GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIR DEĞER PROBLEMLERİ VE SAMPLING TEORİSİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

İBRAHİM HALİL ASLAN
TEMMUZ 2011

Sınır Değer Problemleri ve Sampling Teorisi

Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Abdullah Kablan

İbrahim Halil Aslan
Temmuz 2011

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Sınır Değer Problemleri ve Sampling Teorisi
Öğrencinin, Adı Soyadı: İbrahim Halil ASLAN
Tez Savunma Tarihi: 22.07.2011

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ramazan KOÇ
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Doç. Dr. Âli İhsan HASÇELİK
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Abdullah KABLAN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

	İmzası
Prof. Dr. Manaf MANAFLI	
Yrd. Doç. Dr. Abdullah KABLAN	
Yrd. Doç. Dr. İlkay GÜVEN	

ÖZET

SINIR DEĞER PROBLEMLERİ VE SAMPLING TEORİSİ

İBRAHİM HALİL ASLAN
Yüksek Lisans Tezi, Matematik A. B. D.
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Abdullah KABLAN

Temmuz 2011, 54 Sayfa

Bu tezde Kramer sampling teoremi ile Lagrange intepolasyonundan üretilen sampling açılımları arasındaki ilişki anlatılmıştır. Kramer teoremi ile elde edilmiş sampling açılımına sahip her hangi bir fonksiyonun, Kramer teoremindeki gibi çekirdek fonksiyonu ikinci mertebeden Sturm-Liouville probleminden belirlenen, Lagrange tipi interpolasyona da sahip olacağı gösterilmiştir. Sampling teoremi ile ilgili bir çok regüler ve singüler Sturm-Liouville problemi için kullanılan bu yeni yaklaşım, sadece bilinen sampling açılımlarını yeniden yazmak değil aynı zamanda sampling fonksiyonlarını hesaplamak için de yeni bir yöntemdir.

Tezde, öncelikle Whittaker-Shannon-Kotel'nikov (WSK) teoremi verilmiş ve daha sonra WSK metodunun bazı genelleştirmeleri tanıtılmıştır. Son olarak da Lagrange interpolasyonundan üretilen sampling açılımı ile ilgili ana teorem ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Shannon samling teoremi, Kramer sampling teoremi, Sturm-Liouville sınır değer problemi.

ABSTRACT

BOUNDARY VALUE PROBLEMS AND SAMPLING THEORY

İBRAHİM HALİL ASLAN
M. Sc. in Mathematics
Supervisor: Asist. Prof. Dr. Abdullah KABLAN
July 2011, 54 Pages

This thesis is devoted to a connection between Kramer's sampling theorem and sampling expansions generated by Lagrange interpolation. It is shown that any function that has a sampling expansion in the scope of Kramer's theorem also has a Lagrange-type interpolation expansion provided that the kernel associated with Kramer's theorem arises from a second-order Sturm–Liouville boundary-value problem. This new approach, which for a variety of regular and singular Sturm–Liouville problems leads to associated sampling theorems, recovers not only many known sampling expansions but also gives new ways to calculate the corresponding sampling functions.

In thesis, firstly Whittaker-Shannon-Kotel'nikov (WSK) theorem has been given and secondly some generalized theorem of WSK have been introduced. Finally, the mean theorem about sampling expansions generated by Lagrange interpolation has been proved.

Key Words: Shannon's sampling theorem, Kramer's sampling theorem, Sturm-Liouville boundary-value problems.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamda her an yanımda olan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Abdullah KABLAN'a bana sağladığı yardımlarından dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Varlığı ile kendini her an yanımda hissettiren sevgili Anneme teşekkürlerimi en içten duygularımla sunarım.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER LİSTESİ

(X,μ)	Ölçüm uzayı
$L^p(-\sigma,\sigma)$	$(-\sigma,\sigma)$ aralığında p. kökten integrali var olan fonksiyonlar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$S_n(t)$	Sampling fonksiyonları
$\{t_n\}$	Sampling değerleri
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
λ	Özdeğerler
L	Lineer operatörler
U_n	Sınır şartları
$C^{(n)}$	n. mertebeden türevleri sürekli olan fonksiyonlar
$G(t)$	Sampling değerlerinin kanonik çarpımı
W	Wronskiyen determinantı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$O(-)$	Asimptotik gösterim
$\Delta(\lambda)$	Özdeğerlerin determinantı
U	Sınır şartlarının determinantı

GİRİŞ

Haberleşme teknolojisinde ve bilgi teorisinde kullanılan başlıca tekniklerden biri Sampling Teorisidir. İlk uygulamaları bu alanlarda olmasıyla birlikte bu gün birçok fizik ve mühendislik alanlarında kullanılmaktadır. Sinyal analizlerinde, görüntü işleminde, radarlarda, meteorolojide, holoğrafide, ve daha bir çok alanda kullanılmaktadır.

Sampling yöntemi, verilen herhangi bir bilgi, bir fonksiyonun belirli noktalarda ki değeri ya da onun türevleri şeklinde verilip, fonksiyonun yeniden yapılandırılmasını isteyen her alanda kullanılabilir. Bu açıdan Sampling Teorisine interpolasyon ve yaklaşım teorilerinin bir ürünü olarak bakılsa da aslında gelişmesi tam fonksiyonlar teorisine daha yakındır. Bu yüzden Sampling Teorisi her zaman matematikte önde gelmiş ve gelenekselleşmiş olan Yaklaşım teorisi, Tam fonksiyonlar teorisi, Fourier serileri ve integralleri gibi matematik alanlarının gölgesinde kalmıştır. Belkide bu yüzden daha çok fizik ve mühendislik alanlarında yaygınlaşmış ve gelişimindeki birçok şey matematikçilerden ziyade mühendisler tarafından bulunulmuştur. Dolayısıyla gelişimindeki birçok araştırma makaleside mühendislik literatüründe yer almıştır.

Sampling teorisinin geçmişi elli yıllık bir süreçtir, fakat kökleri Poisson [1], Borel [2], Hadamard [3], La Vallee Poussin [4] ve E.T. Whittaker [5] gibi büyük matematikçilere dayanır ve hatta bazı temel sonuçlar Cauchy'ye [6] kadar uzanır.

Sampling Teorisi başladığından beri üzerinde çalıştığı temel esas eğer bir $f\left(t\right)$ sinyal fonksiyonunun saniyelik devresi $W/2$ den daha yüksek sıklıkta değilse, fonksiyonun saniyede $1/W$ aralıklı noktalarındaki ordinatları verilerek fonksiyonu yeniden inşa edilebileceği üzerinedir. Başka bir ifadeyle $t_n = n/W,\ n = 0,1,2,\cdots$ ile verilirse

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} f(\frac{n}{W})\frac{\sin\pi(Wt-n)}{\pi(Wt-n)} \tag{0.1}$$

biçimimde $f(t)$ fonksiyonu yeniden inşa edilebilir. İstenilen bilginin tamamını bu fonksiyonda bulabiliriz. t_n değerlerine sampling değerleri dersek, eşit aralıklarla verilen bu sampling değerleri fonksiyonu yeniden inşa eder. Bu fonksiyonun tam olarak inşası için gereken sampling değerleri arasındaki minimum oran, ilk defa Sampling Teorisinin telgraf ile bağlantısını kuran H. Nyquist tarafından bulunmuştur. Bu yüzden bu orana Nyquist oran denir, [7].

Teorinin ilk keşfi E. T. Whittaker tarafından 1915 kardinal fonksiyonların serisi ile olmuştur, [5]. Daha sonra oğlu J. T. Whitaker tarafından bu çalışmalar daha da ilerletilmiştir, [8]. Fakat F. J. W. Whipplenin, E. T. Whittaker'den önce 1910'lar da bazı çalışmaların olduğu fakat bunları yayınlamadığı iddia eder, [9].

Son çıkan bir makalede [10] P. Butzer ve R. Stens, Japon matematikçisi K. Ogura'nın 1920 de yayınlanan oldukça belirsiz bir raporunda [11] Sampling Teorisinin bilinen Yaklaşım ve diğer teorilere benzer bir formda olduğunu ve bunu rezüdü hesabını kullanarak basit ve kabataslak olarak ispatını verdiğini söylemiştir. Buther ve Stens ' e göre bu K. Ogura'yı bunu bu şekilde söyleyen ilk matematikçi yapar ve E. T. Whittaker'e ait olduğu bilinen bu yaklaşım aslında Ogura'a aittir.

E. T. Whittaker çalışmalarına keyfi fakat tam bir fonksiyon alarak başladı ve ondan sonra (0.1)'in sağ tarafında verilen ve $\left\{t_n = n/W\right\}_{n=-\infty.}^{\infty}$ sampling değerleri ile $f(t)$ fonksiyonunu oluşturdu. Bu fonksiyona kardinal fonksiyonu denir. Aslında Whittaker sampling değerlerini daha genel alarak, yani $\left\{T_n = a + nW\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ biçiminde alarak fonksiyonu yapılandırmayı düşünüyordu ki zaten bunu basit değişken dönüşümleri yaparak kolaylıkla görebiliriz. Daha sonra Whittaker bant limit fonksiyonlarının yani kardinal fonksiyonlarının hızlı salınım yapmayan tam fonksiyonlar olduğunu göstermiştir. Whittaker çalışmalarında hiçbir zaman (0.1) deki kardinal fonksiyonunun $f(t)$ sinyal fonksiyonuna eşit olduğunu ifade etmemiştir. Aksine Cotabular fonksiyonlar olarak adlandırılan $t_n = n/W$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ noktalarında birçok tam fonksiyonun var olduğunu fakat bunların en basit olanının kardinal fonksiyonu olduğunu söylemiştir. Diğer taraftan Ogura ise kardinal fonksiyonunu $f(z)$ biçiminde $(z \to \infty)$ iken $\exp\left(\pi r \left|\sin\theta\right|\right)$ den daha hızlı büyümeyen üstel tipten tam bir fonksiyon biçiminde tanımlayarak başlamıştır.

Daha sonra Ogura kardinal fonksiyonun (0.1) deki Sampling değerlerinin tamsayı yani $W = 1$ alınıldığı zaman inşa edilen fonksiyonun analitik olduğunu söylemiştir.

Nyquist'in oranından faklı oranlar için Whittakerin çalışmaları sadece teoride kalmıştır. Whittaker'in bu çalışmaları ikinci dünya savaşından sonra literatürde pek görünmezken 1940'ta C. E. Shannon tarafından yeniden keşfedilmiş ve tanıtılmıştır. Bu konuda haberleşmenin matematiksel teorisi ve sesin varlığının hesaplanması iki ünlü makalesidir, [12], [13]. Bunlarla birlikte Shannon eğer bir sinyal örneği için farklı anlarda ve düzgün olmayan aralıklarla onun türevleri ve değerleri verildiği zaman sınırlandırılmış frekanslarla fonksiyonun yeniden yapılandırılabileceğini söylemiştir.

1950'lerden sonra ise batı dünyasında tanınmış olan Rus mühendis Kotel' nikov [14], Shannonun sonuçlarından bağımsız olarak keşfettiklerini Shannon'dan daha önce heberlerşme teknolojisine uygulamıştır. Rusya da ve doğu da bu teori Kotel'nikov' un adıyla bilinir.

Batıdaki mühendisler arasında Shannon Sampling teorisi olarak bilinse bile biz Whittaker-Shanon-Kotel'nikov sampling teorisi ya da kısaca WSK Sampling teorisi olarak adlandıracağız.

BÖLÜM 1

WHİTTAKER-SHANNON-KOTEL'NİKOV TEOREMİ VE GENELLEŞTİRMELERİ

Bu bölümde, tezin de konusu olan Whittaker-Shannon-Kotel'nikov (WSK) Sampling Teoreminden bahsedeceğiz. Eğer bir zaman fonksiyonunun saniyelik devresi sıfırdan W ya kadar olan bantlar için sınırlandırılmışsa bu zaman fonksiyonunun $1/2W$ aralıklı ayrık noktalarındaki ordinatlarının dizisi verildiği durumda bu fonksiyonu tam olarak belirleyebiliriz ve bu da aşağıdaki şekildedir.

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} f(\frac{n}{W})\frac{\sin\pi(Wt-n)}{\pi(Wt-n)}$$

Buna Via formülü diyecegiz. Şimdi bunun temel sonuçlardan biri olan (WSK) Sampling Teoremini vermeden önce bazı tanım ve teoremler verecegiz.

Tanım 1.1 (Ölçülebilir Fonksiyon): X uzayı μ pozitif ölçüsü ile (X,μ) ölçüm uzayı olsun ve $0<p<\infty$ sayıları için aşağıdaki sağlanırsa f fonksiyonuna X üzerinde kompleks değerli *ölçülebilir bir fonksiyon* denir, [15].

$$\left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} < \infty$$

Tanım 1.2 (Band Limit Sinyal Fonksiyonu): Eğer $f(t)$ $[-\sigma,\sigma]$ aralığında $F\in L^2(-\sigma,\sigma)$ için Fourier dönüşümlü bir fonksiyon ise $f(t)$ fonksiyonuna σ bantlı bir *bant limit sinyal (fonksiyonu)* denir. Yani $f(t)$ fonksiyonunun

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma} F(w)e^{itw}dw, \qquad F\in L^2(-\sigma,\sigma) \tag{1.1}$$

biçiminde yazılmasıdır.

Teorem 1.1 (Parseval Eşitliği): $\left\{\psi_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ ortagonal fonksiyonlar kümesi ve $f, g \in L^2\left(a,b\right)$ olsunlar. f, g fonksiyonları sırasıyla

$$f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n\left(x\right), \quad g\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty} d_n \psi_n\left(x\right)$$

biçiminde açılımlara sahip ise

$$\int_a^b \left\{f\left(x\right)\right\}^2 dx=\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2,$$
$$\int_a^b \left\{g\left(x\right)\right\}^2 dx=\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2,$$
$$\int_a^b f\left(x\right) g\left(x\right) dx=\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n$$

biçiminde eşitlikler vardır, [16].

Teorem 1.2 (Hölder Eşitsizliği): p ve q negatif olmayan ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ koşulunu sağlayan reel sayılar olsun. Eğer $f \in L^p, g \in L^q$ ise $f \cdot g \in L^1$ ve

$$\int \left|fg\right| d\mu \leq \left\|f\right\|_p \cdot \left\|g\right\|_q$$

dir, [16].

Tanım 1.3 (Tam fonksiyon): Kompleks değişkenli $f\left(z\right)$ fonksiyonu kompleks düzlemin tamamında analitik ve bu nedenle her noktasında fourier seri açılımına sahip ise $f\left(z\right)$ fonksiyonuna *tam fonksiyon* denir. Sıfırdaki seri açılımı aşağıdaki gibidir.

$$f\left(z\right)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

burada $a_n=f^n\left(0\right)/n!$ katsayılardır, [17].

Tanım 1.4 (Üstel Tipten Tam Fonksiyon): $f\left(z\right)=\exp\left(\sigma z^m\right)$ fonksiyonuna m. mertebeden σ tipinde üstel tam fonksiyon denir. $m=1$ alınırsa sadece σ *tipinde üstel tam fonksiyon* denir, [17].

