambda_0, \quad x \to x_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda x \to \lambda_0 x_0$

Bu çalışma boyunca sıkça kullanacağımız bir eşitsizliği verelim:

$p = (p_k)$ dizisi,

$$0 < \inf_k p_k = h \le p_k \le \sup_k p_k = H < \infty$$

olacak şekilde reel sayıların pozitif bir dizisi ve

$$K = \max\left(1, 2^{H-1}\right)$$

olsun. Bu taktirde, $\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\left|a_k + b_k\right|^{p_k} \le K\left(\left|a_k\right|^{p_k} + \left|b_k\right|^{p_k} \right) \tag{1.3}$$

eşitsizliği sağlanır.

BÖLÜM 2

FARK DİZİ UZAYLARI

2.1 GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

H.Kızmaz tarafından tanımlanan fark dizi uzayları (1981), *M. Et ve R. Çolak* tarafından genelleştirilmiştir (1995). Daha birçok araştırmacı tarafından çalışılan fark dizi uzaylarının genelleştirmesi olan genelleştirilmiş fark dizi uzayları, bu bölümde tanıtılacak ve birtakım özellikleri verilecektir.

Tanım 2.1.1 : ℓ_∞, c ve c_0 sırasıyla; sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak $x=(x_k)$ dizilerinin lineer uzaylarını göstersinler. Bu uzaylar için norm:

$k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ pozitif tamsayı olmak üzere,

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

biçiminde ifade edilir. $x=(x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olmak üzere,

$$\Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1})$$

şeklinde tanımlanan $\Delta -$ *fark operatörü*, bir lineer operatördür ve *Kızmaz* $[16]$ tarafından,

$$\ell_\infty(\Delta) = \{x=(x_k): \quad \Delta x \in \ell_\infty\}$$

$$c(\Delta) = \{x=(x_k): \quad \Delta x \in c\}$$

$$c_0(\Delta) = \{x=(x_k): \quad \Delta x \in c_0\}$$

şeklinde tanımlanıp

$$\|x\|_{\Delta} = |x_1| + \|\Delta x\|_{\infty}$$

normuna göre birer Banach uzayı oldukları gösterilmiştir.

$m \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$m = 0$ için; $\qquad \Delta^0 x = (\Delta^0 x_k) = (x_k)$

$m = 1$ için; $\qquad \Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1})$

$\vdots$

$m = m$ için; $\qquad \Delta^m x = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$

$$\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$$

olur. Özel olarak $m = 2$ için $\Delta^2 x = (\Delta^2 x_k) = (\Delta x_k - \Delta x_{k+1})$ olup,

$$\begin{aligned} \Delta^2 x_k &= \sum_{v=0}^{2} (-1)^v \binom{2}{v} x_{k+v} \\ &= \binom{2}{0} x_k - \binom{2}{1} x_{k+1} + \binom{2}{2} x_{k+2} \\ &= x_k - 2x_{k+1} + x_{k+2} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\ell_\infty(\Delta^2) = \left\{ x = (x_k) : \quad \Delta^2 x \in \ell_\infty \right\}$$

$$c(\Delta^2) = \left\{ x = (x_k) : \quad \Delta^2 x \in c \right\}$$

$$c_0(\Delta^2) = \left\{ x = (x_k) : \quad \Delta^2 x \in c \right\}$$

uzayları elde edilir. Burada $\Delta^2 x = (\Delta^2 x_k) = (\Delta x_k - \Delta x_{k+1})$ olup, $Et[9]$ tarafından bu uzayların,

$$\|x\|_{\Delta} = |x_1| + |x_2| + \|\Delta^2 x\|_{\infty}$$

normuyla birlikte birer Banach uzayı oldukları gösterilmiştir. Daha sonra
fark dizi uzaylarının genelleştirmesi olan ve *Et ve Çolak*$[2]$ tarafından tanımlanan

$$\ell_\infty(\Delta^m) = \left\{x = (x_k): \quad \Delta^m x \in \ell_\infty\right\}$$

$$c(\Delta^m) = \left\{x = (x_k): \quad \Delta^m x \in c\right\}$$

$$c_0(\Delta^m) = \left\{x = (x_k): \quad \Delta^m x \in c\right\}$$

uzaylarına sırasıyla sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak genelleştirilmiş fark dizi uzayları denir. Ayrıca bu uzaylar

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^{m} |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normuyla birlikte birer Banach uzayıdırlar, *Et ve Çolak* [2].

Bu uzayların sağladığı aşağıdaki özellikleri verelim:

Teorem 2.1.2 : $\ell_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$ ve $c_0(\Delta^m)$ dizi uzayları birer lineer uzaydır.

İspat: $Z\,;\ell_\infty$, c ve c_0 lineer uzaylarından birini temsil etmek üzere $Z(\Delta^m)$ dizi uzayının da bir lineer uzay olduğunu göstereceğiz.

(i) $x, y \in Z(\Delta^m)$ olsun.

$$x \in Z(\Delta^m) \Rightarrow Z(\Delta^m) = \left\{x = (x_k): \quad \Delta^m x \in Z\right\}$$
$$\Rightarrow \Delta^m x \in Z$$

ve

$$y \in Z(\Delta^m) \Rightarrow Z(\Delta^m) = \left\{y = (y_k): \quad \Delta^m y \in Z\right\}$$
$$\Rightarrow \Delta^m y \in Z$$

olduğundan $\Delta^m x \in Z$ ve $\Delta^m y \in Z$ dir. $Z\,;\ell_\infty$, c ve c_0 lineer uzaylarından birini temsil ettiğinden,

$$\Delta^m x + \Delta^m y \in Z$$

ve $\Delta^m -$ *genelleştirilmiş fark operatörü* lineer olduğundan

$$\Delta^m (x + y) \in Z$$

yazabiliriz. Buradan,

$$\left(x+y\right)\in Z(\Delta^m)$$

elde edilir.

(ii) $x\in Z(\Delta^m)$ ve α bir skaler olsun. Bu taktirde $\Delta^m x\in Z$ olur. Yine Z bir lineer uzayı temsil ettiğinden,

$$\alpha\,\Delta^m x\in Z$$

ve $\Delta^m -$ *genelleştirilmiş fark operatörü* lineer olduğundan,

$$\Delta^m(\alpha x)\in Z$$

buradan da,

$$\alpha\, x\in Z(\Delta^m)$$

elde edilir.

Teorem 2.1.3 : $Z\,;\ell_\infty$, c ve c_0 lineer uzaylarından birini temsil etmek üzere, $Z(\Delta^m)$ dizi uzayı

$$\|x\|_\Delta=\sum_{i=1}^{m}|x_i|+\|\Delta^m x\|_\infty$$

normu ile birlikte bir normlu uzaydır.

İspat: $\|x\|_\Delta$ fonksiyonun norm özelliklerini sağladığını gösterelim:

$N_1)$ $\|x\|_\Delta=\sum_{i=1}^{m}|x_i|+\|\Delta^m x\|_\infty\geq 0$,

$N_2)$ $\|x\|_\Delta=\sum_{i=1}^{m}|x_i|+\|\Delta^m x\|_\infty=0\ \Leftrightarrow\ x=\theta$ sağlandığını gösterelim,

$(\Rightarrow)$: $\|x\|_\Delta=\sum_{i=1}^{m}|x_i|+\|\Delta^m x\|_\infty=0$ olsun. Bu taktirde,

$x_1=x_2=...=x_m=0$ ve $\forall k\in\mathbb{N}$ için;

$$\left|\binom{m}{0}x_k-\binom{m}{1}x_{k+1}+...+(-1)^m\binom{m}{m}x_{k+m}\right|=0$$

olduğundan,

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k = 0$ elde edilir ki buradan, $x = \theta$ bulunur.

Tersine,

$(\Leftarrow)$: $x = \theta$ olması halinde,

$$\|x\|_\Delta = 0$$

olduğu aşikardır.

$N_3)$ $\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^{m} |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$ olmak üzere;

$$\|\alpha x\|_\Delta = \sum_{i=1}^{m} |\alpha x_i| + \|\Delta^m(\alpha x)\|_\infty$$

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\|_\Delta &= \sum_{i=1}^{m} |\alpha x_i| + \sup_k |\Delta^m(\alpha x_k)| \\
&= \sum_{i=1}^{m} |\alpha x_i| + \sup_k \left| \sum_{v=0}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} \alpha x_{k+v} \right| \\
&= |\alpha| \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i| + \underbrace{\sup_k \left| \sum_{v=0}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} \right|}_{\|\Delta^m x\|_\infty} \right) \\
&= |\alpha| \|x\|_\Delta
\end{aligned}$$

$N_4)$

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_\Delta &= \sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i| + \|\Delta^m(x+y)\|_\infty \\
&= \sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i| + \|\Delta^m x + \Delta^m y\|_\infty \\
&\leq \underbrace{\sum_{i=1}^{m} |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty}_{\|x\|_\Delta} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} |y_i| + \|\Delta^m y\|_\infty}_{\|y\|_\Delta} \\
&\leq \|x\|_\Delta + \|y\|_\Delta
\end{aligned}$$

olur.

Teorem 2.1.4 : $(\ell_\infty(\Delta), \|.\|_\Delta)$ uzayı,

$$\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile birlikte bir Banach uzayıdır.

İspat: Her $n \in \mathbb{N}$ için;

$$x^n = (x_i^n) = (x_1^n, x_2^n, ...) \in \ell_\infty(\Delta)$$

olmak üzere (x^n) dizisi, $\ell_\infty(\Delta)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Buradan,

$$\left\|x^n - x^m\right\|_\Delta = \left|x_1^n - x_1^m\right| + \left\|\Delta x^n - \Delta x^m\right\|_\infty \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

olur. $n, m \to \infty$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için;

$$\left|x_k^n - x_k^m\right| \to 0$$

elde ederiz. Buradan, $(x_k^n) = (x_k^1, x_k^2, ...)$ dizisi kompleks sayılar kümesi $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ tam olduğundan, $\mathbb{C}$ de alınan her Cauchy dizisi yakınsak olur. Dolayısıyla (x_k^n) dizisinin de $\forall k \in \mathbb{N}$ için yakınsayacağı bir x_k elemanı mevcuttur. Bu nedenle,

$$\lim_n x_k^n = x_k$$

olur. Ayrıca $\forall \varepsilon > 0$ için (x^n) bir Cauchy dizisi olduğu için $\forall n, m \geq N$ ve $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\left\|x^n - x^m\right\|_\Delta < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ vardır. Bu yüzden,

$$\left|x_1^n - x_1^m\right| < \varepsilon$$

ve

$$\left\|\Delta x^n - \Delta x^m\right\|_\infty = \left\|\left(x_k^n - x_{k+1}^n\right) - \left(x_k^m - x_{k+1}^m\right)\right\|_\infty = \left\|x_{k+1}^n - x_{k+1}^m - \left(x_k^n - x_k^m\right)\right\|_\infty < \varepsilon$$

olur ve $\forall n \geq N$ için;

$$\lim_m \left|x_1^n - x_1^m\right| = \left|x_1^n - x_1\right| \le \varepsilon$$

$$\lim_m \left|x_{k+1}^n - x_{k+1}^m - \left(x_k^n - x_k^m\right)\right| = \left|x_{k+1}^n - x_{k+1} - \left(x_k^n - x_k\right)\right| \le \varepsilon$$

bulunur. ε , k ya bağlı olmadığından,

$$\sup_k \left|x_{k+1}^n - x_{k+1} - \left(x_k^n - x_k\right)\right| \le \varepsilon$$

elde edilir.

Sonuç olarak her $n \ge N$ için

$$\begin{aligned}\left\|x^n - x\right\|_\Delta &= \left|x_1^n - x_1\right| + \left\|\Delta x^n - \Delta x\right\|_\infty \\ &= \underbrace{\left|x_1^n - x_1\right|}_{\le\varepsilon} + \underbrace{\left|x_{k+1}^n - x_{k+1} - \left(x_k^n - x_k\right)\right|}_{\le\varepsilon} \le 2\varepsilon\end{aligned}$$

olur. Buradan $\ell_\infty(\Delta)$ uzayında aldığımız bir (x^n) Cauchy dizisi için,

$$x^n \to x \quad (n \to \infty)$$

elde ederiz.

Şimdi $x \in \ell_\infty(\Delta)$ olduğunu gösterelim.

$$x \in \ell_\infty(\Delta) \Rightarrow \Delta x = (\Delta x_k) \in \ell_\infty$$

olur.

$$\begin{aligned}\left|\Delta x_k\right| = \left|x_k - x_{k+1}\right| &= \left|x_k - x_k^N + x_k^N - x_{k+1}^N + x_{k+1}^N - x_{k+1}\right| \\ &\le \left|x_k^N - x_{k+1}^N\right| + \left\|x^N - x\right\|_\Delta \\ &= O(1)\end{aligned}$$

bu ise $x = (x_k) \in \ell_\infty(\Delta)$ olması demektir.

Bunun yanısıra $\ell_\infty(\Delta)$ Banach uzayı, sürekli koordinatlara sahip olduğundan, yani

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \text{için} \quad n \to \infty \quad \text{iken} \quad \left\|x^n - x\right\|_\Delta \to 0 \quad \text{ise;} \quad \left|x_k^n - x_k\right| \to 0$$

sağlandığından aynı zamanda bir BK-uzayıdır.

Teorem 2.1.5 : $Z\,;\ell_\infty$, c ve c_0 lineer uzaylarından birini temsil etmek üzere,

$$\| x \|_\infty = \sup_k |x_k|$$

normu ile birlikte bir Banach uzayı ise; $Z(\Delta^m)$ dizi uzayı da,

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^{m} |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normu ile birlikte bir Banach uzayıdır, *Et ve Çolak* $[2]$.

Teorem 2.1.6 : $Z\,;\ell_\infty$, c ve c_0 lineer uzaylarından birini temsil etmek üzere,

$$\| x \|_\infty = \sup_k |x_k|$$

normu ile bir BK-uzayı ise; $Z(\Delta^m)$ dizi uzayı da,

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^{m} |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normu ile bir BK-uzayıdır, *Et* $[9]$.

İspat: Z, $\| \,.\, \|_\infty$ normu ile bir Banach uzayı olduğundan ve

$$\|x^n - x\|_\Delta \to 0 \quad (n \to \infty),$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ için } \quad |x_k^n - x_k| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

olması gerektiğinden , $Z(\Delta^m)$ dizi uzayı bir BK-uzayıdır.

Teorem 2.1.7 :

(i) $c_0(\Delta^m) \subset c_0(\Delta^{m+1})$ ve $c_0(\Delta^m) \neq c_0(\Delta^{m+1})$

(ii) $c(\Delta^{m-1}) \subset c(\Delta^m)$ ve $c(\Delta^{m-1}) \neq c(\Delta^m)$

(iii) $\ell_\infty(\Delta^{m-1}) \subset \ell_\infty(\Delta^m)$ ve $\ell_\infty(\Delta^{m-1}) \neq \ell_\infty(\Delta^m)$

dir.

İspat:

(i) $x \in c_0(\Delta^m)$ alalım. Bu taktirde $\Delta^m x_k \to 0 \quad (k \to \infty)$ olur.

$$\left|\Delta^{m+1} x_k\right| = \left|\Delta^m x_k - \Delta^m x_{k+1}\right| \leq \left|\Delta^m x_k\right| + \left|\Delta^m x_{k+1}\right| \to 0 \quad (k \to \infty)$$

olduğundan $x \in c_0(\Delta^{m+1})$ olur.

$c_0(\Delta^m) \neq c_0(\Delta^{m+1})$ olduğunu bir örnekle gösterelim:

$x = (x_k) = (k^m)$ dizisini ele alalım. Bu durumda $\forall k \in \mathbb{N}$ için;

$$\Delta^{m+1}(k^m) = 0 \qquad \text{ve} \qquad \Delta^m(k^m) = (-1)^m m!$$

dir. Tümevarım kullanarak ispatı gösterirsek,

$x = (x_k) = (k^m)$ için $\Delta^{m+1}(k^m) = 0$ dır.

$m = 1$ için; $x = (k)$ ve

$$\Delta^2(x_k) = \Delta^2(k) = \sum_{v=0}^{2} (-1)^v \binom{2}{v} (k+v)$$
$$= k - 2(k+1) + (k+2) = 0$$

$m = n-1$ için; $x = (k^{n-1})$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\Delta^n(x_k) = 0$ olduğunu kabul edip,

$m = n$ için; $\Delta^{n+1}(k^n) = 0$ olduğunu gösterelim.

$$\Delta^{n+1}(x_k) = \underbrace{\Delta^n x_k}_{0} - \underbrace{\Delta^n x_{k+1}}_{0} = 0$$

olur.

$x = (x_k) = (k^m)$ için; $\Delta^m(x_k) = \Delta^m(k^m) = (-1)^m m!$ dir.

$m = 1$ için; $x = (x_k) = (k)$ ve

$$\Delta(x_k) = (x_k - x_{k+1})$$
$$= k - (k+1) = (-1)\ 1!$$

$m = n-1$ için; $x = (x_k) = (k^{n-1})$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\Delta^{n-1}(x_k) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

olduğunu kabul edip,

$m=n$ için; $x=(x_k)=(k^n)$ ve $\Delta^n(x_k)=(-1)^n n!$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\Delta^n(x_k)&=\Delta^{n-1}\left(\Delta(k^n)\right)=\Delta^{n-1}\left(k^n-(k+1)^n\right)\\&=-\left[\binom{n}{1}\Delta^{n-1}(k^{n-1})+\binom{n}{2}\Delta^{n-1}(k^{n-2})+\ldots+\binom{n}{n}\Delta^{n-1}(1)\right]\\&=-n\,\Delta^{n-1}(k^{n-1})\\&=-n\left[(-1)^{n-1}(n-1)!\right]\\&=(-1)^n\,n!\end{aligned}$$

O halde,

$$x=(x_k)=(k^m)\in c_0(\Delta^{m+1})-c_0(\Delta^m)$$

olur.

(ii) $x\in c(\Delta^{m-1})$ seçelim. Bu taktirde en az bir L için;

$$\Delta^{m-1}x_k\to L\quad(k\to\infty)$$

olur. Buradan,

$$\left|\Delta^m x_k\right|=\left|\Delta^{m-1}x_k-\Delta^{m-1}x_{k+1}\right|\le\left|\Delta^{m-1}x_k\right|+\left|\Delta^{m-1}x_{k+1}\right|$$

$$\le\left|\Delta^{m-1}x_k-L\right|+\left|\Delta^{m-1}x_{k+1}-L\right|\to 0$$

bulunur. Öyleyse $\Delta^m x_k\in c_0\subset c$ elde edilir. Böylece $x\in c(\Delta^m)$ olur.

$c(\Delta^{m-1})\neq c(\Delta^m)$ olduğunu bir örnekle gösterelim:

$x=(x_k)=(k^m)$ dizisini seçersek $\forall k\in\mathbb{N}$ için

$$\Delta^m(x_k)=(-1)^m m!\quad\text{ve}\quad\Delta^{m-1}(x_k)=(-1)^{m-1}m!\left(k+\frac{m-1}{2}\right)$$

olur.

$x=(x_k)=(k^m)$ için $\Delta^m(x_k)=(-1)^m m!$ dir.

Gerçekten (i) den $x=(x_k)=(k^m)$ için; $\Delta^m(x_k)=(-1)^m m!$ dir. O halde

$$x\in c(\Delta^m)-c(\Delta^{m-1})$$

dir.

$x=(x_k)=(k^m)$ için; $\Delta^{m-1}(x_k)=(-1)^{m+1}m!\left(k+\dfrac{m-1}{2}\right)$ dir.

$m=1$ için; $x=(x_k)=(k)$ ve $\Delta^0(x_k)=(-1)^2\,1!\left(k+\dfrac{1-1}{2}\right)=k$

$m=n$ için; $x=(x_k)=(k^n)$ ve $\forall k\in\mathbb{N}$ için

$$\Delta^{n-1}(x_k)=(-1)^{n+1}n!\left(k+\frac{n-1}{2}\right)$$

olduğunu kabul edip,

$m=n+1$ için; $x=(x_k)=(k^{n+1})$ ve

$$\Delta^n(x_k)=(-1)^{n+2}\left(n+1\right)!\left(k+\frac{n}{2}\right)$$

olduğunu gösterelim.

$$\Delta^n(x_k)=\Delta^{n-1}\left(\Delta(k^{n+1})\right)=\Delta^{n-1}\left(k^{n+1}-(k+1)^{n+1}\right)$$

$$=-\left[\binom{n+1}{1}\Delta^n(k^n)+\binom{n+1}{2}\Delta^n(k^{n-1})+\ldots+\binom{n+1}{n+1}\Delta^n(1)\right]$$

$$=-\left[(n+1)(-1)^{n+1}n!\left(k+\frac{n-1}{2}\right)+\frac{(n+1)!}{(n-1)!2!}(-1)^{n+1}(n-1)!\right]$$

$$=(-1)^{n+2}(n+1)!\left(k+\frac{n}{2}\right)$$

olup, $x\in c(\Delta^m)-c(\Delta^{m-1})$ olur.

(iii) $x\in\ell_\infty(\Delta^{m-1})$ olsun. Böylece $\forall k\in\mathbb{N}$ için

$$\Delta^{m-1}(x_k)\le K$$

olacak şekilde en az bir $K>0$ vardır. Bu taktirde $\forall k\in\mathbb{N}$ için

$$\left|\Delta^m x_k\right| = \left|\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}\right| \le \underbrace{\left|\Delta^{m-1} x_k\right|}_{\le K} + \underbrace{\left|\Delta^{m-1} x_{k+1}\right|}_{\le K} \le 2K$$

ve buradan, $x \in \ell_\infty(\Delta^m)$ elde edilir.

$\ell_\infty(\Delta^{m-1}) \ne \ell_\infty(\Delta^m)$ olduğunu da yine bir örnekle gösterelim.

$x = (x_k) = (k^m)$ dizisini seçelim. Böylece $\forall k \in \mathbb{N}$ için;

$$\Delta^m(x_k) = (-1)^m m! \qquad \text{ve} \qquad \Delta^{m-1}(x_k) = (-1)^{m+1} m! \left(k + \frac{m-1}{2}\right)$$

dir. Buradan da $x \in \ell_\infty(\Delta^m) - \ell_\infty(\Delta^{m-1})$ elde edilir.

$x = (x_k) = (k^m)$ için; $\Delta^m(x_k) = (-1)^m m!$ olur. Gerçekten (i) den $x = (x_k) = (k^m)$ için;

$$\Delta^m(x_k) = (-1)^m m!$$

dir. O halde,

$$x \in \ell_\infty(\Delta^m) - \ell_\infty(\Delta^{m-1})$$

olur.

$x = (x_k) = (k^m)$ için; $\Delta^{m-1}(x_k) = (-1)^{m+1} m! \left(k + \frac{m-1}{2}\right)$ dir.

Gerçekten (ii) den $x = (x_k) = (k^m)$ için

$$\Delta^{m-1}(x_k) = (-1)^{m+1} m! \left(k + \frac{m-1}{2}\right)$$

dir. O halde, $x \in \ell_\infty(\Delta^m) - \ell_\infty(\Delta^{m-1})$ olur.

BÖLÜM 3

n-NORMLU LİNEER UZAYLARDA *I*- YAKINSAKLIK

Bu bölümde, N pozitif tamsayıların alt kümelerinin bir ideali I olmak üzere, $n-normlu$ lineer uzaylarda dizilerin $I-yakınsaklık$ kavramı verilecektir. Ayrıca $n-normlu$ uzaylarda, $I-yakınsak$ dizilerin bazı özellikleri incelenecektir. Öncelikle ideal yakınsaklık ve *n*-norm kavramları tanıtılacak, son olarak da bu bölümde *n*-normlu uzaylarda ideal yakınsaklıkla ilgili çeşitli tanım ve teoremler verilecektir.

3.1 *I*-YAKINSAKLIK

Doğal sayıların alt kümelerinin ideallerini temel alarak istatistiksel yakınsaklık kavramı daha da genelleştirilmiştir. I-yakınsaklık (ideal yakınsaklık) olarak bilinen bu kavram kullanılarak, istatistiksel yakınsaklığın bazı özelliklerinin benzerleri $Demirci(2001)$, $Lahiri\ ve\ Pratulananda(2003)$, $Demirci\ ve\ Yardımcı$ (2004) ve $P.Kostyrko\ vd.(2005)$ tarafından verilmiştir. Bir metrik uzayda ideal yakınsaklık ve ideal yakınsaklığın bazı özellikleri $P.Kostryrko\ vd.$ tarafından incelenmiştir. I-yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirilmesidir. İlk olarak ideal kavramı tanıtılacak, daha sonra I-yakınsaklık kavramı ve temel özellikleri verilecektir.

Şimdi ideal ve süzgeç tanımlarını hatırlayalım,

Tanım 3.1.1 : $X \neq \varnothing$ bir küme olsun. X in alt kümelerinin bir $I \subseteq 2^X$ ailesi,

(i) $\varnothing \in I$,

(ii) $\forall A, B \in I$ için $A \cup B \in I$,

(iii) $\forall A \in I$ ve $B \subset A$ için $B \in I$

koşullarını sağlıyor ise I ya X in bir "*İdeali*" denir, $Kuratowski$, (1958).

Tanım 3.1.2 : $X \neq \varnothing$ bir küme olsun. Eğer $F \subset 2^X$ kümeler ailesi için,

(i) $\varnothing \notin F$

(ii) $\forall A, B \in F$ için $A \cap B \in F$,

(iii) $\forall A \in F$ ve $A \subset B \subset X$ için $B \in F$

koşulları sağlanıyor ise F kümeler ailesine, X kümesinde bir "*Süzgeç*(*Filtre*)" denir, *Nagata*, (1974).

Tanım 3.1.3 : $I \neq \varnothing$ ve $X \notin I$ ise; I idealine "*aşikar olmayan* (*non* − *trivial*) *ideal*" denir, *Kuratowski*, (1958).

Şimdi bu tanımlara ilişkin bazı örnekler verelim:

Örnek 3.1.4 : $I_0 = \{\varnothing\}$ olsun. Bu I_0 − *ideali*, $\mathbb{N}$ nin boş olmayan en ince *aşikar olmayan* (*non* − *trivial*) idealidir.

Gerçekten $I_0 = \{\varnothing\}$ olduğundan, I_0 ın ideal olduğu açıktır. Ayrıca $\mathbb{N} \notin I_0$ olduğundan, I_0 bir *non* − *trivial* idealdir.

I_0 ın $\mathbb{N}$ de boş olmayan en ince (en küçük) *non* − *trivial* ideal olduğunu gösterelim:

(i) $\varnothing \in I_0$,

(ii) $\varnothing \in I_0 \Rightarrow \varnothing \cup \varnothing = \varnothing \in I_0$,

(iii) $\varnothing \in I_0, \varnothing \subseteq \varnothing \Rightarrow \varnothing \in I_0$

ve $\mathbb{N} \neq \varnothing$ olduğundan $\mathbb{N} \notin I_0$ olup, I_0 ideali $\mathbb{N}$ de bir *non* − *trivial* idealdir.

Kabul edelim ki; $I_1 \subseteq I_0$ olacak şekilde, $\mathbb{N}$ de *aşikar olmayan* (*non* − *trivial*) bir ideal I_1 olsun. Bu durumda bir $A \subseteq \mathbb{N}$ kümesi vardır, öyle ki $A \in I_0 \backslash I_1$ dir. Buradan $A \in I_0$ ve $A \notin I_1$ dir. $I_0 = \{\varnothing\}$ olduğundan $A = \varnothing$ ve $\varnothing \in I_1$ olur ki, bu ise I_1 in $\mathbb{N}$ de *aşikar olmayan* (*non* − *trivial*) ideal olması ile çelişir. O halde I_0, $\mathbb{N}$ de boş olmayan en küçük *aşikar olmayan* (*non* − *trivial*) bir idealdir.

Örnek 3.1.5 : $\varnothing \neq M \subset \mathbb{N}$, $M \neq \mathbb{N}$ olsun. $I_M = 2^M$ olarak alalım. Bu durumda I_M, $\mathbb{N}$ nin bir $non-trivial$ idealidir.

Şimdi I_M in bir $non-trivial$ ideal olduğunu gösterelim:

(i) $I_M = 2^M$ olduğundan $\varnothing \in I_M$ $\left(\varnothing \in 2^M\right)$ olur,

(ii) $\forall A, B \in I_M$ için $A, B \subset M$ olup, $A \cup B \subset M$ olur. Böylece $A \cup B \in I_M$ $\left(I_M = 2^M\right)$ olur.

(iii) $\forall A \in I_M$ ve $B \subset A$ için $B \in I_M$ $\left(I_M = 2^M\right)$ olduğunu gösterelim;

$B \subset A$ ve $A \subset M$ olduğundan, $B \subset M$ yani $B \in I_M$ olur. Ayrıca $M \neq \mathbb{N}$ olduğundan, $\mathbb{N} \notin I_M$ olur.

Böylece I_M bir *aşikar olmayan* $(non-trivial)$ idealdir. Ayrıca bir önceki örnek $M = \varnothing$ için bu örneğin bir özel halidir.

Şimdi de ideal ile süzgeç(filtre) arasındaki önemli bağıntıyı verelim:

Önerme 3.1.6 : $I \subset 2^X$ idealinin *aşikar olmayan* $(non-trivial)$ bir ideal olması için gerek ve yeter koşul,

$$F(I) = \{M \subset X : \exists A \in I : M = X \setminus A\}$$

kümeler ailesinin X kümesinde bir süzgeç(filtre) olmasıdır.

İspat: (i) $X \setminus X = \varnothing$ olmasına rağmen $X \notin I$ olup, $\varnothing \notin F(I)$ olur.

(ii) $M_1, M_2 \in F(I) \Rightarrow M_1 = X \setminus A$ $\quad ve \quad$ $M_2 = X \setminus B$ olacak şekilde $\exists A, B \in I$ vardır. Buradan,

$$M_1 \cap M_2 = (X \setminus A) \cap (X \setminus B) = X \setminus (A \cup B)$$

olur. $A \cup B \in I$ olduğundan, $M_1 \cap M_2 \in F(I)$ dır.

(iii) $M_1 \in F(I)$ ve $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_1 = X \setminus A$ olacak şekilde $\exists A \in I$ vardır ve $M_2 = X \setminus B$ olacak şekilde $\exists B \in I$ bulmalıyız.

$$M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow (X \setminus A) \subseteq (X \setminus B) \Rightarrow B \subseteq A$$

olur. $A \in I$ olduğundan $B \in I$ olup, $M_2 \in F(I)$ elde edilir.

Tanım 3.1.7 : I, X kümesinin bir *aşikar olmayan* $(non-trivial)$ ideali olmak üzere; Eğer her bir $x \in X$ için $\{x\} \in I$ ise I idealine X de bir "$Admissible(kabul\ edilebilir, uygun)\ ideal$" denir, $Kostyrko\ vd.,(2000)$.

Örnek 3.1.8 : $\mathbb{N}$ nin tüm sonlu alt kümelerinin sınıfını I_f ile gösterelim.

$$I_f = \{M \subset \mathbb{N} : M\ sonlu\}$$

I_f, $\mathbb{N}$ de bir admissible (uygun) idealdir.

(i) $\varnothing$ sonlu olduğundan, $\varnothing \in I_f$ olur,

(ii) $A, B \in I_f \Rightarrow A\ ve\ B$ sonlu kümelerdir. İki sonlu kümenin birleşimi sonlu olacağından $A \cup B$ sonlu, dolayısıyla $A \cup B \in I_f$ olur,

(iii) $A \in I_f$ ve $B \subseteq A \Rightarrow A$ sonlu bir küme ve sonlu bir kümenin alt kümeleri de sonlu olacağından $B \in I_f$ dir.

$\mathbb{N}$, sayılabilir sonsuz bir küme olduğundan $\mathbb{N} \notin I_f$ olur. Böylece I_f, $\mathbb{N}$ de bir *aşikar olmayan* $(non-trivial)$ idealdir.

Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{n\}$ tek nokta kümesi sonlu bir kümedir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{n\} \in I_f$ olup, I_f ideali $\mathbb{N}$ de bir "$Admissible(uygun)\ ideal$" olur.

Tanım 3.1.9 : $I \subset 2^N$ bir *aşikar olmayan* $(non-trivial)$ ideal ve (X,d) bir metrik uzay olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için;

$$A(\varepsilon) = \{n \in N : d(x_n, \xi) \geq \varepsilon\} \in I$$

olacak şekilde $A(\varepsilon)$ kümesi I ya ait ise; $x = (x_n)_{n \in N} \in X$ dizisi $\xi \in X$ e "$I-yakınsaktır$" denir, $Kostyrko\ vd.,(2000)$.

Eğer $x=(x_n)$ dizisi ξ ye $I-yakınsak$ ise bu ifade,

$$I-\lim_{n\to\infty} x_n=\xi$$

ile gösterilir. Bu durumda $\xi\in X$ elemanı $x=(x_n)\in X$ dizisinin "$I-limiti$" adını alır.

Örnek 3.1.10 : $I\subset 2^N$ olmak üzere Kostyrko (2000) tarafından tanımlanan bazı *aşikar olmayan* $(non-trivial)$ *admissible ideal* örneklerini verelim:

$$(i)\ \ I_f=\{M\subset\mathbb{N}: M\ sonlu\}$$

$$(ii)\ \ I_\delta=\{M\subset\mathbb{N}:\delta(M)=0\}$$

K kümesini,

$$K=K(\varepsilon)=\{n\in\mathbb{N}: d(x_n,\xi)\geq\varepsilon\}$$

şeklinde tanımlayalım. I ideali olarak ;

(i) deki I_f ideali alınırsa, $I_f-yakınsaklık$ ile adi anlamdaki "*yakınsaklık*",

(ii) deki I_δ ideali alınırsa, $I_\delta-yakınsaklık$ ile "*İstatistiksel yakınsaklık*" kavramları çakışır.

Uyarı 3.1.11 : Burada $I_f\subset I_\delta\subset I$ dır.

$I-yakınsaklık$ kavramının, *yakınsaklık* kavramının bazı genel özelliklerini sağlayıp sağlayamayacağı sorusu akla gelebilir. Aşağıda vereceğimiz aksiyomlar, yakınsaklık kavramından iyi tanıdığımız bazı özelliklerin I -benzerleridir;

(i) $\forall x=(\xi,\xi,...,\xi,...)$ sabit dizisi, ξ ye $I-yakınsaktır.$

(ii) $I-\lim x=\xi$ ve $I-\lim x=\eta$ ise; $\xi=\eta$

olur, (limitin tekliği).

(iii) Eğer, $I-\lim x=\xi$ ise x in her y alt dizisi için;

$$I-\lim y=\xi$$

(iv) Eğer x dizisinin her alt dizisi ξ ye $I-yakınsak$ bir z alt dizisine sahip ise; x dizisi ξ ye $I-yakınsaktır.$

Uyarı 3.1.12 : Eğer I admissible ideali, sonsuz küme içermiyorsa I, $\mathbb{N}$ nin bütün sonlu alt kümelerinin sınıfı ile çakışır ve $I-yakınsaklık$, $\mathbb{R}$ deki alışılmış $yakınsaklık$ ile denktir. Bu nedenle (iii) aksiyomunu sağlar.

Teorem 3.1.13 : I, $\mathbb{N}$ de bir admissible ideal olsun. Böylece,

(a) $I-yakınsaklık$, yukarıda verilen (i), (ii) ve (iv) aksiyomlarını sağlar.

(b) Eğer I ideali sonsuz bir küme içeriyorsa, $I-yakınsaklık$ (iii) aksiyomunu sağlamaz, $Kostyrko\ vd.$ $[18]$.

İspat: **(a)** $I-yakınsaklığın$ (i) aksiyomunu sağladığını gösterelim:

$\forall n \in \mathbb{N}$ için; $(x_n) = \xi$ sabit bir dizi olsun. Bu durumda,

$$A(\varepsilon) = \{n : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\} = \{n : 0 \geq \varepsilon\} = \varnothing$$

olur. I, $aşikar\ olmayan$ $(non-trivial)$ ideal olduğu için; $A(\varepsilon) \in I$ olup x dizisi ξ ye $I-yakınsaktır.$

$I-yakınsaklığın$ (ii) aksiyomunu sağladığını gösterelim:

$$I-\lim x = \xi \quad \text{ve} \quad I-\lim x = \eta \quad \text{ise;}\ \xi \neq \eta$$

olsun, $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{\xi-\eta}{2}\right)$ olarak seçelim.

$$I-\lim x = \xi \ \Rightarrow \quad A(\varepsilon) = \{n : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\} \in I,$$

$$I-\lim x = \eta \ \Rightarrow \quad B(\varepsilon) = \{n : |x_n - \eta| \geq \varepsilon\} \in I,$$

Buradan,

$$\mathbb{N} \setminus A(\varepsilon) = \{n : |x_n - \xi| < \varepsilon\} \in F(I) \quad \text{ve} \quad \mathbb{N} \setminus B(\varepsilon) = \{n : |x_n - \eta| \geq \varepsilon\} \in F(I)$$

olur.

$$(\mathbb{N} \setminus A(\varepsilon)) \cap (\mathbb{N} \setminus B(\varepsilon)) \in F(I) \quad \text{ve} \quad \varnothing \notin F(I)$$

olduğundan bir $m \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki,

$$|x_m-\xi|<\varepsilon \qquad \text{ve} \qquad |x_m-\eta|<\varepsilon$$

olur.

$$|\,\xi-\eta\,| = |(x_m-\eta)-(x_m-\xi)|$$
$$\leq |x_m-\eta|+|x_m-\xi| = \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon$$

yani, $|\,\xi-\eta\,|<2\varepsilon$ olur. Bu ise ε seçimi ile çelişir. Bu durumda, $\xi=\eta$ dür.

$I-yakınsaklığın$ (iv) aksiyomunu sağladığını gösterelim:

Kabul edelim ki, $I-\lim x\neq\xi$ olsun. x in bir y alt dizisi vardır öyle ki, y nin ξ ye $I-yakınsak$ hiçbir alt dizisi yoktur.

$I-\lim x\neq\xi$ olduğundan, bir $\varepsilon_0>0$ vardır öyle ki,

$$A(\varepsilon_0)=\{n:|x_n-\xi|\geq\varepsilon_0\}\notin I \qquad (3.1)$$

olur. Buradan, I $admissible\,(uygun)\,ideal$ olduğundan $A(\varepsilon_0)$ sonsuz bir kümedir.

$$A(\varepsilon_0)=\{n_1<n_2<\ldots<n_k<n_{k+1}<\ldots\}\subseteq\mathbb{N}$$

olsun. Şimdi $y_{n_k}=x_{n_k}$ $(k=1,2,3,\ldots)$ olarak alırsak $y=(y_k)$ dizisi x in bir alt dizisidir ve (3.1) den dolayı,

$$B(\varepsilon_0)=\{k:|y_k-\xi|\geq\varepsilon_0\}\notin I$$

olur. $B(\varepsilon_0)$ dan dolayı y nin hiçbir $z=(z_m)$, $(m=1,2,3,\ldots)$ alt dizisi $I-yakınsak$ değildir.

Eğer $I-yakınsak$ olsaydı $\{m:|z_m-\xi|\geq\varepsilon_0\}\in I$ olurdu ki; bu ise $\mathbb{N}\notin I$ olması ile çelişir.

(b) Kabul edelim ki, $A=\{n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots\}\subseteq\mathbb{N}$ sonsuz bir küme ve I ya ait olsun.

$$B=\mathbb{N}\setminus A=\{m_1<m_2<\ldots<m_k<\ldots\}$$

olarak alalım.

B kümesi de sonsuz bir kümedir. (Eğer B kümesi sonlu bir küme olsaydı $\mathbb{N} \backslash B = A$ kümesi sonsuz olup, $A \notin I$ olur ki bu durum $A \in I$ olması ile çelişir). $x = (x_n)$ dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$x_{n_k} = 0 \ , \ x_{m_k} = 1 \qquad (k = 1,2,3,...)$$

$\mathbb{N} \backslash B = A$ ve $A \in I$ olduğundan,

$$A(\varepsilon) = \{n : |x_n - 1| \geq \varepsilon\} \in I$$

olup, $I - \lim x_n = 1$ olur. Buradan $y = (x_{n_k})$, $(k = 1,2,3,...)$ dizisi x in sabit bir altdizisidir. (i) aksiyomundan dolayı

$$I - \lim y = 0$$

olur. Bu durumda $I - yakınsaklık$, (iii) aksiyomunu sağlamaz.

Teorem 3.1.14 : I bir *aşikar olmayan* (*non − trivial*) ideal olsun.

(i) I, $\mathbb{N}$ de bir *admissible*(*uygun*)*ideal* ,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \quad \text{ise} \quad I - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi \ ,$$

(ii) $I - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ ve $I - \lim_{n\to\infty} y_n = \eta$ ise; $I - \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \xi + \eta$,

(iii) $I - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ ve $I - \lim_{n\to\infty} y_n = \eta$ ise; $I - \lim_{n\to\infty}(x_n \, y_n) = \xi\,\eta$

dir, *Kostyrko vd*. [18] .

İspat: (i) I, $\mathbb{N}$ de bir *admissible*(*uygun*)*ideal* ise; $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ olduğunda, $I - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ olduğunu gösterelim:

$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ olduğunda $\{n : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\}$ kümesi sonlu bir kümedir. I, $\mathbb{N}$ de bir *admissible*(*uygun*)*ideal* olduğundan,

$$\{n : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\} \in I$$

dır. Bu durumda $I - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ olur.

(ii) $\varepsilon > 0$ olsun.

$$I-\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \text{ için; } \left\{n : |x_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in I,$$

$$I-\lim_{n\to\infty} y_n = \eta \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \text{ için; } \left\{n : |y_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in I,$$

olur. Şimdi,

$$I-\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \xi + \eta$$

olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} \left| x_n + y_n - (\xi+\eta) \right| &= \left| (x_n - \xi) + (y_n - \eta) \right| \\ &\leq |x_n - \xi| + |y_n - \eta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan, $\forall\varepsilon > 0$ için;

$$\left\{n : |x_n - \xi| < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap \left\{n : |y_n - \eta| < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subseteq \left\{ n : \left| x_n + y_n - (\xi+\eta) \right| < \varepsilon \right\} \qquad (3.2)$$

olur. (3.2) kapsamında her iki tarafın $\mathbb{N}$ ye göre tümleyeni alınırsa,

$$\left\{ n : \left| x_n + y_n - (\xi+\eta) \right| \geq \varepsilon \right\} \subseteq \underbrace{\left\{n : |x_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}}_{\in I} \cup \underbrace{\left\{n : |y_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}}_{\in I}$$

elde edilir. Böylece,

$$\underbrace{\left\{n : |x_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}}_{\in I} \cup \underbrace{\left\{n : |y_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}}_{\in I} \in I$$

ve buradan,

$$\left\{ n : \left| x_n + y_n - (\xi+\eta) \right| \geq \varepsilon \right\} \in I$$

bulunur. Bu durumda,

$$I-\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \xi + \eta$$

dir.

(iii) $\varepsilon > 0$ olsun.

$$I-\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \text{ için; } \left\{n : |x_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2|\eta|}\right\} \in I,$$

$$I-\lim_{n\to\infty} y_n = \eta \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \text{ için; } \left\{n : |y_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2|\xi|+1}\right\} \in I,$$

olur. Şimdi,

$$I-\lim_{n\to\infty}(x_n\, y_n) = \xi\,\eta$$

olduğunu gösterelim. Eğer

$$|x_n - \xi| < 1 \Rightarrow \quad |x_n| = |x_n - \xi + \xi| \leq \underbrace{|x_n - \xi|}_{<1} + |\xi| < 1 + |\xi|$$

$$\Rightarrow |x_n| < 1 + |\xi|$$

olur.

$$\begin{aligned} |x_n y_n - \xi\eta| &= |x_n y_n - \eta x_n + \eta x_n - \xi\eta| \\ &= |x_n(y_n - \eta) + \eta(x_n - \xi)| \\ &= |x_n||y_n - \eta| + |\eta||x_n - \xi| \\ &< (1+|\xi|)\,\frac{\varepsilon}{2(|\xi|+1)} + |\eta|\,\frac{\varepsilon}{2|\eta|} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan, $\forall\varepsilon > 0$ için;

$$\begin{aligned} \{n : |x_n\, y_n - (\xi\,\eta)| < \varepsilon\} &= \{n : |x_n(y_n - \eta) + \eta(x_n - \xi)| < \varepsilon\} \\ &\supseteq \{n : |x_n| < 1 + |\xi|\} \cap \left\{n : |y_n - \eta| < \frac{\varepsilon}{2(|\xi|+1)}\right\} \\ &\cap \left\{n : |x_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2|\eta|}\right\} \qquad (3.3) \end{aligned}$$

olur.

Eğer, $\dfrac{\varepsilon}{2|\eta|}<1$ ise;

$$\left\{n:|x_n|<1+|\xi|\right\}\supseteq\left\{n:|x_n-\xi|<1\right\}\supseteq\left\{n:|x_n-\xi|<\frac{\varepsilon}{2|\eta|}\right\}$$

bulunur. (3.3) kapsamından,

$$\left\{n:|x_n\,y_n-(\xi\,\eta)|<\varepsilon\right\}\supseteq\left\{n:|y_n-\eta|<\frac{\varepsilon}{2\left(|\xi|+1\right)}\right\}\cap\left\{n:|x_n-\xi|\geq\frac{\varepsilon}{2|\eta|}\right\}$$

elde edilir. Buradan,

$$F(I)=\left\{B\subseteq\mathbb{N}:\ \exists A\in I:B=\mathbb{N}\setminus A\right\},$$

I nın süzgeci(filtresi) olmak üzere;

$$\left\{n:|y_n-\eta|<\frac{\varepsilon}{2\left(|\xi|+1\right)}\right\}\in F(I)\quad \text{ve}\quad \left\{n:|x_n-\xi|\geq\frac{\varepsilon}{2|\eta|}\right\}\in F(I)$$

olduğundan,

$$\left\{n:|x_n\,y_n-(\xi\,\eta)|<\varepsilon\right\}\in F(I)$$

olup,

$$\left\{n:|x_n\,y_n-(\xi\,\eta)|\geq\varepsilon\right\}\in I$$

bulunur. Bu durumda,

$$I-\lim_{n\to\infty}(x_n\,y_n)=\xi\,\eta$$

olur.

Tanım 3.1.15 : (X,d) bir metrik uzay ve $I\subset 2^N$ bir $admissible\,(uygun)\,ideal$ olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ için;

$$A(\varepsilon)=\left\{n\in N:d(x_n,x_N)\geq\varepsilon\right\}\in I$$

olacak şekilde bir $N=N(\varepsilon)$ mevcut ise $(x_n)\in X$ dizisine X üzerinde "$I-Cauchy$ $dizisi$" denir.

Örnek 3.1.16 : $\forall\varepsilon > 0$ ve $N = N(\varepsilon)$ indisi için;

$$K = K(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_N) \geq \varepsilon\}$$

kümesini tanımlayalım. I ideali olarak,

$$I_f = \{M \subset \mathbb{N} : M\ sonlu\}$$

ideali alınırsa, $I_f - $*Cauchy dizisi* ile adi anlamda *Cauchy dizisi* ,

$$I_\delta = \{M \subset \mathbb{N} : \delta(M) = 0\}$$

ideali alınırsa, $I_\delta - $*Cauchy dizisi* ile *İstatistiksel Cauchy dizisi* kavramları çakışır.

Teorem 3.1.17 : I keyfi bir *admissible(uygun)ideal* olsun. Bu durumda,

$$I - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$$

ise (x_n) dizisi bir $I - $*Cauchy* dizisidir.

İspat: $I - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ olsun. Bu durumda $\forall\varepsilon > 0$ için,

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : d(x_n, \xi) \geq \varepsilon\} \in I$$

olur. I bir *admissible(uygun)ideal* olduğundan $n_0 \notin A(\varepsilon)$ olacak biçimde $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur.

$$B(\varepsilon) = \{n \in N : d(x_n, x_{n_0}) \geq 2\varepsilon\}$$

olsun. Üçgen eşitsizliğinden,

$$d(x_n, \xi) + d(x_{n_0}, \xi) \geq d(x_n, x_{n_0})$$

olup, eğer $n \in B(\varepsilon)$ ise;

$$d(x_n, \xi) + d(x_{n_0}, \xi) \geq 2\varepsilon$$

elde edilir. Diğer taraftan $n_0 \notin A(\varepsilon)$ olduğundan $d(x_{n_0}, \xi) < \varepsilon$ dir. Ayrıca yukarıdaki eşitsizlikten, $d(x_n, \xi) > \varepsilon$ olmak zorundadır.

