T.C.

MUĞLA ÜNİVERSİTESİ

SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

FELSEFE ANABİLİM DALI

RIEMANN'IN MANİFOLD KAVRAMI VE YENİ BİR MEKÂN-GEOMETRİ İNŞASINDAKI YERİ

FELSEFE ALANINDA YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖĞRENCİNİN ADI
AHMET DİNÇER ÇEVİK

DANIŞMANLAR
PROF. DR. MEHMET ELGİN
DOÇ. DR. SAMET BAĞÇE

ARALIK, 2011

MUĞLA

MUĞLA ÜNİVERSİTESİ

SOSYAL BİLİMLER

FELSEFE ANA BİLİM DALI

RIEMANN'IN MANİFOLD KAVRAMI VE YENİ BİR MEKÂN-GEOMETRİ İNŞASINDAKI YERİ

AHMET DİNÇER ÇEVİK

Sosyal Bilimleri Enstitüsünce
"Yüksek Lisans"
Diploması Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 18.01.2012
Tezin Sözlü Savunma Tarihi: 19.12.2011

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet ELGİN
Tez Danışmanı : Doç.Dr. Samet BAĞÇE
Jüri Üyesi : Prof.Dr. Yıldıray OZAN
Jüri Üyesi : Doç.Dr. Bülent GÖZKAN
Jüri Üyesi : Doç.Dr. Nebil REYHANİ

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Namık Kemal ÖZTÜRK

ARALIK, 2011
MUĞLA

TUTANAK

Muğla Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü'nün 09./08/.2011 tarih ve 526/2.. sayılı toplantısında oluşturulan jüri, Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliği'nin **25/4** maddesine göre, Felsefe Anabilim Dalı Yüksek lisans öğrencisi A.DİNÇER ÇEVİK' in "Riemann'ın Manifold Kavramı ve Yeni Bir Mekân-Geometri İnşasındaki Yeri" adlı tezini incelemiş ve aday 19/12/2011 tarihinde saat 14.30'da jüri önünde tez savunmasına alınmıştır.

Adayın kişisel çalışmaya dayanan tezini savunmasından sonra 80... dakikalık süre içinde gerek tez konusu, gerekse tezin dayanağı olan anabilim dallarından sorulan sorulana verdiği cevaplar değerlendirilerek tezin .KABUL...... olduğuna oy birliği... ile karar verildi.

Tez Danışmanı	Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mehmet ELGİN	Doç. Dr. Samet BAĞÇE

Üye	Üye	Üye
Prof. Dr. Yıldıray OZAN	Doç. Dr. Bülent GÖZKAN	Doç. Dr. Nebil REYHANİ

YEMİN

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum "Riemann'ın Manifold Kavramı ve Yeni Bir Mekân-Geometri İnşasındaki Yeri" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurulmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin Kaynakça'da gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanmış olduğumu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

18.01.2012
A.DİNÇER ÇEVİK

Aileme…

TEŞEKKÜR

Muğla Üniversitesi Felsefe Bölümüne geldiğim günden beri desteğini esirgemeyen, tezin asıl meselesi üzerine odaklanmamı sağlayan ve tezin son okumasında ve geliştirilmesinde en büyük desteği aldığım tez danışmanım Mehmet Elgin'e,

Lisans eğitimim boyunca önce bilim felsefesine ardından da mekân ve geometri felsefesine ilgimin oluşmasını sağlayan, tezimin tamamlanmasında önerileri ve teşvikleriyle emek veren tez danışmanım ODTÜ Felsefe Bölümü'nden Samet Bağçe'ye,

Tezimin matematik bilgisi içeren kısımlarını anlayabilmek ve anlatabilmek için bana hem derslerini takip etme fırsatını sunan hem de değerli zamanını birebir çalışmalarımızda sabırla bana ayıran, yorumları, teşvikleriyle tez sürecinde desteğini esirgemeyen ODTÜ Matematik Bölümü'nden Yıldıray Ozan'a,

Önemli kaynaklara ulaşmamı sağlayan, içeriğe dair meseleleri sorduğum her zaman açıklayıcı yanıtlar aldığım Wuppertal Üniversitesi'nden Erhard Scholz ve Sevilla Üniversitesinden Jose Ferreiros'a,

Jürimde olmayı kabul ettikleri ve teze değerli yorum ve eleştirileri ile destek verdikleri için Nebil Reyhani ve Bülent Gözkan hocalarıma,

Desteklerini her daim her hücremde hissettiğim, sonuna ve sonsuza kadar arkamda olduğunu bildiğim ailem ve özellikle abim Diren Çevik'e,

Felsefe yoluna beraber çıktığım ve bu sürecin en keyifli zamanlarını lisans hayatım boyunca paylaştığım ve ilerde de paylaşmayı planladığım dostlarım Volkan Çifteci ve Umut Baysan'a,

Teze hem yorumlarıyla hem de İngilizce'den çevrilmesindeki çok değerli yardımlarıyla destek veren sevgili dostum Kerem Eryılmaz'a,

Bana her zaman inanan, her türlü desteği her zaman veren can dostlarım Ali Murat Çitanak ve Onur Yetiş Kılıç'a,

Zelha Nil'e,

Teşekkürü borç biliyorum...

İÇİNDEKİLER

ÖZET...iii

ABSTRACT ....İV

GİRİŞ 1

BÖLÜM 1. MEKÂNIN METAFİZİĞİNİN KISA BİR TARİHİ.. 5

1.1.Titanların Savaşı 5

1.2. Kant'ın tereddüdü: Newton ve Leibniz...10

1.3. Bilimin ve mekânın temelleri üzerine: Kant, Newton ve Leibniz.............................11

1.3.1. Kant ve Leibniz..11

1.3.2. Kant ve Leibniz'in Ötesinde Bir Yol: Metafizik...12

1.3.3. Kant ve Newton 14

1.4. Kant'ın mekân teorisi...17

1.4.1. Apriori ve aposteriori...17

1.4.2. Analitik ve sentetik yargılar...18

1.5. Kant'ın Geometri Felsefesi 19

1.5.1. Zaman ve mekân kavramları...19

1.5.2. Mekânın *metafiziksel* açımlanması 19

1.5.3. Mekânın *transendental* açımlanması 20

1.5.4. Görü ve Saf Görüde İnşa...21

1.5.5. Kant'ta 'Çoklu' (Manifold) Kavramı...38

1.5.5.1. Kapsamlı ve Yoğun Büyüklükler (Extensive-Intensive Magnitudes)...............49

2.1. Herbart'ın Felsefesi..56

2.1.1. Herbart'ın Riemann Üzerindeki Etkisi..56

2.1.3. Russell'ın Herbart-Riemann ilişkisine dair görüşleri..72

2.1.4. Torretti'nin Herbart-Riemann ilişkisine dair görüşleri 73

2.1.5. Ferreiros'un Herbart-Riemann ilişkisine dair görüşleri 76

2.1.6. Herbart'ın Kant ile İlişkisi ve Riemann Üzerindeki Etkisi 78

BÖLÜM 3. BİR GEOMETRİ TARİHİ 88

3.1. Öklidyen olmayan geometrilerin kısa bir tarihi 88

3.2. Bir matematik anlayışı geleneği olarak *Grössenlehre* 91

BÖLÜM 4. GAUSS'UN MATEMATİĞİNİN MANİFOLD KAVRAMININ AÇIKLANMASINDAKİ YERİ 93

4.1. 'Eğriler (curves) ve eğrilikler (curvatures)' 93

4.1.1. Gauss Eğriliği (Gaussian Curvature) 95
4.2. Gauss ve karmaşık sayılar 99
4.3. Gauss'un Matematiğin Temellerine İlişkin Görüşleri ve Kant ile İlişkisi 102
BÖLÜM 5. RİEMANN'IN 'HABİLİTATİON' DERSİ 110
5.1. Riemann'ın 1854 Tarihli *Habilitationsvortrag*'ının Olası Bir Yeniden İnşası 110
5.2. *Habilatitionsvortag*'ta Riemann ne diyor? Tarihsel-epistemolojik bir yorum 130
Herbart, Gauss, Riemann ve Kant 136
Değerlendirme 148
REFERANSLAR 152

ÖZET

Bu çalışmanın iki amacı vardır. Bunlardan biri Riemann'ın manifold kavramını nasıl açıkladığının hesabını vermektir. Riemann bir yandan Herbart'ın felsefesi diğer yandan da Gauss'un matematiği tarafından etkilenmiştir. Bu sebeple Erhard Scholz manifold kavramının yarı felsefi bir kavram olduğunu iddia eder. Öyleyse Riemann'ın manifold kavramında felsefesinin oynadığı rolü açıklamak önemlidir çünkü bu bize felsefenin matematikle ve diğer çalışma alanlarıyla nasıl ve ne ölçüde ilgili olabileceğini gösterecektir. Ardından bu kavramın geometri (özellikle mekân fikirlerinin evrimi ile ilgili meselelerde) mümkün sonuçlarını bilgi kuramsal bakış açısından tartışacağım.

Anahtar kelimeler: Riemann, manifold, mekân, Öklidyen olmayan geometriler.

ABSTRACT

This thesis aims to achieve two things. One is to give an account of how Riemann explains his notion of manifold. Riemann was influenced by Herbart's philosophy on the one hand and Gauss's mathematics on the other. For this reason, Erhard Scholz claims that the notion of manifold is a quasi-philosophical concept. It is therefore important to explicate the role philosophy plays in Riemann's notion of manifold as this will show how and to what extend philosophy can be relevant to mathematics and perhaps other fields of study as well. I will then discuss possible consequences of this notion for geometry (especially issues regarding the evolution of ideas of space) from an epistemological point of view.

Key Words: Riemann, manifold, space, Non-Euclidean geometries.

GİRİŞ

Geometri felsefesinde mekân anlayışının geometri ve felsefe için önemli bir tartışma zemini yarattığını görmekteyiz. Zaman ve mekân her zaman için hem felsefe hem de matematikte büyük bir ilgi kaynağı olmuştur. Matematik alanındaki bu ilgi geometrinin, dünyanın anlaşılmasında üstlendiği rol temelinde açıklanabilir. Benzer şekilde, felsefeciler de dünyayı anlama çabasında geometriye büyük bir ilgi göstermişlerdir. Çünkü onlar için zaman ve mekân bilginin merkezinde yer almaktadır. Bu anlamda geometri felsefesi matematik ve felsefenin karşılıklı etkileşiminde dış dünyanın gerçekliğinin kavranılmasına götüren yollardan biridir.

Riemann 1854 '*Habilitation*[1]' dersinde geometrinin geleneksel olmayan kavramlarla tanımlanması gerektiğini iddia etmiştir. Riemann Öklidyen geometrinin aksiyomlarının doğru olarak kabul edilmelerinin hiçbir rasyonel dayanağı olmadığını iddia eder çünkü ona göre bu aksiyomlar ne apriori ne de aposteriori olarak gerekçelendirilebilirler. Öte yandan, Riemann mekâna ilişkin genel kavramlarımızın aydınlatılması gerektiğini de düşünür. İşte Riemann'ın manifold[2] kavramı bu aydınlatma işindeki merkezi kavramdır. Manifold kavramı en yalın haliyle, "yapısallaştırılabilir noktalar kümesi" olarak ifade edilir

Manifold kavramının ortaya çıkış hikâyesi farklı disiplinlerce incelenebilir ancak bu çalışmada bu kavram ve ortaya çıkış öyküsü sadece matematik tarihi ve bilgikuramsal açıdan ele alınacaktır.

Riemann'ın manifold kavramının ortaya çıkışını ve mekân ve geometri anlayışımızda neleri değiştirdiğini görmek için tarihsel bir arka plana da ihtiyaç vardır. Bu tarihsel

---

[1] Riemann 'ın yaşadığı dönemde Alman üniversitelerinde doktora sonrası üniversite konseyi tarafından belirlenen dar bir konuda verilen ders. Bu ders başarılı bir şekilde verilmeksizin üniversitede eğitim vermenin imkânı yoktu. Monastyrsky, M. (1987). *Riemann,topology, and physics.* Boston: Birkhauser, s.23.

[2] Riemann mekânı yapısal noktalar kümesi olarak konu edinmesine karşılık gelen kavram. Bakınız; Torretti, R. (1978). *Philosophy of geometry from Riemann to Poincare.* Dordrecht: Reidel: D. Reidel Publishing Company, s.103. Daha teknik bir tanımı şöyle verilebilir; içinde sürekliliğin tanımlandığı soyut elementlerin (mekânın noktaları) seti. Alexandroff, P.(1932). *Elementary Concepts of Topology*, çevr. Alan R. Parley, Dover Publications, New York, s.8.

arka planı kurmak için öncelikle mekân fikrinin metafiziğinin tarihsel olarak incelemek gerekir. Bu nedenle, tezin birinci bölümünde bu tarihin önemli bir kısmını oluşturan Newton ve Leibniz arasındaki “mutlak mekân” (absolute space) “ilişkisel mekân” (relational space) tartışması ve bu iki kavrayış arasında Kant’ın aldığı pozisyon incelenecektir. Newton, mutlak mekânı ‘Tanrı’ gibi tözsel bir entite olarak kurar ve insan aklının bu tözsel entitenin duyusal içeriğini kavrayamayacağını öne sürerken, Leibniz mekânı dünyadaki şeylerin birbiriyle sürekli ilişkisi olarak görür ve insan zihninin soyutlama işlemiyle onu kavrayabileceğini öne sürer.

Newton’un mutlak mekân ve zaman anlayışı temelinde yükselen fiziği başarılı olup destek gördükçe, Leibniz’in mekân anlayışı önemini yitirmişti. Kant da Newton ve Leibniz arasındaki bu tartışmaya sonradan dâhil olmuştur. Kant, ilk dönem yazılarında, Leibnizci ve Newtoncu mekân anlayışlarını uzlaştırmaya çalışsa da, daha sonra Euler okumalarının da etkisiyle Newtoncu mekân anlayışına yaklaşmıştır. Kant *Saf Aklın Eleştirisi*’nin *Transendental Estetik* bölümünde ve *Prolegomena*’da zaman ve mekânı saf görünün formları olarak ele alır ve yargıları ‘analitik/sentetik; apriori/aposteriori’ şeklinde ayırır. Fizik yasalarının kurucu öğeleri olarak görülebilecek “her şeyin bir nedeni vardır” türünden önermelerin ve geometrinin önermelerinin sentetik apriori-evrensel olarak zorunlu olan ve bilgimizi genişleten yargılar olduğunu söyler.

Tezin ikinci bölümünde Herbart’ın felsefesinin genel olarak Riemann’ın geometri ve doğa felsefesine etkisi, özel olarak da Riemann’ın manifold kavramını şekillendirmesi üzerindeki etkisi konu edilecektir. Riemann’ın çalışmaları felsefi izler de taşır. Bu izlerin Herbart’ın etkisiyle ortaya çıktığını belirtmek gerekir. Herbart’ın Riemann’ın üzerinde etkili olduğu kabul edilmekle beraber bu etkinin boyutları hakkında literatürde görüş ayrılıkları bulunmaktadır. Yine de bu etkinin gerçek olduğu ve manifold kavramının felsefi bir çağrışımının bulunduğu yadsınamaz. Herbart, eğitimine idealist Fichte’nin yanında başlar, ancak eğitiminin sonlarına doğru Fichteci fikirleri eleştirir ve kendi pozisyonunu realist olarak tanımlayacaktır. Fichte felsefesinden uzaklaşan Herbart Kant felsefesine yaklaşır. Ancak mekân konusunda Kant ile aynı fikirde değildir. O, mekân konusunda

Leibnizci bir tutum benimser. Öte yandan, bilimsel disiplinler arasında Herbart felsefeye en yakın disiplin olarak matematiği görür. Onun görüşüne göre felsefe diğer bilimlerle ilişkisi içerisinde gelişmelidir. Buna ek olarak, her disiplin bir temel kavram etrafında odaklanmalı diğer tüm teorik gelişmeler bu temel kavram etrafında dönmelidir. Bu anlamda bu çalışmada Riemann'ın manifold kavramının Herbart'ın bilimlerin bir merkezi kavram etrafında ilerlemesi gerektiği anlayışıyla örtüştüğünü gösterilmeye çalışılacaktır. Daha sonra, Herbart-Riemann ilişkisi üzerine sırasıyla Scholz'un, Russell'ın, Torretti'nin ve Ferreiros'un yorumlarına değinilecektir.

Üçüncü bölümde Öklidyen olmayan geometrilerin kısa bir değerlendirilmesi yapılacaktır. Bilindiği üzere Öklidyen olmayan geometrilerin keşfi Öklid'in beşinci postülatının ispatlanması girişimlerinin tarihidir. Beşinci postülatın ispati girişimlerinde farklı metotlar denenmiştir. Bu postülatın ispatlanma girişimlerinin tarihi kullanılan yöntemler temelinde üç dönemde incelenebilir. Bu süreçteki ilk denemeler beşinci postülatın yerine daha açık bir postülat bulma girişimlerini içermekteydi. İtalyan geometrici Saccheri bu gelenekten ayrı olarak 'olmayana ergi' (*reductio ad absurdum*) metodunu kullanmıştır. Bu yolla, Saccheri beşinci postülatı yanlış olduğunu kabul ettiğimizde Öklid'in diğer tüm postülatları çelişeceğini göstermeyi denemişti. Beşinci postülatın ispatı girişimlerinin ikinci dönemi hiperbolik trigonometrik fonksiyonların kullanılmaya başlar. Alman geometrici Lambert bu fonksiyonlardan astronomik araştırmalarında faydalanmış ancak Öklidyen olmayan geometrilerin keşfine aracılık edebileceğini düşünememişti. Gauss ve Taurinus bahsi geçen fonksiyonları geometri çalışmalarında kullandı ve Öklidyen olmayan geometrilerin keşfinde öncü oldular. Diferansiyel denklemlerin geometride kullanılması üçüncü döneme işaret eder. Riemann'ı tam da bu dönem içerisinde görürüz. 19.yy. ortalarında matematik halen Grek'lerden beri süregelen geleneksel bir şekilde büyüklüklerin bilimi olarak *Grössenlehre* (büyüklüklerin bilimi, science of magnitudes) tanımlanıyordu ve bu anlayış biçimi daha önce sözünü ettiğimiz gelişmelerin yanı sıra manifold kavramının gelişmesinde etkili olmuştur.

Dördüncü bölümde Riemann'ın manifold kavramını açıkladığı '*Habilitationsvortrag*' dersindeki matematiksel açıklamaları anlayabilmek için gerekli olan ‘eğriler ve eğrilikler’ (curves and curvatures) gibi temel kavramlar açıklanacaktır. Ardından Riemann’ın takip ettiği Gauss’un çalışmaları incelenecektir. Gauss manifold kavramının biçimlenmesine yüzeyler üzerine yaptığı çalışmalarla ve karmaşık sayıları yorumlama şekliyle katkıda bulunmuştur. Onun eğrilikler ve yüzeyler üzerine çalışırken bulduğu “*Theorema Egregium”* (“Olağanüstü Teorem”) Riemann’ın geometri çalışmalarında ve manifold kavramını sunmasında önemli bir rol oynamıştır. Bu teoremin en önemli sonucu, her yüzeyin kendi dışında onu çevreleyen (örneğin Öklidyen) bir mekâna referans olmaksızın ele alınabileceğini göstermesidir. Gauss’un manifold kavramının ortaya çıkışında üstlendiği bir başka rol, karmaşık sayıları çok daha soyut bir şekilde düzlem üzerindeki noktalar olarak yorumlamasıdır.

Beşinci bölümde Riemann’ın 1854 ‘*Habilitation*’ dersinin bir yeniden inşası sunulacaktır. Bu derste Riemann geometrinin hâlihazırdaki durumunun bir kritiğini verir ve mekânı manifold olarak tanımlayışını diferansiyel denklemlerin yardımıyla gösterir. Ardından bu tanımı fiziksel mekâna uygular ve sonuçlarını incelemeye geçer. *Habilitationsvortrag’*un yeniden yapılandırılmasının ardından bu dersin ve daha da özelde manifoldun kavramının üretkenlik, yüksek açıklama gücü ve yalınlık gibi önemli kabul edilen bilimsellik ölçütlerini sağladığı iddiası temellendirilecek ve mekânı manifold olarak almanın farklı disiplinlerde nasıl kullanıldığı ve getirdiği avantajlar tartışma konusu edilecektir. Son olarak manifold kavramı temelinde Riemann’ın geometrisi bilgi kuramsal olarak tartışılacaktır.

BÖLÜM 1. MEKÂNIN METAFİZİĞİNİN KISA BİR TARİHİ

Herbart'ın Kant'ın bazı noktalarda takipçisi olmasına karşın mekân konusunda Leibniz'ci bir tutum benimsemesi Riemann'ın mekânı 'manifold' olarak tasviri ile ilgili bazı ipuçları taşımaktadır. Bu bölümde Newton ve Leibniz arasındaki mutlak mekân üzerine tartışmalara değinilecek ve Kant'ın neden nihai olarak Newtoncu mekân anlayışına yaklaştığı açıklanacaktır. Daha sonra, Riemann üzerinde önemli etkisi olan Herbart'ın Kant'ın uzay anlayışına karşı neden Leibnizci uzay anlayışını benimsediği açıklanacaktır.

1.1.Titanların Savaşı[3]

Newton mekânın cisimlerden bağımsız olduğu fikrindedir. Görünüşteki zaman ve mekândan göreli (relative) mekân ve zaman olarak bahseder:

> Zaman, mekân, yer ve hareketi herkesin bildiği şekliyle tanımlamıyorum. Yalnızca gözlemliyorum ki sıradan halk bu nicelikleri başka kavramlar altında değil onların duyulur nesnelere olan ilişkisinde kavramaktadır. Ve bu yüzden kesin önyargılar ortaya çıkmaktadır, bunları ortadan kaldırmak için bu nicelikleri mutlak ve göreceli, doğru ve görünüşte, matematiksel ve bilindik… diye ayırmak yerinde olacaktır.[4]

Ancak Newton'un vurgusu açıkça 'mutlak' ve 'matematiksel' üzerinedir:

> *Mutlak, doğru* ve *matematiksel zamanın* kendisi, onun kendi doğasından eşit şekilde, dışsal hiçbir şeye ilişkisi olmaksızın ve süre olarak başka şekilde isimlendirilerek cereyan eder. [5]

Benzer şekilde mutlak mekân için şunları yazar:

> Mutlak mekân kendi doğasında, dışsal hiçbir şeye ilişkisi olmaksızın, her zaman benzer ve hareket ettirilemez kalır. Göreceli mekân mutlak mekânların ölçüsü veya hareket ettirilebilir bir boyutudur; ki bizim duyularımız onu (göreceli mekân) cisimlere

---

[3] Amit Hagar (2008). "Kant and non-Euclidean Geometry", *Kant Studien*, 99 (1), s.82

[4] Newton, *Principles*, Jammer, M. (1993). *Concepts of Space* Dover Publications, New York, içinde s.100. "I do not define time, space, place and motion, as being well known to all. Only I must observe that the common people conceive those quantities under no other notions but from the relation they bear to sensible objects. And thence arise certain prejudices, for the removing of which it will be convenient to distinguish them into absolute and relative, true and apparent, mathematical and common."

[5] Newton, Rosenfeld, B.A. (1988). *A history of Non-Euclidean geometry.* New York: Springer-Verlag, içinde s.184. "*Absolute, true and mathematical time*, of itself, and from its own nature flows equally without relation to anything external and by another name is called duration."

> pozisyonu aracılığıyla belirler, ve o genellikle hareket ettirilemez mekân için alınır, öylece gizli, havaya ait, göksel, dünyaya göre belirlenir. Mutlak mekân ve göreceli mekân şekil ve büyüklük bakımından aynıdır; ancak onlar sayısal olarak her zaman aynı kalmazlar. Çünkü dünya, örneğin, eğer hareket ederse, havamızın bir mekânı- ki o göreceli olarak ve dünyaya göre her zaman aynı kalır-, zamanın birinde ona havanın geçeceği mutlak mekânın bir parçası olacaktır; başka bir zaman o sürekli değişecektir.[6]

Öyleyse Newton'un mekânı 'mutlak' olarak almasının anlamı onun diğer tüm mekânların kararlaştırılabilmesi için bir referans noktası olmasıdır. 'Mutlak mekân' "dışsal hiç bir şeye ilişkisi olmaksızın, homojen ve hareket ettirilemezdir"[7], o "mutlak yerlerin" bir araya gelmesinden oluşur. Bu mutlak mekânlar "verili pozisyonlarını birbirlerine göre ilişkilerinde sonsuzdan sonsuza korurlar"[8], yani 'mutlak hareket' bu 'mutlak mekânlar' arasında aktarım olur.[9] Buna ek olarak, yukarıdaki cümleler bize 'mutlak mekân'ın "bir biçimlilik, hareket ettirilemezlik, dışsal her şeyden bağımsızlık"[10] olarak sıralanabilecek karakteristikleri olan yalnızca kavramsal bir üstyapı (conceptual superstructure) değil aksine doğadaki olup bitmelere bağlı olmayan, tersine, içinde fiziksel fenomenlerin cereyan ettiği gerçek bir yapı olduğu anlatılmaktadır.

Leibniz Newton'un 'mutlak mekân' anlayışının yanlışlığını "*ayırt edilemezlerin özdeşliği"* ve "*yeter sebep ilkesi*"[11] ilkelerine dayalı olarak göstermeye çalışmıştır.

---

[6] Newton , Jammer, M. (1993) *Concepts of Space* Dover Publications, New York, içinde, s.100. "Absolute space in its own nature, without relation to anything external, remains always similar and immovable. Relative space is some movable dimension or measure of the absolute spaces; which our senses determine by its position to bodies, and which is commonly taken for immovable space, such is the dimension of a subterraneous, an aerial, or celestial space, determined by its position in respect to the earth. Absolute space and relative space are the same in figure and magnitude; but they do not remain always numerically the same. For if the earth, for instance, moves, a space of our air, which relatively and in respect of the earth remains always the same, will at one time be one part of the absolute space into which the air passes; at another time it will be continually changed."

[7] Newton, , DiSalle, R.(2006) *Understanding Space-Time*, Cambridge University Press, içinde s.25. "It is "without regard to anything external, homogeneous and immovable."

[8] A.g.e., s.25.

[9] A.g.e., s.25. "It is composed of "absolute places These absolute places "all keep given positions in relation to one another from infinity to infinity", thus absolute motion becomes translation between these absolute places."

[10] Rosenberg, B.A. (1988). *A history of Non-Euclidean geometry.* New York: Springer-Verlag, s.185. "Absolute space has characteristics of uniformity, immovableness and independence of everything external."

[11] Bu her ikisi de Leibniz'e atfedilmektedir. Basitçe *yeter neden* prensibi her şeyin bir neden yüzünden meydana geldiğini söyler. Öte yandan *ayrılamazların özdeşliği* ise eğer iki ya da daha fazla entitenin sahip oldukları tüm özellikler özdeşse aynı olduklarını iddia eder.

Bu eleştirileri incelemeye geçmeden önce Leibniz'in 'mutlak mekân-zaman' anlayışına karşı geliştirdiği argümanı tekrar kurmaya çalışacağız.

P_1 ve p_2 mutlak mekândaki noktalar, t_1 ve t_2 de mutlak zamandaki anlar olsun. P_1 noktası p_2 noktasının üç metre sağında olsun ve t_1 t_2 den sadece beş saniye sonra olsun. P_1 noktasının p_2 noktasının üç metre sağında olması için *yeterli bir neden* yoksa (en nihayetinde p_1 noktasının p_2 noktasının üç metre sağında olmak yerine pekâlâ başka bir yerde de olabilirdi) ve t_1 t_2 den beş saniye sonra olması içinde *yeterli bir neden* yoktur çünkü aradaki süre pekâlâ beş saniyeden az ya da fazla olabilirdi. Benzer şekilde, p_1 ve p_2 noktaları ve t_1 ve t_2 zaman aralıkları hiçbir yolla ayrılamazlardır. P_1 ve p_2 mutlak mekân üzerindeki aynı noktalar ise, t_1 ve t_2 aynı zaman aralıkları ise, hiçbir yolla ayrılamayan iki mekân ve iki zamandan bahsedebiliriz ki bu da *ayrılamazların özdeşliği* kanunu ile çelişir. Bu da, p_1 ve p_2 arasında ve t_1 ile t_2 arasında bir seçim yapmak anlamlı olmayacaksa Tanrı'nın seçiminin (*yeter sebep*) pek de bir anlamı kalmayacağı anlamına gelecektir. Leibniz'in argümanını şu şekilde özetlenebilir:

1. Mutlak uzay varsa bu uzayın hiçbir noktası herhangi diğer noktasından ayırt edilebilir olmayacaktır.
2. Eğer uzayın hiçbir noktası diğer herhangi bir noktasından ayırt edilebilir değilse, bir nesnenin uzayın herhangi bir noktası yerine diğer herhangi bir noktasına yerleştirilmesi arasında hiçbir fark olmayacaktır.
3. Eğer bir nesnenin uzayın herhangi bir noktası yerine diğer herhangi bir noktasına yerleştirilmesi arasında hiçbir fark yoksa Yeter-sebep ilkesi ihlal edilmiş demektir çünkü nesnenin bir nokta yerine diğer noktaya yerleştirilmesi arasında hiçbir açıklayıcı neden kalmamıştır bu durumda.
4. Tanrı her zaman en mükemmeli yarattığı için yeter-sebep ilkesi doğrudur (YSI ve MI).
5. O halde, bir nesnenin uzayın herhangi bir noktası yerine diğer herhangi bir noktasına yerleştirilmesi arasında bir fark vardır (MTT 3, 4).
6. O halde, Uzayın bazı noktaları diğer herhangi bazı noktalarından ayırt edilebilir (MTT 2, 5).

7. O halde, mutlak uzay yoktur[12](MTT 1, 6).

Leibniz'in Newton'cu 'mekân ve zaman'a eleştirilerini özetledikten sonra artık onun kendisinin mekâna ilişkin önerisine dönebiliriz. Leibniz mekânı metafiziğinin temelinde yer alan *monadlar* ile açıklar. Monadlar uzamı olmayan, evreni yansıtan dışarıya kapalı olan, zaman ve mekân içinde yer almayan ve evrendeki düzenliliği yansıtması için Tanrı iradesine gerek duyan birimlerdir.[13] Tanrı monadları evrendeki uyumu oluşturacak biçimde düzenler. Öte yandan, bizim algıladığımız mekân salt monadlar arasındaki etkileşimin sonucunda ortaya çıkmış bir yapı değildir. Mekânın algılanması insan zihninde bir operasyonuna da ihtiyaç duyar Mekân ve zaman bizim algımızda söz konusudur, Tanrı zamanın ve mekânın kaynağıdır ve o da monadlar gibi zamanın ve mekânın dışındadır. Mekân beraberce var olan fenomenlerin düzenliliğidir.[14] Leibniz mekânı gerçek bir entite olarak kabul etmez bunun yerine onu, şeylerin sürekli ve beraberce var olmalarından çıkarsar. Newton'un mutlak mekân anlayışında 'matematiksellik' ve 'mutlaklık' vurgusu olduğunu söylemiştik, Leibniz için ise mekân ilişkiler sistemidir ve bu ilişkiler sistemini 'ilişki' ve 'süreklilik' olarak ele alır. Böylece, her şeyin mekânı diğer bir şeyin o anda varlığına referansla belirlenmektedir.

Newton'cu ve Leibniz'ci mekân anlayışları, kavramsal düzeyde, düzenleme, hizaya sokma işlemlerinde iş görmeleri için tasarlanmıştır.[15] Buna ek olarak, her iki filozofun açıklamaları 'mekân''ın üç boyutlu Öklidyen geometrisi olduğunu kabul eder.[16] Öte yandan iki filozofun anlayışları arasında önemli farklılıklar vardır. Bu farklardan ilki iki filozofun mekân anlayışlarına atfettikleri ontolojilerde göze çarpmaktadır. Newton için 'mutlak zaman-mekân' var olan şeylerden önce gelirken

---

[12] Rodriguez, G. (1999). "Leibniz's argument for the Identity of Indiscernibles in his correspondance with Clarke", *Australasian Journal of Philosophy, 77 (4),* ss. 429-438.
[13] Leibniz, G.W. (1988). *Monadoloji* çev: Suut Kemal Yetkin Milli Eğitim Gençlik ve Spor Bakanlığı Yayınları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul , s.2
[14] Leibniz, G. W (1951). *Selections*, ed: Philip P. Wiener, Charles Scribner's Sons, New York, s.108.
[15] Agassi, J. (1969). "Leibniz's Place in the History of Physics", *Journal of the History of Ideas*, Vol. 30, No 3. s. 336
[16] A.g.y., s.336.

(ontolojik anlamda), Leibniz bu görüşü kabul etmez, onun için mekân mekânsal ilişkilerin zihinde soyutlanmasıyla elde edilir.[17] Khamara'nın da özetlediği gibi:

> Leibniz'in göreceli mekân ve zaman teorisinin merkezinde olan tez onların ontolojik statülerini ilgilendirmektedir: Bu tezi Leibniz'in ortaya koyduğu şekilde zaman ve mekânın varlığı, sıradan bir şekilde onların yerini dolduran şeyler olarak gördüğümüz şeylerin varlığı üzerine parazitiktir. Yani, eğer maddesel cisimler yoksa mekân yoktur ve eğer olaylar ve süreçler yoksa zaman da olmayacaktı.[18]

Yani, Leibniz'in mekân anlayışı şeylerin varlığının kalıcılığında temellenirken, Newton onu şeylerden bağımsız bir yere koyar. Ontoloji konusunda bu farkla ilgili olarak dikkat çekilen ilk nokta için Leibniz şunu söyler:

> Bana kalırsa, birden fazla şekilde açıkladım ki ben mekânı arı şekilde göreli olarak anlıyorum, zamanı olduğu gibi. Onun aynı anda var olanların düzeni olduğunu anlıyorum, zamanın ardı ardına gelmelerin düzeni olarak anladığım gibi. Çünkü mekân, onların özel varoluş yollarını dikkate almaksızın, bir arada olmaları itibariyle aynı anda var olan şeylerin olanağı açısından ifade edilir.[19]

Öyleyse Leibniz'in mekân teorisi mekânın varlığı konusunda indirgemecedir; o mekânı ayrı bir kap olarak kabul etmez. Ancak ne Newton ne de Leibniz mekânsal ilişkileri daha ilksel ilişkilere indirgeyecek kadar indirgemeci değildirler.[20]

Newton'un matematiksel mutlak mekânı sürekli iken, Leibniz'in şeylere göreli ilişkisel mekânı sürekli değildir. Bu belirleme biraz daha açıklamayı gerekli kılmaktadır. Leibniz'in süreklilik anlayışı felsefesi açısından önem taşımakla beraber onun bu konuyla ilgili görüşleri karışık görünmektedir. Leibniz'de bu karışıklığı gösteren birkaç cümle bulmak mümkün: "Madde sürekli değil, ama parçalıdır (discrete)… Aynısı sürekli olmayan değişimler için de geçerlidir." Sürekli nicelik

---

[17] Arthur, R.(1994). "Space and Relativity in Newton and Leibniz", *The British Journal for the Philosophy of Science,* Vol. 45, No. 1, s.229.

[18] Khamara.E. J. (1993). "Leibniz's Theory of Space: A reconstruction", *The Philosophical Quarterly*, Vol. 43, No. 173, Special Issue: Philosophers and Philosophies, s. 473. "The central thesis of Leibniz' relative theory of space and time concerns their ontological status: it asserts that they are, as Leibniz put it, 'relative beings', in that their existence is parasitic upon the existence of things which we ordinarily regard as their occupants. Thus if there were no material bodies, there would be no space; and if there were no events or processes, there would be no time."

[19] Leibniz, a.g.y., içinde s.473. "For my part, I have stated more than once that I hold *space* to be something purely relative, *as time* is: that I hold it to be an order of co- existences, as time is an order of successions. For space denotes in terms of possibility an order of things which exist at the same time, in so far as they exist together, without considering their particular ways of existing."

[20] Khamara.E. J. (1993). "Leibniz's Theory of Space: A reconstruction", *The Philosophical Quarterly*, Vol. 43, No. 173, Special Issue: Philosophers and Philosophies, s. 473.

olanaklara ait olan ideal bir şeydir… Gerçekte yalnızca parçalı (discrete) nicelik vardır…”[21] Öte yandan, Leibniz maddeyi “gerçekte sonsuza bölünmüş” olarak yani ‘yoğun’ olarak tanımlar ve “(sürekli) mekânın tayin edilebilir hiçbir kısmı maddeden yoksun değildir.”[22] Yine de Leibniz’in mekân teorisinin şunu iddia ettiğini göstermeye çalışan girişimler vardır: “Madde süreklidir (yani sürekli bölünebilirdir), ve maddesel evren uzamda sınırsızdır. Yine de, maddesel evrenin bir başlangıcı olduğunu farz etmek daha makul görünmektedir, öyle ki zaman geçmişe göre sonsuz olmasın.”[23] Russell’ın Leibniz’in felsefesinde ‘süreklilik’ meselesi ile ilgili yorumu meseleyi uca taşımaktadır: “Süreklilik kanununa rağmen, Leibniz’in felsefesi süreklinin tamamen inkârı olarak tarif edilebilir.”[24]

1.2. Kant’ın tereddüdü: Newton ve Leibniz

Kant, 1755 tarihli *Thoughts on the True Estimation of Living Forces*[25] adlı eserinde, Newton ve Leibniz’in mekân anlayışlarını uzlaştırma çabası içerisindedir. Leibniz ile hemfikir olarak Kant mekânsal kavramların birlikte var olan şeylerin düzeni aracılığıyla gelen empirik verilerin refleksiyonları ile değil, var olan şeylerin karşılıklı etkileşimleri yardımıyla elde ettiğimizi düşünür. Çünkü Kant için madde, öylece nedensel içsel bağlılığın kaynağı olamaz; şu halde Newton’un mutlak mekânında anlamını bulan bu yücelik (divine) ve bağımsızlık (independent) tanrıya benzer (Godlike) bir varlığı çağrıştırmaktadır.

---

[21] Leibniz, Arthur, R. T.W (1986). “Leibniz on Continuity”, *Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, Vol. 1986, Volume One, içinde s. 107. "Matter is not continuous, but discrete.... The same holds for changes, which are not truly continuous." Continuous quantity is something ideal, which pertains to possibles... . In Actuals there is only discrete Quantity...”

[22] A.g.y., “no assignable part of [continuous] space is devoid of matter."

[23] Khamara.E. J. (1993). “Leibniz’s Theory of Space: A reconstruction”, *The Philosophical Quarterly*, Vol. 43, No. 173, Special Issue: Philosophers and Philosophies, s. 475. “Matter is continuous (i.e., infinitely divisible), and the material universe is infinite in extent. However, it is more reasonable to assume that the material universe had a beginning, so that time is not infinite with respect to the past.”

[24] Russell, Arthur, R. T.W (1986). “Leibniz on Continuity”, *Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, Vol. 1986, Volume One, içinde s. 107. “In spite of the law of continuity, Leibniz's philosophy may be described as a complete denial of the continuous.”

[25] Kant, I. (1929). *Kant’s Inaugural Dissertation and Early Writings on Space*, içinde, çev. J. Handyside, ss.3-15.

Benzer şekilde 1756 tarihli *the Physical Monadology*[26] eserinde de Kant metafizikçi için nihai gerçekliğin temel, bölünemez monadlardan oluştuğu iddiası karşısında matematikçi için mekânın sonsuzca bölünebilir olduğunu savunur.[27] Sonuç olarak, fizikçi matematiksel mekânı metafiziksel madde üzerinde uygular. Bu mekân töz olarak değil tözler arasındaki ilişkiler olarak alındığında ve eğer töz kuvvetin merkezinde, kuvvetlerin kolektif işlemi olarak karşılıklı etkide olduğu kabul edilirse mümkündür. Basit bir töz hemen yanındaki monadların yaklaşımını engellemek amacıyla daha kuvvetli ya da zayıf itme kuvvetlerinin uygulanmasına göre daha geniş ya da küçük maddesel parçacıkların sayısında yer tutar. Öyleyse, mekânsal büyüklük, töz tarafından uygulanan fiili kuvvetin yoğunluğunun ölçüsü olarak tarif edilebilir.

1.3. Bilimin ve mekânın temelleri üzerine: Kant, Newton ve Leibniz

Kant'ın eleştirel felsefesinin temel amacı, zamansal-mekânsal kavramlarımızın nesnel bilimsel doğasının nasıl ortaya çıktığını anlamaya çalışmaktı. Kant, kendi felsefesini kurarken, Leibniz'in metafiziğini ve Newton'un fiziğini derinlemesine incelemiştir. Kant'a göre Leibniz'in metafiziği, kuvvet ve hareket gibi kavramların doğalarını sunmada başarısız olduğu için onun arzu ettiği türde bilgi sağlamamıştır. Öte yandan, Kant için Newton'un fiziği yeterli bir açıklama sunmaktadır.

1.3.1. Kant ve Leibniz

Kant'ın Leibnizci ilişkisel mekân fikrini reddedişi iki şekilde ortaya çıkar; bunların karşılıklı ilişkisinde Kant'ın Leibniz'in mekân fikrini reddedişini anlamamız kolaylaşacaktır. Bu amaçla öncelikle mutlak-ilişkisel mekân tartışması izlenebilir. Ardından Kant'ın metafizik üzerinden sürdürdüğü daha genel bir Leibniz eleştirisi dikkate alınabilir. Şimdi öncelikle birinci yoldan ilerleyelim.

---

[26] Kant, I. (1992). *Theoretical Philosophy* 1755-1770 içinde, çev. D. Waldford ve R. Meebbote, Cambridge: Cambridge University Press, ss. 51-66.
[27] A.g.e., s.131.

Kant 1768 tarihli **“**Örtüşmeyen Eşler”[28] makalesinde Leibniz’ci ilişkisel mekân iddiasına karşı bir örnek sunar. Sağ ve sol el tamamıyla aynı içsel özelliklere sahip olmalarına rağmen farklı uzayları örterler. Kant’ın sorusu şudur: bu tamamıyla aynı içsel özelliklere sahip iki şeyin farklı uzayları örtmesi nasıl açıklanabilir? Bunu onların içsel özellikleri bakımından açıklayamayız zira bu özellikler bakımından bir farklılık yoktur. O halde, soru ancak bu iki şeyin dışşal bir şeyle olan ilişkisi çerçevesinde açıklanabilir ki bu da bu iki cismin örttüğü mekânlarla ilgilidir. Demek ki, mekân nesnelere önsel olarak var olmalıdır. [29]

Kant *Eleştiri* döneminde hem Newton’cu hem de Leibniz’ci zaman-mekân anlayışlarını her ikisinin de “Dogmatik metafizik” olduğu gerekçesi ile reddeder. 1770 yılındaki doktora tezinden itibaren zaman ve mekânı “görünün arı formları” olarak değerlendirmeye başlar. Kant’a göre hem Newton’cular hem de Leibniz’ciler zaman ve mekânın kendinde şeylere ait olduğunu düşünmüşlerdir. Kant bu kanıya Newton’un mutlak mekânın gerçekliğini iddia etmesiyle, Leibniz’in de mekânı gerçek şeylerin ilişkilerinde temellendirmesi sonucunda varır.

1.3.2. Kant ve Leibniz’in Ötesinde Bir Yol: Metafizik

Kant metafizik meseleleri *Eleştiri* öncesinde de ele almıştır. O özellikle 1763 tarihli Berlin Bilimler Akademisi’nin makale yarışması için hazırladığı *Inquiry concerning the Distinctness of the Principles of Natural Theology and Morality* makalesinde metafiziğin ve matematiğin tanımlarındaki kesinliklerine ulaşma yöntemleri ile ilgili düşüncelerini ortaya koymuştur. Kant’a göre metafizik kesin tanımlanamayan

[28] Kant’ın eleştiri döneminde “örtüşmeyen eşler” mutlak-ilişkisel mekân tartışması bağlamında değil onun mekânın kavramlara indirgenemeyecek görüsel gösterimi iddiası temelinde mekânın görüsü problemi bağlamında tartışılmıştır. Kant’ın bu dönem incelemeleri meseleyi özel bir metafiziksel bakış açısı özel bir fenomeni açıklayabilir mi sorusu çerçevesinde değil, daha ziyade deneyimin mümkün koşulları için mekân ile ilgili neleri varsaymamız gerektiği üzerinedir. Kant’ın “örtüşmeyen eşler” argümanını mutlak-ilişkisel mekân çerçevesinde ele alışımızı şüpheli kılacak başka bir neden ise argümanın mutlak-ilişkisel mekân ile ilgili olmaktan ziyade onun mekânın üç boyutlu olması ile ilgili olmasından kaynaklanmaktadır. Yani mutlak-ilişkisel zaman mekân anlayışları birer teori iken, “örtüşmeyen eşler” mekânın daha spesifik bir özelliği olan ‘boyut’ meselesi ile ilgilidir. Bakınız; DiSalle, R.(2006) *Understanding Space-Time*, Cambridge University Press, s.62-64.

[29] Gözkan, B. (2006). “Kant’ın Eleştiri Öncesi Döneminden Eleştiri Dönemine Geçişteki Anahtar Yazı: Uzayda Yönler Arasındaki Farklılığın Nihai Dayanağı Hakkında”*, Felsefe Tartışmaları*, 37.sayı, içinde, ss. 49-51. Ayrıca bakınız: Kant, I. (1992).“Concerning the Ultimate Ground on the Differentiation of Directions in Space”, *Theoretical Philosophy* 1755-1770 içinde, çev. D. Waldford ve R. Meebbote, Cambridge: Cambridge University Press.

kavramların salt analizini yaparak ilerlemektedir. Buna karşıt olarak, Kant'a göre, matematikteki tanımlar sentetiktir.[30] Biz düşüncemizde ya da bir kâğıt üzerinde nesneleri inşa edebiliriz ve duyusal görümüz (sensible intuition) bu süreçte hayal gücümüzü sınırlayan bir işleve sahiptir. Bu sınırlayıcılık tanımlardaki olası keyfilik ve olası anlam muğlâklıklarından kurtulmamızı sağlar. Öte yandan, metafiziğin tanımlarında bu tür olası keyfilik ve olası anlam muğlâklıklarını görmek mümkündür çünkü metafizikteki kavramları tanımlarken duyusal sezginin matematiğin kavramlarını tanımlama sürecinde oynadığı sınırlama rolünü oynayacak bir yeti yoktur. Örneğin 'Tanrı' veya 'töz' dediğimizde hayal gücümüzde herhangi bir şey bulamayız ve bu nedenle de 'Tanrı' ya da 'töz' gibi kavramların tatmin edici bir tanımına ulaşamayız çünkü tanımların uygunluğunu denetlemek için temel alacağımız hiçbir şey yoktur. Eğer metafizik böyle bir tanımı sentez yardımıyla verecek olursa, duyusal sezginin eksikliğinde sonuç muhtemelen Leibniz'in tikel görülemeyen 'monad' ları gibi keyfi bir kavram olacaktır. Bu tür kavramlar üzerine inşa edilen felsefi bir sistem de ister istemez hipotetik bir karaktere sahip olacaktır.[31]

Kant için geometri salt kavramsal mantık analizi ile temellenebilecek bir bilim değildir. Öte yandan, ona göre geometri, deneysel bir bilim de değildir, onun

---

[30] Kant, I. (1992).“*Inquiry concerning the Distinctness of the Principles of Natural Theology and Morality*”, *Theoretical Philosophy* 1755–1770 içinde, çev. D. Waldford ve R. Meebbote, Cambridge: Cambridge University Press.

[31] Sonsuzluk' 'süreklilik' kavramları ile ilgili 19.yy matematiğindeki bazı gelişmelerin Kant'ın matematiksel kavramların doğasına ilişkin iddialarını çürüttüğünü düşünenler olsa da onun Leibniz'in görüşlerine getirdiği eleştirilerinin halen etkili genel olarak kabul görmektedir. DiSalle'nin de belirttiği gibi:“Onun sezginin vazgeçilmezliğine inancı, çoğu yorumcunun da belirttiği gibi, yalnızca, onun anladığı kadarıyla mantığın sınırlarını yansıtmaktadır. Yine de bu gelişme onun Leibniz geleneği eleştirisini zayıflatmamaktadır. Bilakis, eleştirisinin matematiğin daha fazla gelişebilmesi için ne kadar can alıcı bir önemi olduğunu göstermektedir. Kant eğer matematiksel akıl yürütmenin sezgisel inşalara başvurması *gerektiği* konusunda yanıldıysa, matematikçilerin *aslında* sezgiye güvendiğini düşünmesinde haklıydı-Leibniz gibi matematikçiler bile matematiği ve onun doğruluğunun temelini anlamalarını yalnızca düşünsel olarak tasavvur etti. 19.yy felsefecileri sezgisel adımların matematiksel akıl yürütmesinin olmadığı şeklindeki Leibnizci illüzyonun etkisinde kalmış olsalardı, sezgisel adımların matematiksel akıl yürütmesini temize çıkaramazlardı”. DiSalle, R.(2006) *Understanding Space-Time*, Cambridge University Press, s.64–65. “His belief that intuition was indispensable, as many commentators have pointed out, only reflected the limitations of logic as he understood it. But this development does not undermine his critique of the Leibnizian tradition. On the contrary, it reveals how crucially important that critique was for the further development of mathematics. If Kant erred in thinking that mathematical reasoning *must* appeal to intuitive constructions, he was correct in thinking that mathematicians did *in fact* rely on intuition – even mathematicians who, like Leibniz, imagined that their grasp of mathematics, and the foundation of its truth, were purely intellectual. Nineteenth-century philosophers could not have purged mathematical reasoning of intuitive steps, surely, had they remained under the Leibnizian illusion that there were none.”

önermeleri evrensel ve *apodeiktir*; yani kendi zorunluluklarını beraberlerinde getirir. Öyleyse mekânın gerçekliğinin ve bilgisinin kavranmasında deneysel olmayan apriori görüye de ihtiyaç vardır. Bu da, zihnimizin düşünme yetisinden farklı olan kendi apriori formlarına sahip duyusal görü aracılığıyla gelebilir. Sonuç olarak, Kant'a göre, Leibniz'in metafiziği hipotetik bir yapıya sahip olduğundan dolayı geometri ya da matematiğin başka bir dalı için bir temel olamazdı.

Hem Kant hem de Leibniz mekânın yalnızca empirik olarak bilinemeyeceği konusunda hemfikirdirler. Onlara göre mekânın bilgisi, bilen öznenin, empirik bilgi üzerinde gerçekleştirdiği operasyonla elde edilir.[32] Leibniz için hem mekânın formunun veya düzeninin kaynağı hem de mekânsal ilişkideki empirik içeriğin kaynağı özne olduğundan, mekânın ve zamanın ilişkiselliği empirik içerikte örtük olarak mevcuttur. Öte yandan, Kant için mekân ve zamanın düzeni ve empirik içeriği farklı kaynaklara sahip olduğundan mekân ve zamanın ilişkiselliği empirik içerikte mantıksal olarak içerilmez.[33]

1.3.3. Kant ve Newton

Leibniz'den farklı olarak Newton'un fiziğinin kurucu öğeleri Kant için bir alternatif olabilirdi. Kant Newton ve Leibniz'e dair görüşlerini olgunlaştırırken Leibniz ve Newton'u önceleri uzlaştırmaya çalışan Euler'den etkilenmiştir.[34]

18.yy.'da fiziksel araştırmaların öneminin artmaya başlamasıyla mekânın doğası tartışmasının galibi Newton'cu mutlak mekân olmuştu.[35] Euler, Newton'un mutlak mekânının mantıksal zorunluluğunu göstermek için büyük çaba sarf etmişti. Öte yandan Euler sonraları, Leibniz'in metafiziğinin, fiziksel fenomenin açıklanmasında kullanılamayacağı sonucuna varsa da, Leibniz'in metafiziksel açıklamalarına sempati duymuştur.[36]

---

[32] Northrop., F.S.C. (1946). "Leibniz's Theory of Space", *Journal of the History of Ideas,* Vol. 7, No.4, s 441.
[33] A.g.y.
[34] A.g.y., s.57, Jammer, M. (1993) *"Concepts of Space"* Dover Publications, New York, s.131.
[35] Jammer, M. (1993) *"Concepts of Space"* Dover Publications, New York, s.127.
[36] DiSalle, R. (2006) *Understanding Space-Time*, Cambridge University Press, s.51.

Euler'i Leibniz metafiziğinin doğanın açıklanmasında işlevsiz olduğu sonucuna götüren nedenleri ayrıntısına girmeden irdelemek yerinde olacaktır. Belirttiğimiz gibi Euler, Newton ve Leibniz'i uzlaştırmaya çalışıyordu, ancak o, töz, nedensellik ve nesnenin doğası gibi Leibniz'in apriori bir şekilde yaklaştığı meselelere empirik olarak yaklaşma eğilimindeydi. Euler için mesele olan mutlak zaman ve mekânın varlığının gerçekliği değildi. Bundan ziyade onun için mesele "mutlak hareketin ve dinginliğin kararlaştırılabilmesi için böyle bir mekânı tasarımlamak"[37] gerekliliğiydi. Dolayısıyla, Euler'in Leibniz metafiziğinden Newton'a geçişi onun mutlak mekân ve dinginliği empirik şekilde açıklama eğiliminin bir sonucudur. O, özellikle Leibniz'in, Newton'un mutlak hareket teorisine karşı çıkışını eleştirmiştir. Euler'e göre fiziksel kanunlar üzerine Newton'un teorisi öyle iyi temellenmiştir ki ne Leibniz'in metafiziği ne de başka herhangi bir sistem bu teoriye alternatif olamazdı. Sonuç olarak, Euler için hiçbir metafiziksel prensip fiziğin ve onun temel kavramları olan zaman ve mekânı sorgulayabilme otoritesine sahip değildir.

Kant Euler'in Newton'un *Principia*'sının temel iddiaları üzerine çalışırken geliştirdiği argümanlarından ve iddialarından etkilenmiştir. Kant'ın Euler'den etkilenmesi ile ilgili olarak özellikle iki noktanın altını çizmeliyiz. Bunlardan ilki dinamiğin zaman-mekânın belli özelliklerini varsaymak zorunda oluşu ve düzenli hareketin Leibniz'in ilişkisel mekânı ile çözülemeyeceği düşüncesidir. İkinci noktayı ise şöyle özetleyebiliriz. Leibniz mekânı ilişkilere indirgemişti. Öyleyse hareket, göreceli pozisyonun değişimine göre açıklanmalıydı. Dolayısıyla Leibniz'ci mekân anlayışında kuvvet kavramının gerçek metafiziksel bir nicelik olarak göreceli hareket ile nasıl uyumlu hale getirilebileceği önemli bir soru olarak karşımıza çıkar.[38] Yani, Leibniz'in mekân anlayışında biz mekânın karışık bir resmini görürüz:

> Newton'un dialektik argümanının nihai amacı-"ki o amaç için *Principia*'yı yazdığını bildirir-"dünyanın sisteminin referansı" sorusunu çözmektir. Ve argümanın itme kuvveti mekâniğin kabul edilmiş prensipleri, açık olmayan şekilde, soruyu radikal şekilde dönüştüren doğru hareketin tanımını içermesidir. Leibniz için, örneğin, soru, hareketin fenomenal ve göreli olduğunu belirten felsefi anlayışla dönüşmüştü: bu yüzden sorunun

---

[37] Jammer, M. (1993) *Concepts of Space* Dover Publications, New York, s.129. "…to imagine such a space for the determination of absolute motion and absolute rest."
[38] DiSalle, R. (2006). *Understanding Space-Time,* Cambridge University Press, ss.57-58.

> objektif bir yanıtı yoktur ve biz cismin dingin olduğunu söyleyen en basit hipotezi seçmekten daha fazla yapabileceğimiz bir şey yoktur.[39]

Kant temel kurucu prensiplerin mümkün deneyimi açıklaması gerektiğini yani onların transendental olması gerektiğini iddia etmişti. Bu anlamda, Newton'un mutlak zaman-mekânı maddeyi, hareketi ve kuvveti anlamak için gerekli koşulları gösteriyordu.

Kant'a göre Newton fiziği doğal süreçleri hepsi mekânik terimlerle anlaşılacak entitelerin özelliklerine, temel prensiplere ve etkileşimlere indirgemektedir. Bu suretle, mekânik felsefe fiziğin kesinliğinin sorgulanabileceği bir nokta olmaktadır. Tüm bunlara ve Kant'ın Newton fiziğini fiziğin yapısallaştırıcı tanımlarını sağlaması açısından çok önemli bulmasına karşın onu eleştirmekten geri durmamıştır. Daha önce vurguladığımız gibi Newton genel olarak fiziğin kanunlarını özel olarak da mutlak zaman ve mekânı yalnızca hipotezler olarak anlamakla kalmamıştır. Kant Newton'un mutlak zaman mekânı ile ilgili bazı metafiziksel problemler olduğuna da dile getirmiştir. Ona göre Newton'un kastettiği anlamda zaman-mekânın mutlaklığı vurgusu töz üzerine düşünen geleneği anımsatmaktadır. Newton'cular mekânı tüm cisimlere, ilişkilere, zihne önsel olan, nedensel ilişkilerden yoksun, sonsuz ve dokunarak hissedilmeyen bir şey olarak tasarladılar. Böyle bir bakış açısında, Kant'a göre, mekân kavramı sonsuz bir töz gibi tanrı benzeri (Godlike) bir entite halini almaktadır. Bu haliyle Newton'un mutlak zaman-mekânı "mümkün deneyimin ilkeleri" olamaz.

Newton ve Leibniz'in mekân tasarımlarını, Kant'ın bu iki metafizik ve mekân tasarımları arasında kalışını ve Euler okumalarının etkisiyle yönünü nasıl belirlediğini gördükten sonra artık Kant'ın mekânı nasıl tasarladığını ve onun geometri felsefesini inceleme fırsatına sahibiz.

---

[39] A.g.e., s.47. "The ultimate object of Newton's dialectical argument-"the aim for which I composed" the Principia- is to resolve the question of "frame of the system of the world". And the thrust of the argument is that accepted principles of mechanics contain, implicitly, a definition of true motion by which the question is radically transformed. To Leibniz for example, the question was transformed by the philosophical insight that motion is purely phenomenal and relative: the question therefore has no objective answer, and we can do no more than choose the simplest hypothesis about which body is at rest."

1.4. Kant'ın mekân teorisi

Bu bölümde Kant'ın epistemolojisinin temel kavramları ve bunların mekân anlayışı ile olan ilişkisi ele alınacaktır.

1.4.1. Apriori ve aposteriori

Kant apriori yargı hakkında şunları söyler:

> Şu öyleyse daha yakından araştırılması gereken ve hemen ilk bakışta yanıtlanamayacak bir sorudur: Deneyimden ve giderek tüm duyu izlenimlerinden bağımsız bir bilgi var mıdır? Bu tür bilgi apriori olarak adlandırılır ve kaynağını aposteriori, e.d. deneyimde bulan görgül bilgiden ayırt edilir. [40]

Yukarıdaki alıntı aposteriori yargıların da duyu izlenimlerinden ve deneyimden bağımsız olmayan onlara bağlı olan yargılar olduğunu ima eder. Yani Kant için apriori, basitçe tüm deneyimden bağımsız olarak anlaşılmalıdır. Buna zıt olarak aposteriori bilgi deneyim yoluyla kazanılır.

Zorunluluk ve evrensellik bilginin apriori olmasını garanti eden kıstaslardır. Bu kıstasları karşılamayan herhangi bir bilgi aposterioridir:

> Deneyim hiç kuşkusuz bir şeyin şu ya da bu doğada olduğunu öğretir, başka türlü olamayacak olduğunu değil. Öyleyse, ilk olarak, düşünüldüğünde aynı zamanda zorunluluğu ile düşünülen bir önerme varsa, bu bir apriori yargıdır ve eğer, bundan başka, kendisi de yine zorunlu olarak geçerli olan bir önerme dışında başka bir önerme dışında başka bir önermeden türetilmemişse, o zaman saltık olarak aprioridir. İkinci olarak, deneyim yargılarına hiçbir zaman gerçek ya da sağın değil ama yalnızca varsayımlı ve karşılaştırmalı evrensellik verebilir (tümevarım yoluyla), öyle ki gerçekte ancak şimdiye dek algılamış olduklarımıza göre şu ya da bu kurala aykırı hiçbir durum yoktur diyebiliriz. Buna göre, eğer bir yargı sağın evrensellik içinde, e.d. hiçbir kuraldışına olanak tanımayacak bir yolda düşünülüyorsa, o zaman deneyimden türetilmiş değildir ve saltık olarak apriori geçerlidir.[41]

Kant bu belirlemelerin hemen ardından apriori, evrensel ve zorunlu bilimlere örnek olarak matematiği verir; ona göre matematiğin tüm önermeleri bu bahsedilen özellikleri sağlamaktadır.[42]

---

[40] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, İstanbul, s.53.
[41] A.g.e., s.54.
[42] A.g.e., s.54

1.4.2. Analitik ve sentetik yargılar

Kant'a göre analitik ve sentetik yargılar arasındaki ayrım söz konusu yargılardaki özne-yüklem ilişkisine göre yapılır.

Analitik yargıların iki koşulu sağlamasını bekleriz: Yargının yüklemi öznede içerilir ve bu yargılar bizim bilgimize hiçbir şey eklemezler. Sözgelimi "üçgen üç kenarlı bir cisimdir" önermesi bu koşulları taşıması bakımından analitik bir yargıda bulunmaktadır. Sentetik önermeler, öte yandan, özne-yüklem arasında bir aynılık ilişkisi içermezler. Özne yüklemi içermese bile yine de aralarında bilgimizi arttıracak bir ilişki vardır. Kant'a göre sentetik yargıları üç biçim içinde görüyoruz:

1. Deneyimin yargıları,
2. Matematiksel yargılar,
3. Metafiziksel yargılar.[43]

Yukarıdaki tanımlamalarda, analitik yargıların yalnızca apriori olabileceği çok açıkken apriori yargıların aynı zamanda sentetik olabileceği aynı derecede açık değildir. Buna en güzel örnek matematikteki aksiyomlardır. Hem geometri hem de aritmetiğin aksiyomları analitik doğrular değilse sentetiktir ancak bunlar bildiğimiz türden sentetik yargılardan çok farklıdır (örneğin "Mars'ın yörüngesi elipstir" önermesi de sentetiktir ama bu "iki nokta arasındaki en yakın mesafe bir doğrudur" önermesinden bir hayli farklıdır). Matematikteki bu aksiyomlar aynı zamanda bir zorunluluk bildirirler fakat bu sahih önermeler analitik olmadığı için mantıksal bir zorunluluk değildir. Zorunluluk deneyimden gelemeyeceğine göre öznede bir şekilde kaynağını bulmalıdır; o halde, matematiğin bu türden yargılarına sentetik ama apriori diyebiliriz.

---

[43] A.g.e., B12, B15 , B18 , s., 63-65-66, Kant, I .(2002). *Prolegomena*, çev. İonna Kuçuradi-Yusuf Örnek, Türkiye Felsefe Kurumu, Ankara, s. 16-19.

1.5. Kant'ın Geometri Felsefesi

1.5.1. Zaman ve mekân kavramları

Zaman ve mekân apriori bilgiyi üreten "saf görünün formları"dır.[44] Kant'a göre "Uzayda şekil, büyüklük ve birbirleri ile ilişkileri belirli ya da belirlenebilirdir."[45] Kant diğer bir saf görü formu olan zaman için ise şunları söyler:

> Zaman genel olarak tüm görüngülerin biçimsel apriori koşuludur. [46]
>
> Zaman iç duyunun, e.d. kendi kendimizin ve iç durumumuzun görüsünün biçiminden başka bir şey değildir.[47]
>
> Zaman kendi için kalıcı ya da şeylere nesnel belirlenim olarak bağlı bir şey değildir; öyleyse, şeylerin görüsü tüm öznel koşullardan soyutlanırsa, geriye zaman kalır. [48]

Bizim şu an üzerinde durduğumuz mesele Kant'ın geometri felsefesi olduğu için zaman'ı bir kenara bırakıp onun mekân ile ilgili görüşleri doğrultusunda ilerleyeceğiz.

Kant'ın mekânı *açımlama* (expositions) ile ilgili daha detaylı bir incelemeye girişmeden önce Kant'ın *açımlama*'dan ne anladığına bakmak faydalı olacaktır: "Açımlama ile bir kavrama ait olanın duru (gerçi kapsamlı olmasa da) tasarımını anlıyorum; ama açımlama eğer apriori verili olanı kapsıyorsa metafizikseldir."[49]

Şimdi sırasıyla mekânın *metafiziksel* ve *transendental* açımlamalarını inceleyelim.

1.5.2. Mekânın *metafiziksel* açımlanması

Mekânın *metafiziksel* açımlamasında dört temel önerme mevcuttur:

> 1.Uzay dış deneyimlerden türetilen görgül (empirik) bir kavram değildir.[50]

---

[44] A.g.e., A22, s.79.
[45] A.g.e., s.79.
[46] A.g.e., B51, s.90
[47] A.g.e.,s.90
[48] A.g.e., s.89.
[49] A.g.e., s.80
[50] A.g.e., B38, s. 80.

Kant'a göre mekândaki şeylerin ilişkisel kısmı ile elde edilen dışsal deneyim mekânın temsilini bize vermez. Bu ilişkisellik ancak mekânı önceden varsayarsak mümkündür.

> 2. Uzay tüm dış görülerin temelinde yatan zorunlu bir apriori tasarımdır.[51]

Kant'a göre şeyler olmaksızın mekânı tasarımlayabildiğimizden ama mekân olmaksızın şeyleri tasarımlayamadığımızdan mekân zorunlu apriorididir.

> 3. Uzay genel olarak şeylerin ilişkilerinin diskürsif ya da, söylendiği gibi, evrensel bir kavramı değil, ama arı bir görüdür.[52]

Kant'a göre mekânın parçalarından bahsederken bile biz bir ve aynı mekândan bahsederiz, öyleyse o genel bir kavram değil görüdür.

> 4. Uzay verili sonsuz bir büyüklük olarak tasarımlanır.[53]

Kant'a göre mekânın tüm bölümleri ebedi biçimde aynı zamanda olduğundan o bir kavram değil saf görüdür.[54]

1.5.3. Mekânın *transendental* açımlanması

Kant *transendental* açımlama ile bir kavramın başka sentetik apriori bilgilerin anlaşılabilmesini sağlayan bir ilke olarak açıklamasını"[55] anlar. Bunun olabilmesi için iki koşul öne sürer:

> 1) Gerçekten bu tür bilgilerin verili kavramlardan doğmaları
>
> 2) Bu bilgilerin ancak bu kavram için verili bir açıklama kipinin varsayımı üzerine olanaklı olmaları gerekir.[56]

Kant bu iki koşulun ışığında sentetik apriori biçimde belirlenen geometriyi ortaya koyar:

---

[51] A.g.e., A24/B39, s.80.
[52] A.g.e. A25, s.81.
[53] A.g.e. B40, s.82.
[54] A.g.e. B40, s.82.
[55] A.g.e. B37, s.82.
[56] A.g.e., B40, s.82.

> Demek oluyor ki, benim görümün nesnenin gerçekliğinden önce gelmesi ve apriori bilgi olarak gerçekleşmesi sadece tek bir şekilde olanaklıdır: eğer benim öznemde tüm gerçek izlenimlerinden önce gelen ve nesneler tarafından uyarılmamı sağlayan duyusallığın biçiminden başka hiçbir şey içermezse. Çünkü duyu nesnelerinin yalnız ve yalnız biçimine göre görülebileceklerini ben apriori bilebilirim.[57]

> Sentetik apriori bilgi olarak Saf Matematik, ancak sırf duyuların nesneleriyle ilişki kurmakla olanaklıdır.[58]

Kant artık geometriyi sentetik apriori olarak sunmaya hazırdır:

> Geometri uzayın özelliklerini sentetik olarak ve gene de apriori belirleyen bir bilimdir. O zaman uzay tasarımımız onun böyle bir bilgisinin olanaklı olması için ne olmalıdır? Kökensel olarak görü olmalıdır; çünkü salt bir kavramdan o kavramın ötesine geçen hiçbir önerme çıkarılamaz ve gene de geometride olan şey budur. Ama bu görü apriori olmalı, e.d. bir nesnenin bizde bulunan tüm algısını öncelemeli ve dolayısıyla görgül değil ama arı görü olmalıdır.[59]

Mekânı transendental olarak açımladıktan sonra Kant'ın vardığı sonuçlar şöyle sıralanır:

> a) Uzay herhangi bir kendinde şeyin özelliğini temsil etmediği gibi onları birbirleri ile ilişkileri içinde de sunmaz; eş deyişiyle, nesnelerin kendilerine bağlı ve görünün tüm öznel koşulları soyutlandığı zaman bile sürecek bir belirlenimi temsil etmez. Çünkü ister saltık isterse göreli olsun hiçbir belirlenim ait olduğu şeyin varoluşuna önsel olarak ve dolayısıyla apriori sezilemez.

> b) Uzay dış duyunun tüm görüngülerinin biçiminden, e.d.duyarlığın öznel koşulundan başka bir şey değildir, bir koşul ki, bizim için dış görü yalnızca onun altında olanaklıdır. Şimdi, öznenin alıcılığı, nesneler tarafından etkilenme yeteneği, zorunlu olarak bu nesnelerin tüm görülerini öncelediği için, tüm görüngülerin biçiminin anlıkta tüm edimsel algılardan önce ya da apriori nasıl verilebildiğini ,ve içinde tüm nesnelerin belirlenmeleri gereken arı bir görü olarak bu nesnelerin ilişkilerinin ilkelerini tüm deneyimden önce nasıl kapsayabildiğini anlamak kolaydır. [60]

1.5.4. Görü ve Saf Görüde İnşa

Hatırlatmamız gerekirse Kant Newton ve Leibniz'i bilimlerin metafiziksel temellerine dair görüşlerini araştırdığımız birinci bölüm boyunca görü (intuition) ve

[57] Kant, I. (2002). *Prolegomena*, çev. İonna Kuçuradi-Yusuf Örnek, Türkiye Felsefe Kurumu, Ankara, s. 31.
[58] Kant, I. (2002). *Prolegomena*, çev. İonna Kuçuradi-Yusuf Örnek, Türkiye Felsefe Kurumu, Ankara, s. 33.
[59] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, İstanbul, s.82.
[60] A.g.e. A26/B42, ss.83-84.

kavram'dan (concept) bahsettik. Newton ve Leibniz'in görü ve kavramlarla ilgili görüşlerini bu bahsettiğimiz kısımda görmüştük. Peki, Kant bu konuda ne söylüyor?

Sentetik aposteriori yargıları henüz açıkladık; basitçe deneyime bağlı bilgimizi arttırıcı yargılardır. Ancak Kant'ın asıl önem verdiği saf matematiğe ve fiziğe ait olan sentetik apriori yargılardır ki onlar kendi başlarına doğruyu ve evrensel olanı yakalamaya haiz olan yargılardır: "…güvenle diyebiliriz ki bazı saf apriori sentetik bilgiler, yani Saf Matematik ve Doğa Bilimi, gerçektir ve verilmiştir; çünkü her ikisi de, kısmen sırf akıl aracılığıyla zorunluluklu bir şekilde kesin oldukları, kısmen de deneyden gelen genel anlaşma aracılığıyla ama buna rağmen deneyden bağımsız oldukları her yerde bilinen önermeler içerirler."[61] Öyleyse Kant için soru sentetik yargıların var olup olmadığı değil, onların nasıl var olduğudur. Kant'ın görüyü açıklaması bu bağlam içinde görülür. Öyleyse burada öncelikle bu çerçevede Kant'ın geometri felsefesinin merkezinde yatan *görü*[62] ve *saf görüde inşa* hakkındaki yaklaşımını inceleyeceğim.

Kant için saf görünün formları olan mekân ve zaman kavram değildirler. Bunun anlamı şudur; kavramların bir özneye yüklem olabilmeleri gerekir ancak mekân ve zaman şeylere yüklem olamazlar. Biz şeylerin mekân ve zamansallığından bahsedebiliriz ama bunu yaparken mekân ve zamanın kendisinden türetilen parçaları olarak bahsederiz, mekân ve zamanın kendisinden değil. Biz dış dünyayı mekân zaman adaları şeklinde düşünmeyiz, onu mekân zaman bütünlüğü içinde kavrarız; mekân ve zamanı tek, birlikli bütünlüklü olarak düşünürsek onları kavram olmaktan çıkartırız. Yine Kant'ın mekânın saf görü olduğuna dair "örtüşmeyen eşler" yardımıyla da mekânın neden kavram değil de görü olduğunu anlayabiliriz. Sağ ve sol elimizi biz tanımlayamayız dolayısıyla kavramsal düzeyde anlamlandıramayız.

---

[61] Kant, I (2002). *Prolegomena*, çev. İonna Kuçuradi-Yusuf Örnek, Türkiye Felsefe Kurumu, Ankara, s. 23.

[62] Kant'ın *Saf Aklın Eleştiri*'sinden yapılan alıntılar için Aziz Yardımlı'nın *Arı Usun Eleştirisi* çevirisi kullanılmıştır. Bu çeviride Almanca *Anschauung* (İngilizce; *Intuition*) terimi Türkçe 'sezgi' olarak karşılanmıştır. Ancak *Anschauung* teriminin Türkçe 'görü' terimiyle karşılamak genel olarak daha uygun bulunmaktadır. Bu çalışmada Aziz Yardımlı çevirilerinde alıntı kurallarına bağlı kalmak adına *Anscauung* teriminin karşılığı 'sezgi' olarak bırakılacak diğer yerlerde bu terim 'görü' olarak karşılanacaktır. Yine aynı nedenlerle Kant'ın *Saf Aklın Eleştiri*'sinden Aziz Yardımlı çevirisine başvurulmayan yerlerde *Saf Aklın Eleştirisi* ya da kısaca *Eleştiri* olarak bahsedilecektir.

Sağ ve sol elimizin mekânda aynı alanı ve hacmi kapatamadıklarını kendi başına kavramsal analizle gösteremeyiz; bu farka yalnızca işaret edebiliriz. Kant'ın mekândan kavram değil de görü olarak söz etmesinin nedeni budur.[63]

Kant saf ve empirik görüden bahseder. Kant saf görü ile empirik görü arasında görünün nesnesinin saf ya da empirik olmasına göre bir ayrım yapar. "Duyum yoluyla nesneyle ilişkide bulunan görüye"[64] empirik görü denir. Yani saf görü apriori olarak zihinde bulunurken, empirik görü nesnesiyle duyumun aracılığıyla ilişkilenir. Her türden kavramın nesnesi empirik görüde bulunur; dolayısıyla saf görüye dayalı matematiğin kavramları bile anlamlarını, onları empirik görünüşlerde gösterebilmemize bağlı olarak kazanırlar:[65]

> Şimdi bir kavrama bir nesne sezgide olmaktan başka türlü verilemez; ve, gerçi bir arı sezgi nesneden önce apriori olanaklı olsa da, bu sezgi bile nesnesini ve dolayısıyla nesnel geçerliliğini ancak salt biçimi olduğu gibi görgül sezgi yoluyla kazanabilir. Öyleyse tüm kavramlar ve onlarla birlikte tüm temel ilkeler, ne denli apriori olanaklı olurlarsa olsunlar, gene de görgül sezgiler ile,e.d, olanaklı deneyim için veriler ile ilişkilidirler. Bu ilişki olmaksızın hiçbir nesnel geçerlilikleri yoktur, tersine tasarımları açısından yalnızca imgelem yetisinin ya da anlağın birer oyunudurlar. Matematik kavramlarını örnek alarak bunları ilkin arı sezgileri içinde irdeleyelim. Uzayın üç boyutu vardır, iki nokta arasında ancak bir doğru çizgi olabilir v.b. Gerçi tüm temel ilkeler ve bu bilimin ele aldığı nesnelerin tasarımları anlıkta bütünüyle apriori üretilebiliyor olsalar da, eğer anlamlarını her zaman görüngülerde (görgül nesnelerde) gösteremiyor olsaydık, hiçbir anlamları olmazdı.[66]

Dolayısıyla Kant'a göre matematiğin doğruları için saf görü değil empirik görü bir zemin sağlayabilir. Dolayısıyla matematiğin gerçek olanağını, yani matematiğin empirik nesnelere uygulanabilmesini, saf görü kendi başına gösteremez.[67]

Kant'ın görü ile ilgili fikirlerinin çıkış noktası geometrinin kavramları ve önermeleri matematikle başarılı bir şekilde uyuşabilmesinden ve nesnelere eksiksiz biçimde uygulanabilmesidir:

---

[63] Reyhani, N.(2011). Kişisel diyalog.
[64] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, İstanbul, A20/B34, s.s.77-78
[65] Friedman, M. (1992). *Kant and Exact Sciences*, Harvard University Press, s.101.
[66]Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, A239-A240/B298-299, s.293
[67] Friedman, M. (1992). *Kant and Exact Sciences*, Harvard University Press, s.101.

> Eğer bir apriori görü yetiniz olmasaydı; eğer bu öznel koşul biçim açısından aynı zamanda bu (dış) sezginin kendisinin nesnesini olanaklı kılan biricik evrensel apriori koşul olmasaydı; eğer nesne (üçgen) özneniz ile ilişkisinde olmaksızın kendinde bir şey olsaydı, o zaman nasıl diyebilirdiniz ki bir üçgen çizmek için öznel koşullarınızda zorunlu olarak yatan şey zorunlu olarak kendinde üçgene ait olmalıdır?[68]

Yani Kant için matematiksel olarak bir üçgenin nesnesine uyması ancak öznenin zihnindeki görünün apriori biçimlerini temel almasıyla mümkündür. Kant geometrinin önermeleriyle nesnesinin uyuşmasının nasıl olduğunu temellendirir. Nesneler görünüşler olarak bizde vardır, bu görünüşlerin olanağı ise bizdeki mekânın saf görüsüdür. Nesnenin görünüşünün biçimi, nesneyi olanaklı kılmakla kalmaz, ona uygulandığından dolayı onunla uyuşur ve apriori olduğundan dolayı da geometri evrensel ve zorunlu olur.

Kant'ın geometrinin sentetik apriori doğasına ilişkin verdiği açıklama temellendirmesini kuvvetlendirmektedir:

> Duyulara verilen dünyamızın tüm dış nesneleri zorunlu olarak Geometrinin önermelerine noktası noktasına uygun düşmek zorundadır, çünkü duyusallık, geometricinin ele aldığı dış görü biçimin (uzamın) aracılığıyla ,o nesneleri her şeyden önce olanaklı kılar. **[69]**

Saf görüde inşanın Kant tarafından nasıl anlaşıldığına geçmeden önce Kant'ın görüye ilişkin verdiği tanımları ve açıklamaları incelemeliyiz. Görünün tanımına Kant'ın *Saf Aklın Eleştiri'*sinde şu şekilde rastlamaktayız:

> Bir bilgi nesneler ile hangi yolda ve hangi araç yoluyla bağıntılı olursa olsun, onu onlarla dolaysızca bağıntılayan ve tüm düşüncenin araç olarak göz önünde tuttuğu şey sezgidir. Ama sezgi ancak nesneler bize verildikleri sürece yer alır; ve bu da yine, en azından bu insanlar için, ancak nesnenin anlığı belli bir yoldan etkilemesi yoluyla olanaklıdır. Nesnelerin bizi etkileyiş kipi yoluyla tasarımları alma yetisine (alıcılık) duyarlık denir. Öyleyse duyarlık aracılığıyla nesneler bize verilirler ve yalnızca o bize görüleri sağlar.[70]

---

[68] A.g.e., A78, s.101.

[69] Kant, I. (2002). *Prolegomena*, çev. İoanna Kuçuradi-Yusuf Örnek, Türkiye Felsefe Kurumu, Ankara, Not 1, s.37.

[70] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, İstanbul, A19, s 77.

Burada görü zihinsel resim ve geometrik hayal ya da tasavvurumuza olanak veren şey olarak anlaşılmaktadır.[71] Kant burada görü ile aklın fakültesi olan duyarlık arasında görünün duyarlıktan kaynaklandığını belirterek bir ilişki kurma girişimindedir.[72] Öte yandan duyarlığın sezgilerin tek kaynağı olamayacağına dair yani başka yollarla bu sezgilere sahip olan varlıkların olabileceği Kant için ihtimal dâhilindedir: "Duyarlığın sezgilerin mümkün olan yegâne kaynağı olduğunu iddia edemeyiz."[73]

Prolegomena'nın 8. Bölümünde Kant matematiksel önermelerin yaşadığımız Dünya ile ilişkisini ve bu dünyada uygulanabilirliğini ele alır ve yine görüye vurgu yapar:

> Ne var ki, bu adımda güçlük azalmaktan çok artmış gibi görünüyor. Çünkü artık soru şöyle olur: bir şeyi apriori görmek nasıl olanaklıdır? Görü, nesnenin varlığına sanki doğrudan doğruya bağımlı bir tasarımdır. Bu nedenle aslında apriori görmek olanaksız gibi görünmektedir; çünkü görü bu durumda ne önceden ne de şimdi var olan ve kendisiyle ilişki içine sokulacak bir nesne olmadan gerçekleşmek zorunda olurdu, dolayısıyla görü olmazdı.Gerçi kavramlar öyle türdendir ki, bazılarını, söz gelişi bir nesnenin sadece genel olarak düşünülmesini içerenleri, bir nesneyle doğrudan doğruya bir ilişkide bulunmaksızın, pekala apriori olarak oluşturabiliriz, örneğin büyüklük, neden kavramlarını v.b.; ama bunların bile, önem ve anlam kazanmaları için somut olarak belirli bir şekilde kullanılmaları, yani herhangi bir görüye uygulanmaları gerekir, öyle ki bu görünün bir nesnesi verilsin. Ancak nesnenin görüsü nesnenin kendisinden önce nasıl gelebilir?[74]

Burada Kant *Eleştiri'*de kullandığı geometrik hayal yerine matematik ve geometrinin nesnelerinin örneklemeler olarak yani genel kavramların birer tikel durumlarının kullanılmasından bahsetmektedir.[75]

Prolegomena'da görü şu şekilde verilmektedir:

> Görü, nesnenin varlığına sanki doğrudan doğruya bağımlı olan bir tasarımdır. … Demek oluyor ki, benim görümün nesnenin gerçekliğinden önce gelmesi ve apriori bilgi olarak gerçekleşmesi sadece tek bir şekilde olanaklıdır: eğer benim öznemde tüm gerçek izlenimlerinden önce gelen ve nesneler tarafından uyarılmamı sağlayan duyusallığın biçiminden başka hiçbir şey içermezse. Çünkü duyu nesnelerinin yalnız ve yalnız biçimine göre görülebileceklerini ben apriori bilebilirim. Buradan şu sonuç çıkmaktadır:sırf duyusal görünün biçimiyle ilgili önermeler duyu nesneleri için olanaklı

---

[71] Bağçe, S. (2003). "Russell'ın Kant Eleştirisi Üzerine", *Felsefe Tartışmaları*, 30.sayı, s.31.
[72] A.g.y., s.31.
[73] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, İstanbul A254/B310 s.306.
[74] Kant, I. (2002). *Prolegomena*, çev. İonna Kuçuradi-Yusuf Örnek, Türkiye Felsefe Kurumu, Ankara, ss. 30-31.
[75] Bağçe, S. (2003). "Russell'ın Kant Eleştirisi Üzerine", *Felsefe Tartışmaları*, 30.sayı, s.31.

> ve geçerli olacak; aynı şekilde de tersine, apriori olanaklı görüler, duyularımızın nesnelerinden başka hiçbir şeyle ilgili olamazlar[76]

Burada ise Kant nesneler ile bizim duyularımız, bir başka deyişle görümüz ile duyarlığımız arasındaki ilişki bağlamında görüden bahsetmektedir.[77]

Mantık'ta:

> Bütün bilişler, yani, nesnelere bilinçlice gönderim yapan bütün temsiller, ya görüdürler ya da kavramdırlar. Görü tekil bir temsildir; kavram ise genel veya yansıtılmış sunumdur.[78]

Buradaki tanımıyla Kant her bir tikel ideyi görü olarak tanımlar. Yani zihinlerimizde tikelleri temsil eden şey görüdür. Bu anlamda görülemek hususi hale getirmek anlamına gelir. Niceleme mantığıyla bu kavramı anlamak istersek görü bağımsız bir tikel terimdir.[79]

J. Alberto Coffa da Kant'ın saf görü tanımının *Platonist, oluşturmacı* (constructivist) ve *yapısalcı* (structuralist) olarak üç farklı şekilde yorumlanabileceğini iddia eder.[80] Coffa saf görü kavramının Platonist yorumuna *Eleştiri*'den bir alıntıyla başlar:

> Bir koninin şeklinin sezgisini hiçbir görgül yardım olmaksızın ve yalnızca kavramına göre oluşturabiliriz; ama bu koninin rengi şu ya da bu deneyimde daha önceden verilmiş olmalıdır. Genel olarak bir nedenin kavramını bana deneyin tarafından verilen bir örnek üzerinde olmaksızın hiçbir biçimde görüde tasarımlayamam. [81]

Yani, nitelikler empirik görüde sergilenmezler ama nicelikler sergilenirler. Coffa burada biçim ile içerik arasında Kant'ın bir ayrım yaptığını ve bu ayrımın doğuştan ve sonradan edinilen arasındaki ayrıma uygun düşüyor gibi göründüğü söylemektedir. Bu düşünceden yola çıkarak Coffa, koninin sanki renksiz imajı daha önceden deneyimlememiş biri tarafından biçimlendirilebildiği ve bu anlamıyla bu

---

[76] Kant, I. (2002). *Prolegomena*, çev. İonna Kuçuradi-Yusuf Örnek, Türkiye Felsefe Kurumu, Ankara, s.31.
[77] Bağçe, S. (2003). "Russell'ın Kant Eleştirisi Üzerine", *Felsefe Tartışmaları*, 30.sayı, s.31.
[78] Kant, I. (1988). *Logic*, çevr. R. Hartmann- W. Schwarez, New York: Dover, s.96
[79] Bağçe, S. (2003). "Russell'ın Kant Eleştirisi Üzerine", *Felsefe Tartışmaları*, 30.sayı, s.32.
[80] Coffa, J. A. (1993). *The Semantic Tradition From Kant to Carnap: To the Vienna Station*, Cambridge Press, s.43.
[81] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, İstanbul, A715/B743, ss.660-661.

imajın saf görü olabileceğini düşündürttüğünü belirtir. Coffa Kant'ın saf görüsünün böyle bir Platonist yorumuna örnekler verir. Coffa'nın yaklaşımı, Whewell'in Kant'ın saf görüsünü, "hayali bakış" (*imaginary looking*) olarak değerlendirmesi ve Alois Riehl'in de onda "Platonik formlar öğretisinin ekosunu" duyması ile uyumludur.[82] Coffa Platonist yorumuna devam ederken yine Kant'ın inşa ile ilgili sözlerini alıntılar:

> Böylece bir üçgen çizerim ve, bunu bu kavrama karşılık düşen nesneyi ya salt imgelem yoluyla arı sezgide ya da yine ona göre bir de kağıt üzerinde görgül sezgide, ama her iki durumda da herhangi bir deneyimden hiçbir model ödünç almaksızın bütünüyle apriori tasarımlayarak yaparım. [83]

Coffa' ya göre burada inşanın tasvirinde Kant'ın görüyü hayal etmeyi içeren saf görü ile empirik görü arasında yaptığı ayrıma dikkat çeker ve bu ayrımın bizi iki farklı alan düşünmeye sevk eder.[84] Platonist yorumun Kant için saf görünün ontolojik yerinin insan zihni, Platon'un *İdealar*'ının yerinin insan zihni olmadığı düşünülürse doğru olmadığı görülebilecektir.[85] Ayrıca Coffa 'ya göre bu tarz Platonist bir okuma Kant ın matematiğin ve geometrinin dünya ile nasıl bu kadar uyumlu olduğunun anlaşılması amacıyla örtüşmemektedir. [86]

Coffa saf görünün anlaşılması ile ilgili olarak ikinci yoruma yani *oluşturmacı* yoruma geçerken bu yorumun da ilki gibi saf görü ile nesnelerin verililiği arasında eşleştirdiğini ancak bu yorumun nesneleri empirik olarak aldığını ve Kant'ın matematiksel kavramların yapılmasıyla ilgili düşünceleri merkezinde geliştiğinin altını çizer.

---

[82] Coffa, J. A. (1993). *The Semantic Tradition From Kant to Carnap: To the Vienna Station*, Cambridge Press, s.44.

[83] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, İstanbul, A713/B741, ss.659-660.

[84] Coffa, J. A. (1993). *The Semantic Tradition From Kant to Carnap: To the Vienna Station*, Cambridge Press, s.44.

[85] Yalçın, Ş. (2003). "Kant'ta Matematiğin Felsefi Temelleri", *Felsefe Dünyası*, 37. Sayı, 21 numaralı dipnot, s.134.

[86] Coffa, J. A. (1993). *The Semantic Tradition From Kant to Carnap: To the Vienna Station*, Cambridge Press, s.44.

Oluşturmacı yorumda Coffa öncelikle duyarlık ve anlama yetisi arasındaki karşılıklı ilişkiye dair ünlü Kant'ın diktumunu hatırlatır; "Görüsüz kavramlar boş, kavramsız görü ise kördür" ve yine Kant'ı alıntılar:

> Bir bilgi nesnel olgusallık taşıyacaksa, e.d. bir nesne ile ilişkili olacak ve onun açısından imlemi ve anlamı olacaksa, o zaman nesne herhangi bir yolda verilebilir olmalıdır. Onsuz kavramlar boşturlar; ve gerçi onlar yoluyla düşünmüş olsak da, gerçekte bu düşünce yoluyla hiçbir şey bilmemiş, tersine yalnızca tasarımlarla yalnızca oynamış oluruz. [87]

Coffa burada ne Kant'ın ne de takipçilerinin yapısallaştırma ile ne anlatmak istedikleri hakkında net bir fikirleri olmadığından yakınır, öyle ki ona göre yapısallaştırma kavramının açıklanmasındaki netlik ile kavramın akla yatkınlığı arasında ters bir oran vardır.[88] Coffa Kant' ın saf görüde yapısallaştırma ile ne anlatmak istediğini ne zaman dile getirmeye çalışsa empirik görüye başvurduğunu yine Kant'ı alıntılayarak gösterir: "Bir çizgiyi düşüncede *çizmeksizin*, bir çemberi ise *betilemeksizin* düşünemeyiz ve uzayın üç boyutunu aynı noktadan birbirlerine dik üç çizgi *çekmeksizin* tasarımlayamayız."[89]

Coffa'ya göre yapısalcı yorum Platonist ve oluşturmacı yorumlardan farklıdır. Bu iki yorum saf görüyü tikel gösterim olarak alır. Coffa için saf görünün yapısalcı yorumunda Kant saf ve apriori olanın bir tür nesne olarak değil empirik nesnelerinin bilgisinin kipi (modu) olarak alır.[90] Yani bu yorumda görünün tüm nesneleri empiriktir ve saf görü de empirik görünün *yalnızca formudur.* Bu yorum için Coffa *Eleştiri*'den başka bir alıntı yapar:

> Şimdi bir kavrama bir nesne sezgide olmaktan başka türlü verilemez; ve, gerçi bir arı sezgi nesneden önce apriori olanaklı olsa da, bu sezgi bile nesnesini dolayısıyla nesnel geçerliğini ancak salt biçimi olduğu görgül sezgi yoluyla kazanabilir. Öyleyse tüm kavramlar ve onlarla birlikte tüm temel ilkeler, ne denli apriori olanaklı olurlarsa olsunlar, gene de görgül sezgiler ile, e.d. olanaklı deneyim için veriler ile ilişkilidirler.[91]

---

[87] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, İstanbul, A 156/B194-195 s.217.
[88] Coffa, J. A. (1993). *The Semantic Tradition From Kant to Carnap: To the Vienna Station*, Cambridge Press, s.44.
[89] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, İstanbul, B15,. s.189.
[90] Coffa, J. A. (1993). *The Semantic Tradition From Kant to Carnap: To the Vienna Station*, Cambridge Press, s.45.
[91] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, İstanbul, A239/B298, ss.292-293.

Coffa ya göre saf görünün bu üçüncü yorumunda Kant üçgen kavramını kurarken yaptığımız şeyin üçgenin bir örneğini kurmak ya da tikel bir örneği görüye sunmak değil kurduğumuz şeyin nesnenin formu olduğunu söyleyecektir.

Coffa'ya saf görü nasıl yorumlanırsa yorumlansın Kant'ın geometri anlayışında birbiriyle ilgili ama ayırt edilebilir iki probleme işaret eder: "Saf görü Öklidyen geometrinin zorunluluğunu nasıl destekler? Neden geometrik bir argüman dizisi saf görünün rehberlik ettiği bir çıkarımlar dizisi olsun?"[92] Bu ikinci sorunun içerdiği iddia Kant'ın üçgenin iç açılarının toplamının bir dik açısı ile ilişkisini irdelediği bölümde geçer. Kant önce bir filozofun sonra da bir geometricinin bu problemle nasıl ilgilendiğini betimledikten sonra geometrici için şunu söyler:

> Sonra üçgenin karşıt kenarına koşut bir çizgi çizerek bu dış açıyı böler ve burada dış açılardan birine eşit bir bitişik dik açı elde ettiğini görür, vb. Bu yolda he zaman *sezgi tarafından güdülen bir çıkarsamalar zinciri yoluyla* sorunun bütünüyle açık ve aynı zamanda evrensel çözümüne ulaşır.[93]

Kant'ın bir kavramın inşa ile ilgili fikirlerinin onun matematiğin ve felsefenin doğasına ilişkin görüşlerini şekillendirdiğini söyleyebiliriz. Kant'ın Leibniz ve Newton'un metafiziklerini değerlendirdiği kısımları inceleyen bölümde onun matematikçinin kavramın içeriğine uygun kavramı inşa biçiminden ne denli etkilendiğini vurgulamıştım. Yani Kant felsefe ve matematiğin yöntemleri arasındaki farkı hâlihazırda fark etmişti:

> Felsefi bilgi öyleyse tikeli yalnızca evrenselde, matematiksel bilgi ise evrenseli tikelde, ya da giderek tekil olanda ve gene de apriori us aracılığıyla irdeler, öyle ki nasıl bu tekil [nesne] inşanın belirli evrensel koşulları altında belirleniyorsa, benzer olarak kavramın nesnesinin de- ki bu tekil nesne ona yalnızca onun şeması olarak karşılık düşer-evrensel olarak belirlenmiş olduğu düşünülmelidir.
>
> Öyleyse us bilgisinin bu iki türünün özsel ayrımı bu biçim ayrımından oluşur, ve özdeğinin ya da nesnelerinin ayrımı üzerine dayanmaz. Felsefeyi matematikten ayırt etmeyi isteyenler ve bunu birincinin yalnızca niteliği, ikincinin ise yalnızca niceliği nesne aldığını söyleyerek yapanlar etkiyi neden yerine almaktadırlar. Matematiksel bilginin biçimi onun yalnızca nicelik ile sınırlandırılmasının nedenidir. Çünkü yalnızca

---

[92] Coffa, J. A. (1993). *The Semantic Tradition From Kant to Carnap: To the Vienna Station*, Cambridge Press, s.45.
[93] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, İstanbul, A717/B745, s.662.

> büyüklük kavramı inşaya, e.d. görüde apriori sergilenmeye izin verirken, nitelikle ise kendilerini görgül görüden başkasına sergilenmeye bırakmazlar.[94]

Kant öyleyse saf görüde inşayı kavram ile apriori görünün uyumluluğunun bir dışa vurumu (exhibition) olarak anlar.[95] Bu dışavurum içinde biz kavramın tüm sınıfının tekil örneklemelerini görürüz. Zaman ve mekândaki saf inşalar sembolik, evrensel örneklerdir ki örneğin geometrinin önermelerinin doğrulanmasının imkânına biz bu örnekler yardımıyla sahip oluruz. Örneğin bir üçgenin yapılaştırılması sonucunda biz üçgenliği kuran ilişkilerin bir dışavurumunu görürüz. Saf görüde inşanın önemi üçgen figürü olmaksızın üçgenliği kuran ilişkileri anlamamızın zorlukla mümkün olmasından ileri gelmektedir.[96] "...uzayda herhangi birşeyi, örneğin bir çizgiyi bilmek için, onu çizmem ve dolayısıyla verili çoklunun belirli bir birleşmesini sentetik olarak ortaya çıkarmam gerekir, öyle ki bu edimin birliği aynı zamanda bilincin birliğidir (bir çizginin kavramında olduğu gibi), ve ilkin bilincin birliği yoluyladır ki bir nesne (belirli bir uzay) bilinir."[97]

Friedman'a göre saf görüde yapısallaştırma ile Kant temelde iki iddiada bulunmaktadır. Geometrinin önermelerini ispatlama girişimlerinde bazı ek çizgilerin çizilmesi gibi ekstra işlemler kanıtlama işlemi için zorunludur. Bu ekstra işlemler geometrik ispatlarımızı mekânsal nesneler haline getirirler. İkinci olarak, bu ekstra işlemler, örneğin çizgi çizilmesi işlemi sürekli olarak yapılmaktadır (*continuously introduced*). Yani bu çizgiler zaman içinde türetilmektedir ki bu da geometrik kanıtlarımızın zamansal nesneler haline getirmektedir. Friedman'a göre geometrik kanıtların zaman ve mekânsallığı Kant'ın kendi felsefesini Öklidyen geometri ve Newton fiziği üzerine temellendirebilmesine imkan vermektedir.[98]

Ancak bizim modern anlayışımızda geometrik kanıtlar zaman-mekânsal nesneler değil, belli bir formel dilin ifadeleridir. Örneğin üçgenin iç açılarının toplamının iki

---

[94] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, İstanbul, A715-B743, s.660.
[95] Winterbourne, A. T. (1988). *The Ideal and the Real*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, s.55.
[96] A.g.e., s.55, Magnani, L. (2001). *Philosophy and Geometry: Theoretical and Historical Issues*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, ss.33-34.
[97] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, İstanbul, B137-138, s.177.
[98] Friedman, M. (1985). "Kant's Theory of Geometry", Vol. 94, No.4. *Philosophical Review*, ss.459-460.

dik açıya eşit olduğu önermesini kanıtlamak istediğimizde biz ABC' nin üçgen olmasını kanıtın zaman-mekânsallığına başvurmadan Öklid'in aksiyomlarıyla yalnızca mantık yardımıyla yapabiliyoruz.[99]

Friedman ayrıca bizim modern anlayışımızda *polyadik* mantık kullandığımızı Kant'ın ise *monadik* (silojistik,tasımsal) mantık kullandığını ve bu ikincisinin sonsuzluk kavramı ile ilişkisinde dezavantajlı olduğunu belirtir. Monadik mantık çember, çizgi gibi sürekli geometrik figürlerin sonsuz bir şekilde türetilebilmesine izin vermez. Ayrıca monadik mantık iki ya da daha fazla değişken arasında ilişki kurmamıza da izin vermez.[100]

Kant'ın model aldığı Öklid geometrisinde çember, düz çizgi gibi geometrik figürleri biz postülatlar[101] yardımıyla kurabiliriz. Ancak bu postülatlar çemberlerin ve çizgilerin kesişim noktalarını garanti etmek için mantıksal olarak yeterli değildirler. Öklid böyle kesişim noktalarının varlığı için bize postülat ya da aksiyom sunmamıştır. Bu noktada Friedman örnek olarak Öklid' in "eşkenar üçgen kurma" ispatının prosedürünü verir.[102] Bu prosedürün basamaklarından biri ispat iki çemberin sürekli olduğu fikrine dayanmaktadır. Burada iki çemberin sürekli oluşundan çemberlerin merkezleri dışındaki bir noktada kesişiyor oldukları sonucu çıkmamaktadır. Ancak Öklid'in ne aksiyomları ne de postülatları arasında böyle bir süreklilik aksiyomu yoktur.

.

Bu sorunun çözümü için *süreklilik* aksiyomuna ihtiyacımız vardır.[103] Böyle bir aksiyoma sahip olabilmemiz için içinde sonsuz sayıda nesne üretebileceğimiz bir sisteme ihtiyacımız vardır. Örneğin verili bir aralıkta sürekli bir çizgi kurmak istiyorsak ya sonsuz sayıda nokta üretebilecek bir kavrama ya da bu verili aralıkta

---

[99] A.g.y., s.460.

[100] A.g.y., s.s.460,461,462. Bağçe, S. (2003). "Russell'ın Kant Eleştirisi Üzerine", *Felsefe Tartışmaları*, 30.sayı, ss.42-43.

[101] Öklid sisteminde postülatlar inşa etme işinin ilkeleridir. Aksiyomlar, ya da Öklid'in deyişiyle genel terimler (common notions) ise ispat etme işleminin ilkeleridir. Heath, T. (1965). *A History of Greek Matmematics*, Volume 1,Oxford Clarendon Press, s.336. Ayrıca bakınız; Bağçe, S. (2003). "Russell'ın Kant Eleştirisi Üzerine", *Felsefe Tartışmaları*, 30.sayı, s.37.

[102] Friedman, M. (1985). "Kant's Theory of Geometry", Vol. 94, No.4. *Philosophical Review*,ss.461-462-463.

[103] A.g.y., s.463.

sonsuz sayıda noktaya ihtiyacımız vardır. Ancak Kant'ın zamanının monadik mantığı ilksel yüklemlerin (*primitive predicates*) sonlu setinden sonsuz nesne türetmede yetersizdir.[104] Ayrıca monadik mantıkla birden fazla yüklem arasında bir ilişki tesis edilemez. Çünkü böyle bir ilişkinin tesisi niceleyici bağlılığı (*quantifier dependence*) ve ikili ya da daha fazla yüklem içeren bir mantık diline ihtiyaç duyar.[105] Örneğin sonsuzluk fikri polyadik mantıkta tesis edilebiliyorken[106] monadik mantıkta edilemez. Bir niceleyicinin diğerine bağımlılığı yani tikel niceleyicinin tümel niceleyiciye bağlı olması bize sonsuz sayıda nokta türetebilmemize imkân verir, bu da sürekli geometrik figürleri kurmamıza yardım eder. Halbuki, Friedman'a göre, Kant sonsuzluk fikrini formel ya da kavramsal olarak monadik mantıkla gösteremeyeceğinden ötürü sonsuzluk fikrini görüsel olarak düşündü yani mekânsal figürlerin tekrar süreci ile kurulduğunu gösterdi.[107]

Öklid geometrisinde çizgilerin, çemberlerin sürekliliği sağlayan aksiyomların olmamasının doğurduğu sıkıntıları giderebilmek için postülatları tekrarlı (iterative) bir şekilde uygulamaya çalışır.[108] Yani Öklid bazı postülatları gerekli figürlerin kurulabilmesi için gerekli olduğu sayıda tekrarlayarak kullanır. Bunlar Öklid'in ilk üç postülatıdır:

1) Herhangi iki noktayı birleştiren düz bir doğru parçası çizilebilir.
2) Herhangi bir düz doğru parçası, düz bir doğru parçası, düz bir doğru oluşturacak şekilde istenildiği kadar uzatılabilir.
3) Herhangi bir düz doğru parçasının bir ucu merkez, kendisi de yarıçap kabul edilerek bir çember çizilebilir.[109]

---

104 A.g.y., s.461.
105 Bağçe, S. (2003). "Russell'ın Kant Eleştirisi Üzerine", *Felsefe Tartışmaları*, 30.sayı, s.42.
106 Polyadik niceleyici mantıkta sonsuzluk fikri formel olarak şu şekilde gösterilebilir: $\forall x \exists y$ Gx,y (Gx,y: "y", "x"den büyüktür, y>x). Bağçe, S. (2003). "Russell'ın Kant Eleştirisi Üzerine", *Felsefe Tartışmaları*, 30.sayı, s.43.
107 Friedman, M. (1985). "Kant's Theory of Geometry", Vol. 94, No.4., *Philosophical Review*,ss.466-467. Bağçe ise Kant'ın 'sonsuzluk' gibi kavramları formel olarak ifade edemese bile bu tür kavramları başka şekilde gösterebilecek araçları olduğunu savunur. Bakınız; Bağçe, S. (2003). "Russell'ın Kant Eleştirisi Üzerine", *Felsefe Tartışmaları*, 30.sayı, ss-27-43.
108 Friedman, M. (1985). "Kant's Theory of Geometry", Vol. 94, No.4, *Philosophical Review*, ss.464.
109 Heath, T. (1956). *Euclid's 'Elements'*, Dover, New York, ss. 154-155.

Görü, tümelin tikelde örneklenmesidir, yani tikel mekân görüsü bilişsel olarak genel anlamıyla mekân kavramından öncedir. Kant ilkelerin kavramlardan önce geldiğini geometri bilgimize başvurarak yanıtlar:

> Böylece tüm geometrik temel ilkeler de-örneğin, bir üçgende bir arada alınan iki kenar üçüncüden büyüktür-hiçbir zaman çizgi ve üçgen gibi genel kavramlardan değil, ama ancak sezgiden, ve dahası, apodiktik pekinlikte apriori türetilebilirler.[110]

Benzer bir geometri bilgimize başvuruyu Kant doktora tezinde mekânın saf görü olduğu iddiasını temellendirirken yapar. Ona göre "mekânın üçten fazla boyutu olamayacağı, herhangi iki noktayı birleştiren yalnızca düz bir doğru parçası çizilebileceği ve herhangi bir düz doğru parçasının bir ucu merkez, kendisi de yarıçap kabul edilerek bir çember çizilebileceği" genel bir mekân tanımından çıkarsanamaz onlar yalnızca oldukları gibi mekânda somut olarak *görülür.*"[111]

Kant, doktora tezinde "örtüşmeyen eşler" ile ilgili iddiasını da saf görünün fonksiyonuna vurgu yapmak amacıyla ileri sürer: "Burada farklılık yani uyuşmazlık yalnızca bir tür saf görü yardımıyla fark edilebilir."[112] Kant burada yine geometrik ispatlara başvurur: "Geometri kendi evrensel önermelerini, zihin durumlarında olduğu gibi, nesnesini evrensel bir kavram aracılığıyla ele geçirmek suretiyle göstermez, aksine duyu durumlarında olduğu gibi, onu tikel bir görüde göze sunarak gösterir."[113] Yani tikel nesne görüsünün bilişsel önceliği bizim geometri bilgimizde temellenmektedir. Eğer biz geometri bilgimizin kavramsal değil de görüsel olduğunu gösterebilirsek, genel mekân kavramımızın bilişsel olarak yetersiz olduğunu ve tikel mekân görümüzün önsel olduğunu görürüz.[114]

---

[110] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, İstanbul, A25, s.81.

[111] Kant, I. (1929). *Kant's Inaugural Dissertation and Early Writings on Space*, içinde, çev. J. Handyside, s.60. "For that space has not more than three dimensions, that there is but one single straight line between two points, that from a given point in a plane surface with a given straight line as radius a circle can be described, etc., are not inferred from any universal notion of space, but can only be discerned in space in the *concrete*."

[112] Kant, I. (1929). *Kant's Inaugural Dissertation and Early Writings on Space*,içinde, çev. J. Handyside, s.60."It is therefore clear that in these cases the diversity, that is, the incongruence, cannot be apprehended except by pure intuition".

[113] Kant, I, a.g.e., içinde s.61. "Further, geometry does not demonstrate its universal propositions by apprehending the object through a universal concept, as is done in matters of reason, but by submitting it to the eyes in a singular intuition, as is done in matters of sense."

[114] Friedman, M. (1985). "Kant's Theory of Geometry", Vol. 94, No.4. *Philosophical Review*, ss.472-473.

Kant'a göre geometri yalnızca mantık yardımıyla ilerlemez yani geometrik akıl yürütme analitik değildir. Geometrinin önermelerini sentetik yapan şey inşa (inşa etme) işidir. Yani Kant'ın saf görüsü Öklid'in ispat işlemlerinde gerekli olan geometrik figürlerin varlığı için sürekli tekrarlanan prosedürünün yerine işlev görür. Kant Öklid'e benzer şekilde geometrik akıl yürütmelerde şekillerin rolünün mantık ispatlarında ispat basamaklarının akıl yürütmenin ilerlemesine yönelik olarak oynadığı role paralel şekilde görür. Geometrik önermelerin sentetik oluşu geometrik şekillerin inşa etme işinde kullanılmasından ileri gelmektedir.[115]

Kant olanaklı olanın görü ve kavramların biçimsel koşullarını sağlaması gerektiğini, yalnızca bir çelişkinin bulunmamasının mümkün bir geometrik figürü kurmak için yeterli olmadığını belirtir:

> Böyle bir kavramda hiçbir çelişkinin kapsanmaması gerektiği hiç kuşkusuz mantıksal koşuldur; ama kavramın nesnel olgusallığı için,.e.d. kavram yoluyla düşünüldüğü biçimiyle bir nesnenin olanağı için bu hiçbir biçimde yeterli değildir. Böylece, iki düz çizgi arasına kapatılmışmış bir beti kavramında hiçbir çelişki yoktur. Çünkü iki düz çizginin ve bunların kesişmelerinin kavramları bir betinin olumsuzlanmasını, kapsamaz; tersine, olanaksızlık kendinde kavramdan değil, ama onun uzayda yapılaştırılmasından, e.d. uzayın belirleniminin koşulundan kaynaklanır. [116]

Kant'a göre geometrik bir figürün olanağını saptayabilmek için gereken şey olanaklı deneyimin bütün nesnelerine temel olabilecek koşullar altında düşünülebilir olmasıdır. [117] Kant olanaklı olana dair görüşlerine şöyle devam eder:

> Olanaklı tüm deneyim alanımıza ait olanların dışında başka algıların ve dolayısıyla bütünüyle bir özdek alanın var olup olamayacağı konusunda anlak karar veremez. Onun işi yalnızca verili olanın sentezi ile ilgilenmektir. Dahası edimsel her şeyi (tüm deneyim nesneleri) salt küçük bir parçası olarak kapsayan geniş bir olanak alanına açılmamızı sağlayan alışıldık tasımlarımızın yoksulluğu apaçık gözler önündedir. Edimsel her şey olanaklıdır; doğal olarak buradan mantıksal evirme kuralına göre şu salt tikel önerme çıkar: Olanaklı kimi şeyler edimseldir; ve bu öyle görünür ki , 'Edimsel olmayan çok şey olanaklıdır' anlamına da gelecektir. [118]

[115] Bağçe, S. (2003). "Russell'ın Kant Eleştirisi Üzerine", *Felsefe Tartışmaları*, 30.sayı, ss-29-38.
[116] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, İstanbul, A221/B268, ss.270-271.
[117] A.g.e., A224, s.273.
[118] A.g.e., A231, s.282.

Bu alıntılardan yola çıkarak Friedman Kant'ın iki anlamda olanaktan bahsettiği sonucuna varır. Ona göre Kant'ın olanaklılık anlayışı şöyle açıklanabilir. Düşünmenin koşulları ile görü ve kavramanın birlikteliği tarafından sağlanan olanaklılık arasında bir ayrım vardır. Kant için düşünmenin koşulları bizim anladığımız anlamda mantıksal olanaklılığa değil daha çok 'kendinde şey' in boş fikrine çelişmezlik ilkesi aracılığıyla sınır çizen düşünmenin koşullarına karşılık gelir. Dolayısıyla bizim anladığımız *mantıksal olanaklılık* düşünmenin koşulları tarafından sağlanır. *Gerçek olanaklılık* ise düşüncenin koşulları ve empirik görü aracılığı ile belirlenir. Bu anlamda mantıki olanaklılık *saf matematiğe* karşılık gelirken gerçek olanaklılık *matematiksel fiziğe* ve bizim *fiziksel olanaklılık* anlayışımıza yakındır.[119]

Burada eğer mantıksal olanaklılıktan, modern niceleyiciler teorimize denk gelen bugünkü mantıksal olanaklılığı anlarsak, mantıksal olanaklılık bizim için, Öklidyen mekânın, Öklidyen olmayan mekânlarla birlikte birer eleman olarak içerildiği geniş bir kümeye işaret edecektir. Bu durumda gerçek olanaklılığı ise yalnızca Öklidyen mekânı içeren bir küme olarak düşünme yanılgısına düşeriz.[120] Kant için mantıki olanaklılık düşüncenin koşullarıyla yani genel mantıkla yani çelişmezlik ilkesi ile uyum içinde olmaktır. Bu meseleyi 'İki çizginin bir uzayı kapatamaması' önermesinden yola çıkarak daha iyi anlayabiliriz. Bu önermenin tersini aldığımızda 'İki çizginin bir uzay kapatabilmesi' önermesini elde ederiz ve bu önerme Öklidyen olmayan mekânlarda geçerli olabilen bir önermedir ve Kant bunun mantıki olarak kendisiyle çelişmeyen bir ifade olduğunu yani mantıki olarak olanaklı olduğunu kabul etmekle birlikte onun gerçekten olanaklı olduğunu kabul etmeyecektir. Çünkü insan zihni böyle bir geometrik figürü kuramaz, biz zaman ve mekânın Öklidyen görüsüyle nesneleri kurarız:

> Ama kavramların bizim duyusal sezgimizin ötesine bu genişlemesinin hiçbir yararı yoktur. Çünkü o zaman nesnelerin boş kavramlarıdırlar ve bu nesnelerin olanaklı olup olmadıklarını bile onlarla yargılayamayız. Yalnızca düşünce biçimleridirler ki hiçbir nesnel olgusallıkları yoktur, çünkü elimizde bu düşünce biçimlerinin biricik kapsamlarını oluşturan tam algının sentetik birliğinin uygulanabileceği ve böylece bir

---

[119]Friedman, M. (1985). "Kant's Theory of Geometry", Vol. 94, No.4. *Philosophical Review* ,ss.503-504. Friedman, M. (1992). *Kant and Exact Sciences*, Harvard University Press, ss. 99-100.
[120] Friedman, M. (1985). "Kant's Theory of Geometry", Vol. 94, No.4. *Philosophical Review*,ss.503.

> nesneyi belirleyebilecek hiçbir sezgi yoktur. Ancak bizim duyusal ve görüsel sezgimiz ona anlam verebilir. [121]

Aslında Kant'ın saf görünün mekân formunu Öklidyen almak suretiyle işaret ettiği sınırlamaya benzer bir sınırlamayı Riemann'da yapar:

> Basitlik sırasındaki bir sonraki vaka, muhtemelen, doğru elemanının dördüncü dereceden bir diferansiyel ifadenin dördüncü kökü tarafından ifade edildiği manifoldları içerecektir. Daha genel olan bu sınıfı araştırmak için çok farklı ilkelere ihtiyaç olmayacaktır. Yalnız, özel olarak sonuçların geometrik olarak ifade edilemeyecek olmasından ötürü, bu araştırma çok zaman alacaktır ve mekân kuramına görece yeni bir ışık tutacaktır.[122]

Ancak burada altı çizilmesi gereken bir nokta vardır. Kant için mekânın özellikleri Öklidyen geometri tarafından belirlenir. İnşa saf mekân görüsünde gerçekleşir ve bu insanın geometrik akıl yürütmesinin doğal sonucudur. Yani Kant'ın vurgusu daha çok insanın mekân ve geometri anlayışının görüsel bir noktadan sınırlarken Riemann'ın dördüncü dereceden diferansiyellerle ifade edilen manifoldlar yerine sabit eğikliğe sahip manifoldlarla yola devam etmesi sürekli tikelden genel durumlara gitmeye çalışan bir matematikçi için J. Gray'in deyimiyle "yapay"dır.[123] Yine de bu tutumun Riemann'ın kendi genel amaçlarıyla örtüştüğü iddia edilebilir. Riemann'ın en temel amacı geometrinin temelinde yatan gerçek hipotezleri ortaya koymaktı. Dolayısıyla mekânın metrik ilişkilerinin kendisinden yola çıkılarak kararlaştırılacağı en temel verileri araştırmalıydı. Bu temel verilerden biri de mekândaki niceliklerin ölçümünden yola çıkan mekânın sabit eğriliğe sahip manifold olması sonucuydu.[124]

Friedman'a göre Kant'ın Öklid aksiyomlarının dış dünyanın ayrıntılı bir tasarımının gösterilmesinin *en genel koşullarını* sunduğu düşüncesi Riemann'ın 1854 tarihli *Habilitationsvortrag*' ında sunmasıyla bu en genel koşullardan *daha genel koşulları* sağlayacak manifold kavramını sunmasıyla sorunlu bir hale gelir:

---

[121] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, İstanbul, B149, s.185.
[122] Riemann, B. (1929). "On the Hypotheses Which Lie at The Foundations of Geometry", çevr. Simith,D.E in *A Source Book in Mathematics* içinde, s.417.
[123] J. Gray, Tazzioli, R. (2003). "Towards a history of the geometric foundations of mathematics Late XIXth century", *Revue de Synthese*, Volume 124, Number 1, içinde , s.18.
[124] A.g.y., s.18.

> Öklid'in aksiyomlarıyla ilgili ciddi bir soru cevaplanmayı beklemektedir. Üzerine gidilirse, Kant, muhtemelen şöyle diyecektir: Bu aksiyomlar öyle koşulları temsil etmektedir ki, bu koşullar altında tek başına bir yer kaplayan büyüklük kavramı ve dolayısıyla sıkı bir dış dünya anlayışı mümkün olmaktadır (B204). Ve artık şunu biliyoruz ki, Kant burada ciddi anlamda bir yanılgı içindedir. 1854'te Riemann n-boyutlu genel bir manifold kavramı geliştirmiştir ve bu kavram, üç boyutlu Öklid mekânını ve Kant'ın (veya 18. yy'da yaşamış herhangi bir kimsenin) hayal bile edemediği çok sayıda ek olanağı çok özel durumlar olarak içermektedir.[125]

Bu iddiası için Friedman Kant'ın şu sözlerine referans verir:

> Uzam matematiği (geometri), belitleri ile birlikte- ki bunlar duyusal apriori sezginin dış görüngünün bir arı kavramının şemasının ortaya çıkmasını sağlayan koşulları anlatırlar-, şekillerin üretiminde üretken imgelem yetisinin bu ardışık sentezi üzerine dayanır; örneğin, 'İki nokta arasında salt bir doğru çizgi olanaklıdır'; ya da , 'İki çizgi bir uzay kapatamazlar' vb.[126]

Hâlbuki burada Kant dış *görünüşten* (appearances) bahsetmektedir, Friedman'ın iddia ettiği gibi dış dünyanın tasarımından değil. Riemann dış dünyanın farklı boyutlarda olabileceğinin olanağını gösterir ama Kant açısından burada dikkat edilmesi gereken şey onun nesnelerin bize görünüşte üç boyutlu Öklid geometrisinden farklı bir şekilde verilemeyeceğini söylemesidir. Dış dünya kaç boyutlu olursa olsun biz onunla Öklidyen geometrinin belirlenimleri ile ilişki içindeyizdir. Kant dış dünyanın Öklidyen aksiyomlara uymayacak bir şekilde yaratılamayacağı iddiasında değildir, geometrik olarak farklı bir dünya tasarımı mümkündür ama *görünüş* açısından baktığımızda bizim dış dünya ile ilişkimiz Öklidyendir.

Kaldı ki Friedman burada haklı olsa da Kant'ın kaygısı mümkün deneyimin koşullarını ortaya koyabilmektir. Görünün saf formları olan zaman ve mekân

---

[125]Friedman, M. (1985). "Kant's Theory of Geometry", Vol. 94, No.4. *Philosophical Review* ,s.505. "There remains a serious question about Euclid's axioms, of course; when pressed, Kant would most likely claim that they represent the most general conditions under which alone a concept of extended magnitude - and therefore a rigoruous conception of an external world- is possible (B204). And of course, we now know that Kant is fundamentally mistaken here. In 1854 Riemann developed the general concept of n-fold extended manifold- containing three dimensional Euclidean space as one very spacial case alongside of more additional possibilities than Kant (or anyone else in the eighteenth century) ever imagined."

[126] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, İstanbul, B204, ss.223-224.

nesneleri *görebilmemizin* imkânını yaratırlar *düşünmemizin* değil.[127] Öyleyse 'İki çizgi bir uzay kapatmazlar' türünden bir önermenin biz tersini düşündüğümüzde mantıki olanaksızlık oluşturmaz, böyle bir önermenin tersini düşünmeyle dile getirilen ('İki çizgi bir uzayı kapatırlar') türünden Öklidyen olmayan bir önermede dile getirilen ilişkiyi düşünebiliriz ancak görmemiz mümkün olmaz.

1.5.5. Kant'ta 'Çoklu' (Manifold) Kavramı

Riemann'dan önce Kant hem *Eleştiri* öncesi yazılarında hem de *Prolegomena, Metaphysical Foundations of Natural Science* ve *Saf Aklın Eleştirisi* gibi sonraki eserlerinde çoklu (*manifold*) kavramını kullanmıştır. Literatürde Riemann'ın manifold kavramını Kant'a borçlu olabileceği yönünde spekülasyonlarda bulunulabileceği yönünde iddialar[128] olsa da, benim bu bölümdeki amacım böyle bir ilişki kurulmasının mümkün olup olmadığını araştırmaktan ziyade Kant'ın genel olarak büyüklük kavramını araştırmak ve bu kavramın onun felsefesinde temelde cebir- aritmetik ve geometri arsındaki farklara dayandırılan bir çeşitlilik içinde kavrandığını göstermek olacak. Böylece Kant'ın genel olarak büyüklük kavramının onun bilme edimini özellikle de matematiksel bilme edimini açıklamasındaki rolü geometri felsefesinin temelinde yatan saf görü ve saf görüde inşa ile ilişkisinde açıklamaya çalışacağım.

Kant bilginin kaynağı ile ilgili olarak yaptığı apriori-aposteriori ayrımını manifolda da uygular:[129]

> En genel anlamda alındığında sentez ile değişik tasarımları birbirlerine ekleme ve onlardaki çokluyu tek bir bilgide kavrama edimini anlıyorum. *Eğer çoklu görgül olarak değil ama apriori olarak verili ise (tıpkı uzay ve zamandaki çokluk gibi)*, böyle bir sentez arıdır. Tasarımlarımızın tüm analizinden önce onların kendilerinin verilmiş olması zorunludur, ve içerik açısından hiçbir kavram analiz yoluyla doğamaz. Ama ilk olarak bir çoklunun *(bu ister görgül isterse apriori verili olsun)* sentezi birliği ortaya çıkarır ki, başlangıçta henüz

[127] Reyhani, N.(2010). "Sentetik apriori: Tarihsel Arkaplanı ve Bugün için Anlamı", *Bilgi Felsefesi*, ed. Betül Çotuksöken –Ahu Tunçel, Heyamola Yayınları, İstanbul, içinde s.213.

[128]Bakınız; Plotnitsky, A. (2009). "Bernhard Riemann's Conceptual Mathematics and Idea of Space", *Configurations*, Vol. 17, No:1, s.112.

[129] Yücel Dursun (2004). *Felsefe ve Matematikte Analitik/Sentetik Ayrımı*, Elips Kitap.ss,54-55.

> ham ve karışık olabilir ve bu nedenler analize gereksinir; gene de sentez bilgilere doğru öğeler toplayan ve bunları belli bir içeriğe birleştirendir; öyleyse bilgimizin ilk kaynağı üzerine yargıda bulunmayı istiyorsak, dikkat etmemiz gereken ilk nokta sentezdir.[130]

Kant *Eleştiri'*nin birçok yerinde görünüşün manifoldundan bahseder. Buna göre her görünüş bir manifold içerir:

> Bize verilen ilk şey görüngüdür ki, bilinç ile bağlandığı zaman algı olarak adlandırılır (en azından olanaklı olan bir bilinç ile ilişkisi olmaksızın görüngü bizim için hiçbir zaman bir bilgi nesnesi olmayacak ve bu yüzden bir hiç olacaktır ve kendinde hiçbir nesnel olgusallığı olmadığı ve yalnızca bilgilerde var olduğu için genel olarak hiçbir şey olacaktır). Ama her görüngü çoklu kapsadığı için, ve dolayısıyla değişik algılar anlıkta kendi içlerinde dağınık ve ayrı olarak bulundukları için, duyunun kendisinde elde edemeyecekleri bir birleşmeleri gereklidir. Öyleyse bizde bu çoklunun sentezi için bir etkin yeti vardır ki, bunu imgelem yetisi olarak adlandırırız ve bunun dolaysızca algılar üzerinde uygulanan edimine ayrımsama diyorum. İmgelem yetisinin sezginin çoklusunu bir imge içine getirmesi gerektiği için, izlenimleri daha önceden etkinliği içine almış, e.d. ayrımsamış olmalıdır.[131]

Yani Kant'a göre görünüşün içeriği manifolddan oluşur. Görünüşün biçimi ise görünüşün manifoldunun düzenlenmesi ve belirlenmesi işinde rol alır; "Görüngüde duyuma karşılık düşene onun özdeği, ama görüngü çoklusunu belli ilişkiler içinde düzenlenebilir kılana ise görüngünün biçimi diyorum".[132] Görünüşün biçimine biz apriori olarak sahibizdir içeriği ise empirik olarak verilir. Apriori biçim içeriğin olanağının koşulu olduğu için zihindedir. Görünüşün çokluğu da zihindedir ama empirik olarak verilir.[133]

Kant zihinde manifoldun nasıl oluştuğuna dair net bir tanım vermemekle beraber şunları söyler:

> Genel mantık, daha önce birçok kez söylendiği gibi, bilginin tüm içeriğini soyutlar ve ona başka nereden olursa olsun analiz yoluyla kavramlara dönüştüreceği tasarımların verilmesini bekler. Buna karşın aşkınsal mantık apriori duyarlığın bir çoklusunu önünde bulur ki, bu arı anlak kavramlarına bir gereç verebilmek için ona aşkınsal estetik tarafından sunulur ve yokluğunda bu kavramlar tüm içerikten yoksun ve dolayısıyla bütünüyle boş olacaklardır. Uzay ve zaman arı apriori sezginin bir çoklusunu kapsarlar; ama gene de anlığımızın alıcılığının koşullarına aittirler ki, anlık ancak onların altında nesnelerin tasarımlarını alabildiği için, her zaman bu nesnelerin kavramlarını da

---

[130] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, A78, s.127.
[131] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, A120, s.164.
[132] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, A20/B34, s.77.
[133] Yücel Dursun (2004). *Felsefe ve Matematikte Analitik/Sentetik Ayrımı,* Elips Kitap, s.54.

> etkiliyor olmalıdırlar. Ama düşüncemizin kendiliğindenliği bu çoklunun bilgisinin oluşturulabilmesi için ona ilkin belli bir yoldan girilmesini, soğrulmasını ve bağlanmasını gerektirir. Bu eylemi sentez olarak adlandırıyorum.[134]

Burada bahsedilen apriori duyusallığın manifoldunun saf anlığın kavramlarının gereçleri (material) olması gibi manifold da genel olarak bilgimizin malzemesidir. *Eleştiride* manifoldun geçtiği yerler göz önüne alındığında manifoldun duyum sonucu oluşan tasarımlar olarak alınması makul bir yorum olarak görünmektedir. Ancak yine de bu daha çok empirik manifolda yakın duran bir yorumdur ve apriori manifold için böyle bir yorum geçerli olmayabilir.[135]

Kant büyüklüğü şöyle tanımlar:

> Şimdi, genel olarak sezgideki çoklu türdeşin bilinci, bir nesnenin tasarımının ancak onun yoluyla olanaklı olması ölçüsünde, bir büyüklük (*quanti*) kavramıdır.[136]

Kant manifold terimini özel teknik bir anlamda kullanmaz, her türlü çokluk için bu terimi kullanır. Büyüklük olmanın temel özelliği homojen manifold olmaktır. Daha da ötesinde görüde homojen manifold olmaktır. Büyüklük kavramına sentetik birliği eklemeksizin büyüklüğün görüde homojen çokluk dışında bir anlamı yoktur.[137] Kant büyüklüğü görüdeki genel homojen manifold olarak tanımlar ve bu suretle o bizim arı formlarımız olan mekân ve zamandan soyutlanan bir şeydir.[138]

Öte yandan Kant'ın özellikle matematiksel bilme ile ilgili kullandığı iki kavram daha vardır; *quantum* (*Alm.'quanti', İng. 'quantum'*) *ve quantitas*. Bu iki kavram için de Kant 'büyüklük' (*Gröse*) terimini kullanır. Bu iki kavram arasındaki ayrımı Kant *Görünün Aksiyomları* (*Axioms of Intuition*) kısmında yapar. Latince *–itas* eki soyut

---

[134] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, A77, ss.126-127.
[135] Dursun, Y. (2004). *Felsefe ve Matematikte Analitik/Sentetik Ayrımı*, Elips Kitap, s.54.
[136] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, B203, s.223.
Kant, I. (1965). *Critique of Pure Reason*, trans. by Smith, N. K.,New Yorki St Martins. "The concept of magnitude (*quantum*) is the consciousness of the homogenous manifold in intuition in general, so far as through it the reprsentation of an object first becomes possible."
[137] Sutherland, D. (2004). "The Role of Magnitude in Kant's Critical Philosophy", *Canadian Journal of Philosophy*, Volume 34, No:3, s.426.
[138] A.g.y.

bir entiteye ya da özelliğe referans vermek için kullanılır.[139] Bu açıdan bakıldığında *quantitas*'ın *quantum*'a göre daha soyut bir büyüklüğe referansla kullanıldığı düşünülebilir. Görece somut olması yine de *quantumun* kendisi uzay ve zamana has özelliklere sahip olmasını zorunlu kılmaz. *Quantumun* zaman ve mekânsallık kazanabilmesi için *quanta* olarak görüde tasarımlanması gerekir. Yani *quanta* görüde tasarımlanarak zamansal ve mekânsal özelliklere sahip olacaktır. Kant *quantum*'u görüde genel olarak bulunan homojen manifold olarak tanımlar. Bu nokta önemlidir çünkü görünün bilmede özellikle matematiksel bilmedeki rolü *homojen manifoldu* sunmaktır. Bu özellik uzay ve zaman görüleri için ortaktır, herhangi birinin tikel özelliklerine bağlı değildir.[140]

Kant hiçbir yerde *quantitası* net bir şekilde tanımlamaz. *Quantitas*'ı karakterize eden şeyi Kant 'Bir şey ne kadar büyük?' sorusunun yanıtı olacak şekilde düşünür. Örneğin 'İki nokta arasında yalnızca bir doğru çizilebilir' ya da 'İki düz çizgi bir uzay kapatamaz' gibi önermeler yalnızca *quanta* ile ilgilidir, öte yandan:

> Ama büyüklüğe (*quantitas*),e.d. bir şeyin ne denli büyük olduğu sorusuna verilen yanıta gelince, bu bakımdan sentetik ve dolaysızca pekin (*indemonstrabilia*) çeşitli önermelerin olmasına karşın, sözcüğün gerçek anlamında hiçbir belit yoktur.[141]

Geometrinin önermeleri mekânsal *büyüklükleri* ilgilendirir ama onların *miktarlarını* değil; öte yandan *quantitas* bir miktar belirtir. Dolayısıyla *quantitas*'ın sorusu 'Bir şey ne kadar büyük?' ölçmeyi gerektirir. Bu sorunun önemine Riemann' da dikkat çeker:

> Ölçüm kıyaslanacak büyüklüklerin üst üste getirme (süperpozisyon) işleminde yer alır, ölçüm bir büyüklüğü diğeri için ölçü olacak şekilde nakletmenin araçlarını gerektirir. Bunun yokluğunda iki büyüklük kıyaslaması ancak biri diğerinin parçası ise mümkün

---

[139] A.g.y., s.427.
[140] A.g.y., s.428.
[141] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, B203, s.224.

> olabilir ki bu durumda bile yalnızca ne kadar fazla ya da az sorusunun yanıtına karar verilebilir, ne kadar çok sorusunun yanıtına değil. [142]

Yani ölçüm işi bir birim ya da sayı belirlemeyi gerektirir. Bu yolla kaç tane birimin ölçülen şeydeki miktara eşit olup olmadığı ölçülür. Ama bir şeyin miktarı (*quantitas*'ı) seçilen birimden bağımsızdır ve ölçülen nesnenin bir özelliğidir. Örneğin bir cetvel bizim onu tanımlamamızdan ve ölçmek için belirlediğimiz birimden bağımsız olarak, 28 cm ya da 11 inçtir. *Quantitas* somut tikel *quantumun* soyut bir miktarıdır; örneğin söz konusu cetvelin uzunluğudur. Bu cetvel ile bir kağıt parçası eşit *quantitasa* bir şekilde sahip olabilir ancak her biri kendi *quantitasına* sahiptir. Buna alternatif olarak *quantitas* farklı *quantalar* tarafından paylaşılan ortak soyut miktar olabilir. Söz konusu cetvelin *quantitası* bu kâğıt parçasının *quantitası* ile bir ve aynı olabilir.[143]

Kant'ın *quanta* ile *quantitas* arsında yaptığı ayrımı anlamak için cebir-aritmetik ile geometri arsındaki farktan da yola çıkılabilir.

Yukarıdaki alıntıda Kant'ın *Indemonstrabilia* olarak belirlediği *quantitas'ı* ilgilendiren önermelere aritmetikten 7+5=12 toplama işlemi örnek olarak verilebilir. Bu tür önermeler aksiyom değildirler çünkü geometrinin aksiyomlarının aksine 'genel' değildirler.[144] Sonuç olarak geometri *quanta*'yı ilgilendirir ve aksiyomları vardır, aritmetiğin ise aksiyomları yoktur ve *quantite*'yi ilgilendirir. Geometrinin görüsünün nesnesi büyüklük olarak *quantadır.*[145]

Kant *Eleştiri*'nin ilerleyen bölümlerinden birinde yine cebir-aritmetik ve geometri arsındaki bir farka dikkat çeker:

---

[142] Riemann, B. (1929). "On the Hypotheses Which Lie at The Foundations of Geometry", çevr. Simith,D.E in *A Source Book in Mathematics* içinde, s.413.

[143] Sutherland, D. (2004). "The Role of Magnitude in Kant's Critical Philosophy", *Canadian Journal of Philosophy*, Volume 34, No:3, s.428.

[144] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, A164/B205, s.224.

[145] Friedman, M. (1992). *Kant and Exact Sciences*, Harvard University Press, s.107.

> … ama matematik geometride olduğu gibi salt büyüklükleri (*quanta*) yapılaştırmakla kalmaz; tersine, cebirde olduğu gibi salt büyüklüklerin (*quantitas*) yapılaştırmasını da üstlenir ve burada böyle bir büyüklük kavramına göre düşünülmesi gereken nesnenin niteliğini bütünüyle soyutlar.[146]

Burada ise *quanta* ile *quantitas* arasındaki ayrımı 'doğrudan gösteren' geometrik (ostensive) olanla 'sembolik' olan 'karakteristik inşa'[147] arasındaki ayrıma göre yapılıyor. Geometrik yapılaştırma nesnelerin kendisiyle ilgilenirken sembolik yapılaştırma nesneleri nasıl oluşturulduğundan soyutlar, Kant bu alıntıda aritmetikten değil de cebirden bahseder ancak yine de sembolik yapılaştırma bağlamında ikisini de aynı bağlamda değerlendirmekteydi. [148]

Cebir ve aritmetiğin soyutluğu ile geometrinin doğrudanlığı arasındaki bu ayrım temelinde *quanta* ile *quantitas* arasındaki farkı daha yakından anlamaya çalışalım.

Nesnenin niteliğinden bütünüyle soyutladığımızda somut nesne artık söz konusu değildir. Bu da cebirin *quantitas*'ının *quanta* ile doğrudan bir ilişkisi olmadığı şeklindeki ihtimali kuvvetlendirir. Az önceki örneği yeniden düşünecek olursak aritmetiğin *quantitası* 7 ve 5 gibi tikel rakamlara işaret eder, cebirin *quantitas*'ı ise bu tikel rakamlardan soyutlama yaparken bu rakamları değişkenler olarak ele alır.[149] Kant'ın cebirde tam soyutlama vurgusu cebirin nesnesi olmadığı ya da nesnesine genel olarak sahip olduğu şeklinde yorumlanabilir.[150]

Kant cebir ve aritmetiği kendi özel alanları olmayan bilimler olarak, yalnızca belli tipteki problemleri çözmek için hesaplama tekniklerini içeren dolayısıyla her türlü nesnenin büyüklüğünü hesaplayabilecek matematiğin genel büyüklük teorisi

---

[146] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, A717/B745, s.662.
[147] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, A735/B763, s.675.
N. Kemph Smith 'karakteristik inşa',(*characteristische Konstruction*) Kant'ın bu cümle ile anlatmak istediği şeyi şüpheli bulur ve semboller yardımıyla inşa olarak da çevrilebileceğinin altını çizer; "[*characteristische Konstruction*. The meaning in which Kant uses this phrase is doubtful. It might also be translated 'construction by means of symbols'.]". Kant, I. (1965). *Critique of Pure Reason*, trans. by Smith, N. K.,New York St Martins.
[148] Friedman, M. (1992). *Kant and Exact Sciences*, Harvard University Pres, s.108..
[149] Sutherland, D. (2004). "The Role of Magnitude in Kant's Critical Philosophy", *Canadian Journal of Philosophy*, Volume 34, No:3, s.429.
[150] Friedman, M. (1992). *Kant and Exact Sciences*, Harvard University Press, s.108, Sutherland, D. (2004). "The Role of Magnitude in Kant's Critical Philosophy", *Canadian Journal of Philosophy*, Volume 34, No:3, s.429.

kapsamında değerlendiriyordu. Kant için kendi özel nesne alanına sahip olan bilim geometriydi. Bu bakış açısı Kant ve Öklid'de ortaktır.[151]

Geometride bize verilen uzunluklar, alanlar, hacimler öncelikle mekânsal büyüklükler olarak kavranır. Verilen bu mekânsal büyüklükler, örneğin sonlu bir uzunluk parçası 'girdi' ('Input') olarak alınır. Bu girdiden hareketle verili uzunluk parçasının uzunluğunun büyüklüğü sorusunun yanıtı 'çıktı' ('Output') olarak değerlendirir. [152]

Bu çıktıyı belirleyebilmek için yani söz konusu çizginin ne kadar uzun olduğunu anlamak için keyfi bir 'birim' ('unit') belirler; örneğin eğer söz konusu büyüklük bir karenin köşegeni ise bu köşegenin büyüklüğünü belirleyebilmek için karenin bir kenarını 'birim' olarak belirleyebiliriz. Eğer büyüklük ve seçilen birim aynı standartlarla ölçülebilir ise aritmetik bir belirli kesir ya da sayı verir, değilse cebir bize sayılarla yaklaşık bir değer bulmamızın kesin bir kuralını verir.[153]

Cebirin ve aritmetiğin geometriye göre soyutluğu onların genelliğinde içerilmez. Daha ziyade bu soyutluk onların, hesaplama teknikleri olarak, büyüklükleri hesaplanacak nesnelerin özel doğasından bağımsız olmalarından gelir. Cebir ve aritmetiğin kendilerinde biz büyüklüklerin doğası ve varlığı hakkında bir şey varsaymayız, yalnızca 'ekleme çıkarma kök bulma' gibi işlemler yaparız ve büyüklükleri manipüle edecek örneğin 'oran' gibi kavramlara başvururuz. Hangi büyüklüklerin hesaplandığı görümüz tarafından ve cebir ve aritmetikten bağımsız

---

[151] Friedman, M. (1992). *Kant and Exact Sciences*, Harvard University Press, ss.112-113.

[152] Friedman, M. (1992). *Kant and Exact Sciences*, Harvard University Press s.112. Bu sürecin örneklenmesi için Kant'ın *Prolegomena*'da büyüklük kavramının uygulanması yardımıyla bir çizginin uzunluğundan bahsettiği kısım değerlendirilebilir:

> En basit aksiyomlarında Saf Matematiğin yargıları bile bu koşulun dışında tutulamaz. "Doğru çizgi, iki nokta arsındaki en kısa çizgidir" ilkesi, çizginin büyüklük kavramı altına sokulmasını varsayar; bu kavram elbetteki sırf bir görü değildir, ancak ve ancak anlama yetisinde bulunur ve (çizginin) görüsünü, ondan çıkabilecek yargıları kurmak amacıyla, niceliği bakımından, yani çokluğu bakımından (*iudicia plurativa* olarak) belirlemeye yarar; çünkü bunlardan, verilmiş bir görüde aynı türden pek çok şeyin içerildiği anlaşılır (s.52).

[153] Friedman, M. (1992). *Kant and Exact Sciences*, Harvard University Press, s.112.

olarak tesis edilir. Böylece, uzunluk, alan ve hacimler olarak büyüklükler ve diğer tipteki büyüklükler de kavranabilir olur.[154]

Öyleyse *quanta*, görünün büyüklükler olarak nesnesi, yalnızca özel tipte büyüklüklerdir. Bu büyüklükler, Öklid'in ilk üç aksiyomu tarafından ilgili mekânsal figürlerin kurulmasını sağlayan aksiyomlarla verilir. *Quantitas,* genel olarak büyüklüğün belirlenmesiyle elde edilen şey olarak, herhangi bir büyüklüğün özel bir büyüklüğünü hesaplamak için aritmetik ve cebir tarafından başvurulan operasyon ve kavramları kapsar. Burada herhangi bir özel büyüklüğün varlığı için bir şey postüle etmeyiz, bu nedenle *quantitas* için aksiyomlar yoktur. *Quantitas*'ın hesaplanması geometriden farklı olarak bizim görümüzün özel karakterine bağımlı değildir, o bize şeyin kavramını genel olarak sağlar:[155]

> Ama arı büyüklük (*quantitas*) şeması, anlağın bir kavramı olarak, sayıdır-birimin birim ile (türdeş) ardışık toplamını kapsayan bir tasarım.[156]

> Örneğin bir evin görgül sezgisini onun çoklusunun ayrımsanması yoluyla bir algıya çevirdiğimde, benim için uzayın ve genel olarak dış duyusal sezginin *zorunlu birliği* temelde yatar, ve bu evin şeklini bir bakıma uzaydaki çoklunun bu sentetik birliğine uygun olarak çizerim. Ama eğer uzay biçimini soyutlarsam, tam bu sentetik birlik yerini anlakta bulur, ve genel olarak bir sezgideki türdeşin sentezinin kategorisidir ,e.d. *büyüklük* kategorisidir ki, ayrımsamanın o sentezi, e.d. algı, baştan sona uygun olmalıdır.[157]

Quanta ile *quantitas* arasındaki ayrımı incelemenin başka bir yolu da Kant'ın *şematizm*' ini incelemektir. Kant'a göre şema kavramlar ile görüler arasında aracı bir rol oynar. Kant şema ile en genel anlamıyla şunu kasteder "İmgelem yetisinin bir kavrama imgesini sağlamaya yönelik bu evrensel işleminin bu tasarımını bu kavramın şeması olarak adlandırıyorum."[158] O zaman sorumuz şudur: "O zaman,

---

[154] A.g.e., s.114.
[155] A.g.y., s.114, Sutherland, D. (2004). "The Role of Magnitude in Kant's Critical Philosophy", *Canadian Journal of Philosophy,* Volume 34, No:3, s.429.
[156] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, A143/B182, s.208.
[157] A.g.e., B162, s.194
[158] A.g.e., A141/B180, s.206-207.

sezgilerin arı kavramlar altına *alınmaları* ve dolayısıyla kategorilerin görüngülere *uygulanmaları* nasıl olanaklıdır eğer hiç kimse bir kategorinin, söz gelimi nedenselliğin duyular yoluyla sezildiğini ve görüngüde kapsandığını söylemiyorsa?”[159] Bunun için nesnenin tasarımı ile kavram aynı türden olmalıdır. Yani kategorilerin görünüşlere uygulanabilmesi için kavram kavramın altına getirilen nesnede tasarımlanan bir şeyi içermelidir.[160] Şema anlağın arı kavramları ve empirik ve saf duyulur kavramlar için ayrı ayrı iş görebilir.[161] Anlağın saf kavramı, örneğin bir üçgen kavramı, empirik ve saf duyular kavramın aksine görüyle ortak bir içeriğe sahip değildir. Dolayısıyla anlağın saf kavramları görülerle doğrudan bağlantı içinde değillerdir. Bu ilişkiyi kurmak *şema* ile mümkündür. Kategorilerin şeması temsiller arasındaki zamansal ilişkileri belirlerken gereken kuralların biçimini alır. Kant’a göre kavramlar anlağın kurallarıdır ve şema bu kuralları yansıttığı sürece kavramlarla genelliğin gösterilmesi işini paylaşırlar. Zamanın belirlenimleri olarak şema zamanda, dolayısıyla görüde gösterilen her temsille ilişkilidir. Yani şemalar kategoriler ile görüler arasında bir köprü kurarlar:[162]

> Anlak kavramı genelde çoklunun arı sentetik birliğini kapsar. İç duyunun çoklusunun, dolayısıyla tüm tasarımların bağlantılarının biçimsel koşulu olarak zaman arı sezgide bir *apriori* çoklu kapsar. Şimdi aşkınsal bir zaman belirlenimi (onun birliğini oluşturan) kategori ile evrensel olması ve bir *apriori* kural üzerine dayanması ölçüsünde türdeştir. Ama öte yandan, *zamanın* çoklunun her görgül tasarımında kapsanması ölçüsünde, *görüngü* ile türdeştir. Buna göre, kategorinin görüngüler üzerine uygulanışı aşkınsal zaman belirlenimi yoluyla olanaklı olur, ki bu, anlak kavramlarının şeması olarak, görüngülerin kategori *altına alınmasına* aracılık ederler.[163]

Şemanın kategorileri gibi, empirik kavramların ve duyumun saf kavramlarının şeması da kesin genel bir kavram için kurallardır.[164] Yine de aralarında önemli bir

---

[159] A.g.e., A138/B177, s.204.
[160] A.g.e., A137/B176, s.204.
[161] Sutherland, D. (2004). “The Role of Magnitude in Kant’s Critical Philosophy”, *Canadian Journal of Philosophy*, Volume 34, No:3, s.431.
[162] A.g.y., s.431.
[163] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, A139/B178, s.205.
[164] A.g.e., A141/B180, ss.206-207.

fark vardır anlağın saf kavramlarının şeması ‘imaj’ haline getirilemezken[165], empirik duyum kavramının şeması getirilebilir.[166]

Qunta ile *quantitas*’ın rolleri farklıdır. *Quanta* nın imajı yani zaman ve mekân kendi başlarına niceliğin kategorileri için imaj üretemezler. Onlar yalnızca homojen manifoldu üretirler ki onlar da niceliğin kategorilerine göre belirlenim kazanırlar. Kant’ın burada tikel bir *quantumun* imajına gönderimde bulunmadığı daha ziyade dış duyumun tüm *quantasına* ve iç duyumun tüm nesnesine gönderimde bulunduğuna dikkat etmek önemlidir.[167] Yani Kant’ın dikkat çektiği imajlar tikel zaman ve mekânlar değil, görüde belirlenmemiş olarak verili zaman ve mekândır. Kant bu suretle *quanta*’ nın görüdeki herhangi manifolda genel olarak manifoldun belirlenmiş olup olmadığına bakmaksızın işaret ettiğini söylemiş oluyor.[168] Biz belirlenmemiş *quanta*’yı görüleyebiliriz: “Belirsiz bir niceyi [*Quantum*] bir bütün olarak sezebiliriz, eğer onu bütünlüğünün ölçme yoluyla, e.d. parçalarının ardışık sentezi yoluyla çizilmesi gerekmeksizin sınırlar içine kapayabilmişsek. Çünkü sınırlar, tamamlanmışlığı daha öte her şeyden yalıtmakla, onu daha önceden belirlerler.”[169] Zaman ve mekân verili görüler olarak, yani belirlenmemiş olarak, büyüklüklerdirler. Demek ki *quanta* görüdeki homojen her türlü manifolda, belirlenmiş olup olmadığına bakılmaksızın uygulanabilen bir kavramdır. [170]

Şema ile imge arasındaki ilişkiyi anlamak için şu alıntılara bakabiliriz:

> Böylece, birbiri ardına beş nokta koyacak olursam, ….., bu beş sayısının bir imgesidir. Buna karşı, salt bir sayıyı düşünecek olursam, bu ister beş isterse yüz olsun, bu düşünce daha çok bir çokluğu (örneğin bin) belli bir kavrama uygun olarak bir imgede

---

[165] A.g.e., A142/B181, s.207.
[166] Sutherland, D. (2004). “The Role of Magnitude in Kant’s Critical Philosophy”, *Canadian Journal of Philosophy*, Volume 34, No:3, s.431.
[167] A.g.y., s.434.
[168] Sutherland, D. (2004). “The Role of Magnitude in Kant’s Critical Philosophy”, *Canadian Journal of Philosophy*, Volume 34, No:3, s.434.
[169] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, A426/B454, s.448. “An indeterminate quantum can be intuited as a whole when it is such that though enclosed within the limits of we do not require to construct its totality through measurement, that is, through the succesive sytnthesis of its parts. For the limits, in cutting off anything futrher, themselves determine its completeness.” Kant, I. (1965). *Critique of Pure Reason*, trans. by Smith, N. K.,New Yorki St Martins., s.397.
[170] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, A25/B39, s.81.

> tasarımlamak için bir yöntem tasarımıdır, çünkü böyle bir durumda imgeyi ancak güçlükle göz önüne getirebilir ve kavram ile karşılaştırabilirim. [171]

Kant'ın burada altını çizmek istediği nokta bizim beş kitaba bakarak beş elma çizerek beş sayısının imgesine sahip olabileceğimiz ama beş sayısının içerdiği bütün imgeleri karşılamayacağıdır. Beş sayısı imge kavramıyla karşılanamaz.[172] Benzer şekilde:

> Gerçekte arı duyusal kavramlarımızın temelinde nesnelerin imgeleri değil ama şemaları yatar. Genelde bir üçgen kavramı için onun hiçbir imgesi hiçbir zaman yeterli olmaz. Çünkü kavramın onu ister dik açılı isterse dar açılı olsun tüm üçgenler için geçerli kılan evrenselliğine imge hiçbir zaman erişemez, tersine her zaman bu alanın yalnızca bir bölümüne sınırlı kalır.[173]

Kant' a göre empirik kavramın şeması, örneğin bu alıntıda üçgen, "mekândaki saf şekillere ilgisinde imajinasyonun sentezininin kuralıdır".[174] Yani şema bize bir kavramın imajını sağlamak, bu imaj sayesinde genelliği göstermek ve bu genellik sayesinde bu kavram altında içerilen nesneler hakkında akıl yürütebilmek için genel bir prosedür verir.[175] Şema sayesinde tek tek üçgenleri değil tüm üçgenleri ilgilendiren sonuçlar hakkında akıl yürütebiliriz.[176]

Cebir ve aritmetiğin nesneleri zamansal olmasa da büyüklük kavramının kurulmasında zamansal bir nokta vardır. Bu zamansal nokta "büyüklüğün saf *şemasıdır*":

> Tüm büyüklüklerin (*quantorum*) dış duyu önündeki arı imgesi uzaydır; *genel olarak duyuların tüm nesnelerininki ise zaman*. Ama *arı büyüklük* (*quantitatis*) *şeması*, anlağın bir kavramı olarak, *sayıdır*-birimin birim ile (türdeş) ardışık toplamını kapsayan bir tasarım. Öyleyse sayı genel olarak türdeş bir sezginin çokluğunun sentezinin birliğinden

---

171 A.g.e., A140/ B179-B180, s.206.
172 Yücel Dursun (2004). *Felsefe ve Matematikte Analitik/Sentetik Ayrımı*, Elips Kitap., s.65-66.
173 Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, A141/B180, s.207.
174 A.g.e.
175 Sutherland, D. (2004). "The Role of Magnitude in Kant's Critical Philosophy", *Canadian Journal of Philosophy*, Volume 34, No:3, s.432.
176 A.g.y., ss.432-433.

> başka bir şey değildir, ve sezginin ayrımsanmasında zamanın kendisini üretmem yoluyla ortaya çıkar. [177]

Buradaki zamansal olan nokta, birimlerin ardışık birbirine eklenmesi görünün nesnelerine yani *quanta*'yı işaret etmiyor. *Quanta'*yı işaret eden şey "büyüklüğün saf *imajıdır*".[178] Dolayısıyla imajlar şemadan ayrıdır. Burada dikkat edilmesi gereken nokta *quantanın* zamansal olduğu değil, *quantite*' nin bir şekilde zamansal olduğudur.[179]

Bu alıntıdan yine anlıyoruz ki *quantum* değil de *quantitas* kategorileri sunar. Burada Kant rakamdan 'birlik', 'çokluk' ve 'bütünlük' kategorilerine uyan şema olarak bahseder. Burada *quantumun* kavramın *imajına*, *quantitas*'ın ise *şemasına* denk geldiği düşünülebilir, Kant *quanta*'nın imajından *quantitas*'ın ise şemasından bahsediyor dolayısıyla şema ve imaj farklı kavramlardır. Bu alıntıdan yola çıkılarak yine denebilir ki *quantitas* kategorileri göstermektedir. Kant niceliğin kategorilerinin şemaları tarafından nasıl uygulandığını betimliyor ve *quantitas*'ın şemasını tanımlıyor. Kant'ın *quanta*'ya referansı ise saf imajı ile sınırlı oluşu bağlamındadır. Büyüklüğün şeması ile anlağın kavramı da *quantitas* olarak büyüklüğü anlağın kavramı olarak nitelediğini gösteriyor. *Quantitas* nicelik kategorisine denk gelir. [180]

1.5.5.1. Kapsamlı ve Yoğun Büyüklükler (Extensive-Intensive Magnitudes)

Kant büyüklüklere ilişkin bir bölümleme daha yapar; *kapsamlı büyüklükler* ve *yoğun büyüklükler.* Kant için bu kavramların ne ifade ettiğine geçmeden önce kapsamlı ve

---

[177] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, A142-143/ B182, s.208. "The pure image of all magnitudes (quantorum) for outer sense is space; that of all objects of the senses in general is time. But the pure schema of magnitude (quantitatis), as a concept comprises the successive addition of homogeneous units. Number is therefore simply the unirt of the synthesis of the manifold of a homogenous intuition in general, a unity due to my generating time itself in the apprehension of the intuition." Kant, I. (1965). *Critique of Pure Reason*, trans. by Smith, N. K.,New Yorki St Martins, ss.183-184.

[178] Friedman, M. (1992). *Kant and Exact Sciences*, Harvard University Press, s.115.

[179] A.g.e., s.116.

[180] Sutherland, D. (2004). "The Role of Magnitude in Kant's Critical Philosophy", *Canadian Journal of Philosophy*, Volume 34, No:3, s.433.

yoğun büyüklük ile ne kastedildiğini daha genel bir açıdan ele alarak başlamak daha uygun olacaktır.

Bazı nicelikler için birbirine bağlama, birbirine birleştirme ve sıralama işlemleri için doğal yollar mevcuttur. Örneğin bir metre çelik bir teli yan yana koyarak ve birbirlerine ekleyerek 4 metrelik bir çubuk elde edebilirsiniz. Birbirine ekleme işlemlerine böyle izin veren niceliklere *kapsamlı büyüklükler* (extensive quantities) deriz. Öte yandan bazı nicelikler vardır ki böyle bir ekleme işi onlar için mümkün değildir. Örneğin sıcaklık böyle bir niceliktir. 40 santigrat derecedeki bir kova suya 20 santigrat derece bir kova su dökerseniz sonuç 60 santigrat derecelik bir su olmayacaktır. Böylece doğal ekleme işlemine izin vermeyen niceliklere de *yoğun büyüklükler* (intensive magnitudes) diyoruz. Kapsamlı büyüklükler kıyaslamaya izin verdiğinden ve nümerik olarak temsil edilebildiğinden dolayı ölçüm işinin temelinde yatarlar. [181]

Görünün Aksiyomları (*Axioms of Intuition*) kapsamlı büyüklükler, *Algı Öncelemeleri* (*Anticipations*) ise yoğun büyüklükler ile ilgilidir. Kant'a göre kapsamlı büyüklükler parçalarının gösteriminin bütünün gösterimini mümkün kıldığı büyüklüklerdir:

> Parçaların tasarımı bütünün tasarımını olanaklı kılıyorsa (ve öyleyse zorunlu olarak onu önceliyorsa), büyüklüğe uzamlı bir büyüklük diyorum. Ne denli küçük olursa olsun, hiçbir çizgiyi düşüncede çizmeksizin, e.d. bir noktadan birbiri ardına tüm parçaları yaratmaksızın ve her şeyden önce bu yolla sezgiyi üretmeksizin tasarımlayamam.[182]

Duyumlar ve görüngülerde gösterilen ve onlara uyan şeyler ise yoğun büyüklüklerdir:

---

[181] Torretti, R.(1990). *Creative understanding: Philosophical Reflections on Physics*, University of Chicago Press, s.60.

[182] Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi, A162/ B203, s.223.

> Görüngüler kendilerinde şeyler değildirler. Görgül sezgi ancak arı sezgi (uzay ve zamanın) yoluyla olanaklıdır. Geometrinin arı sezgi için söylediği bu yüzden yadsınamayacak bir yolsa görgül sezgi için de geçerlidir. Duyuların nesnelerinin uzayda çizim kurallarına (örneğin çizgilerin ya da açıların sonsuz bölünebilirliği) uygun olmayabilecekleri yolundaki tüm özürler bir yana bırakılmalıdır. Çünkü bunlarla uzayın dolayısıyla tüm matematiğin nesnel geçerliği yadsınır ve bundan böyle matematiğin görüngülere nasıl ve ne denli uygulanacağı bilinmez olur. Uzayların ve zamanların sentezi, tüm sezginin özsel biçiminin sentezi olarak, aynı zamanda görüngünün ayrımsanmasını, ve dolayısıyla her dış deneyimi ve sonuçta ayrıca bu deneyimin nesnelerinin tüm bilgisini olanaklı kılan şeydir.[183]

Algı Öncelemeleri'nde Kant yoğun büyüklükler içeren fenomene matematiğin uygulanmasının olanağını açıklar. Bu anlamda yoğun büyüklüklerin matematiğin uygulama alanı olmaları dışında matematiğin olanağının açıklanması bakımından bir rolleri yoktur.[184] Öte yandan kapsamlı büyüklüklerin matematiksel bilmeyi açıklamada rolü vardır ve bu onu yoğun büyüklüklere göre öncelikli kılar. Yoğun büyüklükleri belirlenmiş zamanlar olmaksızın yani kapsamlı büyüklükler olmaksızın kavrayamayız.[185]

Kant'ın kapsamlı büyüklükler ve ardıl sentezin temel rol aldığı argümantasyonu şu şekilde özetlenebilir:

> 1. Bir kapsamlı büyüklük parçaların gösteriminin bütünü mümkün kıldığı dolayısıyla parçaların bütünden önce geldiği bir şeydir.
> 2. Belirli zaman ve mekânın gösterimi ancak parçadan parçaya sürekli bir sentez ile olanaklıdır.
> 3. Ardıl sentez yoluyla kavranılan her şey parçaların bütünü olanaklı kılmasını zorunlu kılar.
> 4. Öyleyse, tüm belirli zaman ve mekânlar kapsamlı büyüklüklerdir.
> 5. Tüm görüngüler belirlenmiş[186] zaman ve mekânda bir görü içerirler.
> 6. Öyleyse, tüm görüngüler kapsamlı büyüklüklerdir.[187]

[183] A.g.e., A165/B207., s.225.
[184] Sutherland, D. (2004). "The Role of Magnitude in Kant's Critical Philosophy", *Canadian Journal of Philosophy*, Volume 34, No:3, s.436.
[185] A.g.y., s.436.
[186] A.g.y., s.417. 'Belirleme' Kant için matematiksel bilmenin ve büyüklüklerin hesabının verilmesinde önemli bir yer tutar. Kant'a göre çizgiler, yüzeyler, zaman ve deneyimin nesnesinin tikel tüm zamansal ve mekânsal özellikleri belirli zamanlar ve mekânlar olarak değerlendirilebilir. Yani, belirli zaman ve mekânlar hem geometride kurulabilecek figürleri hem de düşüncede kurulabilecekleri içerir.
[187] A.g.y., s.436-437.

Burada altı çizilmesi gerek basamak ‘ardıl sentez’den (‘successive synthesis’) bahsedilen ikinci basamaktır. Bu basamak daha önce değerlendirdiğimiz Kant’ın *şematizm*’i ile daha iyi anlaşılabilir; *quantitas*’ın şeması, yani sayı, görünün nicelik kategorisi ile uyumlu olarak belirlenmesine rehberlik eder. *Ardıl sentez* belirlenmiş zaman ve mekânların önceden verilmiş parçalarının toplamı olarak sunulmasından sorumludur. Belirlenmiş zaman ve mekânların parça-bütün ilişkisinin sunulması geometri için önemlidir.[188]

Geometri cebir ve aritmetik gibi ardıl sentezi şöyle içerir: Öklidyen geometrinin nesnelerini Öklid’in ilk üç aksiyomunu istediğimiz düzende ve sayıda tekrarlayarak elde edebiliriz. Öyleyse geometrik inşa cebir ve aritmetiğin sembolik (ya da karakteristik) inşasına benzer şekilde yapılabilir. Geometrinin nesneleri zorunlulukla zamansal olmak zorunda olmasa da geometrik inşa zamansal bir aktivitedir:

> Mekânsal gösterimde zaman hiçbir şekilde düşünülmez ama belirli bir mekânın, örneğin çizginin gösteriminde düşünülür. Zamanda üretilen tüm büyüklükler zamanda konumlamanın tekrarlanması yoluyla olur.(14, 54.1-4)[189]

Geometrik ve sembolik inşa arasındaki fark böylece açıklanmış oluyor: geometrik yapılaştırma zorunlulukla Öklid’in ilk üç aksiyomundan başlar, onları sabit veriler olarak alır geometrik operasyonlarımızda tekrarlarız. Aritmetik ve cebirde ise sabit girdilerimiz yoktur yalnızca tekrarlanan prosedürlerden oluşan ardıl sentezi uygularız.[190]

Kant ‘büyüklük’ için *quanta*, *quantitas*, gibi kavramları kullanır ve manifoldu özel bir anlamda kullanmaz ve teknik bir şekilde tanımlamaz. Onun için manifold her türlü ‘çokluk’ a denk gelen bir kavramdır. Kant’ın ‘büyüklük’ ve ‘çoklu’ kavramları

---

[188] A.g.y., s.439.

[189] Kant, I., Friedman, M. (1992). *Kant and Exact Sciences*, Harvard University Press, içinde, s.119. “In spatial representation certainly nothing of time is thought, but it is in the construction of the concept of a certain space, e.g., a line. All magnitude is generation in time by means of repeated position in time.” (14, 54.1-4).

[190] Friedman, M. (1992). *Kant and Exact Sciences*, Harvard University Press, s.119.

daha çok bilme, daha özelde de matematiksel bilmenin hesabını verirken başvurduğu kavramlardır. Matematik büyüklükler hakkındadır ve *quanta* belirlenmemiş büyüklükleri içeren görüdeki *homojen manifold* iken, *quantitas* nicelik kategorilerine denk düşmektedir ve ölçüm sonucunun miktarıdır. Bu kavramları Görünün görevi *homojen manifoldu* temsil etmek olduğundan Kant'ın geometri felsefesinin kalbinde yatan *saf görü* olmaksızın kavramaya çalışmak güç görünmektedir.

Kant'ın *Quanta* ile *quantitas* ayrımını yaparken *quantitas*'ı düşünüş biçimi sorusu bağlamının önemini Riemann' da geometrinin 'