GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PERİYODİK KATSAYILI KUADRATİK STURM-LIOUVILLE OPERATÖR DEMETİNİN SPEKTRAL ANALİZİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MURAT SADIK ÖNGEN

TEMMUZ 2011

Periyodik Katsayılı Kuadratik Sturm-Liouville Operatör Demetinin Spektral Analizi

Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Abdullah KABLAN

Murat Sadık ÖNGEN
Temmuz 2011

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Periyodik Katsayılı Kuadratik Sturm-Liouville Operatör Demetinin Spektral Analizi
Öğrencinin, Adı Soyadı: Murat Sadık ÖNGEN
Tez Savunma Tarihi: 22.07.2011

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ramazan KOÇ
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Abdullah KABLAN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

İmzası

Prof. Dr. Manaf MANAFLI ____________________

Yrd. Doç. Dr. Abdullah KABLAN ____________________

Yrd. Doç. Dr. İlkay GÜVEN ____________________

ÖZET

PERİYODİK KATSAYILI KUADRATİK STURM-LIOUVILLE OPERATÖR DEMETİNİN SPEKTRAL ANALİZİ

MURAT SADIK ÖNGEN
Yüksek Lisans Tezi, Matematik A. B. D.
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Abdullah KABLAN
Temmuz 2011, 60 Sayfa

Fizik ve mühendislikte bir çok problemin sonucu periyodik katsayılı diferansiyel denklemler içermektedir. Hill operatörü olarak da bilinen periyodik katsayılı diferansiyel denklemlerin (operatörlerin) spektral analizi matematikte hızlı gelişen alanlardan biri olmuştur. Bu çalışmadaki önemli nokta incelenen denklemin klasik Hill denkleminden daha genel olan kuadratik operatör demeti şeklinde verilmesidir.

Bu tezde periyodik katsayılı kuadratik operatörler demetinin spektral özellikleri incelenmiştir. Birinci bölümde diferansiyel operatörler, özdeğerler, özfonksiyonlar ile ilgili bazı tanımlar ve teoremler verilmiştir. Daha sonra ikinci bölümde, öncelikle Floquet teorisinden faydalanarak ele alınan operatörün çözümlerinin kararlılık aralıkları belirlenmiş ve daha sonra da özfonksiyonlar cinsinden açılım formülleri verilmiştir. Son olarak da spektrumum yapısı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Periyodik diferansiyel operatörler, Sturm-Liouville denkleminin spektral analizi, özfonksiyonlar cinsinden açılım formülleri.

ABSTRACT

THE SPECTRAL PROPERTIES OF A QUADRATIC PENCIL OF STURM-LIOUVILLE OPERATORS WITH PERIODIC COEFFICIENTS

MURAT SADIK ÖNGEN
M. Sc. in Mathematics
Supervisor: Asist. Prof. Dr. Abdullah KABLAN

July 2011, 60 Pages

Many problems in physics and engineering untimetely involve differential equations with periodic coefficients. The specral analysis of differential equations (operators) with periodic coefficients also known Hill operators is the one of the branch rapidly improving in mathematics. It is important point in this study that the investigated equation which is more general then Hill’s equation is given in a form of quadratic pencil of operators.

In this thesis; we studied the spectral properties of quadratic pencil of Sturm-Liouville operators with periodic coefficients. In first section, some definitions and theorem about the differential operators, eigenvalues and eigenfunctions have been given. Then, firstly the stability intervals of the solutions of investigated operator were determined by using the Floquet theorey and secondly eigenfunctions expansion formulas were given in second section. Finally the structure of the spectrum has been investigated.

Key Words: Differential operators with periodic coefficients, Spectral analysis of Sturm-Liouville equations, eigenfunctions expensions formulas.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamda her an yanımda olan Yrd. Doç. Dr. Abdullah KABLAN'a bana sağladığı yardımlarından dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında bana sabır ve anlayış gösteren sevgili eşim Şirin'e, oğlum Berhan'a ve kızım Başak'a, çalışmalarımda bana manevi destek veren anneme ve ablam Zuhal'e sonsuz minnet duygularımla teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

SEMBOLLER LİSTESİ

$\ell(y)$	Diferansiyel ifade
λ	Özdeğer
D_A	A operatörünün tanım kümesi
$U\ y$	Sınır şartları
U	Sınır şartlarının determinantı
$*$	Eşlenik
L	Operatör
$\Delta(\lambda)$	Özdeğerlerin determinantı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
L^p	p. kökten integrali var olan fonksiyonlar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$G\ x,\xi$	Green fonksiyonu
W	Wronskiyen
$C(x,\lambda)$	Özfonksiyon
$u(\lambda)$	Karekteristik fonksiyon

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Spektral teori modern matematiğin tarihi içerisinde fiziksel ve matematiksel yapılar hakkında en bilgi verici araç olmuştur. Son altmış yıldaki matematiksel yayınlarla bu konu, özellikle de özdeğerler ve spektral teori oldukça hızlı bir gelişim göstermiştir. Katı hal fiziğinde ve kristallerin kuantum mekaniği ile ilgili metallerin teorisinde ortaya çıkan periyodik katsayılı diferansiyel denklemlerin spektral analizi fizikçilerin ve matematikçilerin ortak ilgi alanlarından biri olmuştur.

Periyodik katsayılı diferansiyel denklemler ilk olarak 19. yüzyılın sonlarında Mathieu, Hill ve Floquet tarafından incelenmeye başlanmıştır. Daha sonra A. M. Lyapunov periyodik katsayılı Sturm-Liouville denkleminin kararlılık aralıklarının kuruluşu hakkındaki klasikleşmiş makalesini yayınlamıştır. 1950 yılında I. M. Gelfand n boyutlu uzayda keyfi mertebeli periyodik katsayılı özeşlenik diferansiyel operatörlerin özfonksiyonları cinsinden açılımının kurulması için başka bir yöntem vermiştir [1]. Daha sonra periyodik katsayılı özeşlenik olmayan diferansiyel operatörler M. I. Serov [2], F.S. Rofe-Beketov [3], V.A. Tkachenko [4] ve D.C. Mc Garvey [5-7] tarafından incelenmiştir. Periyodik katsayılı diferansiyel operatörlerin spektrumunun potansiyele bağımlılığı M.G. Gasymov'un [8-10] çalışmalarında incelenmiştir.

Genel olarak periyodik katsayılı diferansiyel operatörler Hill denklemi olarak bilinir. Bu denklem $P(x)$ ve $Q(x)$ reel değerli ve aynı periyoda sahip periyodik fonksiyonlar olmak üzere

$$P(x)y'(x)\ {}^{\prime} + Q(x)y(x) = 0$$

biçimindedir. Bu operatör ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı 1952 yılında W. Magnus ve S. Winkler tarafından özetlenmiş ve bu çalışmada denklemin karakteristik değerleri ve diskriminantı incelenmiş, kararlılık ve kararsızlık aralıkları tespit edilmiştir, [22]. 1973 yılında M.S.P. Estham, Magnus ve Winkler'in de çalışmalarından faydalanarak periyodik katsayılı diferansiyel operatörlerin spektral teorisi üzerine bir kitap yazmış ve bu kitabında periyodik katsayılı diferansiyel operatörlerin kararlılık ve kararsızlık aralıkları üzerinde durmuş, çözümlerin sıfırlarını incelemiş ve asimptotik formülleri elde etmiştir, [23]. Diğer taraftan E.C. Titchmarsh yine bu tür operatörlerin özfonksiyonları cinsinden açılım formüllerini elde etmiştir, [21]. Daha sonra G.S. Guseinov [11] ile D. Buschman, G. Stolz ve J. Weidmann [12] yine bu tür denklemleri ancak bu defa kuadratik demet olarak spektral özelliklerini incelemiştir. V.A. Mikhailets, A.V. Sobolev [13], M. M. Hechtman, I.V. Stankevich [14], V. A. Dmitrushchenkov [15] ve M. Dzh. Manafov [16] katsayıları genelleşmiş fonksiyonlar olan ancak kuadratik demet olmayan diferansiyel operatörleri incelemiştir. O.A. Veliev'in [17-18] çalışmalarında ise periyodik katsayılı, kompleks değerli diferansiyel operatörlerin spektral analizi yapılmıştır.

Bu tezde G.S. Guseinov'un [11] çalışması da esas alınarak

$$y'' + [\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)]y = 0, \quad (-\infty, \infty)$$

biçiminde katsayıları periyodik fonksiyonlar olan ikinci mertebeden diferansiyel operatörler demetinin spektral yapısı incelenmiştir. Burada $p(x)$ ve $q(x)$ $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı, reel değerli ve a, $(a > 0)$ periyotlu fonksiyonlar ve λ kompleks parametredir.

Bu çalışmanın ilk bölümde öncelikle spektral analiz için gerekli olan tanım, teorem ve yöntemler üzerinde durulmuştur. Bu bölümde sunulan teoremlerin ispatları tezde verilmemiş sadece kaynak göstermekle yetinilmiştir.

İkinci bölümde ise denklemin spektral incelenmesine geçilmiş ve Floquet teorisinden de yararlanılarak ele alınan denklemin diskriminantı bulunmuş ve λ nın durumuna göre çözümlerin kararlılık, kararsızlık aralıkları tespit edilmiştir. Sonraki iki kısımda ise özdeğerlerin katlılık durumları incelenmiş ve spektrumun yapısı analiz edilmiştir. Daha sonra özfonksiyonlar cinsinden açılım formülleri elde edilmiş ve son kısımda da spektrum içinde boşlukların bulunmaması kriterleri verilmiştir.

BÖLÜM 2

DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN SPEKTRUMU

Bu bölümde daha sonraki bölümde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. Öncelikle bir diferansiyel operatörün oluşturulmasında temel yapı taşları olan diferansiyel ifade ve sınır şartları kavramlarından bahsedilecektir. Daha sonra diferansiyel operatörlerin özdeğer ve özfonksiyonları tanıtılarak buradan hareketle spektrum kümesi tanımlanacaktır. Son kısımda ise Green fonksiyonundan bahsedilecek ve özfonksiyonlar cinsinden açılım formülleri verilerek bu bölüm sonlandırılacaktır.

2.1. LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRLER

2.1.1. Lineer Operatörler

D, R kompleks lineer uzayının bir alt kümesi olsun. D nin her x elemanını R nin bir $x' = A\ x$ elemanına eşleyen bir A fonksiyonuna R kompleks lineer uzayında bir *operatör* denir. Burada D kümesine operatörün *tanım kümesi* ve tüm Ax, ($x \in A$) elemanlarının oluşturduğu kümeye de operatörün *değer kümesi* denir.

D_A bir alt uzay olsun. Eğer $x, y \in D_A$ ve herhangi bir λ sayısı için aşağıdaki bağıntılar sağlanıyor ise A operatörüne *lineerdir* denir.

$$A\ \lambda x\ = \lambda A(x)$$
$$A(x+y) = A(x) + A(y)$$

A ve B operatörleri aynı D tanım kümesinde tanımlanmış ve $\forall x \in D$ için $Ax = Bx$ ise bu operatörlere *eşit operatörler* denir.

2.1.2. Lineer Diferansiyel İfadeler

Aşağıdaki formda verilmiş eşitliklere *lineer diferansiyel ifadeler* denir.

$$\ell(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y$$

Burada $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ fonksiyonlarına katsayılar, n sayısına da diferansiyel ifadenin *derecesi* denir. Şimdi $[a,b]$ aralığında n. mertebeye kadar tüm türevleri sürekli fonksiyonlar uzayını C^n ile gösterelim. Her $y \in C^n$ fonksiyonu için $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi iyi tanımlıdır ve $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyondur.

2.1.3. Sınır Şartları

y ve onun ilk $(n-1)$. ardıl türevlerinin $[a,b]$ aralığının a ve b noktalarındaki sınır değerlerini aşağıdaki biçimde gösterelim:

$$y_a, y'_a, \ldots, y_a^{(n-1)}\ ;\ y_b, y'_b, \ldots, y_b^{(n-1)} \tag{2.1}$$

$U(y)$, (2.1) deki değerlerle aşağıdaki biçimde tanımlanan lineer bir form olsun.

$$U(y) = \alpha_0 y_a + \alpha_1 y'_a + \ldots + \alpha_{n-1} y_a^{(n-1)} + \beta_0 y_b + \beta_1 y'_b + \ldots + \beta_{n-1} y_b^{(n-1)}$$

Eğer bu türden birçok $U_v(y)$, $v = 1,\ldots,m$ formları seçilir ve

$$U_v(y) = 0, \quad v = 1,\ldots,m \tag{2.2}$$

şartlarının $y \in C^n$ fonksiyonları tarafından sağlanması istenirse, bu şartlara y fonksiyonlarının sağlaması gereken *sınır şartları* denir.

D ile (2.2) formundaki sınır şartlarının özel bir sistemini sağlayan $y \in C^n$ fonksiyonlarının oluşturduğu kümeyi gösterelim. D nin C^n de bir lineer alt uzay olduğu açıktır ve eğer (2.2) şartları hiç yoksa veya tüm katsayıları sıfır ise o zamanda C^n ile çakışır.

Belirlenmiş bir $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ile (2.2) formundaki şartlarla tanımlanmış özel bir D alt uzayı verilsin. Her bir $y \in D$ için $u = \ell(y)$

fonksiyonunu karşılık getirelim. Bu bağıntı tanım kümesi D olan bir lineer operatördür ki biz bunu L ile göstereceğiz ve aşağıdaki gibi yazacağız

$$u = Ly.$$

L operatörüne, $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve (2.2) sınır şartları ile oluşturulan *diferansiyel operatör* denir.

Bu yolla herhangi bir diferansiyel ifadeden, (2.2) sınır şartlarının değişik seçimleriyle birçok diferansiyel operatör elde edilir. Eğer özel olarak (2.2) sınır şartları hiç yoksa o zaman tanım kümesi $D = C^n$ olan ve L_1 ile göstereceğimiz diferansiyel ifadeyi elde ederiz. Bu durumda L_1 aynı $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ile oluşturulmuş tüm diğer L operatörlerinin genişletilmişi olacaktır. Burada L_1 en geniş tanım kümesine sahip operatör değildir, ancak yukarıda bahsedilen tüm operatörler L_1 operatörünün kısıtlanışıdır.

2.1.4. Homojen Sınır-Değer Problemi

$$\ell(y) = 0 \tag{2.3}$$

$$U_v(y) = 0, \quad v = 1, 2, \ldots, m \tag{2.4}$$

şartlarını sağlayan $y \in C^n$ fonksiyonunun bulunması problemine *homojen sınır-değer problemi* denir. Eğer L, $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve (2.4) sınır şartları ile oluşturulan bir operatör ise, o zaman homojen sınır-değer problemi; L operatörünün D tanım kümesi içinde L yi sıfır yapacak bir y fonksiyonun bulunmasıdır.

Herhangi bir homojen sınır-değer probleminin en az bir $y = 0$ çözümünün var olduğu açıktır. Bu çözüme *aşikâr çözüm* denir. Homojen sınır-değer problemi aşikâr olmayan çözümlere de sahip olabilir.

Şimdi hangi şartlar altında homojen sınır-değer probleminin aşikâr olmayan çözüme sahip olduğunu bulmaya çalışalım.

$y_1, y_2, ... y_n$, $\ell(y) = 0$ diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsun. Bu durumda lineer diferansiyel denklemlerin bilinen teorisinden, $\ell(y) = 0$ denkleminin herhangi bir çözümü (bu aynı zamanda homojen sınır-değer probleminin de çözümüdür) $c_1, c_2, ..., c_n$ sabitler olmak üzere aşağıdaki formda yazılabilir.