Böylece $n \in A(\varepsilon)$ elde edilir. Buradan, $\forall\varepsilon > 0$ için $B(\varepsilon) \subset A(\varepsilon) \in I$ olduğu görülür. Bu ise;

$$B(\varepsilon) \in I\ ,$$

yani (x_n) dizisinin bir $I - $*Cauchy dizisi* olduğunu gösterir.

Tanım 3.1.18 : I bir *admissible(uygun)ideal* olsun. $x=(x_n)$ ve $y=(y_n)$ dizileri için,

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\} \in I$$

ise; x ve y dizileri, I ya göre "*Hemen hemen her n için eşittir*" denir. "$I-h.h.n$ *için* $x_n = y_n$" şeklinde yazılabilir.

Tanım 3.1.19 : (X,d) bir metrik uzay ve $(x_n) \in X$ olsun.

(i) $M \notin I$ ve $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$ olacak şekilde,

$$M = \{m_1 < m_2 < ...\} \subset \mathbb{N}$$

kümesi mevcut ise; $\xi \in X$ elemanına x in "$I-$*limit noktası*" denir.

(ii) Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\{n \in \mathbb{N} : d(x_n, \xi) < \varepsilon\} \notin I$$

ise; $\xi \in X$ elemanına x in "$I-$*yığılma noktası*" denir, *Kostyrko vd.*,(2000).

3.2 *n*-NORMLU LİNEER UZAYLAR

2-normlu uzaylar fikri ilk olarak 1960 yılında "*Gahler*" tarafından geliştirilmiştir ve yine *Gahler* tarafından *n*-normlu lineer uzaylara genelleştirilmiştir. O tarihten itibaren birçok araştırmacı (*Gunawan*, *Gunawan ve Mashadi*, *A.Şahiner vd.*) , *n*-normlu uzay fikri üzerinde çalışmışlar ve birtakım sonuçlar elde etmişlerdir. Burada öncelikle *2*-normlu uzay tanıtılacak, daha sonra *n*-normlu uzaylarla ilgili özellikler verilecektir.

Tanım 3.2.1 : X boyutu t olan bir reel vektör uzayı olsun $\left(2 \le t < \infty\right)$.

$$\|.,.\| : X \times X \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$$

fonksiyonu aşağıdaki dört koşulu sağlıyorsa $\|.,.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir "$2-norm$" , $\left(X, \|.,.\|\right)$ ikilisine de bir "$2-normlu\ uzay$" adı verilir.

$\forall x, y, z \in X \quad için,$

$N_1)$ $\|x, y\| = 0 \Leftrightarrow x, y$ lineer bağımlı vektörlerdir,

$N_2)$ $\|x, y\| = \|y, x\|$

$N_3)$ $\|\alpha x, y\| = |\alpha| \, \|x, y\|$, $\quad (\alpha - skaler)$

$N_4)$ $\|x, y + z\| \le \|x, y\| + \|x, z\|$

olur.

$\forall x, y \in X \quad ve \quad \alpha - skaleri\ için$ $\left(X, \|.,.\|\right)$ *2*-normlu uzayda,

$$\|x, y\| \ge 0 \quad \text{ve} \quad \|x, y + \alpha x\| = \|x, y\|$$

özellikleri sağlanır. Ayrıca $t = 2$ olduğunda *x, y* ve *z* vektörleri lineer bağımlı ise,

$$\|x, y + z\| = \|x, y\| + \|x, z\| \qquad \text{veya} \qquad \|x, y - z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$$

dir, *Gahler (1963), (1965), Gunawan ve Mashadi,(2001).*

Tanım 3.2.2 : $\left(X,\|.,.\|\right)$ bir *2*-normlu lineer uzay ve $x=(x_k)$, X de bir dizi olsun. Eğer $\forall y\in X$ için,

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k-x,y\|=0$$

olacak şekilde bir $x\in X$ mevcut ise "(x_k) *dizisine* x *noktasına yakınsaktır*" denir.

$$\lim_{k\to\infty}x_k=x$$

şeklinde gösterilir ve "(x_k) *dizisinin limiti* x *tir*" denir.

$X=\mathbb{R}^2$ uzayı *2*-normla donatılmış olsun. Bu durumda $x=(x_1,x_1)$, $y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ olmak üzere,

$$\|x,y\|=mutlak\left(\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}\right)=|x_1y_2-x_2y_1|$$

olacak şekilde *x* ve *y* vektörleri tarafından gerilen paralelkenarın alanı olur.

Tanım 3.2.3 : $\left(X,\|.,.\|\right)$ *2*-normlu bir lineer uzay ve $x=(x_k)$, X de bir dizi olsun. Eğer $\forall y\in X$ için,

$$\lim_{k,\ell\to\infty}\|x_k-x_\ell,y\|=0$$

oluyorsa $x=(x_k)$ dizisine bir "*Cauchy dizisi*" denir, *Raymond vd. , (2001).*

Tanım 3.2.4 : Eğer *2*-normlu lineer X uzayında her Cauchy dizisi bir $x\in X$ değerine yakınsıyor ise $\left(X,\|.,.\|\right)$ ikilisine "$2-$*Banach uzayı*" denir.

Teorem 3.2.5 : Her $\left(X,\|.,.\|\right)$ *2*-normlu lineer uzayı aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) $x_k\to x\ (k\to\infty)$ *ve* $y_k\to y\ (k\to\infty)$ *ise,* $x_k+y_k\to x+y\ (k\to\infty)$

(ii) $x_k\to x\ (k\to\infty)$ *ve* $\alpha_k\to\alpha\ (k\to\infty)$ *ise,* $\alpha_k x_k\to\alpha x\ (k\to\infty)$

(iii) *boy* $X\geq 2$ *ve* $(k\to\infty)$ için $x_k\to x$ *ve* $x_k\to y\Rightarrow x=y$

dir, *Raymond vd. , (2001).*

Şimdi n-normlu uzaylar tanımını verelim ve bu uzaylar üzerinde ifade edilen bazı özelliklere değinelim:

Tanım 3.2.6 : $n \in \mathbb{N}$ ve X boyutu "t" olan bir reel vektör uzayı olsun $(n \leq t)$. X^n üzerinde reel değerli bir fonksiyon;

$$\|.,...,.\| : \underbrace{X \times X \times ... \times X}_{X^n} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

olmak üzere, eğer bu norm fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa X^n üzerinde tanımlı bu $\|.,...,.\|$ dönüşüme bir "$n-norm$" , $(X, \|.,...,.\|)$ ikilisine de bir "$n-normlu\ uzay$" adı verilir.

$\forall x, x', x_1, x_2, ..., x_n \in X$ için,

$N_1)$ $\|x_1, x_2, ..., x_n\| = 0 \Leftrightarrow x_1, x_2, ..., x_n$ lineer bağımlı vektörlerdir,

$N_2)$ $\|x_1, x_2, ..., x_n\|$ permütasyon altında değişmezdir,

$N_3)$ $\|\alpha x_1, x_2, ..., x_n\| = |\alpha| \; \|x_1, x_2, ..., x_n\| \quad (\alpha - skaler)$,

$N_4)$ $\|x + x', x_2, ..., x_n\| \leq \|x, x_2, ..., x_n\| + \|x', x_2, ..., x_n\|$

olur, *Gunawan ve Mashadi*, (2001).

Tanım 3.2.7 : $(X, \|.,...,.\|)$ bir n -normlu uzay ve $x = (x_k)$, X de bir dizi olsun. Eğer $\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in X$ için,

$$\lim_{k \to \infty} \|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa "(x_k) *dizisine* x *noktasına yakınsaktır*" denir.

Tanım 3.2.8 : $(X, \|.,...,.\|)$ bir n -normlu uzay ve (x_k), X de bir dizi olsun. Eğer $\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in X$ için,

$$\lim_{k, \ell \to \infty} \|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k - x_\ell\| = 0$$

olacak şekildeki (x_k) dizisine "*Cauchy dizisi*" denir.

Tanım 3.2.9 : $\left(X,\|.,...,.\| \right)$ bir n-normlu uzay olsun. X de her Cauchy dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsıyor ise n -normlu X uzayına "*Tam normlu uzay*" denir. Tam n -normlu uzaylara da "$n-$ *Banach uzayı*" denir.

Lemma 3.2.10 : $\left(X,\|.,...,.\| \right)$ uzayının n-Banach uzayı olması için gerek ve yeter koşul $\left(X,\|.,...,.\| \right)$ uzayının bir "*Banach uzayı*" olmasıdır.

Örnek 3.2.11 : n-normlu uzayların aşikar bir örneği, Euclid n -normuyla kuşatılmış $X = \mathbb{R}^n$ uzayıdır.

$$\|x_1, x_2, ..., x_n\|_E = mutlak \left(\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \right)$$

Burada, $\forall i = 1,2,3,...,n$ için; $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, ..., x_{in}) \in \mathbb{R}^n$ dir.

Eğer, $\left(X,\|.,...,.\| \right)$ boyutu t $(t \geq n \geq 2)$ olan n -normlu bir lineer uzay ve $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$; X de lineer bağımsız bir küme ise buradan, X^{n-1} üzerinde $\|.,...,.\|_\infty$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\|x_1, x_2, ..., x_{n-1}\|_\infty = \max\left\{ \|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, a_i\| : i = 1,2,...,n \right\}$$

$\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ kümesiyle birlikte X üzerinde bir "$(n-1)$ *norm*" tanımlar.

X üzerinde "*standart* (*alışılagelmiş*) $n-$*norm*", boyutu $t \geq n$ olan bir reel "*iç* $-$ *çarpım*" uzayı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|x_1, x_2, ..., x_n\|_S = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}^{1/2}$$

dir. Buradaki $\langle .,. \rangle$, X üzerinde bir "*iç* $-$ *çarpım*" olarak tanımlanmıştır.

Eğer $X=\mathbb{R}^n$ alınırsa, buradan bu n -norm daha önce bahsettiğimiz $\|x_1,x_2,...,x_n\|_E$ "*Euclidean* $n-$*normla*" tam olarak aynıdır. $n=1$ için; bu n-norm,

$$\|x\|=\langle x_1,x_1\rangle^{1/2}$$

olarak bilinen normdur.

Lemma 3.2.12 : Her n -normlu uzay $r=1,2,...,n-1$ için bir "$(n-r)$ *normlu*" uzaydır. Özel olarak; her n -normlu uzay bir normlu uzaydır.

Lemma 3.2. 13 : Bir standart n -normlu uzayın tam olması için gerek ve yeter koşul $\|.,...,.\|_S$ normuyla birlikte tam olmasıdır.

Lemma 3.2. 14 : Bir standart n -normlu X uzayı, *ortanormal* (*birim boyutlu*) $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ bazına göre tanımlanan $\|.,...,.\|_\infty$ $(n-1)$ normu, standart $\|.,...,.\|_S$ $(n-1)$ normuna denktir. Böylece $\forall x_1,x_2,...,x_{n-1}\in X$ için,

$$\|x_1,x_2,...,x_{n-1}\|_\infty \le \|x_1,x_2,...,x_{n-1}\|_S \le \sqrt{n}\,\|x_1,x_2,...,x_{n-1}\|_\infty$$

elde edilir. Burada,

$$\|x_1,x_2,...,x_{n-1}\|_\infty = \max\left\{\,\|x_1,x_2,...,x_{n-1},e_i\|_S : i=1,2,...,n\,\right\}$$

dir.

Şimdi X deki standart n -normla ilgili geometrik yapıyı verelim,

(i) $n=1$ *için* $\|x_1\|_S=\langle x_1,x_1\rangle^{1/2}$ X deki adi normu, yani x_1 in uzunluğunu verir,

(ii) $n=2$ *için*

$$\begin{aligned}\|x_1,x_2\|_S &= \begin{vmatrix}\langle x_1,x_1\rangle & \langle x_1,x_2\rangle\\ \langle x_2,x_1\rangle & \langle x_2,x_2\rangle\end{vmatrix}^{1/2}\\ &=\left(\langle x_1,x_1\rangle\langle x_2,x_2\rangle-\langle x_1,x_2\rangle\langle x_2,x_1\rangle\right)^{1/2}\\ &=\left\{\|x_1\|_S^2\,\|x_2\|_S^2-\langle x_1,x_2\rangle^2\right\}^{1/2}\end{aligned}$$

Standart *2*-normu, yani x_1 ve x_2 vektörleri tarafından gerilen paralelkenarın alanını verir.

(iii) $n = 3$ *için*

$$\|x_1, x_2, x_3\|_S = \|x_1, x_2, x_3\|_E$$

normunu yani x_1, x_2, x_3 vektörleri tarafından gerilen **şekil-3.2.1** deki paralelyüzlünün hacmini verir.

Şekil-3.2.1

Teorem 3.2.15 : Her $\left(X, \|.,...,.\| \right)$ n -normlu lineer uzayı aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) $x_k \to x \; (k \to \infty)$ $\;$ *ve* $\;$ $y_k \to y \; (k \to \infty)$ $\;$ *ise*, $(k \to \infty)$ için $x_k + y_k \to x + y$,

(ii) $x_k \to x \; (k \to \infty)$ $\;$ *ve* $\;$ $\alpha_k \to \alpha \; (k \to \infty)$ $\;$ *ise*, $(k \to \infty)$ için $\alpha_k \, x_k \to \alpha \, x$,

(iii) $boy\, X \geq n$ $\;$ *ve* $\;$ $(k \to \infty)$ için $\;$ $x_k \to x$ $\;$ *ve* $\;$ $x_k \to y \Rightarrow x = y$

dir.

3.3 n -NORMLU LİNEER UZAYLARDA *I*-YAKINSAKLIK

Şimdi de $n-normlu$ uzaylarda $I-yakınsaklık$ kavramını tanıtalım:

Tanım 3.3.1 : $I \subset 2^N$, $\mathbb{N}$ de *aşikar olmayan* $(non-trivial)$ ideal ve $\left(X, \|.,...,.\| \right)$ bir n -normlu lineer uzay olsun, $\left(boy\, X = t\,, \quad 2 \le n \le t < \infty \right)$.

Eğer $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in X$ için,

$$A(\varepsilon) = \left\{ k \in \mathbb{N} : \|x_k - x, x_1, x_2, ..., x_{n-1}\| \ge \varepsilon \right\} \in I$$

ise $x = (x_k) \in X$ dizisi $x \in X$ noktasına "$I-yakınsaktır$" denir.

Eğer $x = (x_k)$ dizisi x noktasına $I-yakınsak$ ise bu ifade,

$$I - \lim_{k \to \infty} \|x_k - x, x_1, x_2, ..., x_{n-1}\| = 0$$

ya da

$$I - \lim_{k \to \infty} \|x_k, x_1, x_2, ..., x_{n-1}\| = \|x, x_1, x_2, ..., x_{n-1}\|$$

ile gösterilir. x sayısına, (x_k) dizisinin "$I-limiti$" denir.

$I_f = \left\{ M \subset \mathbb{N} : M\ sonlu \right\}$ şeklinde $\mathbb{N}$ nin bütün sonlu alt kümelerinin ailesi olmak üzere; I_f ideali, $\mathbb{N}$ de bir $admissible(uygun)ideal$ ise; $I_f - yakınsaklık$ ile $n-normda$ yakınsaklık kavramları çakışır.

$I_\delta = \left\{ A \subset \mathbb{N} : \delta(A) = 0 \right\}$ olacak biçimde $\mathbb{N}$ de bir $admissible(uygun)ideal$ olsun. Böylece $I_\delta - yakınsaklık$ ile $n-normlu$ uzaylarda *İstatistiksel yakınsaklık* kavramları çakışır.

Tanım 3.3.2 : $I \subset 2^N$, $\mathbb{N}$ de *aşikar olmayan* $(non-trivial)$ ideal ve $\left(X, \|.,...,.\| \right)$ bir n -normlu uzay olsun, $\left(boy\, X = t\,, \quad 2 \le n \le t < \infty \right)$.

Eğer $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in X$ için bir $N = N(\varepsilon, x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ sayısı vardır öyle ki,

$$A(\varepsilon)=\left\{k\in\mathbb{N}:\left\|x_k-x_{N(\varepsilon,x_1,x_2,...,x_{n-1})},x_1,x_2,...,x_{n-1}\right\|\geq\varepsilon\right\}\in I$$

oluyorsa $x=(x_k)\in X$ dizisine "$I-Cauchy\ dizisi$" denir.

Teorem 3.3.3 : I bir $admissible(uygun)ideal$ olmak üzere $\forall x_1,x_2,...,x_{n-1}\in X$ için,

(i) $I-\lim\limits_{k\to\infty}\left\|x_k-x,x_1,x_2,...,x_{n-1}\right\|=0$ ve $I-\lim\limits_{k\to\infty}\left\|y_k-y,x_1,x_2,...,x_{n-1}\right\|=0$

ise,

$$I-\lim_{k\to\infty}\left\|\left(x_k+y_k\right)-\left(x+y\right),x_1,x_2,...,x_{n-1}\right\|=0$$

(ii) $I-\lim\limits_{k\to\infty}\left\|x_k-x,x_1,x_2,...,x_{n-1}\right\|=0$ ve $\alpha\in\mathbb{R}$ ise,

$$I-\lim_{k\to\infty}\left\|\alpha\left(x_k-x\right),x_1,x_2,...,x_{n-1}\right\|=0\quad,\ \left(\alpha\in\mathbb{R}\right)$$

olur.

İspat : (i) $\forall\varepsilon>0$ için, $A_1,A_2\in I$ kümelerini $\forall x_1,x_2,...,x_{n-1}\in X$ olmak üzere,

$$A_1(\varepsilon)=\left\{k\in\mathbb{N}:\left\|x_k-x,x_1,x_2,...,x_{n-1}\right\|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

$$A_2(\varepsilon)=\left\{k\in\mathbb{N}:\left\|y_k-y,x_1,x_2,...,x_{n-1}\right\|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

olacak şekilde tanımlayalım.

$$A=A(\varepsilon)=\left\{k\in\mathbb{N}:\left\|\left(x_k+y_k\right)-\left(x+y\right),x_1,x_2,...,x_{n-1}\right\|\geq\varepsilon\right\}\subset$$
$$\left\{k\in\mathbb{N}:\left\|x_k-x,x_1,x_2,...,x_{n-1}\right\|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\cup\left\{k\in\mathbb{N}:\left\|y_k-y,x_1,x_2,...,x_{n-1}\right\|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

yani, $A\subset A_1\cup A_2$ olduğundan istenen sağlanır.

(ii) $I-\lim\limits_{k\to\infty}\|x_k - x, x_1, x_2, ..., x_{n-1}\| = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \neq 0$ olsun. Buradan,

$$\left\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x, x_1, x_2, ..., x_{n-1}\| \geq \frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right\} \in I$$

ve tanım 3.3.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned}&\left\{k \in \mathbb{N} : \|\alpha x_k - \alpha x, x_1, x_2, ..., x_{n-1}\| \geq \varepsilon\right\} \\ &= \left\{k \in \mathbb{N} : |\alpha|\,\|x_k - x, x_1, x_2, ..., x_{n-1}\| \geq \varepsilon\right\} \\ &= \left\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x, x_1, x_2, ..., x_{n-1}\| \geq \frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı I ya aittir. Böylece $\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in X$ için,

$$I-\lim_{k\to\infty}\|\alpha(x_k - x), x_1, x_2, ..., x_{n-1}\| = 0$$

olur.

Lemma 3.3.4 : **:** I bir $admissible(uygun)ideal$ ve (x_k) da $(X, \|.,...,.\|)$ n - normlu uzayında bir dizi olmak üzere,

(x_k) dizisi bir $x \in X$ e $I-yakınsaktır \Leftrightarrow \forall i = 1,2,...,n$ *için*

$$I-\lim_{k\to\infty}\|x_k - x, x_1, x_2, ..., x_{n-2}, a_i\| = 0$$

olmasıdır.

İspat: (x_k) dizisi n -normlu X uzayında bir x noktasına $I-yakınsak$ olsun. Buradan $\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in X$ için,

$$I-\lim_{k\to\infty}\|x_k - x, x_1, x_2, ..., x_{n-1}\| = 0$$

olur. Ayrıca $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall z \in X$ için,

$$z = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n \quad (i = 1,2,...,n \quad için)$$

yazılabilir. Üçgen eşitsizliği de kullanılarak $\forall k \in \mathbb{N}$ için,

$$\|x_k - x, x_1, x_2, ..., x_{n-2}, z\| \le |\alpha_1| \, \|x_k - x, x_1, x_2, ..., x_{n-2}, a_1\| + ...$$
$$+ |\alpha_n| \, \|x_k - x, x_1, x_2, ..., x_{n-2}, a_n\|$$

olur. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ ve $i = 1, 2, ..., n$ için

$A(\varepsilon) = \left\{ k \in \mathbb{N} : \|x_k - x, x_1, x_2, ..., x_{n-2}, a_i\| \ge \varepsilon \right\} \in I$ denilirse, yukarıdaki eşitsizlikten,

$$\left\{ k : \|x_k - x, x_1, x_2, ..., x_{n-2}, z\| \ge \varepsilon \right\} \subseteq \left\{ k : |\alpha_1| \, \|x_k - x, x_1, x_2, ..., x_{n-2}, a_1\| \ge \varepsilon \right\}$$
$$\cup ... \cup \left\{ k : |\alpha_n| \, \|x_k - x, x_1, x_2, ..., x_{n-2}, a_n\| \ge \varepsilon \right\}$$

yazılır. Yukarıdaki kapsamın sağ tarafı I ya ait olduğundan sol tarafı da I ya ait olmak zorundadır.

Lemma 3.3.4 ve $\|.,...,.\|_\infty$ normu kullanılarak aşağıdaki Lemma verilebilir:

Lemma 3.3.5 : I bir $admissible(uygun)ideal$ ve (x_k) da $\left(X, \|.,...,.\| \right)$ n-normlu uzayında bir dizi olmak üzere,

(x_k) dizisi bir $x \in X$ e $I - yakınsaktır \Leftrightarrow \quad \forall i = 1, 2, ..., n \quad için$

$$I - \lim_{k \to \infty} \|x_k - x, x_1, x_2, ..., x_{n-1}\|_\infty = 0$$

olmasıdır.

Lemma 3.3.6 : $\left(X, \|.,...,.\| \right)$ n –normlu lineer uzayında alınan bir $I - Cauchy$ *dizisinin*, $I - yakınsak$ olması için gerek ve yeter koşul bu $I - Cauchy$ *dizisinin* $\|.,...,.\|_\infty$ normuyla birlikte $I - yakınsak$ olmasıdır.

BÖLÜM 4

4.1 MODÜLÜS FONKSİYONLARININ BİR DİZİSİ YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ n-NORMLU I-LACUNARY YAKINSAK GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

Bu kısımda çalışmanın orijinal kısmı olan ve önceki bölümlerde verilen genelleştirilmiş fark dizi uzaylarıyla, n-normlu lineer uzaylarda I-yakınsaklık kavramları birleştirilerek modülüs fonksiyonlarının bir dizisi yardımıyla bazı yeni dizi uzayları elde edilecektir.

Amaç n-normlu lineer uzaylarda, modülüs fonksiyonlarının bir dizisi kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş fark dizilerinin, I-Lacunary yakınsaklığını incelemektir.

Tanım 4.1.1 : Pozitif tamsayıların artan bir dizisi $\theta = (k_r)$ olsun. Eğer $k_0 = 0$ olmak üzere;

$$r \to \infty \text{ için } \quad h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$$

ise $\theta = (k_r)$ dizisine "*Lacunary dizisi*" denir.

$\theta = (k_r)$ tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ile gösterilecektir. Ayrıca bu çalışmada,

$$\sum_{i=k_{r-1}+1}^{k_r} |x_i| = \sum_{i \in I_r} |x_i|$$

şeklinde kullanılıp, $q_r = \dfrac{k_r}{k_{r-1}}$ olacaktır. Herhangi bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi için;

$$\lim_{r \to \infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \right) = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı mevcutsa, (x_k) dizisi L sayısına "*Kuvvetli Lacunary yakınsaktır*" denir ve kuvvetli lacunary yakınsak diziler uzayı,

$$N_\theta = \left\{ x=(x_k) : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_k - L| \to 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır, *Freedman* [10].

Bu şekilde tanımlanan kuvvetli lacunary yakınsak N_θ dizi uzayı,

$$\|x\|_\theta = \sup_r \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_k| \right)$$

normu ile birlikte bir BK-uzayıdır.

Özel olarak $\theta = (2^r)$ olması durumunda, kuvvetli toplanabilen diziler uzayı $|\sigma_1|$ elde edilir. Burada,

$$|\sigma_1| = \left\{ x=(x_k) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| = 0 \text{ , en az bir } L \text{ için} \right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

I bir addmissible ideal, $\Omega = (f_k)$ modülüs fonksiyonlarını bir dizisi olmak üzere; $\left(X, \|.,...,.\|\right)$ $n-normlu$ uzay, $p=(p_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. $\omega(n-X)$, $\left(X, \|.,...,.\|\right)$ $n-normlu$ uzayı üzerinde tanımlanan bütün dizilerin uzayını göstersin.

Bu durumda aşağıdaki yeni dizi uzaylarını tanımlayalım:

$$\left[N_\theta, \Omega, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s\right]^I =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_k) \in \omega(n-X) : \\ \left[r\in\mathbb{N} : h_r^{-1} \sum_{k\in I_r} \left[f_k \left(\left\| \Delta^m x_k - L, z_1, z_2, ..., z_{n-1} \right\| \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon, \ \exists L \in X \text{ ve } \forall z_1, z_2, ..., z_{n-1} \in X \text{ için} \right] \in I \end{array} \right\}$$

$$\left[N_\theta, \Omega, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s\right]_0^I =$$

$$\left\{\begin{array}{l}(x_k) \in \omega(n-X): \\ \left[r \in \mathbb{N}: h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[f_k\left(\left\|\Delta^m x_k, z_1, z_2, ..., z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon, \ \forall z_1, z_2, ..., z_{n-1} \in X \text{ } için\right] \in I\end{array}\right\}$$

$$\left[N_\theta, \Omega, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s\right]_\infty^I =$$

$$\left\{\begin{array}{l}(x_k) \in \omega(n-X): \\ \left[r \in \mathbb{N}: \sup_{k \to \infty} h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[f_k\left(\left\|\Delta^m x_k, z_1, z_2, ..., z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k} < \infty, \ \forall z_1, z_2, ..., z_{n-1} \in X \text{ } için\right] \in I\end{array}\right\}$$

Bu uzayların tanımında $m = 0$ alınırsa, *A.Esi* ve *M.Açıkgöz* (2008) tarafından tanımlanan aşağıdaki dizi uzayları elde edilir:

$$\left[N_\theta, \Omega, p, \|.,...,.\|, X_s\right]^I =$$

$$\left\{\begin{array}{l}(x_k) \in \omega(n-X): \\ \left[r \in \mathbb{N}: h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[f_k\left(\left\|x_k - L, z_1, z_2, ..., z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon, \exists L \in X \text{ } ve \ \forall z_1, z_2, ..., z_{n-1} \in X \text{ } için\right] \in I\end{array}\right\}$$

$$\left[N_\theta, \Omega, p, \|.,...,.\|, X_s\right]_0^I =$$

$$\left\{\begin{array}{l}(x_k) \in \omega(n-X): \\ \left[r \in \mathbb{N}: h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[f_k\left(\left\|x_k, z_1, z_2, ..., z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon, \ \forall z_1, z_2, ..., z_{n-1} \in X \text{ } için\right] \in I\end{array}\right\}$$

$$\left[N_\theta,\Omega,p,\|.,...,.\|,X_s\right]_\infty^I =$$

$$\left\{\begin{array}{l}(x_k)\in\omega(n-X):\\ \left[r\in\mathbb{N}:\sup\limits_{k\to\infty} h_r^{-1}\sum\limits_{k\in I_r}\left[f_k\left(\|x_k,z_1,z_2,...,z_{n-1}\|\right)\right]^{p_k}<\infty,\ \forall z_1,z_2,...,z_{n-1}\in X\ için\right]\in I\end{array}\right\}$$

Eğer $m=1$ alınırsa aşağıdaki dizi uzayları elde edilir:

$$\left[N_\theta,\Omega,\Delta,p,\|.,...,.\|,X_s\right]^I =$$

$$\left\{\begin{array}{l}(x_k)\in\omega(n-X):\\ \left[r\in\mathbb{N}:h_r^{-1}\sum\limits_{k\in I_r}\left[f_k\left(\|\Delta x_k-L,z_1,z_2,...,z_{n-1}\|\right)\right]^{p_k}\geq\varepsilon,\exists L\in X\ ve\ \forall z_1,z_2,...,z_{n-1}\in X\ için\right]\in I\end{array}\right\}$$

$$\left[N_\theta,\Omega,\Delta,p,\|.,...,.\|,X_s\right]_0^I =$$

$$\left\{\begin{array}{l}(x_k)\in\omega(n-X):\\ \left[r\in\mathbb{N}:h_r^{-1}\sum\limits_{k\in I_r}\left[f_k\left(\|\Delta x_k,z_1,z_2,...,z_{n-1}\|\right)\right]^{p_k}\geq\varepsilon,\ \forall z_1,z_2,...,z_{n-1}\in X\ için\right]\in I\end{array}\right\}$$

$$\left[N_\theta,\Omega,\Delta,p,\|.,...,.\|,X_s\right]_\infty^I =$$

$$\left\{\begin{array}{l}(x_k)\in\omega(n-X):\\ \left[r\in\mathbb{N}:\sup\limits_{k\to\infty} h_r^{-1}\sum\limits_{k\in I_r}\left[f_k\left(\|\Delta x_k,z_1,z_2,...,z_{n-1}\|\right)\right]^{p_k}<\infty,\ \forall z_1,z_2,...,z_{n-1}\in X\ için\right]\in I\end{array}\right\}$$

Teorem 4.1.2 : Eğer $p=(p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu taktirde $\left[N_\theta,\Omega,\Delta^m,p,\|.,...,.\|,X_s\right]^I$, $\left[N_\theta,\Omega,\Delta^m,p,\|.,...,.\|,X_s\right]_0^I$ ve $\left[N_\theta,\Omega,\Delta^m,p,\|.,...,.\|,X_s\right]_\infty^I$ uzayları kompleks sayılar cismi $\mathbb{C}$ üzerinde, lineer uzaylardır.

İspat: İspat $\left[N_\theta,\Omega,\Delta^m,p,\|.,...,.\|,X_s\right]_0^I$ uzayı için verilecektir. Diğer uzaylar için de benzer şekilde ispat yapılabilir.

$x,y\in\left[N_\theta,\Omega,\Delta^m,p,\|.,...,.\|,X_s\right]_0^I$ olsun. $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ olmak üzere;

$$|\alpha|\le M_\alpha \qquad \text{ve} \qquad |\beta|\le N_\beta$$

olacak şekilde M_α ve N_β pozitif tamsayıları vardır.

$\|.,...,.\|$ bir $n-norm$, f_k $(k\in\mathbb{N})$ bir modülüs fonksiyonu olduğundan, (1.3) eşitsizliği de kullanılarak aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\begin{aligned}
&h_r^{-1}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|\Delta^m(\alpha x_k+\beta y_k),z_1,z_2,...,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\\
&\le h_r^{-1}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|\Delta^m(\alpha x_k),z_1,z_2,...,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}+\\
&\quad h_r^{-1}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|\Delta^m(\beta y_k),z_1,z_2,...,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\\
&\le K(M_\alpha)^H h_r^{-1}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|\Delta^m x_k,z_1,z_2,...,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}+\\
&\quad K(N_\beta)^H h_r^{-1}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|\Delta^m y_k,z_1,z_2,...,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}
\end{aligned}$$

Başka bir deyişle yukarıda verilen eşitsizlik, aşağıdaki şekilde de ifade edebilir:

$$\begin{aligned}
&\left\{r\in\mathbb{N}:h_r^{-1}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|\Delta^m(\alpha x_k+\beta y_k),z_1,z_2,...,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\ge\varepsilon\right\}\\
&\subseteq\left\{r\in\mathbb{N}:K(M_\alpha)^H h_r^{-1}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|\Delta^m x_k,z_1,z_2,...,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\ge\in\right\}\\
&\cup\left\{r\in\mathbb{N}:K(N_\beta)^H h_r^{-1}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|\Delta^m y_k,z_1,z_2,...,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}\ge\in\right\}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki kapsamın sağ tarafındaki iki küme I ya aittir. Dolayısıyla kapsamın sol tarafındaki küme de I ya ait olmak zorundadır.

Buradan,

$$\alpha x_k + \beta y_k \in \left[N_\theta, \Omega, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]_0^I$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 4.1.3 : f bir modülüs fonksiyonu ve $0 < \delta < 1$ olmak üzere;

$$\forall x > \delta \text{ için } \qquad f(x) \le 2 f(1) \delta^{-1} x$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.1.4 : $\Omega = (f_k)$ modülüs fonksiyonlarının bir dizisi ve

$$0 < \inf_k p_k = h \le p_k \le \sup_k p_k = H < \infty$$

olsun. Buradan,

$$(i) \ \left[N_\theta, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]^I \subset \left[N_\theta, \Omega, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]^I$$

$$(ii) \ \left[N_\theta, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]_0^I \subset \left[N_\theta, \Omega, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]_0^I$$

$$(iii) \ \left[N_\theta, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]_\infty^I \subset \left[N_\theta, \Omega, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]_\infty^I$$

kapsamları sağlanır.

İspat: $x \in \left[N_\theta, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]^I$ olsun. Buradan $\forall z_1, z_2, ..., z_{n-1} \in X$ ve $\exists L \in X$ için

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[\left\| \Delta^m x_k - L, z_1, z_2, ..., z_{n-1} \right\| \right]^{p_k} \ge \varepsilon \right\}$$

yazılır. $\forall k \in \mathbb{N}$ için f_k lar $[0, \infty)$ aralığında sürekli olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$ için $0 < \delta < 1$ olmak üzere; her t için

$$0 \le t \le \delta \text{ için } \qquad f_k(t) < \varepsilon \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

yazılır.

Lemma 4.1.3 te kullanılarak,

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[f_k \left(\left\| \Delta^m x_k - L, z_1, z_2, ..., z_{n-1} \right\| \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\}$$

$$= \left\{ r \in \mathbb{N} : h_r^{-1} \left(h_r \ \max \left\{ \varepsilon^h, \varepsilon^H \right\} \right) \geq \varepsilon \right\}$$

$$\cup \left\{ r \in \mathbb{N} : h_r^{-1} \ \max \left\{ \left(2 f_k(1) \delta^{-1} \right)^h, \left(2 f_k(1) \delta^{-1} \right)^H \right\} \sum_{k \in I_r} \left(\left\| \Delta^m x_k - L, z_1, z_2, ..., z_{n-1} \right\| \right)^{p_k} \right\}$$

elde edilir. Bu ispatı tamamlar. Benzer şekilde diğer kapsamlar için de ispat açıktır.

Teorem 4.1.5 : $\Omega = (f_k)$ modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun.

$\forall k \in \mathbb{N}$ için,

$$\lim_{t \to \infty} \sup_k \frac{f_k(t)}{t} = \gamma > 0$$

olsun. Buradan,

$$(i) \ \left[N_\theta, \Omega, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]_0^I = \left[N_\theta, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]_0^I$$

$$(ii) \ \left[N_\theta, \Omega, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]^I = \left[N_\theta, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]^I$$

$$(iii) \ \left[N_\theta, \Omega, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]_\infty^I = \left[N_\theta, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]_\infty^I$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: Teorem 4.1.4 te,

$$\left[N_\theta, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]_0^I \subset \left[N_\theta, \Omega, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]_0^I$$

olduğu gösterilmişti. Eşitliğin sağlandığını göstermek için,

$$\left[N_\theta, \Omega, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]_0^I \subset \left[N_\theta, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]_0^I$$

kapsamının sağlandığını göstermek yeterli olacaktır.

Herhangi bir modülüs fonksiyonunun, γ ile verilen pozitif bir limite sahip olduğu kabul edilmişti, *Maddox* [20].

$\gamma > 0$ ve $x \in \left[N_\theta, \Omega, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]_0^I$ olsun. $\gamma > 0$ ve $\forall t > 0$ için

$$f_k(t) \geq \gamma t \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikten,

$$h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[f_k \left(\left\| \Delta^m x_k - L, z_1, z_2, ..., z_{n-1} \right\| \right) \right]^{p_k}$$

$$\geq \gamma^H \; h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left(\left\| \Delta^m x_k - L, z_1, z_2, ..., z_{n-1} \right\| \right)^{p_k}$$

elde edilir. Böylece istenen sonuç elde edilir. Yani,

$$x \in \left[N_\theta, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]_0^I$$

olup, istenilen eşitlik sağlanmış olur.

Sonuç 4.1.6 : $\Omega_1 = (f_k)$ ve $\Omega_2 = (g_k)$, modülüs fonksiyonlarının iki dizisi olsun.

$$\lim_{t \to \infty} \sup_k \frac{f_k(t)}{g_k(t)} < \infty$$

ise;

$$(i) \; \left[N_\theta, \Omega_1, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]_0^I \subset \left[N_\theta, \Omega_2, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]_0^I,$$

$$(ii) \; \left[N_\theta, \Omega_1, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]^I \subset \left[N_\theta, \Omega_2, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]^I,$$

$$(iii) \; \left[N_\theta, \Omega_1, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]_\infty^I \subset \left[N_\theta, \Omega_2, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]_\infty^I.$$

Teorem 4.1.7 : $\left(X, \| .,...,. \|_{X_S} \right)$ ve $\left(X, \| .,...,. \|_{X_E} \right)$ sırasıyla Standart ve Euclid n-normlu lineer uzaylar olsunlar. Buradan,

$$\left[N_\theta, \Omega, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s \right]^I \cap \left[N_\theta, \Omega, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_E \right]^I$$

$$\subset \left[N_\theta, \Omega, \Delta^m, p, \left(\|.,...,.\|_{X_S} + \|.,...,.\|_{X_E} \right) \right]^I$$

olur.

İspat: (1.3) eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki kapsamlar elde edilir:

$$\left\{r \in \mathbb{N} : h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[f_k \left(\left(\|.,\ldots,.\|_{X_S} + \|.,\ldots,.\|_{X_E} \right) \left(\Delta^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right) \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\}$$

$$\subset \left\{r \in \mathbb{N} : K\, h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[f_k \left(\left\| \Delta^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right\|_{X_S} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\}$$

$$\cup \left\{r \in \mathbb{N} : K\, h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[f_k \left(\left\| \Delta^m x_k - L, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \right\|_{X_E} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.8 : $\Omega_1 = (f_k)$ ve $\Omega_2 = (g_k)$ modülüs fonksiyonlarının iki dizisi olsun. Buradan,

$$(i)\ \left[N_\theta, \Omega_2, \Delta^m, p, \|.,\ldots,.\|, X_s\right]_0^I \subset \left[N_\theta, \Omega_1 \circ \Omega_2, \Delta^m, p, \|.,\ldots,.\|, X_s\right]_0^I,$$

$$\left[N_\theta, \Omega_2, \Delta^m, p, \|.,\ldots,.\|, X_s\right]^I \subset \left[N_\theta, \Omega_1 \circ \Omega_2, \Delta^m, p, \|.,\ldots,.\|, X_s\right]^I,$$

$$\left[N_\theta, \Omega_2, \Delta^m, p, \|.,\ldots,.\|, X_s\right]_\infty^I \subset \left[N_\theta, \Omega_1 \circ \Omega_2, \Delta^m, p, \|.,\ldots,.\|, X_s\right]_\infty^I .$$

$$(ii)\ \left[N_\theta, \Omega_1, \Delta^m, p, \|.,\ldots,.\|, X_s\right]_0^I \cap \left[N_\theta, \Omega_2, \Delta^m, p, \|.,\ldots,.\|, X_s\right]_0^I$$

$$\subset \left[N_\theta, \Omega_1 + \Omega_2, \Delta^m, p, \|.,\ldots,.\|, X_s\right]_0^I,$$

$$\left[N_\theta, \Omega_1, \Delta^m, p, \|.,\ldots,.\|, X_s\right]^I \cap \left[N_\theta, \Omega_2, \Delta^m, p, \|.,\ldots,.\|, X_s\right]^I$$

$$\subset \left[N_\theta, \Omega_1 + \Omega_2, \Delta^m, p, \|.,\ldots,.\|, X_s\right]^I$$

ve

$$\left[N_\theta, \Omega_1, \Delta^m, p, \|.,\ldots,.\|, X_s\right]_\infty^I \cap \left[N_\theta, \Omega_2, \Delta^m, p, \|.,\ldots,.\|, X_s\right]_\infty^I$$

$$\subset \left[N_\theta, \Omega_1 + \Omega_2, \Delta^m, p, \|.,\ldots,.\|, X_s\right]_\infty^I$$

olur.

İspat: (i) $x \in \left[N_\theta, \Omega_2, \Delta^m, p, \|.,...,.\|, X_s\right]^I$ olsun.

$0<\varepsilon<1$ ve $0<\delta<1$ olmak üzere $\forall k \in \mathbb{N}$ için,

$$0<t<\delta \quad \text{için} \qquad f_k(t)<\varepsilon$$

olur.

$$y_k = g_k\left(\left\|\Delta^m x_k - L, z_1, z_2, ..., z_{n-1}\right\|\right)$$

diyelim. Buradan,

$$h_r^{-1}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(y_k\right)\right]^{p_k} = h_r^{-1}\sum_{y_k\le\delta}\left[f_k\left(y_k\right)\right]^{p_k} + h_r^{-1}\sum_{y_k>\delta}\left[f_k\left(y_k\right)\right]^{p_k}$$

olur. Böylece $y_k \le \delta$ için

$$h_r^{-1}\sum_{y_k\le\delta}\left[f_k\left(y_k\right)\right]^{p_k} \le \varepsilon^H \tag{4.1}$$

olur. $y_k > \delta$ için, aşağıdaki eşitsizliği kullanırsak,

$$y_k < \frac{y_k}{\delta} < 1 + \left[\!\left[\frac{y_k}{\delta}\right]\!\right], \qquad \left(0<\delta<1\right)$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ için f_k bir modülüs fonksiyonu olduğundan $y_k > \delta$ için,

$$f_k(y_k) < \left(1 + \left[\!\left[\frac{y_k}{\delta}\right]\!\right]\right) f(1) \le 2\, f_k(1)\, \frac{y_k}{\delta}$$

olur. Böylece,

$$h_r^{-1}\sum_{y_k>\delta}\left[f_k\left(y_k\right)\right]^{p_k} \le \left(\frac{2\, f_k(1)}{\delta}\right)^H h_r^{-1}\sum_{y_k>\delta}\left[y_k\right]^{p_k} \tag{4.2}$$

bulunur. Bu durumda (4.1) ve (4.2) eşitsizlikleri birlikte yazılırsa,

$$h_r^{-1}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(y_k\right)\right]^{p_k} \le \varepsilon^H + \max\left(1, \left(2\, f_k(1)\delta^{-1}\right)^H\right) h_r^{-1}\sum_{k\in I_r}\left(y_k\right)^{p_k}$$

elde edilir, böylece (i) nin ispatı tamamlanır.

$(ii)\quad (x_k)\in\left[N_\theta,\Omega_1,\Delta^m,p,\|.,...,.\|,X_s\right]^I\cap\left[N_\theta,\Omega_2,\Delta^m,p,\|.,...,.\|,X_s\right]^I$

olsun. Buradan,

$$h_r^{-1}\sum_{k\in I_r}\left[\left(f_k+g_k\right)\left(\left\|\Delta^m x_k-L,z_1,z_2,...,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq K\ h_r^{-1}\sum_{k\in I_r}\left[f_k\left(\left\|\Delta^m x_k-L,z_1,z_2,...,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}+$$

$$K\ h_r^{-1}\sum_{k\in I_r}\left[g_k\left(\left\|\Delta^m x_k-L,z_1,z_2,...,z_{n-1}\right\|\right)\right]^{p_k}$$

olur. Bu eşitsizlik istenilen sonucu verir.

BULGU VE SONUÇLAR

Bu çalışmada n-normlu lineer uzaylarda modülüs fonksiyonlarının bir dizisi kullanılarak, genelleştirilmiş fark dizilerinin I-lacunary yakınsaklığı incelenmiştir. Böylece $\left[N_\theta,\Omega,\Delta^m,p,\|.,\ldots,.\|,X_s\right]^I$, $\left[N_\theta,\Omega,\Delta^m,p,\|.,\ldots,.\|,X_s\right]_0^I$ ve $\left[N_\theta,\Omega,\Delta^m,p,\|.,\ldots,.\|,X_s\right]_\infty^I$ dizi uzayları inşa edilmiş ve elde edilen bu lineer uzaylar üzerinde çeşitli kapsam bağıntıları verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] I. Açık. 2-Banach Uzayları, Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta, (2007).

[2] R. Çolak ve M. Et, (1997), On some generalized difference sequence spaces and related matrix transformations. *Hokkaido Math. Journal* **26** (3), 483-492.

[3] K. Demirci. (2001), I-Limit superior and limit inferior*, Mathematical communications*, **6**, 165-172.

[4] E. Ergün. I-çekirdek, Yüksek lisans tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun, (2006).

[5] A.Esi. (1995), Some new sequence spaces defined by a modulus, *Jour. Inst. Math. And Comp Sci*. (Math. Series)., **8(2)**: 81-86.

[6] A. Esi. (1997), Some new sequence spaces defined by a sequence of moduli. *Tr. J. of Math*., **21**: 61-68.

[7] A.Esi. (1996/97), Some new sequence spaces defined by a modulus function, *Istanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Derg*., **55-56**, 17-21.

[8] A.Esi and B.C. Tripathy, (2008), On some generalized new type difference sequence spaces defined by a modulus function in a seminormed spaces, *Fasciculi Mathematici*, **40**, 15-24.

[9] M.Et. (1993), On Some Difference Sequence Spaces, *Doğa-Tr. J. of Mathematics*, **17**, 18-24.

[10] A.R. Freedman, I.J. Sember and M. Raphael. (1978), Some Cesaro-type summability spaces. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **37**(3): 508-520.

11] S. Gahler. (1965), Linear 2- normietre Raume. *Math. Nachr.* , **28**, 1-43.

[12] S. Gahler. (1963), 2-metrische Raume und ihre topologische struktur. *Math Nachr.* , **28**, 115-148.

[13] H. Gunawan. (2001), On n-inner product, n-norms and the Cauchy-Schwarz inequality. *Scientiae Mathematicae Japonicae online*, **5**, 47-54.

[14] H. Gunawan. (2001), The space of p-summable sequences and its natural n-norm. *Bull. Aust. Math. Soc*. **64** (1), 137-147.

[15] H. Gunawan ve Mashadi. (2001), On finite dimensional 2-normed spaces. *Soochow, Journal of Math.* **27** (3), 631-639.

[16] H. Kızmaz. (1981), On certain sequence spaces. *Canad. Math. Bull.* , **24** 169-176.

[17] P. Kostyrko, M. Macaj ve T. Salat. (2000), I-convergence. *Real Anal. Exchange* **26** (2), 669-686.

[18] P. Kostyrko, M. Macaj ve T. Salat Statistical convergence and I-convergence, *to appear in Real Anal. Exchange*.

[19] C. Kuratowski. (1958), Topologie *I. PWN Warszawa*.

[20] I. J. Maddox. (1967), Spaces of strongly summable sequences. *Quart J. Math.* **18**, 345-355.

[21] I.J. Maddox. (1986), Sequence spaces defined by a modulus, *Math. Proc. Camp. Philos. Soc*., **100**, 161-166.

[22] A. Misiak. (1989), n-inner product spaces. *Math. Nachr*. **140**, 229-319.

[23] J. Nagata. (1974), Modern General Topology, *North-Holland Publ. Comp.*, Amsterdam-London.

[24] S. Pehlivan ve B. Fisher. (1965), Lacunary strong convergence with respect to a sequence of modulus functions. *Comment. Math. Univ. Carolinae.* **36** (1), 71-78.

[25] W. Raymond, R.W. Freese, J. Cho, (2001), Geometry of Linear 2-Normed Spaces. *Nova Science Publishers*, **301** s. Huntington, N.Y.

[26] W.H. Ruckle, (1973), FK space in which the sequence of coordinate vectors is bounded, *Can. J. Math*., **25** 973-978.

[27] A. Şahiner. (2007), On I-lacunary strong convergence in 2-normed spaces. *Int. J. Contemp. Math. Sciences* **2** (20), 991-998.

[28] H.Şimşir, Genelleştirilmiş fark dizi uzayları ve genelleştirilmiş istatistiksel yakınsaklık, Yüksek lisans tezi, Fırat Üniversitesi, Elazığ, (2006).