Tanım 1.5: $\forall\sigma \geq 0$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için B_σ^2 kümesi ile $\mathbb{C}$ de $L^2\left(\mathbb{R}\right)$ ye ait olan, en fazla σ tipindeki üstel bütün tam fonksiyonların kümesini göstereceğiz. Yani

$$f \in \mathrm{B}_\sigma^2 \Leftrightarrow \left|f\left(z\right)\right| \leq \sup_{x\in\Re}\left|f\left(x\right)\right|\exp\left(\sigma\left|z\right|\right), \quad \int_{\mathbb{R}}\left|f\left(x\right)\right|^2 dx < \infty, \quad z \in \mathbb{C}$$

Teorem 1.3 (Hadamard Faktorizasyon Teoremi): Herhangi sonlu, tam ve ρ. mertebeden $f\left(z\right)$ fonksiyonu aşağıdaki formda yazılabilir

$$f\left(z\right) = z^m e^{P(z)}\prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{z_n}; p\right)$$

burada z_n değerleri $f\left(z\right)$ fonksiyonunun sıfır olmayan kompleks kökleri ve $p\left(p \leq \rho\right)$ sayısı, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left|z_n\right|^{p+1}}$ serisini yakınsak yapan en küçük tam sayı, $P\left(z\right)$ polinomu derecesi ρ 'yu aşmayan bir polinom, m sayısı orjindeki sıfırın katı ve $G\left(u; p\right)$ ise aşağıdaki biçimde tanımlanan bir fonksiyondur.

$$G\left(u;p\right) = \left(1-u\right)\exp\left(u + \frac{u^2}{2}\cdots\frac{u^p}{p}\right), \quad G\left(u;0\right) = \left(1-u\right)$$

Örnek olarak

$$\sin \pi z = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

verilebilir, [18].

1.1. Whittaker-Shannon-Kotel’nikov Sampling Açılımı

Bu bölümde tezinde temelini oluşturacak olan Whittaker-Shannon-Kotel’nikov veya kısaca adlandıracağımız WSK metodunu vereceğiz. Bu metot ilk defa 1915 de E. T. Whittaker tarafından [8] ortaya atılmış ve daha sonra da 1940’ta C. E. Shannon [13] ve V. Kotel’ nikov [14] tarafından geliştirilmiştir.

Teorem 1.4 (Whittaker-Shannon-Kotel’nikov): $f\left(t\right)$ $\left[-\sigma,\sigma\right]$ aralığında bir σ bant limit sinyal fonksiyonu ise o zaman $t_k = k\pi\,/\,\sigma,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots,$ değerli sampling noktalarında Shannon’ un Via formülü

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} f(t_k)\frac{\sin\sigma(t-t_k)}{\sigma(t-t_k)},\ t\in\mathbb{R} \tag{1.2}$$

şeklini alır. Bu seri $\mathbb{R}$ kümesinin kompakt her alt kümesinde mutlak ve düzgün yakınsaktır, [13]. Burada $\{t_k\}_{k=\infty}^{\infty}$ değerlerine sampling değerleri ve

$$S_k(t):=\frac{\sin\sigma(t-t_k)}{\sigma(t-t_k)} \tag{1.3}$$

fonksiyonlarına da Sampling fonksiyonları denir.

(1.2) ifadesinde verilen σ/π sampling sıklığına Nyquist oranı demiştik. Bu oran fonksiyonun yeniden tam olarak yapılandırması için gerekli olan minimum orandır.

İspat: Bu teoremin ispatında ana fikrimiz, e^{itw} fonksiyonuna basit notasyonlar uygulayarak onu 2σ periyotlu fonksiyon yapıp, $F(w)$ fonksiyonunu $\mathbb{R}$ reel eksenin tamamına $e^{-inw\pi/\sigma}$ fonksiyonlarının Fourier serisinde yazmak olacaktır. Bu durumda F 'nin Fourier açılımı

$$F(w)=\sum_{-\infty}^{\infty} c(n)e^{-inw\pi/\sigma}$$

biçiminde olur. Burada katsayılar

$$c(n)=\frac{1}{2\sigma}\int_{-\sigma}^{\sigma} F(w)e^{inw/\sigma}dw$$

biçiminde hesaplanır. (1.1) ifadesinin sağ tarafına Parseval eşitliğini uygularsak

$$f(t)=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)\frac{\sin\sigma(t-t_n)}{\sigma(t-t_n)} \tag{1.4}$$

elde ederiz. Gerçektende

$$f(t_n)=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}c(n).$$

olduğundan (1.2) ifadesi elde edilir. Buradan da ispat tamamlanır. (1.4) ifadesi $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c(n)|\in L^2(\mathbb{R})$ olduğundan yakınsaktır. Bununla birlikte (1.4) deki seriye Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygularsak (1.2) ifadesinin $\mathbb{R}$ kümesinin kompakt her alt kümesinde mutlak ve düzgün yakınsak olduğu kolaylıkla görülebilir. Dikkat edilirse $F \in L^2(-\sigma,\sigma)$ olduğundan $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c(n)| < \infty$ dur.

Şimdiye kadar seçilen sampling değerleri olan $\{t_n\}$ dizisi eşit aralıklar olarak seçilmişti. Şimdi ise eşit olmayan aralıklar için (WSK) Sampling teoreminin genelleştirmesinde büyük rol oynayan Paley ve Wiener'in çalışması olan Paley-Wiener Teoremini verelim.

1.2. WSK Metodunun Paley-Wiener Genelleştirmesi

Düzenli sampling noktalarının seçimiyle oluşturulan WSK metodunun, Paley-Wiener genelleştirmesi sampling noktalarının düzensiz ve belirli bir şartı sağlayacak biçimde seçilmesiyle oluşturulmuş daha genel bir metottur.

Teorem 1.5 (Paley-Wiener): $\{t_n\}$ reel sayılar dizisi aşağıdaki şekilde seçilsin

$$D := \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left| t_k - \frac{k\pi}{\sigma} \right| < \frac{\pi}{4\sigma} \tag{1.5}$$

ve $G(t)$ aşağıdaki biçimde tanımlanmış bir fonksiyon olsun.

$$G(t) = (t - t_k) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{t_k}\right)\left(1 - \frac{t}{t_{-k}}\right) \tag{1.6}$$

o zaman (1.2) deki seri açılımı

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k) S_k^{**}(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{1.7}$$

biçiminde olur. Burada

$$S_k^{**}(t) := \frac{G(t)}{G'(t_k)(t - t_k)} \tag{1.8}$$

dir, [19].

(1.7) serisinin sağ tarafı $\mathbb{R}$ kümesinin kompakt her alt kümesinde düzgün yakınsaktır. Açıktır ki $t_k = (k\pi)/\sigma = -t_{-k}$ alındığı zaman $G(t)$ fonksiyonu $\sin \sigma t / \sigma$ ya eşit olur. Bu da (WSK) Sampling Teoremindeki (1.2) ve (1.3) ifadelerinin (1.7), (1.8) ifadelerine denk olması demektir.

WSK Sampling Teoreminin başka bir genellemesi olan, (1.1) integralindeki periyodik olan e^{ixt} fonksiyonun yerine daha genel periyodik fonksiyonlar alındığı zaman durumun nasıl olacağını açıklayan aşağıdaki Kramer teoremini verelim.

1.3. WSK Metodunun Kramer Genelleştirmesi

WSK metodunun bir başka genelleştirmesi olan Kramer sampling metodu bu tezin de ana unsuru olacaktır. Çünkü bu teoremle birlikte ilk defa sampling metodu ile sınır-değer problemleri arasında ilişki kurulmuş ve metot için gerekli olan sampling noktaları sınır-değer probleminin özdeğerlerinden ve sampling fonksiyonları da özfonksiyonlardan elde edilmiştir.

Teorem 1.6 (Kramer): $K(x,t) \in L^2(I)$, $t \in \mathbb{R}$ için sürekli bir fonksiyon ve $\{t_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ reel sayılar dizisi için $K(x,t_n) \in L(I)$ ortagonal fonksiyonların ailesi olsun. $F(x) \in L^2(I)$ için

$$f(t) = \int_I F(x) K(x,t)\, dx \tag{1.9}$$

biçiminde ifade edilebilirse o zaman $f(t)$ fonksiyonun Sampling serisi

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) S_n^*(t) \tag{1.10}$$

biçiminde olur. Burada

$$S_n^*(t) = \frac{\int_I K(x,t)\overline{K(x,t_n)}\, dx}{\int_I \left|K(x,t_n)\right|^2 dx} \tag{1.11}$$

dir, [20].

İspat: $F(x) \in L^2(I)$ olduğundan

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) \overline{K(x,t_n)}$$

seri açılımına sahiptir. Burada

$$c(n)=\frac{\int_I F(x)K(x,t_n)\,dx}{\int_I\left|\overline{K(x,t_n)}\right|^2 dx}$$

fonksiyonları katsayılardır. Benzer olarak $K(x,t)\in L^2(I)$ olduğundan

$$K(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} d(n)K(x,t_n)$$

burada

$$d(n)=\frac{\int_I K(x,t)\overline{K(x,t_n)}dx}{\int_I\left|\overline{K(x,t_n)}\right|^2 dx}$$

katsayılardır. Bunlarla birlikte (1.9) denkleminin sağ tarafına Parseval eşitliği uygulanırsa istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Gerçektende, $I=[-\pi,\pi]$, $K(x,t)=e^{ixt}$ ve $t_n=n$ alındığında

$$S_n^*(t)=\frac{\sin\pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$

olacaktır ve böylece

$$f(t)=\int_{-\pi}^{\pi}F(x)e^{ixt}dx,\qquad F(x)\in L^2(-\pi,\pi)$$

iken

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\frac{\sin\pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$

seri açılımı ortaya çıkacaktır. Bu bize Kramer Teoreminin (WSK) Sampling Teoreminin bir genellemesi olduğunu söyler.

Bu teoremde şu ana kadar $K(x,t)$ fonksiyonları ve $E=\{t_k\}_{n=-\infty}^{\infty}$ dizisinin nasıl bulunacağı konusunda herhangi bir fikir sunulmamıştır. Ancak yine Kramer bu fonksiyonların ve dizisinin belirli bir kendine-eş sınır- değer probleminden elde edilebileceğini söylemiştir. Bunu nasıl olacağı 3. bölümde verilecektir ancak ondan önce 2. bölümde sınır-değer problemlerini tanımlayıp bazı özelliklerini vereceğiz.

BÖLÜM 2

LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRLER

Bu bölümde Sampling Teoreminin seri açılımında kullanacağımız lineer operatörlerden bahsedeceğiz. Öncelikle lineer öperatörler ve sınır şartlarından bahsedeceğiz. Daha sonra ise özdeğer ve özfonksiyonlardan ve bunların bazı özelliklerini vereceğiz. Bu bölümdeki teoremler ispatsız verilecek ve sadece kaynak gösterilmekle yetinilecektir.

2.1. Lineer Operatörler

D, $\mathbb{R}$ kompleks lineer uzayının bir alt kümesi olsun. D nin her x elemanını $\mathbb{R}$ nin bir $x' = A(x)$ elemanına eşleyen A fonksiyonuna, $\mathbb{R}$ kompleks lineer uzayında bir *operatör* denir. Burada D kümesine operatörün tanım kümesi ve tüm Ax, $(x \in A)$ elemanlarının oluşturduğu kümeye de operatörün *değer kümesi* denir.

D_A bir alt uzay olsun. Eğer $x, y \in D_A$ ve herhangi bir λ sayısı için aşağıdaki bağıntılar sağlanıyor ise A operatörüne *lineer* denir.

$$A(\lambda x) = \lambda A(x)$$
$$A(x+y) = A(x) + A(y)$$

A ve B operatörleri aynı D tanım kümesinde tanımlanmış ve $\forall x \in D$ için $Ax = Bx$ ise bu operatörlere *eşit operatörler* denir.

2.2. Lineer Diferansiyel İfadeler

Aşağıdaki formda verilmiş eşitliklere *lineer diferansiyel ifadeler* denir.

$$l(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y$$

Burada $p_0(x), p_1(x), \ldots p_n(x)$ fonksiyonlarına katsayılar, n sayısına da diferansiyel ifadenin *derecesi* denir. Şimdi $[a,b]$ aralığında $n.$ mertebeye kadar tüm türevleri sürekli olan fonksiyonlar uzayını $C^{(n)}$ ile gösterelim. Her $y \in C^{(n)}$ fonksiyonu için $l(y)$ diferansiyel ifadesi iyi tanımlı ve $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyondur.

2.3. Sınır Şartları

y ve onun ilk $(n-1)$. ardıl türevlerinin $[a,b]$ aralığındaki a ve b noktalarındaki sınır değerlerini aşağıdaki biçimde gösterelim:

$$y_a, y_a^{'}, \cdots y_a^{(n-1)}; y_b, y_b^{'} \cdots y_b^{(n-1)} \tag{2.1}$$

$U(y)$, (2.1) deki değerlerle aşağıdaki biçimde tanımlanan lineer bir form olsun.

$$U(y) = \alpha_0 y_a + \alpha_1 y_a^{'} + \cdots + \alpha_{n-1} y_a^{(n-1)} + \beta_0 y_b + \beta_1 y_b^{'} + \cdots + \beta_{n-1} y_b^{(n-1)}$$

Eğer bu türden birçok $U_v(y), v = 1,\ldots,m$ formları seçilirse ve

$$U_v(y) = 0, \qquad v = 1,\ldots,m \tag{2.2}$$

şartlarının $y \in C^{(n)}$ fonksiyonları tarafından sağlanması istenirse, bu şartlara y fonksiyonlarının sağlanması gereken *sınır şartları* denir.

D ile (2.2) formundaki sınır şartlarının özel bir sistemini sağlayan $y \in C^{(n)}$ fonksiyonlarının oluşturduğu kümeyi gösterelim. D nin $C^{(n)}$ de bir lineer alt uzay olduğu açıktır ve eğer (2.2) şartları hiç yoksa veya tüm katsayıları sıfır ise o zamanda bu $C^{(n)}$ ile çakışır.

Belirlenmiş bir $l(y)$ diferansiyel ifadesi ile birlikte (2.2) formundaki şartlarla tanımlanmış özel bir D alt uzayı verilsin. Her bir $y \in D$ için $u = l(y)$ fonksiyonunu karşılık getirelim. Bu bağıntı tanım kümesi D olan bir lineer operatördür ki biz bunu L ile göstereceğiz ve aşağıdaki gibi yazacağız

$$u = Ly.$$

L operatörüne, $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve (2.2) sınır şartları ile oluşturulan diferansiyel operatör denir.

Bu yolla herhangi bir diferansiyel ifadeden, (2.2) sınır şartlarının değişik seçimleriyle birçok diferansiyel operatör elde edilir. Eğer özel olarak (2.2) sınır şartları hiç yoksa o zaman bu tanım kümesi $D = C^{(n)}$ olan ve L_1 ile göstereceğimiz diferansiyel ifadeye karşılık gelir. Bu durumda L_1 aynı $l(y)$ diferansiyel ifadesi ile oluşturulmuş tüm diğer L operatörlerinin genişletilmişi olacaktır. Burada L_1 en geniş tanım kümesine sahip operatör değildir, ancak yukarıda bahsedilen tüm operatörler L_1 operatörünün kısıtlanışıdır.

2.4. Homojen Sınır-Değer Problemi

$$l(y) = 0 \tag{2.3}$$

$$U_v(y) = 0, \qquad v = 1,2,\ldots,m \tag{2.4}$$

şartlarını sağlayan $y \in C^{(n)}$ fonksiyonunun bulunması problemine *Homojen sınır değer problemi* denir. Eğer L, $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve (2.4) sınır şartları ile oluşturulan bir operatör ise, o zaman homojen sınır-değer problemi; L operatörünün D tanım kümesi içinde L yi sıfır yapacak bir y fonksiyonun bulunmasıdır.

Herhangi bir homojen sınır-değer probleminin en az bir $y = 0$ çözümünün var olduğu açıktır. Bu çözüme a*şikar çözüm* denir. Homojen sınır –değer problemi aşikar olmayan çözümlere de sahip olabilir.

Şimdi hangi şartlar altında homojen sınır değer-değer probleminin aşikar olmayan çözüme sahip olduğunu bulmaya çalışalım.

$y_1, y_2, \ldots y_n$, $l(y) = 0$ diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsun. Bu durumda lineer diferansiyel denklemlerin bilinen teorisinden, $l(y) = 0$ denkleminin herhangi bir çözümü (bu aynı zamanda homojen sınır-değer probleminin de çözümüdür) $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sabitler olmak üzere aşağıdaki formda yazılabilir.

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n \tag{2.5}$$

şimdide (2.5) çözümüne (2.4) sınır şartlarını sağlatırsak, aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\left.\begin{array}{l} c_1U_1\left(y_1\right)+c_2U_1\left(y_2\right)+\cdots+c_nU_1\left(y_n\right)=0 \\ c_1U_2\left(y_1\right)+c_2U_2\left(y_2\right)+\cdots+c_nU_2\left(y_n\right)=0 \\ \quad . \qquad\qquad . \qquad\qquad \cdots \qquad . \\ c_1U_m\left(y_1\right)+c_2U_m\left(y_2\right)+\cdots+c_nU_m\left(y_n\right)=0 \end{array}\right\} \tag{2.6}$$

şimdi bu denklem sisteminin katsayı matrisi olan aşağıdaki matrisin rankına r diyelim.

$$U=\begin{vmatrix} U_1\left(y_1\right) & U_1\left(y_2\right) & \ldots & U_1\left(y_n\right) \\ U_2\left(y_1\right) & U_2\left(y_2\right) & \ldots & U_2\left(y_n\right) \\ . & . & \ldots & . \\ U_m\left(y_1\right) & U_m\left(y_2\right) & \ldots & U_m\left(y_n\right) \end{vmatrix}$$

bu durumda $c_1,c_2,\ldots,c_n$ sabitleri için (2.6) denklem sisteminin tam olarak $\left(n-r\right)$ tane bağımsız çözümü olacaktır ve bunlar sınır-değer probleminin $\left(n-r\right)$ tane y çözümüne denk gelecektir.

Buradan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$1\big)$ Eğer U matrisinin rankı r ye eşit ise homojen sınır-değer problemi $\left(n-r\right)$ tane bağımsız çözüme sahiptir.

$2\big)$ $\left(a\right)$ Homojen sınır-değer problemi aşikar olmayan çözüme sahip olması için gerekli ve yeterli şart, U matrisinin r rankının l diferansiyel ifadenin n derecesinden küçük olmasıdır.

$\left(b\right)$ $m < n$ için, homojen sınır-değer problemi her zaman aşikar olmayan çözüme sahiptir.

$\left(c\right)$ $m=n$ için, homojen sınır-değer probleminin aşikar olmayan çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart U matrisinin determinantının (ki bu durumda kare matrisi oluşur) sıfır olmasıdır.

U matrisinin rankına sınır-değer probleminin *rankı* denir. Bu $y_1,y_2,\ldots,y_n$ çözüm sisteminin seçimine bağlı değildir.

2.5. Diferansiyel Operatörlerin Özdeğerleri ve Özfonksiyonları

L operatörünün tanım kümesinde bulunan ve özdeş olarak sıfır olmayan y fonksiyonu için

$$Ly = \lambda y \tag{2.7}$$

eşitliği sağlanıyor ise λ değerine L operatörünün *özdeğeri* y fonksiyonuna da λ özdeğerine karşılık gelen *özfonksiyon* denir.

L operatörü $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve

$$U_1(y) = 0, \ldots U_n(y) = 0 \tag{2.8}$$

sınır şartlarından üretilsin. y fonksiyonu L operatörünün tanım kümesinde olması gerektiğinden (2.8) şartlarını da sağlamalıdır. Ayrıca $Ly = l(y)$ dir ve buradan (2.7) eşitliği aşağıdaki denkleme denktir.

$$l(y) = \lambda y \tag{2.9}$$

Dolayısıyla L operatörünün özdeğerleri öyle λ değerleridir ki, bu değerler için

$$l(y) = \lambda y, \quad U_v(y) = 0, \ v = 1,2,\ldots,m \tag{2.10}$$

homojen sınır değer problemi aşikar olmayan çözümlere sahiptir ve her bir aşikar olmayan çözüm de λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyondur.

Aynı özdeğere karşılık gelen özfonksiyonların lineer kombinasyonları da yine aynı özdeğere karşılık gelen bir özfonksiyondur.

Verilen bir λ değeri için (2.9) homojen denkleminin lineer bağımsız çözümlerinin sayısı en fazla n tane olabileceğinden, aynı özdeğere karşılık gelen özfonksiyonların tümü boyutu $\leq n$ olan sonlu boyutlu bir uzay oluşturacaktır. Bu uzayın boyutu tabi ki verilmiş bir λ değeri için (2.10) sınır değer probleminin lineer bağımsız çözümlerinin sayısıdır. Bu sayıya *özdeğerlerin katı* denir.

Özdeğerleri belirlemek için bazı şartlar bulmaya çalışacağız. Bu amaçla

$$y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda), \ldots, y_n(x,\lambda) \tag{2.11}$$

ile (2.9) diferansiyel denkleminin aşağıdaki başlangıç şartlarını sağlayan temel çözümlerini gösterelim:

$$y_j^{(v-1)}(a,\lambda) = \begin{cases} 0, & j \neq v \\ 1, & j = v \end{cases} \qquad j,v = 1,2,\ldots,n \tag{2.12}$$

Diferansiyel Denklemlerin genel teoremlerinden, $[a,b]$ deki her x için (2.11) fonksiyonları λ ya göre tam fonksiyonlardır. Yukarıda elde ettiğimiz sonuçlardan (2.10) sınır değer problemi aşikar olmayan çözüme sahiptir, ancak ve ancak

$$U = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ . & . & \dots & . \\ U_m(y_1) & U_m(y_2) & \dots & U_m(y_n) \end{vmatrix}$$

matrisinin rankı n den küçüktür. Eğer $m < n$ ise, $r < n$ ve bu durumda (2.10) sınır değer problemi herhangi bir λ değeri için aşikar olmayan çözüme sahiptir. Dolayısıyla eğer $m < n$ ise herhangi bir λ değeri özdeğerdir.

Eğer $m \geq n$ ise U matrisinin rankının n den küçük olması için gerekli ve yeterli koşul onun bütün n mertebeli minörlerinin sıfır olmasıdır. Ancak bu minörlerin her biri λ nın tam analitik fonksiyonlarıdır, dolayısıyla aşağıdaki durumlar söz konusudur:

$1)$ U matrisinin $n.$ mertebeden minörlerinin hepsi sıfıra denktir. Bu durumda daha önceki sonuçtan, herhangi bir λ değeri özdeğerdir.

$2)$ U matrisinin en az bir $n.$ mertebeden minörü sıfıra denk degil ise bu durumda da sadece bu minörlerin sıfırları özdeğer olabilir ve ayrıca özel bir minörün sıfırı eğer U nun diğer bütün $n.$ mertebeden sıfır olmayan minörlerini özdeş sıfır yapıyorsa özdeğer olabilir.

Sıfır olmayan bir tam fonksiyon en fazla sayılabilir çoklukta sıfıra sahiptir (hepsi sahip olmak zorunda değil) ve bu sıfırlar sonlu bir limit noktasına sahip değildir. Dolayısıyla $2.$ durumda, L operatörü en fazla sayılabilir çoklukta özdeğere sahiptir (hepsine sahip olabilir) ve bu özdeğerler sonlu bir limit noktasına sahip değildir. Sonuç olarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.1: Herhangi bir L operatörü için iki durum söz konusudur:

$1)$ Her λ sayısı L nin özdeğeridir.

$2)$ Operatör en fazla sayılabilir çoklukta özdeğere sahiptir, (özel durumda hepsi değil) ve bu özdeğerler sonlu bir limit noktasına sahip değildir.

$m = n$ durumu ise özel olarak inceleyelim. Bunun için

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ . & . & \dots & . \\ U_m(y_1) & U_m(y_2) & \dots & U_m(y_n) \end{vmatrix}$$

olsun. Daha önce de belirtildiği üzere burada yine $\Delta(\lambda)$, λ nın tam, analitik fonksiyonudur ve L operatörünün (veya $Ly=0$ sınır değer probleminin) *karekteristik determinantı* olarak adlandırılır. Bununla ilgili olarak aşağıdaki teoremler doğrudur:

Teorem 2.2: L operatörünün özdeğerleri $\Delta(\lambda)$ fonksiyonun sıfırlarıdır. Eğer $\Delta(\lambda)$ sıfıra denk ise, o zaman λ nın herhangi bir değeri L operatörünün özdeğerleridir ancak $\Delta(\lambda)$ sıfıra denk değil ise L operatörü sayılabilir sayıda özdeğere sahiptir ve bu özdeğerler sonlu bir limit noktasına sahip değildir, [21].

Herhangi bir λ değeri $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun katlı sıfırı olabilir bu durumda

Teorem 2.3: Eğer λ_0, $\Delta(\lambda)$ karekteristik denkleminin v katlı sıfırı ise, o zaman λ_0 özdeğerinin katı v den büyük olamaz, [21].

Teorem 2.4: Eğer λ_0, $\Delta(\lambda)$ karekteristik denklemin basit sıfırı ise, o zaman L operatörünün λ_0 özdeğeri tek katlıdır, [21].

Bir özdeğer $\Delta(\lambda)$ karekteristik denkleminin basit sıfırı ise bu özdeğere *basit özdeğer* denir.

Şimdi de lineer diferansiyel operatörlerden en temel bir operatörünü ele alalım. L, $y=y(x)$ üzerinde bir lineer diferansiyel operatör belirtsin ve aşağıdaki eşitliği göz önüne alalım

$$Ly=\lambda y \tag{2.13}$$

burada λ kompleks bir sayıdır. Belirli sınır şartları altında ($x=a, x=b$ de sıfırlanan) bu denklemi sağlayan, sıfırdan farklı fonksiyonlara özfonksiyonlar ve ona uygun λ kompleks sayılarınada özdeğerler demiştik. Yani $\psi_n(x)$ özfonksiyonuna uygun özdeğer λ_n ise

$$L\psi_n(x) = \lambda_n \psi_n(x) \tag{2.14}$$

olacaktır.

$$L \equiv q(x) - \frac{d^2}{dx^2} \tag{2.15}$$

lineer operatörünü göz önünde tutarsak. Burada $q(x),(a,b)$ aralığında sürekli keyfi bir fonksiyondur. Eğer y ikinci mertebeden olan bu diferansiyel operatörünü sağlarsa

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left\{\lambda - q(x)\right\} y = 0 \tag{2.16}$$

olacaktır. Şimdi bu diferansiyel denklemin çözümü hakkında aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.5 (Sturm-Liouville Açılımı): Varsayalım ki (2.16) denkleminde $q(x)$, (a,b) aralığında x'in sürekli bir fonksiyonu ve $x \to a$, $x \to b$ iken $q(x)$ sonsuza gitmesin. Bu durumda (2.16) diferansiyel denklemi keyfi bir α değeri için $[a,b]$ aralığında aşağıdaki başlangıç şartlarını sağlayan bir $\phi(x)$ çözümüne sahiptir.

$$\phi(a) = \sin\alpha, \qquad \phi'(a) = -\cos\alpha$$

bu çözüm her x için λ nın bir tam fonksiyonudur, [22].

İspat:

$$y_0(x) = \sin\alpha - (x-a)\cos\alpha$$

ve $n = 1,2,....,$ için

$$y_n(x) = y_0(x) + \int_a^x \left\{q(x) - \lambda\right\} y_{n-1}(t)(x-t)\,dt$$

olsun. $a \le x \le b$ olduğundan $|q(x)| \le M,\ |y_0(x)| \le K$ dir. ve $|\lambda| \le N$ olsun o zaman

$$|y_1(x) - y_0(x)| \le \int_a^x (M+N)K(x-t)\,dt = \frac{1}{2}(M+N)K(x-a)^2$$

olur $n \ge 1$ için

$$y_n(x) - y_{n-1}(x) = \int_a^x \{q(t) - \lambda\}\{y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)\}(x-t)\,dt,$$

$$\left|y_n(x) - y_{n-1}(x)\right| \le (M+N)\int_a^x \left|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)\right|(x-t)\,dt$$

buradan

$$\begin{aligned}\left|y_2(x) - y_1(x)\right| &\le \frac{K(M+N)^2}{2}\int_a^x (t-a)^2 (x-t)\,dt \\ &= \frac{K(M+N)^2 (x-a)^4}{4!}\end{aligned}$$

olur ve genel olarak

$$\left|y_n(x) - y_{n-1}(x)\right| \le \frac{K(M+N)^n (x-a)^{2n}}{(2n)!}$$

olduğu söylenebilir ve bu yüzden $|\lambda| \le N$ olduğu sürece

$$\phi(x) = y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\{y_n(x) - y_{n-1}(x)\}$$

serisi düzgün yakınsaktır. $n \ge 2$ değerleri için

$$\begin{aligned}y_n'(x) - y_{n-1}'(x) &= \int_a^x \{q(t)-\lambda\}\{y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)\}\,dt \\ y_n''(x) - y_{n-1}''(x) &= \{q(x)-\lambda\}\{y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)\}\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifadenin birinci ve ikinci türevleride düzgün yakınsaktır. Bu yüzden

$$\begin{aligned}\phi''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\{y_n''(x) - y_{n-1}''(x)\} \\ &= \{q(x)-\lambda\}\left[y_0(x) + \sum_{n=2}^{\infty}\{y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)\}\right] \\ &= \{q(x)-\lambda\}\phi(x)\end{aligned}$$

elde edilir ki bunun anlamı $\phi(x)$ fonksiyonunun (2.16) denklemini ve aynı zamanda sınır şartlarını sağladığıdır.

Şimdi de bu çözümlerin ortagonal olduğunu gösterelim (2.15) lineer operatöründe iki tane $\psi_n(x), \psi_m(x)$ şeklinde çözümü yazarsak,

$$\psi_n''(x) + \{\lambda_n - q(x)\}\psi_n(x) = 0$$
$$\psi_m''(x) + \{\lambda_m - q(x)\}\psi_m(x) = 0 \tag{2.17}$$

şeklinde denklemler elde edilir. Karşılıklı olarak sırasıyla $\psi_m(x),\ \psi_n(x)$ özfonksiyonları ile çarparak birbirinden çıkarırsak

$$\begin{aligned}(\lambda_m - \lambda_n)\psi_m(x)\psi_n(x) &= \psi_m(x)\psi_n''(x) - \psi_n(x)\psi_m''(x)\\ &= \frac{d}{dx}\{\psi_m(x)\psi_n'(x) - \psi_n(x)\psi_m'(x)\}.\end{aligned}$$

şeklinde eşitlik elde edilir. Dikkat edersek sağ taraf, $\psi_n(x), \psi_m(x)$ fonksiyonlarının Wronskiyen determinantının türevidir. Buradan her iki tarafın (a,b) üzerinden integralini alırsak

$$\begin{aligned}(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \psi_m(x)\psi_n(x)dx &= \left[\psi_m(x)\psi_n'(x) - \psi_n(x)\psi_m'(x)\right]_a^b\\ &= 0\end{aligned}$$

$\psi_n(x), \psi_m(x)$ fonksiyonları $x = a,\ x = b$ noktalarında aynı sınır şartlarını sağladığından dolayı yukardaki eşitlik sağlanır. Dolayısıyla $\lambda_n \neq \lambda_m$ olduğu sürece

$$\int_a^b \psi_n(x)\psi_m(x)dx = 0 \tag{2.18}$$

olur. Eğer özfonksiyonları uygun bir katsayı ile çarparsak

$$\int_a^b \psi_n^2(x)dx = 1 \tag{2.19}$$

olacaktır. Buda bize $\psi_n(x)$ özfonksiyonlarının ortanormal bir küme oluşturduğunu söyler. Bununla birlikte $a,\ b$ noktalarında Wronskiyen determinantının sıfır olması bu noktalarda Wronskiyenin köklerinin bizim için özdeğerler olması anlamına gelecektir. Bu özfonksiyonların ortagonal olduğunu gösterdikten sonra şimdi de özdeğerlerin reel olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki $\lambda = \mu + i\upsilon$ kompleks sayısı Wronkiyen determinantının bir kökü olsun. O zaman $\overline{\lambda}$ de bir köktür ve bu yüzden $\phi\left(x,\lambda\right)$, $\phi\left(x,\overline{\lambda}\right)$ fonksiyonları sırasıyla λ, $\overline{\lambda}$ özdeğerlerine uygun özfonksiyonlardır. (2.18) ifadesinden

$$\int_a^b \left|\phi\left(x,\lambda\right)\right|^2 dx = 0$$

olacaktır. Buda ancak $\phi\left(x,\lambda\right)$ özfonksiyonunun özdeş olarak sıfır olmasıyla mümkündür. Fakat biz sıfırdan farklı olan çözümlere özfonksiyon demiştik. Bu yüzden özdeğerlerin tümü reeldir.

Şimdi bizim çalışmamızında temelinde yatan, belirli şartlar altında keyfi bir $f\left(x\right)$ fonksiyonu verildiği zaman bu fonksiyonu bu türdeki ortagonal fonksiyonların terimleriyle fourier seri açılımının nasıl olacağını araştıralım. Eğer bu mümkünse

$$f\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n\left(x\right) \tag{2.20}$$

biçiminde olacaktır. Bu ifadeyi $\psi_m\left(x\right)$ ile çarparak, $\left(a,b\right)$ üzerinde integrallersek

$$c_m = \int_a^b f\left(x\right)\psi_m\left(x\right)dx \tag{2.21}$$

katsayılar bu şekilde bulunur. (2.20) açılımına *özfonksiyonlar* cinsinden açılım denir.

Bazı durumlarda özdeğerler ayrık değildir. Fakat sürekli bir sıralamaya sahiptir örneğin $\left(0,\infty\right)$ aralığında dizilmişler ise bu durumda

$$f\left(x\right) = \int_0^{\infty} c\left(\lambda\right)\psi_\lambda\left(x\right)d\lambda \tag{2.22}$$

formuna girer. Bunların tümüne bir örnek olarak

$$y'' = -\lambda y$$
$$y\left(0\right) = 0 = y\left(\pi\right)$$

şeklindeki bir problemi ele alırsak $\phi_1\left(x,\lambda\right) = \sin x\sqrt{\lambda}$ ve $\phi_2\left(x,\lambda\right) = \cos x\sqrt{\lambda}$ biçiminde iki çözüm bulunur. Genel çözümde

$$y\left(x,\lambda\right) = c_1 \sin x\sqrt{\lambda} + c_2 \cos x\sqrt{\lambda}$$

biçiminde elde edilir. Şimdi de sınır şartlarını yerine yazarsak

$$y(0) = c_1.0 + c_2.1 = o$$
$$y(\pi) = c_1 \sin \pi\sqrt{\lambda} + c_2 \cos \pi\sqrt{\lambda} = 0$$
$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin \pi\sqrt{\lambda} & \cos \pi\sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = 0$$
$$-\sin \pi\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow \pi\sqrt{\lambda} = n\pi, \;\; n \in \mathbb{N}$$
$$\lambda = n^2$$

elde edilir. Sonuç olarak $\lambda_n = n^2$ problemin özdeğerleri ve $\psi_n(x) = \sin nx$ fonksiyonları da bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlardır.

BÖLÜM 3

KRAMER SAMPLİNG TEOREMİNİN STURM-LİOUVİLLE PROBLEMLERİNE UYGULAMASI

Bu bölümde Kramer Sampling teoreminde (1.9) ile ifade edilen integral fonksiyonundaki $K(x, t_n)$ çekirdeklerini ikinci mertebeden Sturm-Liouville sınır değer probleminin özfonksiyonlarından ve $\{t_n\}$ sampling değerlerini de özdeğerlerden seçerek Kramer Sampling Teoremini inceleyeceğiz. Böylelikle çeşitli regüler ve singüler Sturm-Liouville sınır değer problemlerine Sampling Teoremi ile yeni bir yaklaşım yapacağız.

Öncelikle aşağıdaki M ile tanımlanan ikinci mertebeden diferansiyel denklemi dikkate alalım.

$$MY = a(X)\frac{d^2Y}{dX^2} + b(X)\frac{dY}{dX} + c(X)Y$$

Varsayalımki $a(X)$ iki defa, $b(X)$ ise bir defa difransiyellenebilir ve $X \in (a,b)$ için $a(X) > 0$ iken $c(X)$, $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. Eğer $X \in [a,b]$ için $a(X) > o$ ve $[a,b]$ aralığı sınırlı ise M operatörüne regüler operatör diyeceğiz. Aksi durumda ise singüler operatör diyeceğiz.

Şimdi $MY = -\lambda Y$ denklemine aşağıdaki dönüşümü uygulayalım

$$x = \int \frac{dX}{\sqrt{\{a(X)\}}}.$$

Bu dönüşüm yapıldığı zaman

$$\frac{d^2Y}{dx^2} + \beta(x)\frac{dY}{dx} + \{\lambda - \psi(x)\}Y = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

Burada

$$\beta(x)=\left\{b(X)-\frac{1}{2}a'(X)\right\}/\left\{a(X)\right\}^{\frac{1}{2}}, \qquad \psi(x)=c(X).$$

şimdide

$$Y=r(x)y$$

yazarsak, burada

$$r(x)=e^{-\frac{1}{2}\int\beta(x)dx}$$

şeklindedir. Bunları denklemde yerine yazarsak

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left\{\lambda-\frac{1}{2}\beta^2(x)-\frac{1}{2}\beta'(x)-\psi(x)\right\}y=0$$

olur. Son olarak

$$q(x)=\left\{\lambda-\frac{1}{4}\beta^2(x)-\frac{1}{2}\beta'(x)-\psi(x)\right\}$$

şeklinde seçilirse

$$\frac{d^2y}{dx^2}-q(x)y=-\lambda y \tag{3.1}$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

L, $d^2/dx^2-q(x)$ biçiminde Sturm-Liouville diferansiyel operatör, q reel ve sürekli bir fonksiyon, $[a,b]$ sonlu aralık olsun. O zaman L regüler operatördür.

Şimdi regüler olan aşağıdaki Sturm-Liouville sınır değer problemini göz önüne alalım

$$Ly=y''-q(x)y=-\lambda y \qquad (a\le x\le b) \tag{3.2}$$

$$\cos\alpha y(a)+\sin\alpha y'(a)=0 \tag{3.3}$$

$$\cos\beta y(b)+\sin\beta y'(b)=0 \tag{3.4}$$

Burada α, β her hangi sabitlerdir. Bu Sturm- Liouville sınır değer probleminin özdeğerleri reel ve tek katlı, monoton artan ve altan sınırlı olup sadece limit noktasında iken $+\infty$ değerini alır, [22,*sy*.12-19], [23,*sy*. 189-197].

(3.2)-(3.4) sınır değer probleminde her bir λ_n özdeğeri aşağıdaki denklemi ve şartları sağlayan tek bir $\phi(x,\lambda_n)$ reel değerli özfonksiyona karşılık gelir.

$$L\phi(x,\lambda_n) = -\lambda_n \phi(x,\lambda_n) \tag{3.5}$$

$$\phi(a,\lambda_n) = \sin\alpha,\ \phi'(a,\lambda_n) = -\cos\alpha \tag{3.6}$$

$$\phi(b,\lambda_n) = B(n)\sin\beta,\ \phi(b,\lambda_n) = -B(n)\cos\beta \tag{3.7}$$

ve $B(n) \neq 0$ olacak şekilde bir sabittir. 2. bölümden biliyoruz ki $n \neq k$ için

$$\int_a^b \phi(x,\lambda_n)\phi(x,\lambda_k)\,dx = 0 \tag{3.8}$$

ve eğer $g \in L^2(a,b)$ ise o zaman $g(x)$

$$g(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} c(n)\phi(x,\lambda_n) \tag{3.9}$$

şeklindeki bir seri açılımına sahiptir. Burada

$$c(n) = \left(\int_a^b \left|\phi(x,\lambda_n)\right|^2 dx \right)^{-1} \int_a^b g(x)\phi(x,\lambda_n)dx, \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.10}$$

şeklinde belirlenir. $\lambda_n = (t_{\pm n})^2$ ve $t_{-n} = -t_n$ biçiminde olan $\{t_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}$ sayılabilir sayılar kümesi, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ özdeğerlerinin dizisini verir. λ_n özdeğerleri t_n , n sayılarının yakınında olacak şekilde dağıldığını biliyoruz [23, *sy*.19]. Daha açık olarak

$$t_n = \frac{n\pi}{b-a} + O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n \to \infty) \tag{3.11}$$

şeklindedir. Burada öyle bir K sayısı vardır ki

$$\sup_{|n|\geq K} \left| t_n - \frac{n\pi}{b-a} \right| < \frac{\pi}{4(b-a)} \tag{3.12}$$

eşitliği sağlanır. Yani (3.11), (1.5) sağlıyor denebilir. Başka bir ifadeyle $|n| < K$ yaklaşık gelen terimlerinin atılması temel bir kısıtlama getirmemektedir.

Şimdi temel teoremde gerek duyacağımız (3.2) ve (3.3) denkleminin $\phi\left(x,t^2\right)$ çözümünü tanımlayıp araştıralım.

Yardımcı Teorem 3.1: Aşağıda belirtilen diferansiyel denklemde q $\left[a,b\right]$ aralığında reel değerli sürekli bir fonksiyon olsun.

$$y''-q\left(x\right)y=-\lambda y=-t^2y$$

ve

$$\cos\alpha y\left(a\right)+\sin\alpha y'\left(a\right)=0$$

sınır şartıyla, bu diferansiyel denklem bir $\tilde{\phi}\left(x,t\right)$ çözümüne sahiptir öyle ki bu çözüm t nin fonksiyonu olarak en fazla $b-a$ tipinde üstel tam ve çift bir fonksiyondur. x' in bir fonksiyonu olarak t^2 reel olduğu sürece reel olan ve her $t\in\mathbb{C}$ için özdeş olarak sıfır olmayan bir fonksiyondur. Bunlarla birlikte (3.2)-(3.4) sınır değer probleminin her bir λ_n özdeğeri için

$$\tilde{\phi}\left(x,t_{\pm n}\right)=\phi\left(x,\lambda_n\right)=\phi\left(x,t_{\pm n}^2\right) \tag{3.13}$$

fonksiyonları (3.5)-(3.7) denklemlerinde verilen sıfırdan farklı özfonksiyonlardır. Son olarak $\dfrac{\partial}{\partial x}\tilde{\phi}\left(x,t\right)$ fonksiyonu da en fazla $b-a$ tipinde üstel tam ve çift bir fonksiyondur.

İspat: (3.3) şartını

$$y\left(a\right)=\sin\alpha, \qquad y'\left(a\right)=-\cos\alpha \tag{3.14}$$

ile yer değiştirirsek, göreceğiz ki (3.2) ve (3.14) problemi tek bir $\tilde{\phi}\left(x,t\right)$ çözümüne sahiptir, [23,*sy*. 6-7]. Bu çözüm aşağıdaki ardıl yaklaşım denkleminin limitidir.

$$\tilde{\phi}_0\left(x,t\right)=\sin\alpha-\left(x-a\right)\cos\alpha,$$

$$\tilde{\phi}_n\left(x,t\right)=\tilde{\phi}_0\left(x,t\right)+\int_a^x\left(q\left(u\right)-t^2\right)\tilde{\phi}_{n-1}\left(u,t\right)\left(x-u\right)du \qquad \left(n\in\mathbb{N}\right)$$

Açıktır ki, $\tilde{\phi}_0\left(x,t\right)$ fonksiyonu her t için (3.14) denkleminin reel bir çözümüdür. Bununla birlikte tam ve çifttir. t^2 reel olduğu sürece (3.14) çözümlerine tüme varım uygularsak $\tilde{\phi}_n\left(x,t\right)$ çözümünün de tam ve çift olduğu görülür . Gerçektende $\tilde{\phi}_n\left(x,t\right)$

t^2 ' nin bir polinomudur. Buradan $\tilde{\phi}_n(x,t)$ çözümleri $\tilde{\phi}(x,t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olmasından dolayı t^2 reel olduğu sürece $\tilde{\phi}(x,t)$ de tam ve çiftir, (3.14) şartlarını sağlayan çözümdür. Bununla birlikte, $\tilde{\phi}(x,t)$ (3.2) denkleminin bir çözümüdür ve en fazla $b-a$ tipinde üstel tam bir fonksiyondur, [23,*sy*. 7,9-10]. (3.14) den açıktır ki $\tilde{\phi}(x,t)$ fonksiyonu herhangi bir t sabiti için özdeş olarak sıfır olmayan bir fonksiyondur. (3.13) denkleminde $t = t_{\pm k}$ olsun. Açıktır ki $\tilde{\phi}(x,t_{\pm n})$ (3.5) ve (3.6) denklemlerini sağlar ve eğer $\tilde{\phi}(b,t_{\pm n}) \neq 0$ ise $B(n) := \sin\beta \,/\, \tilde{\phi}(b,t_{\pm n})$ biçimindedir. Aksi durumda ise $B(n) = -\cos\beta \,/\, \tilde{\phi}'(b,t_{\pm n})$ şeklinde seçilir, $\tilde{\phi}(x,t_{\pm n})$ de (3.7) denklemini sağlar. Böylece (3.13) elde edilmiş olur. $\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\phi}(x,t)$ fonksiyonu çift üstel tipte artan bir fonksiyon olduğu biliniyor , [22,*sy*. 10]. $\tilde{\phi}(x,t)$ fonksiyonunun çift olması ile ilgili bir tanım verebiliriz.

Tanım 3.1: $\phi(x,t^2) := \tilde{\phi}(x,t)$

Şimdi de aşağıdaki ikinci yardımcı teoreme ihtiyaç duyacağız.

Yardımcı Teorem 3.2: Aşağıdaki iki eşitlik denktir.

i) (3.2)-(3.4) ile verilen Sturm-Liouville sınır değer problemi $\alpha,\beta \notin \{n\pi : n \in \mathbb{N}\}$ ve $q'' \in L^2(a,b)$ şartları altında t_n özdeğerlerine ve normalleştirilmiş $r_n = \int_a^b \left|\phi(x,t_n^2)\right|^2 dx$ sabitlerine sahiptir. Burada $\phi(x,t_n)$ fonksiyonları yukarıda tanımlanan çözümdür.

ii) $\{t_{\pm n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sabitleri aşağıdaki asimtotik bağlantıyı sağlar

$$t_n = \frac{n\pi}{b-a} + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^3} + \frac{\tau_n}{n^3}, \qquad r_n = \frac{2}{b-a} + \frac{b_1}{n^3} + \frac{\rho_n}{n^3} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Burada $t_{-n} = -t_n$ şeklinde ve $m \neq n$ için $t_m \neq t_n$ ve $r_n > 0$, a_1, a_2, b_1 sabitler, $\sum_{n=1}^{\infty}\tau_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n^2$ ise yakınsak iki seridir [24,*sy*. 28].

3.1. Genel Sampling Teoremi

(3.2)-(3.4) ile verilen regüler Sturm-Liouville sınır değer problemini göz önüne alırsak Yardımcı Teorem3.1 de tanımlandığı gibi (3.2), (3.3) denklemlerinin $\phi(x,\lambda)=\phi(x,t^2)$ biçiminde bir çözümü vardır. Dolayısıyla eğer f herhangi bir $g(x)\in L^2(a,b)$ için aşağıdaki gibi ifade edilebilir ise

$$f(t)=\int_a^b g(x)\phi(x,t^2)\,dx \qquad (t\in\mathbb{R}) \tag{3.15}$$

o zaman f en fazla $b-a$ tipinde tam bir fonksiyondur ve $\mathbb{R}$ deki kompakt her bir alt kümede aşağıdaki gibi bir sampling ifadesine sahiptir.

i) Eğer özdeğerlerinden hiç biri sıfır değilse, yani $\forall n$ için $\lambda_n=t_n^2\neq 0$ ise

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} f(t_n)\frac{G(t)\cdot 2t_n}{G'(t_n)(t^2-t_n^2)}=\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} f(t_n)\frac{G(t)}{G'(t_n)(t-t_n)} \tag{3.16}$$

dir. Burada $G(t)$ aşağıdaki gibidir.

$$G(t)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{t}{t_n}\right)\left(1-\frac{t}{t_{-n}}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{t^2}{t_n^2}\right) \tag{3.17}$$

ii) Eğer özdeğerlerinden biri sıfır ise yani diyelim ki $\lambda_0=0$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} f(t)&=f(0)\frac{G(t)}{t^2}+\sum_{n=1}^{\infty} f(t_n)\frac{G(t)\cdot 2t_n}{G'(t_n)(t^2-t_n^2)}\\ &=f(0)\frac{G(t)}{t^2}+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} f(t_n)\frac{G(t)}{G'(t_n)(t-t_n)} \end{aligned} \tag{3.18}$$

olur. Burada

$$G(t)=t^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{t}{t_n}\right)\left(1-\frac{t}{t_{-n}}\right) \tag{3.19}$$

dir. Her iki durumda da $G(t)$ en fazla $b-a$ tipten üstel tam bir fonksiyondur.

ispat: Yardımcı Teorem 3.1 den $\phi(x,t^2)$, t nin bir fonksiyonu olarak çift ve tam bir fonksiyon olduğunu söylemiştik şimdi

$$f(t)=\int_a^b g(x)\phi(x,t^2)\,dx$$

ifadesine Hölder eşitsizliği uygularsak

$$\left|f(t)\right|\le\int_a^b\left|g(x)\right|\left|\phi(x,t^2)\right|dx\le\left(\int_a^b\left|g(x)\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b\left|\phi(x,t^2)\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\left|f(t)\right|\le\left\|g\right\|_2\sqrt{b-a}\max_{x\in[a,b]}\left|\phi(x,t^2)\right|$$

olur. Bu eşitsizlik ile birlikte [22,*sy*. 10] dan uygun bir B sabiti ve $a\le x\le b$ için

$$\left|\phi(x,t^2)\right|\le Be^{\left|\operatorname{Im}t\right|(x-a)}\le Be^{|t|(x-a)}\qquad x\in[a,b]$$

olduğundan

$$\left|f(t)\right|\le Me^{|t|(x-a)}$$

sağlanır ki bu da bize f 'nin en fazla $b-a$ tipinde üstel tipten tam bir fonksiyon olduğunu söyler.

i) $y(x),z(x)$ iki defa sürekli diferansiyellere sahip fonksiyonlar ve L de regüler Sturm-Liouville diferansiyel operatörü olsun. O zaman iki kez kısmi integral uygulayarak

$$\int_a^b(Ly(x)z(x)-y(x)Lz(x))dx=W(z,y)\Big|_{x=b}-W(z,y)\Big|_{x=a}\quad(3.20)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada

$$W(z,y)=z(x)y'(x)-z'(x)y(x)$$

bu $z(x)$ ve $y(x)$ in Wronskiyenidir. Eğer özel olarak $y(x)=\phi(x,\lambda_n)=\phi(x,t_n^2)$ ve $z(x)=\phi(x,\lambda)=\phi(x,t^2)$ şeklinde seçilirse

$$G_n(t)=(t^2-t_n^2)\int_a^b\phi(x,t^2)\phi(x,t_n^2)\,dx,\qquad(n\in\mathbb{N})\quad(3.21)$$

elde edilir. Buradan

$$G_n(t)=W\left(\phi(x,t^2),\phi(x,t_n^2)\right)\Big|_{x=b}-W\left(\phi(x,t^2),\phi(x,t_n^2)\right)\Big|_{x=a}\quad(3.22)$$

olur. (3.21) in t ye göre türevini alırsak,

$$G_n^{'}\left(t_n\right) = 2t_n \int_a^b \left|\phi\left(x, t_n^2\right)\right| dx \tag{3.23}$$

ifadesi elde edilir. x 'in bir fonksiyonu olarak $\phi\left(x,\lambda\right) \in L^2\left(a,b\right)$ olduğundan bu fonksiyon (3.9) ve (3.10) denklemlerinde verildiği gibi özfonksiyonların serisine açabiliriz.

$$\phi\left(x,\lambda\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} S_n\left(\lambda\right)\phi\left(x,\lambda_n\right) \tag{3.24}$$

burada

$$S_n\left(\lambda\right) := \left(\int_a^b \left|\phi\left(x,\lambda_n\right)\right|^2 dx\right)^{-1} \int_a^b \phi\left(x,\lambda\right)\phi\left(x,\lambda_n\right) dx \tag{3.25}$$

dir. (3.21), (3.23) ve (3.25) den

$$S_n\left(\lambda\right) = S_n\left(t^2\right) = \frac{G_n\left(t\right)2t_n}{(t^2 - t_n^2)G_n^{'}\left(t_n\right)} \tag{3.26}$$

elde edilir. Şimdi de (3.24) ve (3.25) kullanarak (3.15)'in sağ tarafına Parseval eşitliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} f\left(t\right) &= \int_a^b g\left(x\right)\phi\left(x,t^2\right)dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\int_a^b g\left(x\right)\phi\left(x,t_n^2\right)dx\right\}\left\{\int_a^b \phi\left(x,t^2\right)\phi\left(x,t_n^2\right)dx\right\} \frac{1}{\left\|\phi\left(\cdot,t_n^2\right)\right\|_2^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f\left(t_n\right)S_n\left(t^2\right), \end{aligned} \tag{3.27}$$

ifadesi elde edilir. Son olarak (3.26) yerine yerleştirilirse,

$$f\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f\left(t_n\right)\frac{G_n\left(t\right)2t_n}{G_n^{'}\left(t_n\right)\left(t^2 - t_n^2\right)} \tag{3.28}$$

eşitliğine ulaşılmış olur.

Şimdi de (3.21) deki G_n ifadesinin en fazla $b-a$ tipinde üstel tam bir fonksiyon olduğunu gösterelim. Bunun için $\phi\left(x,\lambda_n\right) \in L^2\left(a,b\right)$ olduğundan $\left\|\phi\right\|_2 < \infty$ dur. Buradan

$$\left|G_n(t)\right| \le \left|\left(t^2 - t_n^2\right)\right| \left(\int_a^b \left|\phi\left(x, t^2\right)\right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\phi\|_2$$
$$\le \left|\left(t^2 - t_n^2\right)\right| K e^{|\operatorname{Im} t|(b-a)} \le M e^{|\operatorname{Im} t|(b-a)}$$

olur. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

(3.8) ve (3.21) ifadelerinden açıktır ki $t_n, n = \pm 1, \pm 2, \dots$, G_n ifadesinin kökleridir ve bunlardan başka kökü yoktur. Kabul edelim ki t^*, G_n nin bir kökü olsun. O zaman $\phi\left(x, \left(t^*\right)^2\right)$ ve $\phi\left(x, t_n^2\right)$ her ikisi (3.2) ve (3.3) denklemlerini sağlayacağından dolayı

$$W\left(\phi\left(x, \left(t^*\right)^2\right), \phi\left(x, t_n^2\right)\right)_{x=a} = 0$$

sağlanır. Buradan (3.7) ve (3.22) ifadeleri ile

$$0 = G_n\left(t^*\right) = W\left(\phi\left(x, \left(t^*\right)^2\right), \phi\left(x, t_n^2\right)\right)\Big|_{x=b}$$
$$= \phi\left(b, \left(t^*\right)^2\right)\phi'\left(b, t_n^2\right) - \phi'\left(b, \left(t^*\right)^2\right)\phi\left(b, t_n^2\right)$$
$$= -B(n)\left[\cos\beta\phi\left(b, \left(t^*\right)^2\right) + \sin\beta\phi'\left(b, \left(t^*\right)^2\right)\right]$$

eşitlikleri sağlanmak zorundadır. $B(n) \neq 0$ olduğundan

$$\left[\cos\beta\phi\left(b, \left(t^*\right)^2\right) + \sin\beta\phi'\left(b, \left(t^*\right)^2\right)\right] = 0$$

olmak zorundadır buda bize $\phi\left(x, \left(t^*\right)^2\right)$ fonksiyonun sadece (3.2) ve (3.3) denklemlerini değil aynı zamanda (3.4) denklemini de sağladığını söyler. Yani $\left(t^*\right)^2$ sayısının bir özdeğer olduğunu ve $\phi\left(x, \left(t^*\right)^2\right)$ fonksiyonunda ona uygun özfonksiyon olduğunu gösterir.

Şimdi de (3.17) de ki G çarpımının en fazla $b-a$ tipinde üstel tam ve çift bir fonksiyon olduğunun gösterelim. G_n, $t=0$ noktasında sıfır olmayan üstel tipten tam bir fonksiyon olduğundan tam fonksiyonlar için Hadamard Faktorizasyon teoreminden [25,*sy*. 22].

$$G_n(t) = G(t)e^{P_n(t)}$$

biçiminde bir yazılıma sahiptir. Burada $P(t)$ derecesi $b-a$ yı aşmayan bir polinom ve $G(t)$ ifadesi (3.22) verilen G_n denkleminin köklerinin kanonik çarpımıdır. (3.11) de ki değerlendirmeden dolayı (3.17) deki çarpımın yakınsaklığı garantilenmiş olur. (3.17) ve (3.21) deki G, G_n ifadeleri birer çift fonksiyon olduklarından ve $G(t)$ özdeş olarak sıfır olmadığından dolayı aşağıdaki bölüm

$$\frac{G_n(t)}{G(t)} = e^{P_n(t)}$$

çift olmak zorundadır. buradanda $P(t) = c_n$ biçiminde bir sabit fonksiyon olmak zorundadır. Dolayısıyla

$$G_n(t) = c_n G(t) \tag{3.29}$$

Olur ki bu da G fonksiyonun en fazla $b-a$ tipinde üstel, tam ve çift bir fonksiyon olduğu anlamına gelir. Bununla birlikte (3.28) ve (3.29) denklemlerini birleştirirsek (3.16) denklemini elde ederiz. Son olarak göstermemiz gereken (3.27) denkleminin buradanda (3.28) ve (3.16) ifadelerinin $\mathbb{R}$ nin her kompakt alt kümesinde düzgün yakınsak olduğudur. Bunun içinde Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden ve (3.27) den yardım isteyeceğiz.

$$\left| f(t) - \sum_{n=1}^{N-1} f(t_n) S_n(t^2) \right| \leq \left(\sum_{n=N}^{\infty} \frac{f^2(t_n)}{\left\| \phi(\cdot, t_n^2) \right\|_2^2} \right) \left(\sum_{n=N}^{\infty} S_n^2(t^2) \left\| \phi(\cdot, t_n^2) \right\|_2^2 \right) \tag{3.30}$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk çarpan t den bağımsızdır ve

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left(\left\| \phi(\cdot, t_n^2) \right\|_2^{-1} \int_a^b g(x) \phi(x, t_n^2) \, dx \right)^2$$

denklemine eşittir. Burada $g \in L^2(a,b)$ olduğundan fourier seri açılımını yazarsak

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{g}(k) \phi(x, t_k^2)$$

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left(\left\| \phi(\cdot, t_n^2) \right\|_2^{-1} \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{g}(k) \phi(x, t_k^2) \phi(x, t_n^2) \, dx \right)^2$$

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left(\left\|\phi\left(\cdot,t_n^2\right)\right\|_2^{-1}\left(b-a\right)\tilde{g}\left(n\right)\right)^2$$

elde edilir. Buradaki en son ifadeye

$$a_N=\sum_{n=N}^{\infty}\left(\left\|\phi\left(\cdot,t_n^2\right)\right\|_2^{-1}\left(b-a\right)\tilde{g}\left(n\right)\right)^2$$

dersek bu dizi azalan bir dizidir ve $N\to\infty$ iken sıfırlanır. Şimdi sağ tarafın ikinci çarpana bakılırsa

$$D_N\left(t\right):=\sum_{n=N}^{\infty}S_n^2\left(t^2\right)\left\|\phi\left(\cdot,t_n^2\right)\right\|_2^2.$$

$D_N\left(t\right)$, t nin fonksiyonu olarak süreklidir ve aşağıdaki işlemler yapılırsa

$$S_k\left(t^2\right)=\left(\int_a^b\left|\phi\left(x,t_k^2\right)\right|^2dx\right)^{-1}\int_a^b\phi\left(x,t^2\right)\phi\left(x,t_k^2\right)dx$$

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left(\left(\int_a^b\left|\phi\left(x,t_n^2\right)\right|^2dx\right)^{-1}\int_a^b\phi\left(x,t^2\right)\phi\left(x,t_n^2\right)dx\left(\int_a^b\left|\phi\left(x,t_n^2\right)\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{\int_a^b\phi\left(x,t^2\right)\phi\left(x,t_n^2\right)dx}{\left(\int_a^b\left|\phi\left(x,t_n^2\right)\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^2=\sum_{n=N}^{\infty}\frac{M\left(t\right)}{\left\|\phi\left(\cdot,t_n^2\right)\right\|_2}$$

elde edilir. Burada $M\left(t\right)$ fonksiyonu t 'nin bir fonksiyonudur. Eğer

$$b_N=\sum_{n=N}^{\infty}\frac{M\left(t\right)}{\left\|\phi\left(\cdot,t_n^2\right)\right\|_2}$$

dersek bu dizi her $t\in\mathbb{R}$ için azalan bir dizidir ve $N\to\infty$ iken $b_N\to 0$ olur. Bununla birlikte her $N\in\mathbb{N}$ ve $t\in\mathbb{R}$ için $D_N\left(t\right)\geq D_{N+1}\left(t\right)$ dir. Bu yüzden $\mathbb{R}$ kümesinin kompakt her bir alt kümesinde düzgün olarak $D_N\left(t\right)\to 0$ olur, [26,*sy*. 136].

ii) Varsayalım ki (3.2)-(3.4) Sturm-Liouville sınır değer probleminin özdeğerlerinden biri, mesela $\lambda_0 = 0$ ve $\phi(x,0)$, bu özdeğere uygun özfonksiyon olsun. İspat, (3.28) denkleminde $n = 0$ a uygun terimleri için gerekli olan bazı özel düşüncelerin dışında *i)* ispatına çok benzerdir. (3.21) denkleminden aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$G_0(t) = t^2 \int_a^b \phi(x,t^2)\phi(x,0)dx \tag{3.31}$$

öncelikli $G_0(t)$ çift ve üstel tipten tam ve $t = t_n$, $n \in \mathbb{Z}$ noktaları kökleri olan bir fonksiyondur. $t = 0$ (3.31) denkleminin en fazla iki katlı köküdür. Varsayalım ki ikiden daha fazla olsun. O zaman

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{G_0(t)}{t^2} = \int_a^b \left|\phi(x,0)\right|^2 dx$$

olmalıdır. Ancak bu $\phi(x,0)$ fonksiyonun özdeş olarak sıfır olması demektir bu da çelişkidir. O zaman $G_0(t)$, $t = 0$ daki kökü ikinci mertebedendir. Şimdide Hadamard Faktorizasyon teoremini tekrar kullanırsak

$$G_0(t) = c_0 G(t) \tag{3.32}$$

olur ki buradaki G , (3.19) ile verilmiştir. Şimdi $H(t) = G(t)/t^2$ olsun (3.31), (3.32) denklemlerinden ve $H(0) = 1$ olduğundan dolayı

$$c_0 = c_0 H(0) = \int_a^b \left|\theta(x,0)\right|^2 dx \tag{3.33}$$

olacaktır. (3.25) ve (3.31) - (3.33) denklemlerini birleştirirsek $S_0(\lambda) = S_0(t^2)$ $= H(t)$ eşitliğini elde etmiş oluruz. *i)* kısmındaki ispattaki gibi (3.16) denkleminin ilk kısmı çıkartmak için kullanılan yöntemin aynısını (3.18) denkleminin ilk kısmını çıkartmak içinde kullanabiliriz. Aynı tartışmaları (3.21) denklemini iki kez diferansiyellersek de sağlayabiliriz. şöyle ki

$$\int_a^b \left|\phi(x,0)\right|^2 dx = G_0''(0)/2$$

eşitliğini elde ederiz. O zaman göstermemiz gereken $G''(0)=2$ olduğu olacaktır. $f(t)$, $G(t)$ her iki fonksiyonun çift olmasını göz önüne alırsak (3.16) ve (3.18) denklemlerindeki ikinci eşitlikler kolaylıkla görülecektir.

Uyarı 1: (3.28) ve (3.16) denklemlerinin düzgün yakınsaklığı f ve G fonksiyonlarının artan olduğu gerçeğinden kolaylıkla gösterilebilir [27,*sy*. 56].

Uyarı 2: (*Teorem3.1'in sonuçlarının Kramer Teoremi ile karşılaştırılması*)

(i) Açıktırki $\tilde{\phi}(x,t)=\phi(x,t^2)$ fonksiyonu (1.9) deki $K(x,t)$ fonksiyonun üzerine konulan şartları sağlar. Bu nedenle (3.15), (3.25) ve (3.27) denklemleri sırasıyla (1.9), (1.10) ve (1.11) denklemlerinin özel birer durumlarıdır.

(ii) (3.2) diferansiyel denklemindeki $q(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ve pozitif değerli olduğunu söylemiştik ve (3.15) deki şart belli $H(x),c(t)$ fonksiyonları için

$$f(t)=c(t)\int_{a-b}^{b-a} H(x)e^{ixt}dx \tag{3.34}$$

eşitliğine karşılık gelir. Eğer $H\in L^2(a-b,b-a)$ ise o zaman (3.34) $f(t)/c(t)\in B^2_{b-a}$ olacağından (1.2) ve (1.3) klasik formlarına açılabilir ve hatta daha genel olan (1.7) ve (1.8) denklemlerine bile açılabilir. Tabiki bu (3.16) ve (3.17) formlarım ile aynı olacaktır. Teorem 3.1 bize sampling noktaları düzensiz olarak verildiği durumlar için bilinen yöntemlere bir alternatif olarak bazı şartlar altında yeniden yapılandırılabileceği fikrini veriyor. Ayrıca bu sampling noktaları düzensiz olarak verilen sampling serileri için yeni bir yaklaşım anlamına geliyor. (1.7) denklemi sampling fonksiyonunun belirlemenin üç farklı yolunu ortaya koyuyor. İlki (3.25) yada (3.26) den S_k^{**} direkt olarak hesaplamak. İkincisi (3.21), (3.22) ya da (3.16) ile $G_n(t)$ fonksiyonunu belirlemek. Üçüncüsü ise eğer özdeğerlerinden her hangi biri sıfırsa (3.18) ve (3.19)'u kullanarak şayet özdeğerlerin tümü sıfırdan farklı ise (3.17) yi kullanarak $G(t)$ yi hesaplamaktır.

Uyarı 3: Ayrık sınır şartları ile verilen regüler Sturm-Liouville sınır değer probleminin Sampling Teorisi arasında bir ilişki bulunmaktadır ve Teorem 3.1 den açıktırki aynı özdeğere sahip iki Sturm-Liouville sınır değer probleminde f

fonksiyonun üzerindeki (3.15) şartı farklı olsa bile sampling açılımları özdeştir. Eğer $t_n = cn + d \left(c, d \in \mathbb{R}\right)$ şeklinde sampling noktaları verilirse sampling açılımı (1.2) şeklindeki klasik formuna girebilir. burada (3.15) ifadesinin bu iki denklem için aynı olup olmadığı bilinmiyor.

Uyarı 4: Teorem 3.1 (3.12) şartını sağlayan $\left\{t_n\right\}$ sampling noktalarını kullanarak (3.15) formundaki fonksiyonlar için sampling açılımı verilebilir. Doğal olarak aklımıza Teorem 3.1'in tersine çalışıp çalışmadığı geliyor. Bu soruyu cevaplamak için hatırlarsak sampling noktaların karesi Sturm-Liouville sınır değer probleminin özdeğerleri idi. O zaman bir sınır değer problemininin özdeğerleri verildiği zaman bu Sturm-Liouville sınır değer problemini bulmaya dönüşür. Bu sınır değer problemleri teorisinde ters problem olarak bilinir ki bu da bizim çalışmamızın çok ötesinde olan bir konudur. Bu soruya kısmi olarak Yardımcı Teorem 3.2 cevap verebilir.

Uyarı 5: Dikkat edilirse (3.15) fonksiyonu Yardımcı Teorem 3.1 deki $\phi(x, t^2)$ fonksiyonunun özelliği ile birlikte sadece $b - a$ ya eşit yada ondan daha az olan üstel tipten tam bir fonksiyon değil aynı zamanda çift bir fonksiyondur. Bu (3.2) diferansiyel denkleminde t^2 nin çift olmasından kaynaklanmaktadır. (Yardımcı Teorem 3.1 deki $\lambda = t^2$)

3.2. Regüler Sturm-Liouville Sınır Değer Problemleri İçin Uygulamalar

Bu bölümde birkaç Sampling açılımını

$$y'' = -\lambda y = -t^2 y \qquad (0 \leq x \leq \pi)$$

biçimindeki en basit Sturm-Liouville diferansiyel denklemine uygulayacağız.

Uygulama 1:

$$y'' = -\lambda y = -t^2 y \qquad (0 \leq x \leq \pi) \tag{3.35}$$

$$y'\left(0\right) = 0 = y'\left(\pi\right) \tag{3.36}$$

Dikkat edersek burada (3.3) ve (3.4) şartlarında $\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{2}$ olarak alınmıştır.

$$\phi_1\left(x, t^2\right) = \cos xt, \qquad \phi_2\left(x, t^2\right) = \sin xt$$

biçiminde (3.35) diferansiyel denkleminin iki tane çözümü bulunabilir. Dolayısıyla genel çözüm

$$\phi(x,t^2) = c_1 \cos xt + c_2 \sin xt$$

biçiminde olur. Şimdi de (3.36) sınır şartlarını yerine getirirsek

$$\begin{aligned}
\phi'\left(x,t^2\right) &= -c_1 t \sin xt + c_2 t \cos xt \\
\phi'\left(0,t^2\right) &= -c_1 t \cdot 0 + c_2 t = 0 \\
\phi'\left(\pi,t^2\right) &= -c_1 t \sin \pi t + c_2 t \cos \pi t = 0
\end{aligned}$$

$$\Delta\left(\lambda\right) = \begin{vmatrix} 0 & t \\ -t\sin \pi t & t\cos \pi t \end{vmatrix} = 0$$

$$t^2 \sin \pi t = 0$$

$$t = n, \qquad n \in (\mathbb{N} \cup \left\{0\right\})$$

özdeğerler $\lambda_n = n^2,\ n \in \left(\mathbb{N} \cup \left\{0\right\}\right)$ biçimde bulunur. Burada dikkat edilirse $\lambda_0 = 0$ de bir özdeğerdir, çünkü

$$\begin{aligned}
& y'' = -\lambda_0 y = 0 \cdot y = 0 \\
& \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow y = c_1 x + c_2 \\
& \Rightarrow y'\left(0\right) = c_1 = 0 \\
& \Rightarrow y = c_2 \neq 0
\end{aligned}$$

$\lambda_0 = 0$ için özdeş olarak sıfır olamayan çözüm vardır. Bu çözüm özfonksiyondur.

$\phi\left(x,t^2\right) = \cos xt$ fonksiyonu Yardımcı Teorem3.1 deki gibi bir çözümdür. $y'\left(0\right)$ sınır şartını ve (3.35) diferansiyel denklemini sağlar t 'nin bir fonksiyonu olarak çift ve π tipinde üstel tam bir fonksiyondur ve her hangi bir t değeri için özdeş olarak sıfır olmayan çözümdür. Bu yüzden $\cos nx,\ n \in \left(\mathbb{N} \cup \left\{0\right\}\right)$ fonksiyonu (3.35) ve (3.36) ifadelerinin $\lambda_n = n,\ n \in \left(\mathbb{N} \cup \left\{0\right\}\right)$ özdeğerlerine uygun özfonksiyonu olduğunu söyleyebiliriz. $\lambda_0 = 0$ özdeğer olduğundan (3.19) ifadesinden kolayca

$$G\left(t\right) = t^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)\left(1 + \frac{t}{n}\right) = \frac{t \sin \pi t}{\pi}$$

hesaplanabilir. Burada

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)=\frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

eşitliği kullanıldı. Buradan

$$G'(t)=\frac{\sin \pi t}{\pi}+\cos \pi t$$
$$G'(n)=n\cdot \cos n\pi=(-1)^n\cdot n$$

olur. Dolayısıyla her hangi bir $g\in L^2(0,\pi)$ için

$$f(t)=\int_0^{\pi} g(x)\cos xt dx, \qquad (t\in \mathbb{R}) \tag{3.37}$$

biçiminde bir fourier seri açılımına sahip ise o zaman $\mathbb{R}$ nin herbir kompakt alt kümesinde düzgün yakınsak olan aşağıdaki sampling açılımı vardır.

$$\begin{aligned} f(t) &= f(0)\frac{\sin \pi t}{\pi t}+2\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\frac{t\sin \pi(t-n)}{\pi(t^2-n^2)} \\ &= f(0)\frac{\sin \pi t}{\pi t}+\sum_{n=1}^{\infty} 2f(n)\frac{t\sin \pi(t-n)}{\pi}\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{t-n}-\frac{1}{t+n}\right) \\ &= f(0)\frac{\sin \pi t}{\pi t}+\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\left(\frac{t\sin \pi(t-n)}{n\pi(t-n)}-\frac{t\sin \pi(t-n)}{n\pi(t+n)}\right) \\ &= f(0)\frac{\sin \pi t}{\pi t}+\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\frac{t\sin \pi(t-n)}{n\pi(t-n)}-\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\frac{t\sin \pi(t-n)}{n\pi(t+n)} \\ &= f(0)\frac{\sin \pi t}{\pi t}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' f(n)\frac{t\sin \pi(t-n)}{n\pi(t-n)} \end{aligned} \tag{3.38}$$

(Burada toplam sembolünün üzerindeki işaret $n=0$ teriminin çıkartılmış halidir ve burada $\sin \pi(t-n)=(-1)^n \sin \pi t$ eşitliğini kulandık.)

Uygulama 2:

$$\begin{aligned} &y''=-\lambda y=-t^2 y \qquad (0\le x\le \pi) \\ &y(0)=0=y(\pi) \end{aligned} \tag{3.39}$$

sınır-değer problemini ele alalım. Burada (3.3) ve (3.4) şartlarındaki $\alpha=\beta=0$ olarak alınmıştır. (3.35) diferansiyel denkleminin

$$\phi_1(x,t^2)=\cos xt \qquad \phi_2(x,t^2)=\sin xt$$

şeklinde iki çözümü bulunabilir ve genel çözüm

$$\phi\left(x,t^2\right) = c_1 \cos xt + c_2 \sin xt$$

biçiminde olur. Şimdi de (3.39) sınır şartlarını uygularsak

$$\begin{aligned}
\phi\left(0,t^2\right) &= c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \\
\phi\left(\pi,t^2\right) &= c_1 \cdot \cos t\pi + c_2 \sin t\pi = 0 \\
\Delta\left(\lambda\right) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos t\pi & \sin t\pi \end{vmatrix} = \sin t\pi = 0 \\
t &= n, \qquad n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

$\lambda_n = n,\ n \in \mathbb{N}$ özdeğerlerdir. Dikkat edilecek olursa $\lambda_0 = 0$ özdeğer değildir. Çünkü özdeğer olsaydı

$$\begin{aligned}
y'' &= \lambda_0 y = 0 \cdot y = 0 \\
y &= c_1 x + c_2 \\
y\left(0\right) &= c_1 \cdot 0 + c_2 = 0 \\
c_2 &= 0 \\
y\left(\pi\right) &= c_1 \cdot \pi = 0 \\
c_1 &= 0 \\
y &= 0
\end{aligned}$$

özdeş olarak sıfır olan bir fonksiyon bulunacaktı ki bu da onun özfonksiyon olmasına çelişkidir. $\phi\left(x,t^2\right) = \dfrac{\sin xt}{t}$ fonksiyonu Yardımcı Teorem 3.1 deki çözümdür ve $y\left(0\right)$, (3.35) ifadelerini sağlamaktadır. t 'nin bir fonksiyonu olarak çift ve π tipinde üstel tam bir fonksiyondur ve herhangi bir t değeri için özdeş olarak sıfır olamayan bir çözümdür. $\phi\left(x,n^2\right) = \dfrac{\sin nx}{n}$ fonksiyonu (3.35) ve (3.39) denklemlerinin $\lambda_n = n^2,\ n \in \mathbb{N}$ özdeğerlerine uygun özfonksiyonudur. (3.17)ifadesinden

$$G\left(t\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{t}{n}\right)\left(1 + \frac{t}{n}\right) = \frac{\sin \pi t}{t\pi}$$

kolaylıkla hesaplanabilir ve

$$G'\left(t\right) = \frac{\left(-1\right)^n}{n}$$

olur. Dolayısıyla her hangi bir $g \in L^2\left(0,\pi\right)$ için $f\left(t\right)$ fonksiyonu

$$f(t)=\int_0^{\pi} g(x)\frac{\sin xt}{t}dx \qquad (t\in\mathbb{R})$$

biçiminde ifadeye sahipse o zaman $\mathbb{R}$ kümesinin kompakt her alt kümesinde

$$f(t)=2\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\frac{(-1)^n n^2 \sin t\pi}{t\pi(t^2-n^2)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' f(n)\frac{n\sin\pi(t-n)}{t\pi(t-n)}$$

serisine düzgün olarak yakınsar.

Uygulama 3:

$$y''=-\lambda y=-t^2y \qquad (0\le x\le \pi)$$

$$\cos\alpha y(0)+\sin\alpha y'(0)=0 \qquad (\alpha\ne m\pi, m\in\mathbb{Z}, \tan\alpha\ne\pi) \quad (3.40)$$

$$y(\pi)=0 \quad (3.41)$$

şeklinde (3.35) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$\phi(x,t^2)=c_1\cos xt+c_2\sin xt$$

şeklinde olur. (3.40) ve (3.41) sınır şartlarından uygularsak

$$\cos\alpha\sin\pi t-t\sin\alpha\cos\pi t=0$$

şeklinde bir denklem elde ederiz. Bu denklemin köklerinin kareleri özdeğerlerdir.

$$\phi(x,t^2)=\cos xt-\cot\alpha\frac{\sin xt}{t}$$

Bu çözüm Yardımcı Teorem 3.1 deki gibi bir çözümdür. (3.35) ve (3.40) şartlarını sağlamaktadır. t ’nin fonksiyonu olarak çift π tipinde üstel tam bir fonksiyondur. $\phi(0,t^2)=1$ olduğu için her hangi bir t değeri için özdeş olarak sıfır olmayan bir fonksiyondur. Şimdi $\{t_n^2\}$, $n\in\mathbb{N}$ özdeğerler ve

$$\phi(x,t_n^2)=\cos t_n x-\cot\alpha\frac{\sin t_n x}{t_n} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

bu özdeğerlere uygun özfonksiyonlar olsunlar. Varsayalım ki $\lambda_0=t_0^2=0$ bir özdeğer olmasın. Eğer f fonksiyonu herhangi bir $g\in L^2(0,\pi)$ için aşağıdaki gibi bir

bir

$$f(t)=\int_0^{\pi} g(x)\left(\cos xt-\cot\alpha\frac{\sin xt}{t}\right)dx \qquad (t\in\mathbb{R})$$

ifadeye sahipse o zaman f fonksiyonu $\mathbb{R}$ kümesinin herhangi bir kompakt alt kümesinde

$$f(t)=2\sum_{n=1}^{\infty} f(t_n)\frac{t_n G(t)}{(t^2-t_n^2)G'(t_n)}=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f(t_n)\frac{G(t)}{G'(t_n)(t-t_n)}$$

serisine düzgün yakınsar. Burada

$$G(t)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{t}{t_n}\right)^2\right)$$

biçimindedir.

Uygulama 4: Şimdi 3. uygulamadaki denklemi ele alıp

$$\alpha=\frac{(2m+1)\pi}{2} \qquad m\in\mathbb{Z}$$

biçiminde alırsak özdeğerler ve özfonksiyonlar sırasıyla

$$t_n^2=\frac{(2n-1)^2}{4},\ \ \phi(x,t_n^2)=\cos\frac{(2n-1)x}{2} \qquad n\in\mathbb{N}$$

olur. (3.17) ifadesinden

$$G(t)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{2t}{2n-1}\right)^2\right)=\cos\pi t$$

$$\Rightarrow G'\left(\frac{(2n-1)}{2}\right)=(-1)^n\pi$$

biçiminde hesaplanır. O zaman her hangi bir $g\in L^2(0,\pi)$ için f fonksiyonu aşağıdaki gibi

$$f(t)=\int_0^{\pi} g(x)\cos xt\,dx \qquad (3.42)$$

bir yazılıma sahipse $\mathbb{R}$ kümesinin kompakt her alt kümesinde

$$f(t) = 4\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{2n-1}{2}\right)\frac{(2n-1)\cos\pi(t-n)}{\pi\left((2t)^2-(2n-1)^2\right)}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' f\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\sin\pi\left(t-\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}{\pi\left(t-\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)} \tag{3.43}$$

serisine düzgün olarak yakınsar.

Uyarı 6: Dikkat edilecek olursa uygulama 1 ve uygulama 4 te aynı diferansiyel denklem ve aynı f fonksiyonu verilmesine rağmen sınır şartları farklı olduğundan sampling serileride farklı olmaktadır.

3.3. Singüler Sturm-Liouville sınır değer problemleri İçin Uygulamalar

Şimdi singüler Sturm-Liouville sınır değer problemlerini incelerken I, $\mathbb{R}$ de sonlu ya da sonsuz, açık yada yarı açık aralık ve $q \in C(I)$ olsun. Eğer I herhangi bir $a \notin I$ uç noktasına sahipse $x \to a$ iken $q(x) \to \infty$ oluyorsa o zaman diferansiyel denklem regüler durumdaki gibi

$$y''(x) - q(x)y(x) = -t^2 y(x) \qquad (x \in I)$$

biçiminde ifade edilir. Eğer $a \in I$ uç nokta ise sınır şartları

$$\cos\alpha y(a) + \sin\alpha y'(a) = 0 \tag{3.44}$$

şeklinde olur.

Eğer $a \notin I$ ise (3.44) sınır şartı $x \to a$ iken I aralığında $|y| < \infty$ yapan şartlar ile yer değiştirir. Teorem3.1'in sonuçlarını regüler durumdaki gibi özdeğerleri ve özfonksiyonları asimtotik davranışa sahip ve spektrumlar ayrık olan singüler diferansiyel denklemlere de uygulayabiliriz. Bunun için gerekli şartları [28], [22] de bulunabilir.

Örnek olarak I yarı açık aralık ve singüler noktaya yaklaşıldığı zaman $q(x)$ konveks bir kümede sonsuza gitsin ya da eğer $I = (-\infty, \infty)$ ise o zaman $q(x)$ sonsuzdan bir minimuma kadar monoton olarak azalan ve sonra sonsuza kadar monoton olarak artan olsun. O zaman spekturumları gerçekten de ayrık olur ve özdeğerler ve özfonksiyonlar uygun asimtotik şartları sağlar ve Teorem 3.1 uygulanabilir. Şimdi bu şartları sağlayan ve bildiğimiz özel aşağıdaki fonksiyonları inceleyelim.

Uygulama 4: Singüler durum için ilk olarak bessel diferansiyel denklemini ele alalım

$$y''-\frac{\gamma^2-\frac{1}{4}}{x^2}y=-t^2y \qquad \left(0\le x\le 1;\ \gamma>-\frac{1}{2}\right) \tag{3.45}$$

$$y(0)=0=y(1) \tag{3.46}$$

Burada (3.3), (3.4) şartlarında $\alpha=\beta=0$ ve $q(x):=\left(\gamma^2-\frac{1}{4}\right)\Big/x^2$ alınmıştır. $\gamma=\frac{1}{2}$ olmadıkça $\lim\limits_{x\to 0^+}q(x)=\infty$ olacaktır. Bu problemde için Yardımcı Teorem 3.1 de verildiği gibi $\phi(x,t^2)$ fonksiyonu

$$\phi(x,t^2)=\sqrt{x}t^{-\gamma}J_\gamma(xt)$$

biçimindedir. Bu t 'nin bir fonksiyonu olarak çift ve π tipinde üstel tam bir fonksiyondur [29, sy. 15] ve özdeş olarak sıfır olmayan bir çözümdür. Eğer $\{t_n^2\}$ değerlerine özdeğer dersek uygun özfonksiyonlar

$$\sqrt{x}t_n^{-\gamma}J_\gamma(t_nx)$$

biçiminde olur. Burada $J_\gamma(x)$ γ. mertebeden bessel fonksiyonlarıdır ve t_n, n. mertebeden bessel fonksiyonunun pozitif kökleridir. O zaman (3.22) ifadesinden

$$G_n(t)=t_n^{1-\gamma}J'_\gamma(t_n)t^{-\gamma}J_\gamma(t)$$
$$G'_n(t_n)=t_n^{1-2\gamma}\left[J'_\gamma(t_n)\right]^2$$

şeklinde hesaplanır ve $J'_\gamma(t_n)=-J_{\gamma+1}(t_n)$ şartını sağlamaktadır. Bu durumda herbir $g\in L^2(0,1)$ için f fonksiyonu aşağıdaki gibi

$$f(t)=\int_0^1 g(x)\sqrt{x}t^{-\gamma}J_\gamma(xt)dx \qquad \left(t\in\mathbb{R};\ \gamma>-\frac{1}{2}\right)$$

bir ifadeye sahipse her $t\in\mathbb{R}$ için

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} f(t_n)\frac{2t_n^{1+\gamma}t^{-\gamma}J_\gamma(t)}{J_{\gamma+1}(t_n)(t_n^2-t^2)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' f(t_n)\frac{t_n^\gamma J_\gamma(t)t^{-\gamma}}{J_{\gamma+1}(t_n)(t_n-t)}$$

serisi ile ifade edilebilir. Burada t_n, $J_\gamma(t)$ fonksiyonun pozitif kökleri ve $t_n=-t_{-n}$, $n\in\mathbb{N}$ biçimindedir. Özdeş olarak eğer $F(t):=t^\gamma f(t)$ biçimde ve herhangi bir $g\in L^2(0,1)$ için

$$F(t)=\int_0^1 g(x)\sqrt{x}J_\gamma(xt)dx \qquad \left(t\in\mathbb{R};\ \gamma>-\frac{1}{2}\right)$$

şeklinde ise o zaman

$$F(t)=\sum_{n=1}^{\infty} F(t_n)\frac{2t_nJ_\gamma(t)}{J_{\gamma+1}(t_n)(t_n^2-t^2)} \tag{3.47}$$

seri şeklini alır. Eğer (3.45) ve (3.46) denklemlerinde $\gamma=\frac{1}{2}$ alınırsa bu durumda 2. uygulamadaki regüler Sturm-Liouville sınır değer problemine dönecektir.

Uygulama 5: Şimdi de h herhangi bir sabit olmak üzere yukarıdaki problemin değişik bir şeklini ele alalım

$$y''-\frac{\gamma^2-\frac{1}{4}}{x^2}y=-t^2y \qquad \left(0\le x\le -\frac{1}{2}\right),$$
$$y(0)=0, \qquad y(0)=hy(1)$$

özdeğerler ve özfonksiyonlar sırasıyla t_n^2, $\sqrt{x}t_n^{-\gamma}J_\gamma(xt_n)$ dir. Burada t_n değerleri

$$H(t):=tJ_\gamma'(t)+\left(\frac{1}{2}-h\right)J_\gamma(t)$$

fonksiyonun pozitif kökleridir. (3.22) ifadesini kullanırsak

$$G_n(t)=(t_nt)^{-\gamma}J_\gamma(t_n)\left\{\left(h-\frac{1}{2}\right)J_\gamma(t)-tJ_\gamma'(t)\right\},$$
$$G_n'(t_n)=\frac{t_n^{-2\gamma}J_\gamma(t_n)J_\gamma'(t_n)}{\left(h-\frac{1}{2}\right)}\left\{\left(h-\frac{1}{2}\right)^2+t_n^2-\gamma^2\right\}.$$

olarak hesaplanır. O zaman eğer her hangi bir $g \in L^2(0,1)$ için

$$f(t) = \int_0^1 g(x)\sqrt{xt}\,t^{-\gamma} J_\gamma(xt)\,dx \qquad \left(t \in \mathbb{R}; \gamma > -\frac{1}{2}\right)$$

biçiminde verilirse $f(t)$ fonksiyonu $t \in \mathbb{R}$ için

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n) \frac{2t_n t^{-\gamma}\left(\frac{1}{2}-h\right)\left[tJ'_\gamma(t) + \left(\frac{1}{2}-h\right)J_\gamma(t)\right]}{t_n^\gamma J'_\gamma(t_n)\left[\left(\frac{1}{2}-h\right)^2 + t_n^2 - \gamma^2\right](t^2 - t_n^2)}$$

serisi ile ifade edilebilir. Burada t_n sayıları $tJ'_\gamma(t) + \left(\frac{1}{2}-h\right)J_\gamma(t)$ fonksiyonun pozitif kökleridir. Eğer $F(t) := t^{\gamma+1/2} f(t)$ biçiminde ve her hangi $g \in L^2(0,1)$ için

$$F(t) = \int_0^1 g(x)\sqrt{xt}\,J_\gamma(xt)\,dx$$

ile ifade edilebilirse bu durumda F fonksiyonu

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F(t_n) \frac{2\sqrt{t_n t}\left(\frac{1}{2}-h\right)\left[tJ'_\gamma(t) + \left(\frac{1}{2}-h\right)J_n(t)\right]}{J'_\gamma(t_n)\left[\left(\frac{1}{2}-h\right)^2 + t_n^2 - \gamma^2\right](t^2 - t_n^2)} \tag{3.48}$$

serisi ile ifade edilebilir. Burada (3.48) formülü Higgins denkleminden dolayıdır, [30].

Uygulama 6: Şimdi de Legendre diferansiyel denklemine bakalım

$$(1-X^2)Y'' - 2XY' + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)Y = 0 \qquad (-1 \le X \le 1)$$
$$|Y(\pm 1)| < \infty$$

Eğer $X = \sin x$ ve $Y = y\sqrt{\sec x}$ dönüşümleri uygulanırsa bu denklem

$$\begin{aligned} & y'' + \frac{1}{4}(\sec^2 x)y = -t^2 y \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right) \\ & \left|y\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right| < \infty \end{aligned} \tag{3.49}$$

denklemine indirgenir. Burada $x \to \pm\dfrac{\pi}{2}$ iken $q\left(x\right)=\left(-\dfrac{1}{4}\right)\sec^2 x \to -\infty$ olur. Denklemin özdeğer ve özfonksiyonları sırasıyla $t_n^2=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$, $P_n\left(\sin x\right)\sqrt{\cos x}$ $n\in\left(\mathbb{N}\cup\left\{0\right\}\right)$ şeklindedir. Burada $P_n\left(x\right)$, *n.* dereceden Legendre polinomudur. (3.49) ifadesinin $\phi\left(x,t^2\right)$ çözümünün $t_n=n+\dfrac{1}{2}$ olduğu zaman özfonksiyonlara indirgenmesi $P_{t-1/2}\left(\sin x\right)\sqrt{\cos x}$ biçiminde olur. Burada $P_t\left(x\right)$ aşağıda tanımlanan hiper geometrik fonksiyonların Legendre fonksiyonudur.

$$P_t\left(x\right)={}_2F\left(-t,t+1;1-x/2\right)$$

biliyoruzki

$$P_{t-1/2}\left(x\right)={}_2F\left(-t+\frac{1}{2},t+\frac{1}{2};1-x/2\right)$$

t'nin bir fonksiyonu olarak çift ve üstel tipten tam bir fonksiyondur, [31, *sy*. 162]. Şimdi de (3.21) ifadesi ile $P_n(x)=(-1)^n P_n(-x)$ olduğunu dikkate alırsak, [31, *sy*. 171].

$$\begin{aligned}
G_n\left(t\right)&=\left(t^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}P_{t-1/2}\left(\sin x\right)P_n\left(\sin x\right)\cos x\,dx\\
&=\left(t^2-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right)\int_{-1}^{1}P_{t-1/2}\left(X\right)P_n\left(X\right)dX\\
&=\left(-1\right)^n\left(t^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)\frac{2\sin\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\pi\left[t^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]}\\
&=\frac{2}{\pi}\sin\pi\left(t-n-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır ve $G_n^{'}\left(n+\frac{1}{2}\right)=2$ olur. Bu yüzden herhangi bir $g^{*}\in L^{2}\left(-\pi/2,\pi/2\right)$ için (3.15) deki integral

$$f\left(t\right)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} g^{*}\left(x\right)P_{t-1/2}\left(\sin x\right)\sqrt{\cos x}dx \tag{3.50}$$

biçiminde ifade edilebilir ise yada benzer olarak $X=\sin x$ dönüşümü uygularsak bu integral

$$f\left(t\right)=\int_{-1}^{1} g\left(X\right)P_{t-1/2}\left(X\right)dX \tag{3.51}$$

şeklini alır ve burada $g\left(X\right)=g^{*}\left(\arcsin X\right)\left(1-X^{2}\right)^{-1/4}\in L^{2}\left(-1,1\right)$. Şimdi Teorem 3.1 uygulamasına bakalım.

Eğer f her hangi bir $g\left(X\right)\in L^{2}\left(-1,1\right)$ için (3.51) ile ifade edilebiliyorsa o zaman f fonksiyonu $\mathbb{R}$ nin kompakt her alt kümesinde

$$\begin{aligned} f\left(t\right)&=\sum_{n=0}^{\infty} f\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\left(2n+1\right)\sin\pi\left(t-\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}{\pi\left(t^{2}-\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2}\right)} \\ &=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' f\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\sin\pi\left(t-\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}{\pi\left(t-\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2}\right)} \end{aligned} \tag{3.52}$$

serine düzgün yakınsaktır.

Uyarı 7: 4. uygulama ve 6. uygulama arasında yakın bir ilişki vardır. Açıktırki (3.52) ve (3.43) deki sampling açılımları aynıdır. Acaba (3.42) ve (3.51) integral ifadeleri arasında bir ilişki var mı? Mehler-Dirichlet formülünü yerine koyarsak

$$P_{t-1/2}\left(X\right)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{0}^{\arccos X}\frac{\cos yt}{\sqrt{\cos y-X}}dy \qquad \left(X\in\left(-1,1\right)\right)$$

şeklini alır. Fubini Teoremi kullanarak ve $X=\cos x$ yerine yazarsak

$$f\left(t\right)=\int_{0}^{\pi}\tilde{g}\left(y\right)\cos yt dy,\qquad \tilde{g}\left(y\right):=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{y}^{\pi} g\left(\cos x\right)\sin x\left(\cos y-\cos x\right)^{-1/2}dx$$

integraller elde edilir. Şimdi amacımız $\tilde{g} \in L^2\left(0,\pi\right)$ olduğunu göstermek olacaktır.

$$u = \cos x, \quad v = \cos y$$

değişken dönüşümü yaparsak

$$\left\|\tilde{g}\right\|^2_{L^2\left(0,\pi\right)} \leq \int_{-1}^{1} \frac{h\left(v\right)}{\sqrt{1-v^2}}dv, \qquad h\left(v\right) := \left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-1}^{v} \frac{\left|g\left(u\right)\right|}{\sqrt{v-u}}du\right)^2$$

eşitliğini elde ederiz. Buna da Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygularsak

$$h\left(v\right) \leq \left(\frac{2}{\pi^2}\right)\left(\int_{-1}^{v} \frac{\left|g\left(u\right)\right|^2}{\sqrt{v-u}}du\right)\left(\int_{-1}^{v} \frac{du}{\sqrt{v-u}}\right) = \frac{4\sqrt{v+1}}{\pi^2}\int_{-1}^{v} \frac{\left|g\left(u\right)\right|^2}{\sqrt{v-u}}du$$

eşitsizliği elde edilir. İntegralin mertebesini değiştirirsek

$$\begin{aligned}
\left\|\tilde{g}\right\|^2_{L^2\left(0,\pi\right)} &\leq \left(\frac{4}{\pi^2}\right)\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1+v}}{\sqrt{1-v^2}}\left(\int_{-1}^{v} \frac{\left|g\left(u\right)\right|^2}{\sqrt{v-u}}du\right)dv \\
&= \left(\frac{4}{\pi^2}\right)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{v} \frac{\left|g\left(u\right)\right|^2}{\sqrt{1-v}\sqrt{v-u}}dudv \\
&= \left(\frac{4}{\pi^2}\right)\int_{-1}^{1}\left|g\left(u\right)\right|^2\left(\int_{u}^{1} \frac{dv}{\sqrt{-u+v\left(1+u\right)-v^2}}\right)du \\
&= \left(\frac{4}{\pi}\right)\int_{-1}^{1}\left|g\left(u\right)\right|^2 du < \infty
\end{aligned}$$

olur. Çünkü eğer eşitliğin sağ tarafındaki integrale bakarsak

$$\int_{u}^{1} \frac{dv}{\sqrt{-u+v\left(1+u\right)-v^2}} = \arcsin\frac{2v-1-u}{1-u}\Bigg|_{u}^{1} = \pi$$

dir. Bu yüzden $\tilde{g} \in L^2\left(0,\pi\right)$ olur. Yani (3.42) ifadesi (3.51) ifadesine karşılık gelir.

Uygulama 7: Son olarak Jacobi diferansiyel denklemini göz önüne alalım

$$\left(1-X^2\right)\frac{d^2Y}{dX}+\left[\beta-\alpha-\left(\alpha+\beta+2\right)X\right]\frac{dY}{dX}-\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2 Y=-t^2Y$$
$$-1\le X\le 1,\qquad \alpha,\beta>-1,\qquad \left|Y\left(\pm1\right)<\infty\right|$$

Burada

$$q\left(x\right)=\left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)\Big/\left(4\sin^2\left(x/2\right)\right)+\left(\frac{1}{2}-\beta^2\right)\Big/\left(4\cos^2\left(x/2\right)\right)$$

şeklindedir. Özdeğerleri ve özfonksiyonları sırasıyla

$$t_n^2=\left(n+\left(\alpha+\beta+1\right)/2\right)^2, A\left(n\right)\left(\sin x/2\right)^{\alpha+\beta/2}\cdot\left(\cos x/2\right)^{\beta+1/2}P_n^{(\alpha,\beta)},\ n\in\left(\mathbb{N}\cup\left\{0\right\}\right)$$

dır. Burada $A\left(n\right)$ sıfırdan farklı keyfi sabitler ve $P_n^{(\alpha,\beta)}$ aşağıdaki gibi tanımlanmış $n.$ mertebeden Jacobi Polinomudur.

$$P_n^{(\alpha,\beta)}\left(z\right)=\frac{\Gamma\left(n+\alpha+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+1\right)\Gamma\left(n+1\right)^2}F_1\left(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;\frac{1-z}{2}\right)$$

$2\gamma:=\alpha+\beta+1$ tek doğal sayı olarak alalım ve $A\left(n\right)=\Gamma\left(n+2\gamma\right)/\left(\Gamma\left(\beta+1\right)\Gamma\left(n+\alpha+1\right)\right)$ olsun. O zaman özfonksiyonlar aşağıdaki şekilde normalleşmiş olur.

$$\phi\left(x,t_n^2\right)=\frac{\Gamma\left(n+2\gamma\right)\left(\sin x/2\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos x/2\right)^{\beta+1/2}}{\Gamma\left(\beta+1\right)\Gamma\left(n+\alpha+1\right)}P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\cos x\right)$$

ve

$$\phi\left(x,t^2\right)=\frac{\Gamma\left(t+\gamma\right)\left(\sin x/2\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos x/2\right)^{\beta+1/2}}{\Gamma\left(\beta+1\right)\Gamma\left(t-\gamma+\alpha+1\right)}P_{1-\gamma}^{(\alpha,\beta)}\left(\cos x\right)$$

sağlanır. Burada $P_t^{(\alpha,\beta)}\left(X\right)$ fonksiyonu aşağıda tanımlandığı gibi Jacobi polinomudur, [32].

$$P_t^{(\alpha,\beta)}\left(X\right)=\frac{\Gamma\left(t+\alpha+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+1\right)\Gamma\left(t+1\right)^2}F_1\left(-t,t+\alpha+\beta+1;\alpha+1;\frac{1-X}{2}\right)$$

Dikkat edilirse $\phi\left(x,t^2\right)$ fonksiyonu t 'nin bir fonksiyonu olarak çift ve üstel tipten tam bir fonksiyondur. x 'in bir fonksiyonu olarak özdeş olarak sıfır olmayan bir çözümdür. Şimdi problemimizin çözümüne dönersek (3.15) integrali her hangi bir $g \in L^2(0,\pi)$ için aşağıdaki formda

$$f(t) = \int_0^\pi g(x) \frac{\Gamma(t+\gamma)(\sin x/2)^{\alpha+1/2}(\cos x/2)^{\beta+1/2}}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(t-\gamma+\alpha+1)} P_{t-\gamma}^{(\alpha,\beta)}(\cos x)\,dx \quad (3.53)$$

ya da her hangi bir $g^*(X) = g(\arccos X)(1-X^2)^{-1/4} \in L^2(-1,1)$ fonksiyonu için

$$f(t) = \int_{-1}^1 g^*(X) \frac{\Gamma(t+\gamma)}{2^\gamma \Gamma(\beta+1)\Gamma(t-\gamma+\alpha+1)} (1-X)^{\alpha/2}(1+X)^{\beta/2} P_{1-\gamma}^{(\alpha,\beta)}(X)\,dX \quad (3.54)$$

formunda ifade edilebiliyorsa o zaman (3.21) ifadesinden $X = \cos x$ koyarak

$$G_n(t) = \left(t^2 - (n+\gamma)^2\right) \int_0^\pi \phi(x,t^2)\phi(x,t_n^2)\,dx$$

$$= \frac{\left(t^2-(n+\gamma)^2\right)\Gamma(t+\gamma)\Gamma(n+2\gamma)}{2^{2\gamma}\Gamma^2(\beta+1)\Gamma(t-\gamma+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)} \times$$

$$\times \int_{-1}^1 P_{t-\gamma}^{(\alpha,\beta)}(X) P_n^{(\alpha,\beta)}(X)(1-X)^\alpha (1+X)^\beta\,dX$$

$$= \frac{(-1)^n \Gamma(n+2\gamma)\Gamma(n+\beta+1)}{\pi n!\,\Gamma^2(\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)} \sin\pi(t-\gamma)$$

$$:= c(n)\sin\pi(t-\gamma).$$

G_n', $G_n'(n+\gamma) = (-1)^{(n)} c(n)\pi$ olur. Şimdi Teorem 3.1'i kullanarak diyebiliriz ki eğer verilen her hangi bir $g \in L^2(0,\pi)$ için f fonksiyonu (3.53) formunda ifade edilebiliyorsa ya da ona denk olan her hangi bir $g^* \in L^2(-1,1)$ için (3.54) formunda ifade edebilir o zaman $\mathbb{R}$ nin kompakt her alt kümesinde $t \in \mathbb{R}$ sayıları için

$$f(t) = \sum_{n=0}^\infty f(n+\gamma) \frac{2(n+\gamma)\sin\pi(t-\gamma-n)}{\pi\left(t^2-(n+\gamma)^2\right)}$$

serisine düzgün yakınsak olur. Eğer biz burada $2\gamma = 1$ alırsak bu 6. uygulamanın bir kısaltması olur.

BÖLÜM 4

SONUÇ VE DEĞERLENDİRMELER

Bu çalışmamızda genel olarak bir bant limit fonksiyonu için sampling serisinin nasıl olacağı ile ilgili olarak çeşitli metotları ele aldık ve bu metotlardan WSK metodunun üzerinde çeşitli uygulamalarda bulunduk.

WSK metodu, belirli şartlar altında verilmiş bir integral fonksiyonu ile birlikte sampling değerlerinin verilmesi durumunda sampling serisinin nasıl olacağı ile ilgili bize bilgi vermektedir. Biz de lineer diferansiyel operatörlerin ayrık spekturuma sahip olmasından ve bu diferansiyel operatörler ile üretilen lineer diferansiyel denklemlerin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimtotik davranışa sahip olmasından yararlanarak, verilen bir sınır değer problemi ile WSK metodu arasında bir köprü kurduk. Bunu da verilen bir sınır değer probleminin çözümümdeki özdeğer ile sampling değerlerini ve bu özdeğerlere uygun özfonksiyonlarlada sampling fonksiyonlarını belirleyerek yaptık. Böylece WSK metoduna sınır değer problemleri ile yeni bir yaklaşımda bulunduk. Bu metot daha birçok Sturm-Liouville sınır değer problemlerine uygulanabilir.

KAYNAKLAR

[1] Poisson, S.D. (1820). On the periodic function series to solve difference problems by using the some transform. *J. Ecole Roy. Poltechnique,* **11**, 417-489.

[2] Borel, E. (1899). On a divergence series. *Ann. Ecole Norm. Sup,* **3**, 9-131.

[3] Hadamard, J. (1901). The series and its anlytic continuatioan. S*cientia*, **12**, 323-333.

[4] Vallee Poussin, Ch. J. (1908). The convergence of the intepolation formulas between equidistant coordinates. *Acad Roy. Belg. Bull*,**1**, 319-410.

[5] Whittaker, E.T. (1915). On the functions which are represented by the expansion of the inter polat theory. *Proc. roy. Soc. Edinburgh*, **35**. 181-194.

[6] Cauchy, A. L. (1841). On a some anlysis formulas, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **12**, 283-298.

[7] Nyquist, H. (1920). Certain transcendental function in the theory of interpolation. *Tohoku Math. J*, **17**, 64-72.

[8] Whittaker, J. M. (1935). *Interpolatory Function Theory*, England: Cambrige University Press. cambrige.

[9] Ferrar, W. L. (1926). On the cardinal function of interpolation theory. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh,* **46**, 323-333.

[10] Butzer, P. L. Stens, R. L. (1992). Sampling Theory for not necessarily band-limited function: A historical overview, *SIAM Review,* **34,** 40-53.

[11] Ogura, K. (1920). On a certain transcendental integral function in the theory of interpolation. *Tahoku Math*, **17**, 64-72.

[12] Shannon, C. E. (1949). Communation in the presence if noise. *Proc. IRE,* **137**, 10-21.

[13] Shannon, C. E. (1948). A matematical theory of communitation. *Bell System Tech. J,* **27**, 379-423.

[14] Kotel’nikov, V. (1933). *On the carrying capacity of the ‘ether’ and wire in telecommunications, material for the first All-Union Conference on Questions of Communications,* Moscow, Russian: Izd. Red. Upr. Svyyazi RKKA.

[15] Royden, H. L. (1960). *Real Analysis,* London: The Macmillan Company Collier Macmilan Limited.

[16] Tıtchmarsh E.C. (1939). *The Theory of functions.* London: second edition,

Oxford University Press.

[17] Ahmed, I. Zayed. (1993). *Advances in Shannon's Sampling Theory*, Florida: Ph.D. Depertment of Mathematics University of Central Florida Orlando.

[18] Levin, B. (1964). *Distribution of Zeros of Entire Func.*, Island: Translations, of Mathematical Monographs, Amer. Math Soc., Providence, Rhode.

[19] Paley, R.E.A.C. Wiener, N. (1934). *Fourier Transforms in the Complex Domain*, American: Math. Society, Providence, Colloq RI, Publ. Vol. XX.

[20] Kramer, H. P. (1959) . A generalized sampling theorem. *J. M. Phys.*,**38**, 68- 72

[21] Naimark, M.A. (1968). *Linear Differenttial Operators*, New York: Frederick Ungar Publ. Co.

[22] Titchmarsh, E. C. (1962). *Eigenfunction expansions Associated with Second-Order Differential Equations*, Oxford: part1. Second edition, Clarendon Press.

[23] Coddington E. A., Levınson, N. (1955) *Theory of Ordinary Differrential Equations*, New York: McGraw-Hill.

[24] Levitan, B. M., Gasymov, M. G. (1964). Determination of a differential equation by two of its spectra. *Russian Math. Surveys*, **19,** 1-63.

[25] Boas, R. P. JR, 1954. *Entire Functions*, New York: Academic Press.

[26] Rudin, W. (1975) *Principles of mathematical Analsis*, New York: second edition, McGraw-Hill.

[27] Levonson, N. (1975). *Gap and Density Theorems*, New York: American Mathematical Society, , Colloq. Publ. Vol. 39.

[28] Levitan B.M., Sargjan, I. S. (1975). *Introduction to Spectral Theory: Self-Adjoint Ordinary*, American Mathematical Society, Providence, RI, Translation of Math, Monographs, Vol. 39.

[29] Szegö, G. (1939). *Orthogonal Polynomials*, American: Mathematical Society, Providence, RI, colloq Publ. Vol. XXIII.

[30] Higgins, J. R., (1972). An interpolation serisies associated with the Bessel-Hankel transform, *J. London Math. Soc* **(2)**, 707-714.

[31] Erdelyı, A. (1965) et al. (Bateman Manuscript Project): *Higher Transcendental Functions*, New York: Vol. I, McGraw-Hill.

[32] Deeba, E. Y. KOH,E. L. (1983). The continuous Jacobi transform, *Onternat. J. Math. Math. Sci*, **6**, 145-160.