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_3 + ... + c_n y_n \tag{2.5}$$

Bu sabitleri belirlemek için (2.5) çözümü (2.4) sınır şartlarında yerleştirilirse, aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\left.\begin{array}{ccccc} c_1 U_1\ \ y_1 & + c_2 U_1\ \ y_2 & + \cdots + c_n U_1\ \ y_n & = 0 \\ c_1 U_2\ \ y_1 & + c_2 U_2\ \ y_2 & + \cdots + c_n U_2\ \ y_n & = 0 \\ . & . & \cdots \quad . & . \\ c_1 U_m\ \ y_1 & + c_2 U_m\ \ y_2 & + \cdots + c_n U_m\ \ y_n & = 0 \end{array}\right\} \tag{2.6}$$

Şimdi bu denklem sisteminin katsayı matrisi olan aşağıdaki matrisin rankı r olsun.

$$U = \begin{bmatrix} U_1\ \ y_1 & U_1\ \ y_2 & \cdots & U_1\ \ y_n \\ U_2\ \ y_1 & U_2\ \ y_2 & \cdots & U_2\ \ y_n \\ . & . & \cdots & . \\ U_m\ \ y_1 & U_m\ \ y_2 & & U_m\ \ y_n \end{bmatrix}$$

Bu durumda $c_1, c_2, ..., c_n$ sabitleri için (2.6) denklem sisteminin tam olarak $(n - r)$ tane bağımsız çözümü olacaktır ve bunlar sınır-değer probleminin $(n - r)$ tane y çözümüne denk gelecektir.

Buradan aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

1) Eğer U matrisinin rankı r ye eşit ise homojen sınır-değer problemi $(n - r)$ tane lineer bağımsız çözüme sahiptir.

2) (a) Homojen sınır-değer problemi aşikâr olmayan çözüme sahip olması için gerekli ve yeterli şart, U matrisinin r rankının ℓ diferansiyel ifadenin n derecesinden küçük olmasıdır.

(b) $m < n$ için, homojen sınır-değer problemi her zaman aşikâr olmayan çözüme sahiptir.

(c) $m = n$ için, homojen sınır-değer probleminin aşikâr olmayan çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart U matrisinin determinantının (ki bu durumda kare matris oluşur) sıfır olmasıdır.

U matrisinin rankına sınır-değer probleminin *rankı* denir ve $y_1, y_2, \ldots y_n$ çözüm sisteminin seçimine bağlı değildir.

2.1.5. Eşlenik Operatörler

Aşağıdaki diferansiyel ifadeyi ele alalım.

$$\ell(y) = p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x)\, y$$

Burada $p_k(x)$, $k = 0,1,\ldots,n$, fonksiyonları $(n-k)$. mertebeye kadar $[a,b]$ aralığında sürekli türevlere sahip fonksiyonlar olsunlar. Ayrıca y ve z, $C^{(n)}$ de keyfi iki fonksiyon olsun. Bu durumda k defa kısmi integrasyon sonucunda aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\int_a^b p_{n-k}\bar{z}\, y^{(k)}\, dx = \Big[p_{n-k}\bar{z}\, y^{(k-1)} - \left(p_{n-k}\bar{z}\right)' y^{(k-2)} + \ldots$$

$$+(-1)^{k-1}\left(p_{n-k}\bar{z}\right)^{(k-1)} y\Big]_{x=a}^{x=b} + (-1)^k \int_a^b y \left(p_{n-k}\bar{z}\right)^{(k)} dx\,. \qquad (2.7)$$

Burada $\bar{z}$, z nin kompleks eşleniğidir. $k = n, n-1, \ldots, 0$ değerleri (2.7) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki formül elde edilir.

$$\int_a^b \ell(y)\,\bar{z}\,dx = P(\eta,\zeta) + \int_a^b y\,\overline{\ell^*(z)}\, dx \qquad (2.8)$$

Burada

$$\ell^*(z) = (-1)^n\left(\bar{p}_0 z\right)^{(n)} + (-1)^{n-1}\left(\bar{p}_1 z\right)^{(n-1)} + (-1)^{n-2}\left(\bar{p}_2 z\right)^{(n-2)} + \ldots + \bar{p}_n z \qquad (2.9)$$

ve $P\ \ \eta,\zeta$

$$\eta = \ y_a, y'_a, ..., y_a^{n-1}\ ;\ y_b, y'_b, ..., y_b^{n-1}$$

$$\zeta = \ z_a, z'_a, ..., z_a^{n-1}\ ;\ y_b, z'_b, ..., z_b^{n-1}$$

biçimindeki η ve ζ değişkenli bilineer formdur. (2.9) formülü ile tanımlanan $\ell^*\ \ z$ diferansiyel ifadesine $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin *eşleniği* ve (2.8) formülüne de *Lagrange formülü* denir. Bir diferansiyel ifadenin eşleniği ile ilgili aşağıdaki özellikler vardır.

$\ell(y)$ bir diferansiyel ifade olmak üzere

$$\ell^{**}(y) = \ell(y)$$

eşitliği doğrudur. Yani $\ell(y)$ ve $\ell^*(y)$ diferansiyel ifadeleri birbirinin eşleniğidir. λ herhangi bir sayı olmak üzere (2.9) denkleminden, aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$\ell_1 + \ell_2\ ^* = l_1^* + l_2^*$$

$$\lambda\ell\ ^* = \bar{\lambda}\ell^*$$

Eğer $\ell^* = \ell$ eşitliği sağlanıyor ise $\ell(y)$ diferansiyel ifadesine *özeşlenik* denir. Özeşlenik diferansiyel ifadelerin toplamı da özeşleniktir. Ayrıca özeşlenik diferansiyel ifadelerin herhangi bir reel sayı ile çarpımı da yine özeşleniktir.

Şimdi $U_1,...,U_m$, $\ y_a, y'_a, ..., y_a^{n-1}\ ; y_b, y'_b, ..., y_b^{n-1}$ değişkenlerini içeren lineer bağımsız formlar olsunlar. Eğer $m < 2n$ ise lineer bağımsız $2n$ tane $U_1, U_2, ..., U_{2n}$ formlarını elde etmek için bunlara $U_{m+1}, ...U_{2n}$ biçiminde başka formlar ekleyebiliriz.

Bu formlar lineer bağımsız olduğundan $y_a, y'_a, ..., y_a^{n-1}\ ; y_b, y'_b, ..., y_b^{n-1}$ değişkenleri bu formların lineer kombinasyonları olarak yazılabilir.

Bu açılımlar (2.8) Lagrange formülündeki $P\ \eta,\zeta$ bilineer formunda yerine yazılırsa, $P\ \eta,\zeta$ $U_1,U_2,...,U_{2m}$ değişkenli lineer homojen bir form olur. Dolayısıyla $U_1,U_2,...,U_{2n}$ değişkenlerinin $V_{2n},V_{2n-1},...,V_1$ ile göstereceğimiz $z_a,z_a',...,z_a^{n-1}$; $z_b,z_b',...,z_b^{n-1}$ değişkenli $2n$ tane katsayısı olacaktır. Sonuç olarak Lagrange formülü aşağıdaki biçimde elde edilecektir:

$$\int_a^b \ell\ y\ \overline{z}dx = U_1V_{2n} + U_2V_{2n-1} + ... + U_{2n}V_1 + \int_a^b y\overline{\ell^*\ z}\,dx \qquad (2.10)$$

Burada $V_1,V_2,...,V_{2n}$ formları lineer bağımsızdır.

$$V_1 = 0, V_2 = 0, ..., V_{2n-m} = 0 \qquad (2.11)$$

sınır şartlarına

$$U_1 = 0, U_2 = 0, ..., U_m = 0 \qquad (2.12)$$

orijinal *sınır şartlarının eşleniği* denir. Eğer sınır şartları, eşleniğine denk ise o zaman da bu sınır şartlarına *özeşleniktir* denir.

Şimdi L, $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve (2.12) sınır şartları ile üretilen bir operatör olsun. L^* ile göstereceğimiz, $\ell^*(y)$ diferansiyel ifadesi ve (2.11) sınır şartları ile üretilen operatöre L operatörünün *eşlenik operatörü* denir.

(2.10) formülü ile (2.11) ve (2.12) sınır şartlarından

$$\int_a^b Ly.\overline{z}dx = \int_a^b y.\overline{L^*z}dx$$

eşitliği L ve L^* operatörleri için ve L nin tanım kümesindeki her y ile L^* in tanım kümesindeki her z için sağlanır. Bu eşitlik

$$Ly, z\ =\ y, L^*z \qquad (2.13)$$

biçiminde de gösterilir. Eşlenik operatörlerin tanımından burada da yine

$$L^{**} = L$$

eşitliği vardır ve ayrıca $L^{*} = L$ ise bu operatöre *özeşlenik operatör* denir.

L operatörü özeşleniktir, ancak ve ancak bu operatör özeşlenik bir diferansiyel ifadeden ve özeşlenik bir sınır şartından üretilir. Özeşlenik bir operatör için (2.13) formülü aşağıdaki biçimde olur.

$$Ly,z \ = \ y,Lz$$

2.2. DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN ÖZDEĞERLERİ VE ÖZFONKSİYONLARI

L operatörünün tanım kümesinde bulanan $y \not\equiv 0$ fonksiyonu için

$$Ly = \lambda y \tag{2.14}$$

eşitliği sağlanıyor ise λ değerine L operatörünün *özdeğeri,* y fonksiyonuna da λ özdeğerine karşılık gelen *özfonksiyon* denir.

L operatörü $\ell \;\; y$ diferansiyel ifadesi ve

$$U_1 \;\; y \;\; = 0,\ldots,U_n \;\; y \;\; = 0 \tag{2.15}$$

sınır şartlarından üretilsin. y fonksiyonu L operatörünün tanım kümesinde olması gerektiğinden (2.15) şartlarını da sağlamalıdır. Ayrıca $Ly = \ell \;\; y$ dir ve buradan (2.14) eşitliği aşağıdaki denkleme denktir.

$$\ell \;\; y \;\; = \lambda y \tag{2.16}$$

Dolayısıyla L operatörünün özdeğerleri öyle λ değerleridir ki, bu değerler için

$$\ell \;\; y \;\; = \lambda y, \quad U_v \;\; y \;\; = 0, \quad v = 1,2,\ldots,m \tag{2.17}$$

homojen sınır değer problemi aşikâr olmayan çözümlere sahiptir ve her bir aşikâr olmayan çözüm de λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyondur.

Aynı özdeğere karşılık gelen özfonksiyonların lineer kombinasyonları da yine aynı özdeğere karşılık gelen bir özfonksiyondur.

Verilen bir λ değeri için (2.16) homojen denkleminin lineer bağımsız çözümlerinin sayısı en fazla n tane olabileceğinden, aynı özdeğere karşılık gelen özfonksiyonların tümü boyutu $\leq n$ olan sonlu boyutlu bir uzay oluşturacaktır. Bu uzayın boyutu tabiî ki verilmiş bir λ değeri için (2.17) sınır değer probleminin lineer bağımsız çözümlerinin sayısıdır. Bu sayıya *özdeğerin katı* denir.

Özdeğerleri belirlemek için bazı şartlar bulmaya çalışacağız. Bu amaçla

$$y_1\ \ x,\lambda\ \ ,y_2\ \ x,\lambda\ \ ,\cdots,y_n\ \ x,\lambda \tag{2.18}$$

ile (2.16) diferansiyel denkleminin aşağıdaki başlangıç şartlarını sağlayan temel çözümlerini gösterelim:

$$y_j^{(v-1)}\ \ a,\lambda\ \ =\begin{cases}0, & j\neq v\\ 1, & j=v\end{cases}\qquad j,v=1,2,\ldots,n \tag{2.19}$$

Diferansiyel denklemlerin genel teoremlerinden, a,b deki her x için (2.18) fonksiyonları λ ya göre tam fonksiyonlarıdır. Bölüm 3.1. in sonuçlarından (2.17) sınır değer problemi aşikâr olmayan çözüme sahiptir, ancak ve ancak

$$U=\begin{bmatrix} U_1\ \ y_1 & \ldots & U_1\ \ y_n\\ . & & .\\ U_n\ \ y_1 & \ldots & U_m\ \ y_n\end{bmatrix}$$

matrisinin r rankı n den küçüktür. Eğer $m<n$ ise, $r<n$ ve bu durumda (2.17) sınır değer problemi herhangi bir λ değeri için aşikâr olmayan çözüme sahiptir. Dolayısıyla eğer $m<n$ ise herhangi bir λ değeri özdeğerdir.

Eğer $m\geq n$ ise U matrisinin rankının n den küçük olması için gerekli ve yeterli koşul onun bütün n mertebeli minörlerinin sıfır olmasıdır. Ancak bu minörlerin her biri λ nın tam analitik fonksiyonlarıdır, dolayısıyla aşağıdaki durumlar söz konusudur:

1) U matrisinin $n.$ mertebeden minörlerinin hepsi sıfıra denktir. Bu durumda daha önceki sonuçtan, herhangi bir λ değeri özdeğerdir.

2) U matrisinin en az bir $n.$ mertebeden minörü sıfıra denk değil ise bu durumda da sadece bu minörlerin sıfırları özdeğer olabilir ve ayrıca özel bir minörün sıfırı eğer U nun diğer bütün $n.$ mertebeden sıfır olmayan minörlerini özdeş sıfır yapıyorsa özdeğer olabilir.

Sıfır olmayan bir tam fonksiyon en fazla sayılabilir çoklukta sıfıra sahiptir (hepsi sahip olmak zorunda değil) ve bu sıfırlar sonlu bir limit noktasına sahip değildir. Dolayısıyla 2. durumda, L operatörü en fazla sayılabilir çoklukta özdeğere sahiptir (hepsine sahip olmayabilir) ve bu özdeğerler sonlu bir limit noktasına sahip değildir. Sonuç olarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.2.1. Herhangi bir L operatörü için iki durum söz konusudur:

1) Her λ sayısı L nin özdeğeridir.

2) Operatör en fazla sayılabilir çoklukta özdeğere sahiptir, (özel durumda hepsi değil) ve bu özdeğerler sonlu bir limit noktasına sahip değildir. [19]

$m = n$ durumunu ise özel olarak inceleyelim. Bunun için

$$\Delta\ \lambda\ = \begin{bmatrix} U_1\ y_1 & \dots & U_1\ y_n \\ . & & . \\ U_n\ y_1 & \dots & U_m\ y_n \end{bmatrix}$$

olsun. Daha önce de belirtildiği üzere burada yine $\Delta\ \lambda$, λ nın tam, analitik fonksiyonudur ve L operatörünün (veya $Ly = 0$ sınır değer probleminin) *karakteristik determinantı* olarak adlandırılır. Bununla ilgili olarak aşağıdaki teoremler doğrudur:

Teorem 2.2.2. L operatörünün özdeğerleri $\Delta \lambda$ fonksiyonun sıfırlarıdır. Eğer $\Delta \lambda$ sıfıra denk ise, o zaman λ nın herhangi bir değeri L operatörünün özdeğerleridir. Ancak $\Delta \lambda$ sıfıra denk değil ise L operatörü sayılabilir sayıda özdeğere sahiptir ve bu özdeğerler sonlu bir limit noktasına sahip değildir. [19]

Herhangi bir λ değeri $\Delta \lambda$ fonksiyonunun katlı sıfırı olabilir. Bu durumda

Teorem 2.2.3. Eğer λ_0, $\Delta \lambda$ karakteristik denkleminin v katlı sıfırı ise, o zaman λ_0 özdeğerinin katı v den büyük olamaz. [19]

Teorem 2.2.4. Eğer λ_0, $\Delta \lambda$ karakteristik denklemin basit sıfırı ise, o zaman L operatörünün λ_0 özdeğeri tek katlıdır. [19]

Bir özdeğer $\Delta \lambda$ karakteristik denkleminin basit sıfırı ise bu özdeğere *basit özdeğer* denir.

2.3. DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN SPEKTRUMU

Bu bölümde λ kompleks sayı olmak üzere $A_\lambda = A - \lambda I$ operatörler ailesini ele alacağız. E_λ ile, λ özdeğerine karşılık gelen

$$Ax = \lambda x$$

denkleminin tüm çözümlerinin oluşturduğu alt uzayı gösterelim. Öncelikle A özeşlenik operatörün özdeğerlerinin bazı özelliklerini verelim.

1) Eğer x, λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon ise, o zaman

$$Ax, x = \lambda \|x\|^2$$

olur ve özel olarak $\|x\| = 1$ ise

$$Ax, x = \lambda$$

elde edilir. Bu da aşağıdaki sonuçları doğurur:

2) A özeşlenik operatörün özdeğerleri reel sayılardır.

3) Farklı özdeğerlere ait özfonksiyonlar diktir.

4) G_λ ile A_λ operatörünün değer kümesini gösterelim. Yani

$$y = A_\lambda x$$

eşitliğini sağlayan tüm $y \in H$ fonksiyonlarının oluşturduğu kümeyi gösterelim. $\bar{G}_\lambda$ alt uzayı E_λ nın ortogonal tümleyenidir. Yani H Hilbert uzayı olmak üzere

$$H = \bar{G}_\lambda + E_\lambda \tag{2.20}$$

dır. Eğer $y \in G_\lambda$ ve $x \in E_\lambda$ ise, o zaman

$$y = A_\lambda x', \quad A_\lambda x = \theta$$

olur ki bu da

$$y,x \;=\; A_\lambda x',x \;=\; x',A_\lambda x \;=\; x',\theta \;= 0$$

demektir. Eğer $y \in \bar{G}_\lambda$ ise o zaman $y_n \in G_\lambda$ olmak üzere $y = \lim_n y_n$ dir ve tüm $x \in E_\lambda$ için $y_n, x \;= 0$ olduğundan

$$y,x \;= \lim_n \; y_n, x \;= 0$$

olur. Tersine x, tüm $y \in G_\lambda$ için

$$y,x \;= 0$$

şartını sağlayan bir eleman olsun. Keyfi bir $x_1 \in H$ için $A_\lambda x_1 \in G_\lambda$ olur ve buradan

$$A_\lambda x_1, x \;= 0 \text{ ve } \; x_1, A_\lambda x \;= 0$$

olur. x_1 keyfi olduğundan $A_\lambda x = \theta$ elde ederiz. Yani x, E_λ dadır.

Teorem 2.3.1. Eğer λ, A özeşlenik operatörün özdeğeri değil ise, o zaman (2.20) eşitliği aşağıdaki gibi olur, [20].

$$H = \bar{G}_\lambda$$

Şimdi aşağıdaki denklemi ele alalım.

$$Ax - \lambda x = y \text{ veya } (A - \lambda I)x = y \qquad (2.21)$$

$A - \lambda I$ operatörü verilmiş bir λ değeri için $(A - \lambda I)^{-1} = R_\lambda$ tersine sahip olsun. R_λ ya (2.21) denkleminin *resolvent kümesi* denir ve σ' ile gösterilir. Bir λ değeri için eğer (2.21) denklemi her y için aşikâr olmayan çözüme sahip ise o zaman bu λ değerine (2.21) denkleminin (veya A nın) *düzgün noktası* denir.

$R_\lambda = A_\lambda^{-1} = (A - \lambda I)^{-1}$ operatörünün var olmadığı λ değerlerinin oluşturduğu kümeye ise *spektrum kümesi* denir ve σ ile gösterilir. Bu durumda, tüm özdeğerler spektruma aittir. Ancak spektrumun her noktası özdeğer değildir.

A_λ^{-1} sınırlı operatörünün varlığı için gerekli ve yeterli şart H den kendi üzerine bire-bir örten bir dönüşüm olmasıdır, yani

$$G = \bar{G}_\lambda = H$$

Teorem 2.3.2. λ, özeşlenik A operatörünün düzgün noktası olması için gerekli ve yeterli şart tüm $x \in E$ değerleri için

$$\|A_\lambda x\| = \|Ax - \lambda x\| \geq C\|x\|$$

olacak biçimde bir C pozitif sabitinin bulunmasıdır, [20].

Teorem 2.3.3. A**,** D_A üzerinde tanımlı bir operatör, σ da bu operatörün spektrum kümesi olsun. Eğer her n için $\|f_n\| = 1$, ve $n \to \infty$ iken $f_n \to 0$ ve $\|(A - \lambda I)f_n\| \to 0$ olacak şekilde D_A da bir f_n sonsuz dizisi varsa o zaman λ, σ' resolvent kümesi içindedir. , [20].

Teorem 2.3.4. $\lambda = \alpha + \beta i$ ($\beta \neq 0$) kompleks sayıları özeşlenik A operatörünün düzgün noktalarıdır, [20].

Teorem 2.3.5. Özeşlenik A operatörünün spektrumu reel eksendeki m, M aralığında bulunur. Burada $M = \sup_{\|x\|=1}(Ax, x)$ ve $m = \inf_{\|x\|=1}(Ax, x)$ dir, [20].

Teorem 2.3.6. M ve m spektrumun noktalarıdır, [20].

Sonuç 2.3.1. Her özeşlenik operatör boş olmayan spektruma sahiptir, [20].

2.4. LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖR İÇİN GREEN FONKSİYONU

2.4.1. Ters Operatörün Genel Tanımı

A ve B iki operatör olsun. Eğer B operatörünün D_B tanım kümesi, A operatörünün R_A değer kümesi ile çakışıyor ve $\forall x \in D_A$ için

$$B(Ax) = x$$

eşitliği sağlanır ise, B operatörüne A *operatörünün tersi* denir.

Teorem 2.4.1. A operatörü terse sahip olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $Ax = 0$ denkleminin sadece $x = 0$ aşikâr çözümüne sahip olmasıdır. [19]

2.4.2. Green Fonksiyonu Anlamında Diferansiyel Operatörün Tersi

L operatörü için Green fonksiyonu, aşağıdaki şartları sağlayan $G(x, \zeta)$ fonksiyonu olarak tanımlanır:

1) $G(x, \xi)$, (a, b) aralığındaki tüm x ve ξ ler için sürekli ve $(n-2)$. mertebeye kadar x e göre sürekli türevlere sahip,

2) (a, b) aralığındaki sabit bir ξ için $G(x, \xi)$, $(n-1)$. mertebeden sürekli türevlere sahip ve n. türev x'e göre (a, ξ) ve (ξ, b) biçimindeki her bir aralıkta sürekli, $(n-1)$. türevi ise $x = \xi$ de sıçrama sürekliliğine sahip ve sıçrama miktarı $\frac{1}{p_0(\xi)}$ dir. Yani

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi + 0, \xi) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi - 0, \xi) = \frac{1}{p_0(\xi)}$$

3) Her bir (a,ξ) ve (ξ,b) aralığında x' in fonksiyonu olarak düşünülen $G(x,\xi)$, $l(G) = 0$ denklemini ve $U_\nu(G) = 0$, $\nu = 1,2,\ldots,n$ sınır şartlarını sağlar.

Teorem 2.4.2. Eğer $Ly = 0$ sınır-değer problemi sadece aşikâr çözüme sahip ise, o zaman L operatörü bir ve yalnız bir Green fonksiyonuna sahiptir. [19]

Teorem 2.4.3. Eğer $Ly = 0$ denklemi sadece aşikâr çözüme sahip ise, o zaman $[a,b]$ aralığında sürekli herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için, $Ly = f$ denkleminin çözümü vardır ve bu çözüm aşağıdaki biçimde yazılabilir. [19]

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi)\, d\xi$$

Burada $G(x,\xi)$ ye L operatörü için *Green fonksiyonu* denir.

2.4.3. $L - \lambda 1$ Operatörü İçin Green Fonksiyonu

L, $l(y)$ ifadesi ve $U_\nu(y) = 0$, $\nu = 1,2,\ldots,n$ sınır şartları ile verilen bir operatör olsun. Burada $L - \lambda 1$ operatörünün Green fonksiyonu için bir açılım bulmak istiyoruz. Başka bir ifade ile $L - \lambda 1$ operatörünün tersinin formunu bulmak istiyoruz. $y_\nu = y_\nu(x,\lambda)$, $\nu = 1,2,\ldots,n$ ile $l(y) = \lambda y$ denkleminin (2.19) başlangıç şartlarını sağlayan çözüm sistemini gösterelim.

$$l(y) - \lambda y = f$$

denklemi için sabitlerin değişimi metodu kullanılarak

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi,\lambda) f(\xi)\, d\xi \qquad (2.22)$$

çözümü elde edilir. Burada

$$G(x,\xi,\lambda)=\frac{(-1)^{n}}{\Delta(\lambda)}H(x,\xi,\lambda) \tag{2.23}$$

ve

$$W=\begin{vmatrix} y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \\ y_1^{n-2} & y_2^{n-2} & \cdots & y_n^{n-2} \\ . & . & \cdots & . \\ y_1 & y_2 & & y_n \end{vmatrix}$$

$$g(x,\xi)=\pm\frac{1}{2W(\xi)}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1^{n-2}(\xi) & y_2^{n-2}(\xi) & \cdots & y_n^{n-2}(\xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ y_1(\xi) & y_2(\xi) & \cdots & y_n(\xi) \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \cdots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \cdots & U_2(y_n) \\ . & . & \cdots & . \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \cdots & U_n(y_n) \end{vmatrix} \tag{2.24}$$

$$H(x,\zeta,\lambda)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) & g(x,\xi) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & \cdots & U_1(y_n) & U_1(g) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \cdots & U_2(y_n) & U_2(g) \\ . & . & \cdots & . & . \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \cdots & U_n(y_n) & U_n(g) \end{vmatrix} \tag{2.25}$$

dir. Eğer λ, L operatörünün özdeğeri değil ise, o zaman $\Delta(\lambda)\neq 0$ olur ve bu da (2.22) ve (2.23) formüllerini anlamlı kılar. (2.22) formülü gösterir ki $G(x,\xi,\lambda)$ $L-\lambda 1$ operatörünün Green fonksiyonudur. Buradan $L-\lambda 1$ operatörünün $G(x,\xi,\lambda)$ Green fonksiyonu (2.22), (2.23), (2.24) ve (2.25) formülleri ile elde edilir.

2.4.4. $L-\lambda 1$ Operatörünün Green fonksiyonunun Analitiklik Durumu

Yukarıda tanımlanan $\Delta(\lambda)$ ve $H(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonları λ parametresinin tam, analitik fonksiyonlarıdır. Böylece (2.23) den denilebilir ki; $L-\lambda 1$ operatörünü için $G(x,\xi,\lambda)$ Green fonksiyonu λ parametresinin meremorf fonksiyonudur ve onun kutup noktaları sadece operatörün özdeğerleri olabilirler.

λ_0, $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun basit sıfırı olsun. O zaman λ_0, $G(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonunun da sadece basit kutbu olabilir ve $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun her λ_0 basit sıfırı için

$$G(x,\xi,\lambda) = -\frac{y_0(x)\,\overline{z_0(\xi)}}{(\lambda-\lambda_0)\displaystyle\int_a^b y_0(\xi)\,\overline{z_0(\xi)}\,d\xi} + G_1(x,\xi,\lambda)$$

eşitliği yazılabilir. Burada $G_1(x,\xi,\lambda)$, λ_0 ın komşuluğunda düzenlidir, [19].

2.5. ÖZFONKSİYONLAR CİNSİNDEN AÇILIM FORMÜLÜ

2.5.1. Fourier Metodunun Temeli

Kısmi diferansiyel denklemlerin Fourier metoduyla çözümü bizi ‘verilen fonksiyonun diferansiyel denklemin özfonksiyonları cinsinden açılım formülünü elde etmek’ gibi çok önemli bir problemle karşı karşıya bırakmaktadır. Örneğin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + p_1(x)\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} + \cdots + p_n(x)\,u, \quad a \le x \le b \tag{2.26}$$

denkleminin

$$u\big|_{t=0} = f(x)\;; \quad \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{t=0} = \varphi(x) \tag{2.27}$$

başlangıç şartlarını ve

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\alpha_{j\nu}\left(\frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu}\right)_{x=a} + \sum_{\nu=0}^{n-1}\beta_{j\nu}\left(\frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu}\right)_{x=b} = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{2.28}$$

sınır şartlarını sağlayan çözümünü bulalım. Bunun için (2.26) denkleminin (2.28) sınır şartlarını sağlayan çözümünü aşağıdaki formda arayalım:

$$u = y(x)\left(A\cos pt + B\sin pt\right) \tag{2.29}$$

Bu çözümü (2.26) ve (2.28) de yerine yazarsak

$$\ell(y) \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x)\,y = -p^2 y \tag{2.30}$$

diferansiyel denklemini ve

$$U_j(y) \equiv \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_{j\nu} y_a^{(\nu)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \beta_{j\nu} y_b^{(\nu)} = 0 \tag{2.31}$$

sınır şartlarını elde ederiz.

Şimdi eğer $y \not\equiv 0$ ise, o zaman y (2.30), (2.31) sınır değer probleminin $-p^2$ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonudur. Bu problemin özdeğerleri

$$-p_1^2, -p_2^2, -p_3^2, \ldots$$

ve bunlara karşılık gelen özfonksiyonları da

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots$$

olsun. Burada her bir özdeğerin katı kendisine ait lineer bağımsız özfonksiyon sayısı kadardır. Bu durumda

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)\left(A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t\right)$$

sonsuz serisi, en azından biçimsel olarak, (2.26) denklemini ve (2.28) sınır şartlarını sağlar. Dolayısıyla bu çözüm başlangıç şartlarını da sağlamak zorundadır. Buradan ilk başlangıç şartından

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n(x) \tag{2.32}$$

elde edilir. Bu denklem verilmiş bir $f(x)$ fonksiyonunun, sınır-değer probleminin özfonksiyonları cinsinden seri açılımını ifade eder.

Buradan Fourier metodunun temel sorunu ortaya çıkar ki o da şudur: Hangi şartlar altında verilmiş bir $f(x)$ fonksiyonunun, ele alınan sınır-değer probleminin özfonksiyonları cinsinden seri açılımı yapılabilir.

Bu sorunun cevabı özeşlenik operatörler ($\ell(y)$ ifadesi ve $U_j(y)=0$, $j=1,2,\ldots,n$ sınır şartları özeşlenik olan bir operatör) için kolaydır:

Teorem 2.5.1. Özeşlenik diferansiyel operatörün tanım kümesinde bulunan herhangi bir fonksiyon, bu operatörün özfonksiyonları cinsinden genelleştirilmiş düzgün yakınsak Fourier serisine sahiptir. [19]

Sonuç 2.5.1. Özeşlenik diferansiyel operatörün özfonksiyonları $L_2(a,b)$ de tam sistem oluşturur. [19]

Teorem 2.5.2. Düzgün sınır şartları ile üretilmiş L diferansiyel operatörünün Green fonksiyonu

$$G(x,s)=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{H_\nu(x,\xi)}{\lambda_\nu}$$

biçiminde düzgün yakınsak seri açılımına sahiptir. Burada $H_\nu(x,\xi)$, $G(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonunun λ_ν kutup noktasındaki rezidüsüdür. [19]

Teorem 2.5.3. Eğer $\ell(y)=\dfrac{d^n y}{dx^n}$ diferansiyel ifadesi ve düzgün sınır şartları ile üretilmiş L özeşlenik operatörünün tüm özdeğerleri Δ fonksiyonunun ((2.24) denklemine bakınız) basit sıfırları ise, o zaman onun Green fonksiyonu aşağıdaki düzgün yakınsak seri açılımına sahiptir.

$$G(x,s)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{y_\nu(x)\,\overline{z}_\nu(x)}{\lambda_\nu}$$

Burada $y_v(x)$ ve $z_v(x)$, sırasıyla L ve L^* operatörlerinin λ_v ve $\overline{\lambda}_v$ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlarıdır. [19]

Teorem 2.5.4. L, $\ell(y) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ diferansiyel ifadesi ve düzenli sınır şartları ile üretilmiş, özeşlenik operatör ve bu operatörün tüm özdeğerleri Δ fonksiyonunun basit sıfırları olsun. O zaman L operatörünün tanım kümesinde bulunan herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki biçimde özfonksiyonlar cinsinden yakınsak bir seri açılımına sahiptir.

$$f(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v y_v(x),$$

$$\alpha_v = \int_0^1 f(\xi) z_v(\xi)\, d\xi$$

Burada yine $y_v(x)$ ve $z_v(x)$, sırasıyla L ve L^* operatörlerinin λ_v ve $\overline{\lambda}_v$ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlarıdır. [45]

2.5.2. Sturm-Liouville Açılımı

$q(x)$, (a,b) aralığının her noktasında sürekli x in reel bir fonksiyonu olmak üzere

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (\lambda - q(x))y = 0 \tag{2.33}$$

denklemini ele alalım. (a,b) nin sonlu aralık ve $x \to a$, $x \to b$ iken $q(x)$ in sonlu olması durumunda bu denklem klasik Sturm-Liouville diferansiyel denklemi olarak adlandırılır.

Şimdi $\theta(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ (2.33) denkleminin aşağıdaki şartları sağlayan çözümleri olsun:

$$\left.\begin{aligned} \theta(x,\lambda) &= \sin\alpha, & \varphi'(x,\lambda) &= -\cos\alpha \\ \theta'(x,\lambda) &= \sin\beta, & \varphi(x,\lambda) &= -\cos\beta \end{aligned}\right\} \tag{2.34}$$

Böylece $W(\theta,\varphi)$, $\theta(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonlarının wronskiyeni olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}W(\theta,\varphi) &= \theta(x)\varphi''(x)-\varphi(x)\theta''(x)\\ &= (q(x)-\lambda)\theta(x)\varphi(x)-(q(x)-\lambda)\varphi(x)\theta(x)\\ &= 0\end{aligned}$$

olur. Yani x den bağımsız olan $W(\theta,\varphi)$ ifadesi sadece λ nın bir tam fonksiyonudur ve $W(\theta,\varphi)=\omega(\lambda)$ ile gösterilir. Şimdi aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım.

$$\Phi(x,\lambda)=\frac{\varphi(x,\lambda)}{\omega(\lambda)}\int_a^x \theta(y,\lambda)f(y)\,dy+\frac{\theta(x,\lambda)}{\omega(\lambda)}\int_x^b \varphi(y,\lambda)f(y)\,dy$$

Eğer $f(x)$ sürekli bir fonksiyon ise her λ değeri için $\Phi(x,\lambda)$, (2.33) denklemini ve

$$\left.\begin{aligned}\Phi(a,\lambda)\cos\alpha+\Phi'(a,\lambda)\sin\alpha=0\\ \Phi(b,\lambda)\cos\beta+\Phi'(b,\lambda)\sin\beta=0\end{aligned}\right\} \tag{2.35}$$

sınır şartlarını sağlar.

Şimdi $\omega(\lambda)$ nın sadece reel eksen üzerindeki $\lambda_0,\lambda_1,\ldots$ basit sıfırlarına sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\theta(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ nın wronskiyeni sıfırdır ve dolayısıyla $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonu $\theta(x,\lambda_n)$ fonksiyonunun sabit bir katıdır.

$$\varphi(x,\lambda_n)=k_n\theta(x,\lambda_n) \tag{2.36}$$

Sınır şartlarından k_n ne 0 ne de ∞ olur. Buradan $\Phi(x,\lambda)$, $\lambda=\lambda_n$ noktalarında

$$\frac{k_n}{\omega'(\lambda)}\theta(x,\lambda_n)\int_a^b \theta(y,\lambda_n)f(y)\,dy$$

rezidüsüne sahiptir. Sonuç olarak yukarıdaki işlemlerden açılım formülü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k_n}{\omega'(\lambda)}\theta(x,\lambda_n)\int_a^b\theta(y,\lambda_n)f(y)\,dy \tag{2.37}$$

Eğer biz $\theta_0(x,\lambda)$ ve $\varphi_0(x,\lambda)$ gibi (2.33) un iki lineer bağımsız çözümlerleriyle başlar ve $\omega_0(\lambda)=W(\theta_0,\varphi_0)$ yazarsak, o zaman

$$\theta(x,\lambda)=\frac{\theta_0(x)\left(\varphi_0(a)\cos\alpha+\varphi_0'(a)\sin\alpha\right)-\varphi_0(x)\left(\theta_0(a)\cos\beta+\theta_0'(a)\sin\alpha\right)}{\omega_0(\lambda)}$$

olur ve $\varphi(x,\lambda)$ da a,α nın b,β ile yer değiştirilmesi ile bulunur. Buradan

$$\frac{\theta_0(b,\lambda_n)\cos\beta+\theta_0'(b,\lambda_n)\sin\beta}{\theta_0(a,\lambda_n)\cos\alpha+\theta_0'(a,\lambda_n)\sin\alpha}=\frac{\varphi_0(b,\lambda_n)\cos\beta+\varphi_0'(b,\lambda_n)\sin\beta}{\varphi_0(a,\lambda_n)\cos\alpha+\varphi_0'(a,\lambda_n)\sin\alpha}=k_n$$

bulunur ve yukarıdaki işlemler yapılır. [15]

2.6. BAZI TANIM ve TEOREMLER

$q(x)$, x in her reel değeri için tanımlı (reel veya kompleks) değerli bir fonksiyon olsun. Ayrıca $q(x)$, a periyotlu periyodik ve her sonlu aralıkta parçalı sürekli olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda tüm x değerleri için

$$q(x+a)=q(x)$$

dir ve eğer p, $0<p<a$ olan bir sayı olmak üzere en az bir I reel aralığı vardır ki $x\in I$ için $q(x+p)\neq q(x)$ dir.

Şimdi $q(x)$ yukarıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyon ise o zaman

$$y''+q(x)y=0 \tag{2.38}$$

diferansiyel denklemi

$$y_1(0)=1,\quad y_1'(0)=0,\quad y_2(0)=0,\quad y_2'(0)=1$$

şartlarıyla bir tek şekilde belirlenecek iki sürekli, diferansiyellenebilir $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ çözümlerine sahiptir. Floquet teoreminin ifadesini vermeden önce (2.38) denklemi ile ilgili karakteristik denklem ve karakteristik üst gösterimlerini tanımlayalım. (2.38) denkleminin karakteristik denklemi

$$\rho^2 - \left[y_1(a) + y_2'(a)\right]\rho + 1 = 0 \tag{2.39}$$

biçimindedir ve karakteristik üstü de

$$\exp(i\alpha a) = \rho_1, \quad \exp(-i\alpha a) = \rho_2$$

denklemlerini sağlayan α sayısıdır. Burada ρ_1 ve ρ_2 (2.39) karakteristik denkleminin kökleridir.

Teorem 2.6.1. (Floquet Teoremi)

1) Eğer (2.39) karakteristik denkleminin ρ_1 ve ρ_2 kökleri ayrık ise, o zaman (2.38) denklemi aşağıdaki şekilde iki lineer bağımsız çözüme sahiptir.

$$f_1(x) = e^{i\alpha a} p_1(x), \quad f_2(x) = e^{-i\alpha a} p_2(x)$$

Burada $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ a periyotlu fonksiyonlardır.

2) Eğer $\rho_1 = \rho_2$ ise, o zaman (2.38) denklemi a periyotlu aşikâr olmayan $p(x)$ çözüme sahiptir. $y(x)$, $p(x)$ çözümü ile lineer bağımsız olan diğer çözüm olsun. Bu durumda

$$y(x+a) = \rho_1 y(x) + kp(x), \quad k \, sabit$$

olur ve $k = 0$

$$y_1(a) + y_2(a) = \pm 2, \; y_2(a) = 0, \; y_1'(a) = 0$$

eşitliklerine denktir.

Tanım 2.6.1. (Kararlılık ve Kararsızlık Aralıkları) Herhangi bir diferansiyel denklemin tüm çözümleri $-\infty,\infty$ da sınırlı ise, bu denkleme *kararlı* ve tüm aşikâr olmayan çözümleri $-\infty,\infty$ da sınırlı değil ise *kararsızdır* denir. Eğer bu denklemin en az bir aşikâr olmayan çözümü $-\infty,\infty$ da sınırlı ise, o zaman da bu denkleme *şartlı kararlıdır* denir.

BÖLÜM 3

PERİYODİK KATSAYILI STURM-LIOUVILLE OPERATÖRLER DEMETİNİN SPEKTRAL ANALİZİ

3.1. FLOQUET TEORİSİ

Aşağıdaki diferansiyel operatörü düşünelim.

$$y'' + [\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)]y = 0, \quad (-\infty < x < \infty) \tag{3.1}$$

Burada $p(x)$ ve $q(x)$ $(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlı, reel değerli ve a, $(a>0)$ periyotlu fonksiyonlardır. Yani

$$p(x+a) = p(x), \quad q(x+a) = q(x) \tag{3.2}$$

dir. Ayrıca kabul edelim ki $q(x)$, $\left[0,a\right]$ aralığında integrallenebilir olsun ve λ kompleks parametre olsun.

Bu bölümde herhangi bir λ kompleks parametresi için bu denklemin çözüm uzayının kuruluşu için gerekli olan Floquet Teorisini uygulayacağız. Bu uygulama $p(x) \equiv 0$ için [21] ve [23] de yapılmıştır. $p(x) \not\equiv 0$ durumuna genelleşmesi ise bir sonraki bölümde verilecektir.

Şimdi bu denklemi sağlayan $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ çözümünü ele alalım. $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının, periyodik olmasından $y(x+a)$ da bu denklemin çözümüdür. Ancak genellikle $y(x) \not\equiv y(x+a)$ dır. Şimdi göstereceğiz ki öyle bir $\rho = \rho(\lambda)$ sayısı vardır ki (3.1) denkleminin (3.2) koşullarını sağlayan herhangi bir $\psi(x,\lambda)$ çözümü için

$$\psi(x+a,\lambda) = \rho\psi(x,\lambda), \quad (-\infty < x < \infty) \tag{3.3}$$

eşitliği sağlanır. (3.1) denkleminin aşağıdaki şartları sağlayan temel çözümünü $C(x,\lambda)$ ve $S(x,\lambda)$ ile gösterelim.

$$C(0,\lambda)=S'(0,\lambda)=1,\quad C'(0,\lambda)=S(0,\lambda)=0 \tag{3.4}$$

Bu durumda (3.1) denkleminin genel çözümü

$$\psi(x,\lambda)=\alpha_1 C(x,\lambda)+\alpha_2 S(x,\lambda) \tag{3.5}$$

biçimindedir. Burada $C(x+a,\lambda)$ ve $S(x+a,\lambda)$'da (3.1)'in çözümleri olduğundan

$$\begin{aligned} C(x+a,\lambda)&=a_{11}C(x,\lambda)+a_{12}S(x,\lambda)\\ S(x+a,\lambda)&=a_{21}C(x,\lambda)+a_{22}S(x,\lambda) \end{aligned} \tag{3.6}$$

elde edilir. Burada (3.4) koşulları kullanılır ve $x=0$ alınırsa

$$\begin{aligned} C(a,\lambda)&=a_{11}C(0,\lambda)+a_{12}S(0,\lambda)\\ S(a,\lambda)&=a_{21}C(0,\lambda)+a_{22}S(0,\lambda) \end{aligned}$$

olur ve katsayılar

$$\begin{aligned} a_{11}&=C(a,\lambda),\quad a_{12}=C'(a,\lambda)\\ a_{21}&=S(a,\lambda),\quad a_{22}=S'(a,\lambda) \end{aligned} \tag{3.7}$$

biçiminde bulunmuş olur. (3.6) yı kullanarak (3.5) denklemi (3.3) de yerine yazılırsa,

$$\psi(x+a,\lambda)=\rho[\alpha_1 C(x,\lambda)+\alpha_2 S(x,\lambda)]$$

$$\alpha_1 C(x+a,\lambda)+\alpha_2 S(x+a,\lambda)=\rho[\alpha_1 C(x,\lambda)+\alpha_2 S(x,\lambda)]$$

$$\alpha_1[a_{11}C(x,\lambda)+a_{12}S(x,\lambda)]+\alpha_2[a_{21}C(x,\lambda)+a_{22}S(x,\lambda)]=\rho[\alpha_1 C(x,\lambda)+\alpha_2 S(x,\lambda)]$$

$$\begin{aligned} [\alpha_1(a_{11}-\rho)+\alpha_2 a_{21}]C(x,\lambda)&=0\\ [\alpha_1 a_{12}+\alpha_2(a_{22}-\rho)]S(x,\lambda)&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}-\rho & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\rho\end{bmatrix}=0$$

denklemin α_1 ve α_2 cinsinden matris gösterimi bulunur ve aşikar olmayan çözümün varlığı için,

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

olması gerekir. Buradan

$$(a_{11}-\rho)(a_{22}-\rho)-a_{12}a_{21}=0$$

$$\rho^2-[a_{11}+a_{22}]\rho+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$$

$$S'(a,\lambda)]\rho+C(a,\lambda)S'(a,\lambda)-C'(a,\lambda)S(a,\lambda)=0 \tag{3.8}$$

bulunur. $C(x,\lambda)$ ve $S(x,\lambda)$ (3.1)'in çözümleri olduğundan (3.4) koşulları kullanılırsa

$$W[C(x,\lambda),S(x,\lambda)]=C(x,\lambda)S'(x,\lambda)-C'(x,\lambda)S(x,\lambda)=1 \tag{3.9}$$

bulunur. (3.8) ve (3.9) dan

$$\rho^2-[C(a,\lambda)+S'(a,\lambda)]\rho+1=0 \tag{3.10}$$

elde edilir. (3.10) denklemi her zaman $\rho \neq 0$ köküne sahiptir. Bu ise (3.1) denkleminin (3.3) koşullarını sağlayan aşikar olmayan çözüme sahip olduğunu gösterir. Şimdi λ parametreli $u(\lambda)$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım

$$u(\lambda)=\frac{1}{2}[C(a,\lambda)+S'(a,\lambda)] \tag{3.11}$$

Bu durumda (3.10) denklemi

$$\rho^2-2u(\lambda)\rho+1=0 \tag{3.12}$$

biçimini alır. Bu denklemin kökleri

$$\rho_{1,2}=u(\lambda)\pm\sqrt{u^2(\lambda)-1} \tag{3.13}$$

dir ve *Viyet* formülünden

$$\rho_1(\lambda)\rho_2(\lambda) = 1 \qquad (3.14)$$

olduğu söylenebilir. Tesbit edilmiş bir λ değeri için $u^2(\lambda) - 1 \neq 0$ ise (3.12) denklemi iki farklı ρ_1 ve ρ_2 köküne sahiptir. Dolayısıyla öyle $\psi_1(x,\lambda)$ ve $\psi_2(x,\lambda)$ çözümleri vardır ki bunlar (3.3) koşulunu sağlar ve lineer bağımsızdırlar.

$$\psi_1(x+a,\lambda) = \rho_1\psi_1(x,\lambda), \quad \psi_2(x+a,\lambda) = \rho_2\psi_2(x,\lambda)$$

$\rho_1 \neq 0, \quad \rho_2 \neq 0$ olduğundan öyle $\mu_1 = \mu_1(\lambda), \quad \mu_2 = \mu_2(\lambda)$ sayıları vardır ki $\rho_1 = e^{a\mu_1}, \quad \rho_2 = e^{a\mu_2}$ olur.

Şimdi kabul edelim ki $\chi_1(x,\lambda) = e^{-\mu_1 x}\psi_1(x,\lambda), \ \chi_2(x,\lambda) = e^{-\mu_2 x}\psi_2(x,\lambda)$ olsun. Bu durumda $\chi_1(x,\lambda)$ ve $\chi_2(x,\lambda)$ x değişkenine göre periyodu a' ya eşit olan fonksiyonlardır. Böylece $u^2(\lambda) - 1 \neq 0$ olduğunda (3.1) denkleminin Floquet formundaki aşağıdaki çözümü elde edilir.

$$y(x,\lambda) = c_1 e^{\mu_1 x}\chi_1(x,\lambda) + c_2 e^{\mu_2 x}\chi_2(x,\lambda)$$

Eğer $\lambda \in (-\infty,\infty)$ ise o zaman α sayısının reel ve $q(x)$ fonksiyonunun reel değişkenli olması nedeniyle $C(x,\lambda), \ S(x,\lambda), \ S'(x,\lambda)$ ve dolayısıyla da $u(\lambda)$ fonksiyonu reel değişkenli fonksiyon olacaktır. Şimdi $u(\lambda)$ nın aşağıdaki durumlarını inceleyelim.

1. $u(\lambda) > 1$ ise, o zaman $\rho_1 \neq \rho_2$, $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, $\rho_1\rho_2 = 1$ den $\exists \mu \neq 0$ sayısı vardır ki $\rho_1 = e^{a\mu}$, $\rho_2 = e^{-a\mu}$ olur. Böylece (3.1) denkleminin genel çözümü

$$y(x,\lambda) = c_1 e^{\mu_1 x}\chi_1(x,\lambda) + c_2 e^{\mu_2 x}\chi_2(x,\lambda)$$

şeklindedir.

2. $u(\lambda) < -1$ ise bu durumda $\rho_1 \neq \rho_2$, $\rho_1 < 0$, $\rho_2 < 0$ olur ve (3.1) denkleminin genel çözümü aşağıdaki gibidir.

$$y(x,\lambda)=c_1e^{\left(\mu+i\frac{\pi}{a}\right)x}\chi_1(x,\lambda)+c_2e^{-\left(\mu+i\frac{\pi}{a}\right)x}\chi_2(x,\lambda)$$

3. $-1<u(\lambda)<1$ olsun. Bu durumda yukarıdakine benzer olarak $\rho_1\neq\rho_2$ dir ve ρ_1 ve ρ_2 birbirine eşlenik kompleks sayılardır. $|\rho_1|=|\rho_2|=1$ olur. Bu nedenle (3.1) denkleminin genel çözümü

$$y(x,\lambda)=c_1e^{i\alpha x}\chi_1(x,\lambda)+c_2e^{-i\alpha x}\chi_2(x,\lambda)$$

biçimindedir. Burada $\alpha\neq0$ bir reel sayıdır.

4. $u^2(\lambda)=1$ yani $u(\lambda)=\pm1$ ise bu durumda

$$\rho_1=\rho_2\Rightarrow\rho:=\begin{cases}1\ , & u(\lambda)=\ \ 1\\ -1\ , & u(\lambda)=-1\end{cases}\tag{3.15}$$

olur. Böylece (3.1) denkleminin (3.3) koşulunu sağlayan en az bir aşikar olmayan $\psi_1(x,\lambda)$ çözümü olacaktır.

$$\psi_1(x+a,\lambda)=\rho\psi_1(x,\lambda)\tag{3.16}$$

(3.1) denkleminin $\psi_1(x,\lambda)$ ile lineer bağımsız çözümünü $\theta(x,\lambda)$ ile gösterelim. Bu durumda $\theta(x+a,\lambda)$ da (3.1) denkleminin çözümüdür ve dolayısıyla

$$\theta(x+a,\lambda)=d_1\psi_1(x,\lambda)+d_2\theta(x,\lambda)\tag{3.17}$$

yazılabilir. Burada d_1 ve d_2 λ'ya bağlı sabitlerdir. Dolayısıyla (3.16) ve (3.17) formüllerinden

$$W[\psi_1(x+a,\lambda),\theta(x+a,\lambda)]=\rho d_2W[\psi_1(x,\lambda),\theta(x,\lambda)]$$

bulunur. (3.1) denkleminin iki çözümünün Wronskianı x'e bağlı olmadığından bu son eşitlikten $\rho d_2=1$ bulunur. Bu eşitliğin her iki yanı ρ ile çarpıldığında ve (3.15) eşitliği $(\rho^2=1)$ dikkate alındığında $d_2=\rho$ bulunur. Böylece (3.17) ifadesinden

$$\theta(x+a,\lambda)=d_1\psi_1(x,\lambda)+\rho\theta(x,\lambda) \tag{3.18}$$

elde edilir. Şimdi mümkün olan iki alt durumu inceleyelim.

a) $d_1=0$ olduğunu varsayalım. O zaman (3.18) den

$$\theta(x+a,\lambda)=\rho\theta(x,\lambda) \tag{3.19}$$

bulunur. (3.15) , (3.16) ve (3.19) u dikkate aldığımızda, ele aldığımız durumlar için (3.1) denkleminin tüm çözümleri $u(\lambda)=1$ olduğunda periyodik, $u(\lambda)=-1$ olduğunda da yarı periyodik olur.

Kolaylıkla gösterilebilir ki $d_1=0$ eşitliği ancak ve ancak

$$C'(a,\lambda)=S(a,\lambda)=0 \tag{3.20}$$

olduğunda gerçeklenir.

b) $d_1\neq 0$ olduğunu varsayalım. Yani $C'(a,\lambda)$ ve $S(a,\lambda)$ nın en az biri sıfırdan farklı olsun. (3.15) den $\rho=e^{\mu a}$ elde edilir. Buradan

$$\mu=\begin{cases} 0 & , \ u(\lambda)=\ \ 1 \\ i\dfrac{\pi}{a} & , \ u(\lambda)=-1 \end{cases} \tag{3.21}$$

olur. Bu durumda da (3.1) denkleminin genel çözümleri

$$\begin{aligned}\chi_1(x,\lambda)&=e^{-\mu x}\psi_1(x,\lambda)\\ \theta(x,\lambda)&=e^{\mu x}\left\{\frac{d_1}{a\rho}x\chi_1(x,\lambda)+\chi_1(x,\lambda)\right\}\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Burada μ , (3.21) formülünden elde edilir.

5. Şimdi de λ nın reel sayı olmadığı durumu inceleyelim. Burada iki alt durum vardır.

a) Eğer $u(\lambda)$ reel sayı ise, bu durumda yukarıdaki 1-4 durumlarından biri söz konusudur.

b) Eğer $u(\lambda)$ reel sayı değil ise, bu durumda da (3.13) e göre ρ_1 ve ρ_2 farklıdır. Bunun yanı sıra ρ_1 ve ρ_2 mutlak değerce 1'e eşit olamazlar. Gerçekten eğer $\rho_1 = e^{i\alpha}$, $\alpha \in (-\infty, \infty)$ ise (3.14) e göre $\rho_2 = e^{-i\alpha}$ olacaktır ve $2u(\lambda) = \rho_1 + \rho_2 = 2\cos\alpha$ yani $u(\lambda)$ reeldir. Bu da bizim kabulümüzle çelişir. Böylece $\mathrm{Re}\,\mu \neq 0$ koşulunu sağlayan öyle bir μ sayısı vardır ki $\rho_1 = e^{i\alpha}$, $\rho_2 = e^{-i\alpha}$ dır ve (3.1) denkleminin aşağıdaki iki lineer bağımsız çözümü bulunacaktır.

$$\psi_1(x,\lambda) = e^{\mu x}\chi_1(x,\lambda),\ \psi_2(x,\lambda) = e^{-\mu x}\chi_2(x,\lambda)$$

burada $\chi_1(x,\lambda)$ ve $\chi_2(x,\lambda)$ x'e göre periyodu a olan periyodik fonksiyonlardır.

Yukarıda yaptığımız incelemelerde şu sonuca varırız:
$\lambda \in (-\infty, \infty)$ değerlerinde eğer $\left|u(\lambda)\right| > 1$ ise (3.1) denklemi kararsız, $\left|u(\lambda)\right| < 1$ ise kararlı olacaktır. $\left|u(\lambda)\right| = 1$ ise bu durumda eğer $C'(a,\lambda) = S(a,\lambda) = 0$ ise (3.1) denklemi kararlı olacak aksi takdirde bu denklem şartlı kararlı olup kararlı olmayacaktır.

3.2. t-PERİYODİK SINIR PROBLEMİ

$0 \le x \le a$ aralığında

$$y'' + [\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)]y = 0 \tag{3.22}$$

ve

$$y(a) = e^{it}y(0), \quad y'(a) = e^{it}y'(0) \tag{3.23}$$

sınır koşullarının oluşturduğu t-periyodik sınır problemine bakalım, burada t reel sayıdır.

Varsayalım ki, $p(x)$ ve $q(x)$ reel değerli fonksiyonlardır, öyle ki $p(x) \in W_2^1[0,a]$, $q(x) \in L_2[0,a]$ ve $\forall y(x) W_2^2\left[0,a\right]$, $y(x) \not\equiv 0$

$$\overline{y(0)}y'(0)-\overline{y(a)}y'(a)=0 \tag{3.24}$$

$$\int_0^a \{|y'(x)|^2+q(x)|y(x)|^2\}dx>0 \tag{3.24'}$$

koşulunu ve eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar olduğunu varsayacağız.

Burada $W_2^n\left[0,a\right]$ ile $\left[0,a\right]$ aralığında kompleks değerli fonksiyonların oluşturduğu Sobelev uzayını gösterelim, öyle ki, $(n-1).$ mertebeden mutlak sürekli türeve ve $n.$ mertebeden türevi karesi ile integrallenebilen fonksiyondur.

Tanım 3.2.1: Eğer (3.22) denkleminin $\lambda=\lambda_0$ için (3.23) sınır koşullarını sağlayan çözümü varsa, λ_0 sayısına (3.22) ve (3.23) probleminin özdeğeri denir. $y_1(x),\dots,y_m(x)$ fonksiyonlarına $y_0(x)$ özfonksiyonuna eşlenik koşulmuş fonksiyonlar denir ki, bu fonksiyonlar sınır koşulları ile birlikte aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$\begin{aligned}
&y_1''(x)+[\lambda_0^2-2\lambda_0 p(x)-q(x)]y_1(x)+2[\lambda_0-p(x)]y_0(x)=0\\
&y_k''(x)+[\lambda_0^2-2\lambda_0 p(x)-q(x)]y_k(x)+2[\lambda_0-p(x)]y_{k-1}(x)+y_{k-2}(x)=0\\
&k=2,3,\cdots,m
\end{aligned}$$

$L_2\left[0,a\right]$ Hilbert uzayında etkili olan L_t lineer operatörü tanımlayalım. $D(L_t)$ tanım kümesi, $y''(x)\in L_2\left[0,a\right]$dan olan, $y'(x)$ türevi mutlak sürekli olmak üzere $y(x)\in L_2\left[0,a\right]$ olsun. Bunlara ilave olarak $y(x)$ fonksiyonu (3.23) sınır koşulunu sağlasın. $y\in D(L_t)$ olmak üzere, $L_t y=-y''+q(x)y$ dir. Açıktır ki, $D(L_t)$ $L_2\left[0,a\right]$ da hemen hemen yoğundur. Kısmi integrasyon formülü kullanılırsa, $\forall y_1,y_2\in D(L_t)$ için $(L_t y_1,y_2)=(y_1,L_t y_2)$ doğrudur. Burada $(.,.)$ simgesi ile $L_2\left[0,a\right]$uzayında iç çarpım gösterilmiştir. Dolayısıyla L_t operatörü simetriktir.

(3.24) ve (3.24’) koşullarından $\forall y\in D(L_t)$, $y(x)\neq 0$ için

$$(L_t y, y) > 0 \tag{3.25}$$

doğrudur, yani L_t pozitif operatördür.

Lemma 3.2.1: (3.22) ve (3.23) sınır probleminin özdeğerleri

$$u(\lambda) = \cos t \tag{3.26}$$

denkleminin sıfırlarıdır. Burada $u(\lambda)$ (3.11) formülü ile tanımlanan fonksiyondur.

İspat: Biliyoruz ki, $y(x,\lambda) = \alpha_1 C(x,\lambda) + \alpha_2 S(x,\lambda)$ (3.22) denkleminin çözümüdür. Bu fonksiyon, (3.23) sınır koşulunda $x = 0$ alınarak yerine konulursa

$$y(a,\lambda) = e^{it}[\alpha_1 C(0,\lambda) + \alpha_2 S(0,\lambda)]$$

(3.4)'ten

$$y(a,\lambda) = e^{it}\alpha_1$$

ve $x = a$ alınırsa

$$\begin{aligned} y(a,\lambda) &= \alpha_1 C(a,\lambda) + \alpha_2 S(a,\lambda) \\ e^{it}\alpha_1 &= \alpha_1 C(a,\lambda) + \alpha_2 S(a,\lambda) \end{aligned} \;\Rightarrow\; \alpha_1[C(a,\lambda) - e^{it}] + \alpha_2 S(a,\lambda) = 0$$

$$\begin{aligned} y'(a,\lambda) &= \alpha_1 C'(a,\lambda) + \alpha_2 S'(a,\lambda) \\ e^{it}\alpha_2 &= \alpha_1 C'(a,\lambda) + \alpha_2 S'(a,\lambda) \end{aligned} \;\Rightarrow\; \alpha_1 C'(a,\lambda) + \alpha_2[S(a,\lambda) - e^{it}] = 0$$

$\alpha_1 \, ve \, \alpha_2$ için aşağıdaki sistem elde edilir.

$$\begin{cases} \alpha_1[C(a,\lambda) - e^{it}] + \alpha_2 S(a,\lambda) = 0 \\ \alpha_1 C'(a,\lambda) + \alpha_2[S'(a,\lambda) - e^{it}] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} C(a,\lambda) - e^{it} & S(a,\lambda) \\ C'(a,\lambda) & S'(a,\lambda) - e^{it} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = 0$$

Buradan sistemin aşikar olmayan çözüme sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\begin{vmatrix} C(a,\lambda)-e^{it} & S(a,\lambda) \\ C'(a,\lambda) & S'(a,\lambda)-e^{it} \end{vmatrix} = 0$$

olmasıdır.

$$C(a,\lambda)S'(a,\lambda)-e^{it}[C(a,\lambda)+S'(x,\lambda)]+e^{2it}-C'(a,\lambda)S(a,\lambda)=0$$
$$C(a,\lambda)S'(a,\lambda)-C'(a,\lambda)S(a,\lambda)=1 \;\; ve \;\; C(a,\lambda)+S'(x,\lambda)=2u(\lambda)$$

olduğundan $e^{2it}-2u(\lambda)e^{it}+1=0$ bulunur. $e^{it}=k$ olsun

$$k^2-2u(\lambda)k+1=0$$

$$u(\lambda)=\cos t$$

$$k_{1,2}=\frac{2\cos t\pm\sqrt{4\cos^2 t-4}}{2}=\cos t\pm i\sin t$$

$$k_1+k_2=\cos t+i\sin t+\cos t-i\sin t=2\cos t$$

Buradan (3.9) koşulundan yararlanılırsa

$$2u(\lambda)=C(a,\lambda)+S'(a,\lambda)=2\cos t$$

denklemine ulaşılır.

Lemma 3.2.2: (3.22) ve (3.23) sınır probleminin özdeğerleri reeldir ve sıfırdan farklıdır.

İspat: Varsayalım ki, λ (3.22) , (3.23) probleminin özdeğeri ve $y(x)$ $(y,y)=1$ şartını sağlayan bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun. (3.22) denkleminden

$$y''+[\lambda^2-2\lambda p(x)-q(x)]y(x)=0$$

$$\lambda^2-2\lambda(py,y)-(L_t y,y)=0$$

$$\lambda = (py, y) \pm \sqrt{(py, y)^2 + (L_t y, y)} \tag{3.27}$$

bulunur.

(3.27) eşitliğinden, $p(x)$ in reel değerli olması ve (3.25) koşulu nedeniyle lemmanın ispatı yapılır.

Lemma 3.2.3: $t \neq m\pi$, $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ ise (3.22), (3.23) probleminin özdeğerleri tek katlıdır, yani her bir özdeğere sabit çarpan farkı ile tek özfonksiyon karşılık gelir.

İspat: Varsayalım ki, (3.22), (3.23) probleminin λ özdeğerine karşılık iki lineer bağımsız $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ özfonksiyonları bulunsun. Böylece her bir λ değerine karşılık denklemin $y(x)$ çözümü $y_1(x)$ ve $y_2(x)$'in lineer kombinasyonu olarak yazılabilir ve aynı zamanda (3.23) sınır koşullarını sağlayacaktır. Özel durumda $C(x,\lambda)$ ve $S(x,\lambda)$ bu koşulları sağlayacaktır. Buradan

$$2u(\lambda) = C(a,\lambda) + S'(a,\lambda) = e^{it}C(a,\lambda) + e^{it}S'(a,\lambda) = 2e^{it}$$

diğer taraftan λ özdeğeri Lemma 3.2.1 gereğince (3.26) denklemini sağlamalıdır. Buradan

$$\cos t = e^{it}$$

bulunur. Bu ise $t = m\pi$, $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ durumunda olabilir. Bu ise varsayımla çelişir.

Eğer $t = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ m çift sayı ise; (3.23) sınır koşulu

$$y(a) = y(0), \quad y'(a) = y'(0) \tag{3.28}$$

şeklini alır. m tek sayı ise;

$$y(a) = -y(0), \quad y'(a) = -y'(0) \tag{3.29}$$

şeklini alır.

(3.28) sınır koşuluna *periyodik sınır koşulları*, (3.29) sınır koşuluna ise yarı *periyodik sınır koşulları* denir.

Lemma 3.2.1 gereğince (3.22) denkleminin periyodik ve yarı periyodik sınır problemlerinin özdeğerleri sırasıyla $u(\lambda)=1$ $u(\lambda)=-1$ denklemlerinin sıfırlarıdır. Bu problemin özdeğerleri $t=m\pi$, $(m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ iken çift katlı olabilir.

Lemma 3.2.4: (3.22), (3.28) periyodik veya (3.22), (3.29) yarı periyodik sınır probleminin λ özdeğerinin çift katlı olması için gerek ve yeter koşul

$$C'(a,\lambda)=S(a,\lambda)=0 \tag{3.30}$$

olmasıdır.

İspat: Lemmayı periyodik problem için ispatlayalım. Yarı periyodik durum için ispat benzer olarak yapılabilir.

$\Rightarrow$: Varsayalım ki, λ (3.22), (3.28) probleminin çift katlı özdeğeridir. Bu ise aynı özdeğere iki tane bağımsız $y_1(x)\, ve\, y_2(x)$ özfonksiyonlarının olduğunu gösterir. Bu özfonksiyonların lineer kombinasyonu (3.22) denklemini sağlar ve aynı zamanda (3.28) sınır koşullarını sağlar. Özel olarak $y_1(x)=C(x,\lambda)$ *ve* $y_2(x)=S(x,\lambda)$ alınırsa (3.4) koşulundan (3.30) eşitliği hemen çıkar.

$\Leftarrow$: Tersine, varsayalım ki (3.22), (3.28) probleminin λ özdeğeri için (3.30) eşitliği sağlansın. Bu durumda ispat edelim ki, λ çift katlı özdeğerdir. Gerçekten (3.30)'a göre (3.9) dan

$$C(a,\lambda)S'(a,\lambda)=1 \tag{3.31}$$

Öte yandan Lemma 3.2.1'e göre $u(\lambda)=1$ buradan (3.31) gereğince

$$\begin{aligned}&[C(a,\lambda)+S'(a,\lambda)]^2=4=4C(a,\lambda)S'(a,\lambda)\\&\Rightarrow [C(a,\lambda)-S'(a,\lambda)]^2=0 \;\Rightarrow C(a,\lambda)=S'(a,\lambda)\end{aligned}$$

$u(\lambda)=1$ eşitliğinden,

$$C(a,\lambda)S'(a,\lambda)=1 \tag{3.32}$$

buradan, (3.4), (3.30) ve (3.32)'den $C(x,\lambda)\,ve\; S(x,\lambda)$ çözümleri (3.28) periyodik sınır koşullarını sağlar. Dolayısıyla bu çözümler lineer bağımsızdır. Buradan λ (3.22), (3.28) probleminin çift katlı özdeğeridir.

Lemma 3.2.5: (3.22), (3.23) probleminin özfonksiyonlarının ortak fonksiyonları (associated functions) yoktur.

İspat: $y(x)$ (3.22), (3.23) probleminin λ özfonksiyonuna karşılık gelen özfonksiyon olsun. Varsayalım ki, $(y,y)=1$ normalleşmiş olsun. Tersine $y_1(x)$ $y(x)$ özfonksiyonuna koşma fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} &-L_t y+\lambda^2 y-2\lambda p(x)y=0 \\ &-L_t y_1+\lambda^2 y_1-2\lambda p(x)y_1+2[\lambda-p(x)]y=0 \end{aligned}$$

Bu eşitliklerden 1.yi soldan y_1 ile, 2.yi sağdan y ile çarpılıp 2.den 1. çıkarılır ve L_t operatörünün simetriklik özelliği kullanılırsa, $p(x)$ ve λ özdeğerinin reel olması koşuluna göre,

$$(2\lambda y-2py,y)=0$$

bulunur. Buradan $\lambda=(py,y)$ dir. Yukarıdaki eşitlik (3.27) eşitliği ile çelişir. Dolayısıyla, böyle bir varsayım doğru değildir.

Lemma 3.2.6: (3.22), (3.23) problemi için farklı $\lambda_1\; ve\; \lambda_2\,(\lambda_1\neq\lambda_2)$ özdeğerlerine karşılık gelen $y_1(x)\,ve\; y_2(x)$ özfonksiyonları ortogonallik bağıntısını sağlar.

$$(\lambda_1+\lambda_2)(y_1,y_2)-2(py_1,y_2)=0 \tag{3.33}$$

İspat:

$$\begin{aligned} &-L_t y_1+\lambda_1^2 y_1-2\lambda_1 p(x)y_1=0 \\ &-L_t y_2+\lambda_2^2 y_2-2\lambda_2 p(x)y_2=0 \end{aligned}$$

1.denklemi sağdan y_2 , 2. denklemi soldan y_1 ile skaler çarpıp 1.den 2.yi çıkarırsak ve $p(x)$, λ_1, λ_2 nin reel olması koşuluyla birlikte L_t nin simetrikliğini kullanırsak,

$$(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(y_1, y_2) - 2(\lambda_1 - \lambda_2)(\rho y_1, y_2) = 0$$

bulunur. Buradan $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan (3.33)'ye varılır.

Şimdi (3.22), (3.23) t-sınır probleminin özdeğerinin varlığını gösterelim. $|\lambda| \to \infty$ olduğunda aşağıdaki asimptotik formüller doğrudur.

$$C(x,\lambda) = \cos[\lambda x - \beta(x)] + O\left(\frac{e^{x|\operatorname{Im}\lambda|}}{|\lambda|}\right)$$
$$S'(x,\lambda) = \cos[\lambda x - \beta(x)] + O\left(\frac{e^{x|\operatorname{Im}\lambda|}}{|\lambda|}\right)$$

burada $\beta(x) = \int_0^x p(\xi)d\xi$ dir. Bu formüller (3.11) de yerine yazılırsa, $(\lambda \to \infty)$

$$u(\lambda) = \cos(\lambda a - b) + O\left(\frac{e^{a|\operatorname{Im}\lambda|}}{|\lambda|}\right) \tag{3.34}$$

burada $b = \beta(a)$ dır.

(3.34) asimptotik formülünü kullanarak, $u(\lambda)$-tam fonksiyonu için Roche teoremine dayalı olarak (3.26) denkleminin sayılabilir sayıda $\lambda_k(t)$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ köke sahip olduğu gösterilir. Burada eğer $k \to \infty$ ise $\lambda_k(t) \to \infty$, eğer $k \to -\infty$ ise $\lambda_k(t) \to -\infty$ olur. Daha sonra görülür ki (Lemma 3.3.4) $\lambda_k(t)$ nin katı, (3.22), (3.23) probleminin özdeğerlerinin katına eşittir. Belirtelim ki, Lemma 3.2.1 ve Lemma 3.2.2 ye göre $\lambda_k(t)$ gerçektir ve $\lambda_k(t) \neq 0$ dır. Dolayısıyla

$$\cdots \leq \lambda_{-2}(t) \leq \lambda_{-1}(t) \leq \lambda_0(t) \leq \lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq \cdots \qquad (3.35)$$

Bu eşitsizlikte her bir $\lambda_k(t)$ kat kadar tekrarlanabilir.

3.3. KARARLILIK VE KARARSIZLIK ARALIĞI

(3.11) formülü ile tanımlanan $u(\lambda)$ fonksiyonuna bakalım. Öyle ki, $C(x,\lambda)$, $S(x,\lambda)$ ve türevleri belirlenmiş x'ler için λ parametresine göre tam fonksiyondur. $\beta_k(\tau)$ da λ parametresine göre tam fonksiyondur.

Bu bölümde genelliği bozmadan λ'yı reel parametre kabul edeceğiz. $u(\lambda)$ λ parametresinin sürekli fonksiyonu olması nedeniyle $\left|u(\lambda)\right| < 1$ koşulunu sağlayan λ'lar reel λ-ekseni üzerinde açık aralık olacaktır. Bu aralık, aşağıda gösterileceği gibi, boş olmayan ve birbiri ile ayrık olan açık aralıkların sayılabilir tanesinin birleşimidir. Böylece, (3.1) denklemi kararlı olacaktır. λ bu aralıklara yerleştiğinde bu aralıklara (3.1) denkleminin *kararlılık aralığını* oluşturacaktır. Benzer olarak $\left|u(\lambda)\right| > 1$ koşulunu sağlayan λ'lar (3.1) denkleminin *kararsızlık aralığını* oluşturur. Son olarak, kararlılık aralıklarının kapanışı, yani $\left|u(\lambda)\right| \leq 1$ koşulunu sağlayan λ'ların oluşturduğu aralıklar (3.1) denkleminin *şartlı kararlılık aralıklarını* oluşturur.

Bu bölümde kararlılık ve kararsızlık aralıklarının varlığını ispatlayacağız ve kesin tasvirini vereceğiz. Bütün bunları $u(\lambda)$ fonksiyonunun özelliklerini araştırarak yapacağız.

Şimdi ve sonra işimize yaraması için aşağıdakileri kabul edeceğiz. $-\infty < x < \infty$ reel ekseninde çalışılan (3.1) denkleminde $p(x) = p(x+a)$, $q(x) = q(x+a)$ reel periyodik fonksiyonlardır ve aşağıdaki özelliğe sahiptirler. $p(x) \in W_2^1\left[0,a\right]$, $q(x) \in L_2\left[0,a\right]$ ve $\forall y(x) \in W_2^2\left[0,a\right]$, $y(x) \not\equiv 0$ fonksiyonu

$$\overline{y(0)}y'(0) - \overline{y(a)}y'(a) = 0 \qquad (3.36)$$

koşulunu sağlayan

$$\int_0^a \{|y'(x)|^2 + q(x)|y(x)|^2\}dx > 0 \tag{3.36'}$$

eşitsizliği vardır.

Lemma 3.3.1: $y(x,\lambda)$, (3.1) denkleminin (3.36) koşulunu sağlayan herhangi aşikar olmayan çözümü olsun. $\lambda \neq 0$ ve

$$\int_0^a [\lambda - p(x)]|y(x)|^2\, dx \neq 0 \tag{3.37}$$

yani eşitsizliğin sol tarafı; $\lambda > 0$ ise pozitif, $\lambda < 0$ ise negatif olur.

İspat: $y(x)$ (3.36) koşulunu sağladığından (3.36')'ya göre

$$A := \int_0^a \{|y'(x,\lambda)|^2 + q(x)|y(x,\lambda)|^2\}dx > 0$$

dir. Sonra, $y''(x,\lambda) + [\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)]y(x,\lambda) = 0$ eşitliğinin her tarafını $\overline{y(x,\lambda)}$ ile çarpıp, x değişkenine göre 0'dan a'ya kadar integralleyip, $y(x,\lambda)$ fonksiyonunun (3.36) koşulunu sağladığını dikkate alırsak,

$$\lambda^2(y,y) - 2\lambda(py,y) - A = 0$$

bulunur. Buradan

$$\lambda = \frac{(py,y) \pm \sqrt{(py,y)^2 + A(y,y)}}{(y,y)} \tag{3.38}$$

ve

$$\int_0^a [\lambda - p(x)]|y(x)|^2\, dx = \pm\sqrt{(py,y)^2 + A(y,y)} \neq 0$$

(3.38)'de $\lambda > 0$ ise karekökün karşısına "+" , $\lambda < 0$ ise "$-$" işareti konulur. Buna göre (3.37)'nin sol tarafının işareti λ nın işareti ile belirlenir.

Lemma 3.3.2: Eğer $\left|u(\lambda)\right| < 1$ ise $C'(x,\lambda) \neq 0,\ \ S(x,\lambda) \neq 0$ ve $C'(x,\lambda),\ \ S(x,\lambda)$ işaretleri zıttır.

İspat: $C = C(a,\lambda),\, C' = C'(a,\lambda),\, S = S(a,\lambda),\, S' = S'(a,\lambda)$ kısaltmalarını kullanarak $u(\lambda) < 1$ eşitsizliğinden (3.11), (3.9)'a göre

$$C^2 + 2CS' + S'^2 < 4 = 4(CS' - C'S)$$

böylece

$$(C - S')^2 < -4C'S$$

olur ve buradan lemmanın sonucu çıkar.

Lemma 3.3.3: Eğer $\left|u(\lambda)\right| < 1$ ise $\dfrac{du(\lambda)}{d\lambda} \neq 0$

İspat: (3.1) ve (3.4)'ten

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial C(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right) + [\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)]\frac{\partial C(x,\lambda)}{\partial\lambda} = 2[p(x) - \lambda]C(x,\lambda) - \frac{\partial C(0,\lambda)}{\partial\lambda}$$
$$= \frac{\partial C'(x,\lambda)}{\partial\lambda} = 0$$

olur. Buradan ise,

$$\frac{\partial C(x,\lambda)}{\partial\lambda} = 2\int_0^x \{C(x,\lambda)S(\xi,\lambda) - S(x,\lambda)C(\xi,\lambda)\}[\lambda - p(\xi)]C(\xi,\lambda)d\xi \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial S(x,\lambda)}{\partial\lambda} = 2\int_0^x \{C(x,\lambda)S(\xi,\lambda) - S(x,\lambda)C(\xi,\lambda)\}[\lambda - p(\xi)]S(\xi,\lambda)d\xi \quad (3.40)$$

ve dolayısıyla,

$$\frac{\partial S'(x,\lambda)}{\partial\lambda} = 2\int_0^x \{C'(x,\lambda)S(\xi,\lambda) - S'(x,\lambda)C(\xi,\lambda)\}[\lambda - p(\xi)]S(\xi,\lambda)d\xi \quad (3.40')$$

elde edilir. (3.39) ve (3.40')'ne göre (3.11) den,

$$\frac{du(\lambda)}{d\lambda} = \int_0^a \{C'S^2(\xi,\lambda) + (C - S')C(\xi,\lambda)S(\xi,\lambda) - SC^2(\xi,\lambda)\}[\lambda - p(\xi)]d\xi \quad (3.41)$$

Varsayalım ki, $|u(\lambda_0)| < 1$ burada $\exists t_0 \in (-\infty,\infty)$ sayısı vardır ki,

$$u(\lambda_0) = \cos t_0$$

Bu eşitlik sınır probleminin özdeğeri olduğunu gösterir.

Varsayalım ki, $\psi(x)$ $(\psi(x) \not\equiv 0)$ karşılık gelen özfonksiyon olsun.

$$\psi''(x) + [\lambda_0^2 - 2\lambda_0 p(x) - q(x)]\psi(x) = 0, \quad (0 \le x \le a) \quad (3.42)$$

$$\psi(a) = e^{it_0}\psi(0), \quad \psi'(a) = e^{it_0}\psi'(0) \quad (3.42')$$

Öyle ki, $C(x,\lambda_0)$ ve $S(x,\lambda_0)$ (3.1) denkleminin genel çözümleri olduğundan

$$\psi(x) = \psi(0)C(x,\lambda_0) + \psi'(0)S(x,\lambda_0) \quad (3.43)$$

buradan

$$\begin{aligned} |\psi(x)|^2 &= |\psi(0)|^2 C^2(x,\lambda_0) + |\psi'(0)|^2 S^2(x,\lambda_0) \\ &+ [\psi(0)\overline{\psi'(0)} + \overline{\psi(0)}\psi'(0)]C(x,\lambda_0)S(x,\lambda_0) \end{aligned} \quad (3.44)$$

(3.43)'de $x = a$ alırsak, $\psi(a) = e^{it_0}\psi(0)$ eşitliğine göre,

$$e^{it_0}\psi(0) = \psi(0)C(a,\lambda_0) + \psi'(0)S(a,\lambda_0)$$

buradan ise

$$\psi'(0) = \frac{e^{it_0} - C(a,\lambda_0)}{S(a,\lambda_0)}\psi(0)$$

öte yandan

$$\left|\psi'(0)\right| = -\frac{C'(a,\lambda_0)}{S(a,\lambda_0)}\left|\psi(0)\right|^2, \quad (C(a,\lambda)S'(a,\lambda) - C'(a,\lambda)S(a,\lambda) = 1\ )$$

$$\psi(0)\overline{\psi'(0)} + \overline{\psi(0)}\psi'(0) = \frac{S'(a,\lambda_0) - C(a,\lambda_0)}{S(a,\lambda_0)}\left|\psi(0)\right|^2$$

Böylece (3.44) bağıntısından

$$\left|\psi(x)\right|^2 = \begin{Bmatrix} S(a,\lambda_0)C^2(x,\lambda_0) - C'(a,\lambda_0)S^2(x,\lambda_0) \\ +[S'(a,\lambda_0) - C(a,\lambda_0)]C(x,\lambda_0)S(x,\lambda_0) \end{Bmatrix} \frac{\left|\psi(0)\right|^2}{S(a,\lambda_0)}$$

bu eşitliğin her iki yanı $\lambda_0 - p(x)$ ile çarpıp ve x değişkenine göre 0'dan a'ya integrallersek (3.41)'dan

$$\int_0^a [\lambda_0 - p(x)]\left|\psi(x)\right|^2 dx = -\frac{\left|\psi(0)\right|^2}{S(a,\lambda_0)} \cdot \frac{du(\lambda_0)}{d\lambda} \tag{3.45}$$

(3.42') formülüne göre $\psi(x)$ (3.36) koşulunu sağlar. Buna göre lemma 3.3.1 den (3.45)'e göre $\dfrac{du(\lambda)}{d\lambda} \neq 0$ bulunur.

Lemma 3.3.4: Eğer $\left|u(\lambda_0)\right| = 1$ ise $\dfrac{du(\lambda_0)}{d\lambda} = 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$C(a,\lambda_0) = S(a,\lambda_0) = 0 \tag{3.46}$$

olmasıdır.

a) Eğer $u(\lambda_0) = 1, \quad \dfrac{du(\lambda_0)}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \dfrac{d^2u(\lambda_0)}{d\lambda^2} < 0$

b) Eğer $u(\lambda_0) = -1, \quad \dfrac{du(\lambda_0)}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \dfrac{d^2u(\lambda_0)}{d\lambda^2} > 0$

İspat: Lemmayı $u(\lambda_0) = 1$ durumu için ispatlayalım. $u(\lambda_0) = -1$ durumu benzer olarak ispatlanabilir.

Varsayalım ki, $u(\lambda_0)=1$ ve (3.46) eşitliği sağlansın. İspat edelim ki, $\frac{du(\lambda_0)}{d\lambda}=0$ dır. (3.9)'a göre

$$C(a,\lambda_0)S'(a,\lambda_0)-C'(a,\lambda_0)S(a,\lambda_0)=1 \tag{3.47}$$

ve (3.46) kullanılırsa

$$C(a,\lambda_0)S'(a,\lambda_0)=1 \tag{3.48}$$

$u(\lambda_0)=1$ eşitliğinden $S'(a,\lambda_0)=2-C(a,\lambda_0)$ olur. Bu (3.48)'de yerine konursa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$C(a,\lambda_0)[2-C(a,\lambda_0)]=1 \quad \Rightarrow \quad [C(a,\lambda_0)-1]^2=0$$

Böylece $C(a,\lambda_0)=1$ ise (3.48) ve $S'(a,\lambda_0)=1$ alırız. Sonuç olarak $u(\lambda_0)=1$ ve (3.46) var ise $C(a,\lambda_0)=S'(a,\lambda_0)=1$ olur. (3.41)'den istenen $\frac{du(\lambda_0)}{d\lambda}=0$ eşitliği hemen çıkar.

Tersine, $u(\lambda_0)=1$ ve $\frac{du(\lambda_0)}{d\lambda}=0$ olduğunu varsayalım. İspat edelim ki, (3.46) sağlanır. Eğer $S'(a,\lambda_0)\neq 0$ ise lemma 3.3.3 ispatına benzer işlemler yapılarak $t_0=0$ olduğunda $\frac{du(\lambda_0)}{d\lambda}\neq 0$ alınır. Bu ise çelişki yaratır. Böylece

$$S(a,\lambda_0)=0 \tag{3.49}$$

bulunur. Şimdi $C'(a,\lambda_0)=0$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim (3.47)'den (3.49)'e göre yukarıda yapılanlar tekrar edilirse $C(a,\lambda_0)=S'(a,\lambda_0)=1$ bulunur. buna göre (3.41) eşitliğinden

$$C'(a,\lambda_0)\int_0^a S^2(\xi,\lambda_0)[\lambda_0 - p(\xi)]d\xi = 0 \tag{3.50}$$

öyle ki, $S(x,\lambda)$ (3.36) koşulunu sağladığında $S(0,\lambda_0) = S(a,\lambda_0) = 0$ dır. Lemma 3.3.1 e göre

$$\int_0^a S^2(\xi,\lambda_0)[\lambda_0 - p(\xi)]d\xi \neq 0$$

(3.50)'den $C'(a,\lambda_0) = 0$ çıkar.

Şimdi a) kısmını ispatlayalım. Varsayımımıza göre

$$S(a,\lambda_0) = C'(a,\lambda_0) = 0, \quad C(a,\lambda_0) = S'(a,\lambda_0) = 1 \tag{3.51}$$

(3.41)'nın λ 'ya göre her tarafının diferansiyeli alınır ve $\lambda = \lambda_0$ alınırsa

$$\frac{d^2u(\lambda_0)}{d\lambda^2} = \int_0^a \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial C'(a,\lambda_0)}{\partial\lambda} S^2(\xi,\lambda_0) - \dfrac{\partial S(a,\lambda_0)}{\partial\lambda} C^2(\xi,\lambda_0) \\ +[\dfrac{\partial C(a,\lambda_0)}{\partial\lambda} - \dfrac{\partial S'(a,\lambda_0)}{\partial\lambda}]C(\xi,\lambda_0)S(\xi,\lambda_0) \end{array} \right\} [\lambda_0 - p(\xi)]d\xi$$

(3.39), (3.40), (3.40') bağıntılarını kullanırsak ve (3.51) denklemini dikkate alırsak,

$$\frac{d^2u(\lambda_0)}{d\lambda^2} = 4\left\{ \begin{array}{l} \left(\int\limits_0^a C(\xi,\lambda_0)S(\xi,\lambda_0)[\lambda_0 - p(\xi)]d\xi \right)^2 \\ -\left(\int\limits_0^a C^2(\xi,\lambda_0)[\lambda_0 - p(\xi)]d\xi \right)\left(\int\limits_0^a S^2(\xi,\lambda_0)[\lambda_0 - p(\xi)]d\xi \right) \end{array} \right\} \tag{3.52}$$

bulunur. Kabul edelim ki $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ $f(x) = S(x,\lambda_0) + \alpha C(x,\lambda_0)$ olsun. (3.4) ve (3.51)'e göre

$$f(0) = f(a) = \alpha\ , \quad f'(0) = f'(a) = 1$$

dolayısıyla $f(x)$ (3.36) koşulunu sağlar. Öte yandan $\lambda = \lambda_0$ olduğunda $f(x)$ fonksiyonu (3.1) denkleminin aşikar olmayan çözümüdür. Bu ise lemma 3.3.1 e göre

$$\int_0^a f^2(x)[\lambda_0 - p(x)]dx \neq 0$$

yani

$$\int_0^a S^2(x,\lambda_0)[\lambda_0 - p(x)]dx + 2\alpha\int_0^a S(x,\lambda_0)C(x,\lambda_0)[\lambda_0 - p(x)]dx$$
$$+\alpha^2\int_0^a C^2(x,\lambda_0)[\lambda_0 - p(x)]dx \neq 0$$

Bu eşitsizliğin sol tarafı α'ya göre 2. dereceden üçterimli ifadedir ve yazılan eşitsizlik gösterir ki, bu ifadenin reel kökü yoktur. Bu nedenle diskriminantı kesin olarak 0 dan küçük olmalıdır.

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\displaystyle\int_0^a S(x,\lambda_0)C(x,\lambda_0)[\lambda_0 - p(x)]dx\right)^2 \\ -\left(\displaystyle\int_0^a C^2(x,\lambda_0)[\lambda_0 - p(x)]dx\right)\left(\displaystyle\int_0^a S^2(x,\lambda_0)[\lambda_0 - p(x)]dx\right)\end{array}\right\} < 0$$

Buradan ve (3.52)'den $\dfrac{d^2u(\lambda_0)}{d\lambda^2} < 0$ bulunur.

Lemma 3.3.4'den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.3.1: $u(\lambda) \pm 1$ fonksiyonunun katı 2'den büyük sıfırlara sahip değildir.

Sonuç 3.3.2: λ_0, $u(\lambda) - 1$ fonksiyonunun çift katlı sıfırıdır ancak ve ancak $u(\lambda)$ bu noktada maksimuma sahiptir.

Lemma 3.3.5:

$$u(0) > 1 \qquad (3.53)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat:

$$y'' + [\mu - q(x)]y = 0 \qquad (3.54)$$

denklemine bakalım. $\theta(x,\mu)\, ve\ \varphi(x,\mu)$ ile (3.54) denkleminin $\theta(0,\mu) = \varphi(0,\mu) = 1, \quad \theta'(0,\mu) = \varphi(0,\mu) = 0$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümlerini işaretleyelim ve $F(\mu) = \theta(a,\mu) + \varphi'(a,\mu), \quad 0 \le x \le a$ aralığında (3.54) denkleminin ve

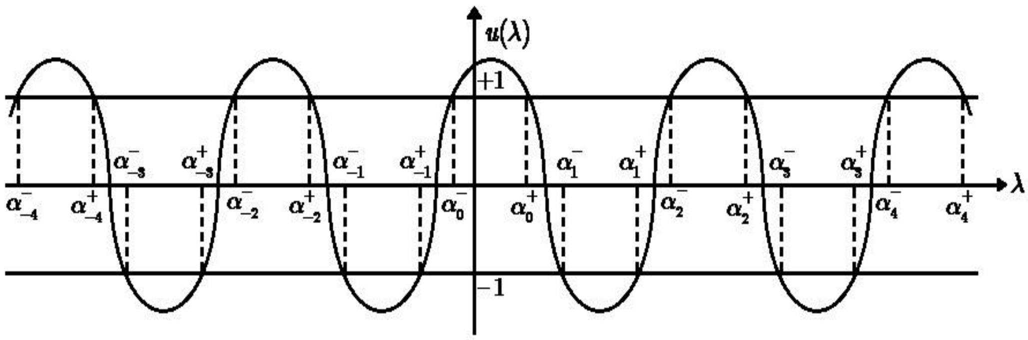
$$y(a) = y(0), \quad y'(a) = y'(0) \qquad (3.54')$$

sınır koşullarının oluşturduğu periyodik problemin özdeğerleri $F(\mu) = 2$ denkleminin sıfırları ile çakışır. Öte yandan $F(\mu) \to \infty$ eğer $\mu \to -\infty$ ve (3.36) (3.36') koşullarından anlaşılır ki, (3.54), (3.54') pozitif olmayan özdeğerlere sahip değildir. Buradan $F(\mu) > 2$ öte yandan $\lambda = \mu = 0$ olduğunda (3.1) ve (3.54) denklemleri birbirinin aynısıdır. Dolayısıyla

$$C(x,0) = \theta(x,0), \quad S(x,0) = \varphi(x,0)$$

böylece $u(0) = \dfrac{1}{2}F(0) > 1$ olur.

Bu bölümde elde edilmiş sonuçlar (3.34) asimptotik formülü ile birlikte $u(\lambda)$ fonksiyonunun, $\lambda, \quad -\infty$ dan $+\infty$ 'a değiştiğinde davranışını tahmin edebiliriz.



Şekil 1: Spektral aralıklar

Böylece aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 3.3.1:

1) (3.1), (3.28) periyodik sınır probleminin $\alpha_{2k}^{\pm}$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ ve (3.1), (3.29) yarı periyodik sınır probleminin $\alpha_{2k+1}^{\pm}$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ özdeğerleri aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$\cdots < \alpha_{-2}^{-} \le \alpha_{-2}^{+} < \alpha_{-1}^{-} \le \alpha_{-1}^{+} < \alpha_{0}^{-} < 0 < \alpha_{0}^{+} < \alpha_{1}^{-} \le \alpha_{1}^{+} < \alpha_{2}^{-} \le \alpha_{2}^{+} < \cdots$$

2) $[\alpha_{2k}^{+}, \alpha_{2k+1}^{-}]$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ aralığında $u(\lambda)$ fonksiyonu +1 değerinden -1 değerine monoton azalır, $[\alpha_{2k+1}^{+}, \alpha_{2k+2}^{-}]$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ aralığında -1 değerinden +1 değerine monoton artar.

3) $(\alpha_{2k}^{-}, \alpha_{2k}^{+})$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)\, aral$ığ$ında\, u(\lambda) > 1$

$$(\alpha_{2k+1}^{-}, \alpha_{2k+1}^{+}), \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)\, aral\text{ığ}ında\, u(\lambda) < -1$$

olur. Böylece $(\alpha_{k-1}^{+}, \alpha_{k}^{-})$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ aralıkları kararlılık aralıkları, onların kapanışı yani $[\alpha_{k-1}^{+}, \alpha_{k}^{-}]$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ şartlı kararlılık aralıkları, $(\alpha_{k}^{-}, \alpha_{k}^{+})$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ aralıkları (3.1) denklemi için kararsızlık aralıkları olacaktır.

3.4. SPEKTRUMUN YAPISI

$T(\lambda)$ ile $L_2(-\infty, \infty)$ uzayında D maksimal değer kümesine sahip $\dfrac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)$ diferansiyel ifadesinin oluşturduğu operatör demetini gösterelim. Öyle ki, $p(x) \in W_2^1\left[0, a\right]$ olsun. O zaman D $\exists y(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, fonksiyonu vardır ve bu fonksiyon 1.mertebeden mutlak sürekli türeve sahiptir ve $y'' - q(x)y \in L_2(-\infty, \infty)$. Eğer $y \in D$ ise tanıma göre

$$T(\lambda)y = y'' + [\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)]y$$

olur. Eğer $\exists\lambda_0$ kompleks sayısı varsa $T(\lambda_0)$ operatörünün $L_2(-\infty,\infty)$ uzayında tersi sınırlı ise λ_0 a düzenli nokta denir. Kompleks düzlemde düzenli noktaların tümleyenine $T(\lambda)$ demetinin spektrumu denir. Biz bunu $\delta(T)$ ile göstereceğiz.

Eğer $T(\lambda_0)$ operatörü $\ker T(\lambda_0)$ sıfır olmayan çekirdeğe sahipse, λ_0 kompleks sayısına $T(\lambda_0)$'nın özdeğeri denir. Her bir $\ker T(\lambda_0)$'dan olan sıfır olmayan fonksiyona $T(\lambda)$'nın özfonksiyonu denir. Bellidir ki, $T(\lambda)$ demetinin özdeğerleri onun spektrumuna dahildir.

Bu bölümde amacımız $T(\lambda)$ demetinin spektrumunun yapısını incelemektir.

Teorem 3.4.1: $T(\lambda)$ demetinin spektrumu düzgün süreklidir, yani $T(\lambda)$ demeti özdeğerlere sahip değildir.

İspat: Tersine varsayalım ki, λ_0 $T(\lambda)$ demetinin özdeğeri olsun.

$$T(\lambda_0)\psi(x) = 0$$

Bu ise, $\psi(x)$ (3.1) denkleminin $\lambda = \lambda_0$ olduğunda $L_2(-\infty,\infty)$ uzayında aşikar olmayan çözümüdür. Bölüm 3.1 sonuçlarına göre (3.1) denklemi hiçbir λ kompleks sayısı için $L_2(-\infty,\infty)$'da aşikar olmayan çözüme sahip değildir. Böylece $T(\lambda)$ demeti özdeğere sahip değildir.

Teorem 3.4.2: $T(\lambda)$ demetinin $\sigma(T)$ spektrumu (3.1) denkleminin tüm şartlı kararlılık aralıklarının birleşimi olan S kümesidir.

İspat: Öncelikle $S \subset \sigma(T)$ olduğunu ispatlayalım. Varsayalım ki, $\lambda_0 \in S$ olsun, $\lambda_0 \in \sigma(T)$ gösterilmelidir. Bunun için, $\|f_n\| = 1$ ve $\|T(\lambda_0)f_n\| \to 0$ olacak şekilde $\exists f_n(x) \in D$ dizisinin varlığını göstermek yeter. (Burada norm olarak $L_2(-\infty,\infty)$ daki norm anlaşılır.)

Öyle ki, $\lambda_0 \in S$, Bölüm 3.1 sonuçlarına göre (3.1) denklemi $\lambda = \lambda_0$ olduğunda hiç olmazsa bir tane aşikar olmayan $\psi(x)$ çözümüne sahiptir ki,

$$\psi(x+a) = \rho\psi(x), \quad (-\infty < x < \infty) \tag{3.55}$$

burada

$$\left|\rho\right| = 1 \tag{3.55'}$$

$g(x)$, $\left[0,a\right]$ aralığında 2.mertebeden sürekli diferansiyellenebilen

$$0 \le g(x) \le 1, \quad g(0) = 0, \quad g(a) = 1, \quad g'(0) = g''(0) = g'(a) = g''(a) = 0$$

şartını sağlayan bir fonksiyon olsun.

$f_n(x)$ fonksiyonunu aşağıdaki biçimde tanımlayalım:

$$f_n(x) = b_n\psi(x)h_n(x), \quad (-\infty < x < \infty)$$

Burada

$$h_n(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \left|x\right| \le (n-1)a \\ g(na - \left|x\right|) \,, & (n-1)a < \left|x\right| < na \\ 0 & , \quad \left|x\right| > na \end{cases}$$

b_n normalleştirici katsayı $\left\|f_n\right\| = 1$ şartından belirlenir. (3.55) ve (3.55')'nü göz önünde bulundurarak kolaylıkla gösterebiliriz ki, $n \to \infty$ iken $b_n \sim \left(2h\int\limits_0^a \left|\psi(x)\right|^2 dx\right)^{-\frac{1}{2}}$ olur. Buradan özel olarak $n \to \infty$ iken $b_n \to 0$ olur.

$f_n(x) \in D \, ve \left\|T(\lambda_0)f_n\right\| \le \left|b_n\right|[2\left\|\psi'(x)h_n'(x)\right\| + \psi(x)h_n''(x)] \le \alpha$ burada α negatif olmayan (n'den bağımsız) sabit bir sayıdır. Böylece $n \to \infty$, $\left\|T(\lambda_0)f_n\right\| \to 0$ olur.

Şimdi $\sigma(T) \subset S$ olduğunu gösterelim. Varsayalım ki, $\lambda_0 \notin S$ olsun göstermeliyiz ki $\lambda_0 \notin \sigma(T)$. Eğer $\lambda_0 \notin S$ ise aşağıdaki üç durum ortaya çıkar.

1) $\lambda_0 \in (-\infty,\infty)\, ve \left|u(\lambda_0)\right| > 1$

2) $\operatorname{Im}\lambda_0 \neq 0\, ve\, u(\lambda_0)$ reeldir

3) $\operatorname{Im}\lambda_0 \neq 0\, ve\, u(\lambda_0)$ reel değildir.

Bu durumları ayrı ayrı ele alalım.

1) Bu durumda $u(\lambda_0) > 1$ veya $u(\lambda_0) < -1$ dir. Öyle ki, bu iki durumda incelemeler aynıdır o yüzden $u(\lambda_0) > 1$ durumunu inceleyeceğiz. Bölüm 3.1 sonuçlarına göre (3.1) denkleminin bu durumda iki tane lineer bağımsız

$$\psi_1(x) = e^{\mu x}\chi_1(x), \quad \psi_2(x) = e^{-\mu x}\chi_2(x) \tag{3.56}$$

çözümlerine sahiptir. Burada

$$\mu \in (-\infty,\infty), \quad \mu \neq 0, \quad \chi_k(x+a) = \chi_k, \quad (k = 1,2,\cdots)$$

Aşağıdaki Green fonksiyonuna bakalım;

$$G(x,\xi,\lambda_0) = \frac{1}{c}\begin{cases} \psi_1(x)\psi_2(\xi), & \xi \geq x \\ \psi_1(\xi)\psi_2(x), & \xi \leq x \end{cases} \tag{3.57}$$

burada

$$c = \psi_1'(x)\psi_2(x) - \psi_1(x)\psi_2'(x) = sabit$$

$$Rf(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,\lambda_0) f(\xi)\, d\xi \tag{3.58}$$

formülü ile tanımlı R-integral operatörüne bakalım. Gösterelim ki, $R: L_2(-\infty,\infty) \to L_2(-\infty,\infty)$ sınırlı operatördür.

(3.58)'ten (3.57) ve (3.56)'ye göre

$$\left|Rf(x)\right| \le \frac{M^2}{c} \; G_1(x) + G_2(x) \tag{3.59}$$

alırız, burada

$$M = \max \; \max_{0\le x\le a}\left|\chi_1(x)\right|, \max_{0\le x\le a}\left|\chi_2(x)\right|$$

$$G_1(x) = e^{-\mu x}\int_{-\infty}^{x} e^{\mu\xi}\left|f(\xi)\right|d\xi$$

$$G_2(x) = e^{\mu x}\int_{x}^{\infty} e^{-\mu\xi}\left|f(\xi)\right|d\xi$$

herhangi $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ için kısmi integrasyon formülüne göre,

$$\int_{-\eta_1}^{\eta_2} G_1^{\,2}(x)dx = \int_{-\eta_1}^{\eta_2} e^{-2\mu x}\left(\int_{-\infty}^{x} e^{\mu\xi}\left|f(\xi)d\xi\right|\right)^2 dx = \frac{1}{2\mu}\; G_1^{\,2}(-\eta_1) - G_1^{\,2}(\eta_2)$$
$$+\frac{1}{\mu}\int_{-\eta_1}^{\eta_2} G_1(x)\left|f(x)\right|dx \le \frac{G_1^{\,2}(-\eta_1)}{2\mu} + \frac{1}{\mu}\left\{\int_{-\eta_1}^{\eta_2} G_1^{\,2}(x)dx\int_{-\eta_1}^{\eta_2}\left|f(x)\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.60}$$

Cauchy-Bunyakovski eşitsizliğine göre

$$G_1(-\eta_1) = e^{\mu\eta_1}\int_{-\infty}^{-\eta_1} e^{\mu\xi}\left|f(\xi)\right|d\xi \le \frac{1}{\sqrt{2\mu}}\left(\int_{-\infty}^{-\eta_1}\left|f(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \to 0, \quad (\eta_1 \to \infty)$$

olur. Buna göre (3.60)'da $\eta_1 \to \infty$, $\eta_2 \to \infty$ şartıyla limite geçilirse,

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} G_1^{\,2}(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\mu}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

olur. Benzer biçimde, $G_2(x)$ içinde bu tür değerlendirmeler vardır. (3.59)'ten elde ederiz ki R $L_2(-\infty,\infty)$ uzayında sınırlı operatördür.

Doğrudan gösterilebilir ki,

$$T(\lambda_0)Rf(x) = f(x), \quad \forall f(x) \in L_2(-\infty,\infty) \tag{3.61}$$

$$RT(\lambda_0)f(x) = f(x), \quad \forall f(x) \in D \tag{3.61'}$$

(3.61)'den, $T(\lambda_0)$'ın değer kümesi $L_2(-\infty,\infty)$ uzayına çakışır. (3.61)'den $\ker T(\lambda_0) = \{0\}$ bulunur. Böylece $T(\lambda_0)$ operatörü $L_2(-\infty,\infty)$ uzayında tanımlı terse sahiptir ve $\{T(\lambda_0)\}^{-1} = R$ Buna göre, λ_0 $T(\lambda)$ demeti için düzenli noktadır, yani $\lambda_0 \notin \sigma(T)$ dir.

2) Gösterelim ki, bu durumda $u(\lambda_0) > 1$ dir. Böylece 1.durumdaki incelemeleri yapabiliriz. Gerçekten, eğer $\left|u(\lambda_0)\right| \le 1$ ise $u(\lambda_0)\cos t_0$ olacak şekilde $\exists t_0 \in (-\infty,\infty)$ vardır. Bu ise λ_0'ın t-periyodik sınır probleminin özdeğeri olduğunu gösterir. Ama t_0-periyodik sınır probleminin özdeğerleri Lemma 3.2.2'ye göre reeldir. Bu ise $\operatorname{Im}\lambda_0 \ne 0$ şartıyla çelişir.

3) Bu durumda, 3.1.5-b) maddesine göre, $\lambda = \lambda_0$ olduğunda (3.1) denklemi lineer bağımsız iki tane

$$\psi_1(x) = e^{\mu x}\chi_1(x), \quad \psi_2(x) = e^{-\mu x}\chi_2(x)$$

çözüme sahiptir. Burada $\operatorname{Re}\mu \ne 0$, $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$ a periyodlu x'e göre periyodik fonksiyonlardır. Daha sonrası durum 1 dekine benzer olarak yapılabilir.

Teorem 3.3.1, Teorem 3.4.1 ve Teorem 3.4.2 den aşağıdaki ana sonuç elde edilir.

Sonuç 3.4.1: $T(\lambda)$ demetinin spektrumu süreklidir ve

$[\alpha_{k-1}^{+}, \alpha_{k}^{-}], \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ aralıklar dizisinden oluşur,

$(\alpha_{k}^{-}, \alpha_{k}^{+}), \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ aralıkları ise spektral boşluklardır. Burada $\{\alpha_{2k}^{\pm}\}$ (3.22), (3.28) periyodik probleminin, $\{\alpha_{2k+1}^{\pm}\}$ ise (3.22), (3.29) yarı periyodik probleminin özdeğerleridir.

BÖLÜM 4

SONUÇ

Bu tezde

$$y'' + [\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)]y = 0, \quad (-\infty, \infty)$$

biçiminde katsayıları periyodik fonksiyonlar olan ikinci mertebeden diferansiyel operatörler demetinin spektral yapısı incelenmiştir. Burada $p(x)$ ve $q(x)$ $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı, reel değerli ve a, $(a > 0)$ periyotlu fonksiyonlar ve λ kompleks parametredir.

Spektral inceleme için öncelikle denklemin çözümlerinin kararlılık ve kararsızlık aralıkları tesbit edilmiştir. Bunun içinde Floquet teorisinden yararlanılarak ele alınan denklemin çözümleri Floquet formunda yazılmıştır.

Sonraki kısımda ise diskriminant fonksiyonun $\lambda \to \infty$ iken davranışı incelenmiş ve kararlılık aralıkları ile spektrum kümesinin eşit olduğu gösterilmiştir. Son kısımda ise spektrumun yapısı analiz edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Gelfand, I.M. (1950). Expansion in Characteristic Functions of an Equation with Periodic Coefficients, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **73 (32),** 1117-1120.

[2] Serov, M.I. (1960). Certain Properties of the Spectrum of a Non-selfadjoint Differential Operator of the Second Order, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **131(1),** 27-29.

[3] Rofe-Beketov, F.S. (1963). The Spectrum of Non-selfadjoint Differential Op. with Periodic Coefficients, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **152(6),** 1312-1315.

[4] Tkachenko, V.A. (1964). On the Spectral Analysis of the One-dimensional Schrödinger Operator with a Periodic Complex - valued Potential, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **155(2),** 289-291.

[5] Mc Garvey, D.C. (1962). Operators Commuting with Translation by One, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **4.** 366-410.

[6] Mc Garvey, D.C. (1965). Perturbation Results for Periodic Differential Operators, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **12,** 187-234.

[7] Mc Garvey, D.C. (1965). Operators Commuting with Translation by One-II: Differential Operators with Periodic Coefficients in Lp($-\infty,\infty$)", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **11,** 564-596.

[8] Gasymov, M.G. (1980). Spectral Analysis of a Class Non-self-adjoint Operator of the Second Order. *Functional Analysis and Its Applications*, **34(1),** 14-19.

[9] Gasymov, M.G. (1980). Spectral Analysis of a Class of Ordinary Differential Operators with Periodic Coefficients, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **252(2),** 277-280.

[10] Gasymov, M.G. (1982). Theory of Spectrum of Operator , *Elm-Baku*, **4,** 56-96.

[11] Guseinov, G.S. (1984). On a Quadratic Pencil of Sturm-Liouville Operators with Periodic Coeffcients, *Vestnik Moskov University*, **1(3),** 14-21.

[12] Buschmann, D., Stolz, G. ve Weidmann, J. (1995). One-Dimensional Schrödinger Operators with Local Point Interactions, *Journal Reine und Angewandte Mathematik*, **467,** 169–186.

[13] Mikhailets, V.A. ve Sobolev, A.V. (1999). Common Eigenvalue Problem and Periodic Schrödinger Operators, *Journal of Functional Analysis*, **165(1),** 150-172.

[14] Hechtman, M.M. ve Stankevich, I.V. (1977). The Generalized Kronig-Penney Problem, *Functional Analysis and Its Applications*, **11(1),** 61-62.

[15] Dmitrushchenkov, V.A. (1978). Spectrum of the Generalized Hill Operator, *Functional Analysis and Its Applications*, **13(4),** 239-317.

[16] Manafov, M.D. (2007). Spectrum of Differential Operator with Periodic Generalized Potential, *Reports of NAS of Azerbaijan*, **63(3),** 19-25.

[17] Veliev, O.A. (1980). The One-dimensional Schrödinger Operator with Periodic Complex - valued Potential, *Soviet Matematic Doklady* **250(6),** 1292-1296.

[18] Veliev, O.A. (1983). The Spectrum and Spectral Singularities of the Differential Operators with Periodic Complex-valued Coefficients. *Differential Equations*, **8,** 1316-1324.

[19] Naimark, M.A. (1968). *Linear Differential Operators*, New York: Frederick Ungar Publish Company

[20] Lusternik, L.A. ve Sobolev, V.J. (1965). *Elements of Functional Analysis*, New York: Frederick Ungar Publishing.

[21] Titchmarsh, E.C. (1962). *Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations I, II*, London: Clarendon Press.

[22] Magnus, W. ve Winkler, S. (1966). *Hill's Equation*, New York: Dover Publications.

[23] Eastham, M.S.P. (1973). *The Spectral Theory of Periodic Differential Equations*, Edinburgh-London: Scottish Academic Press.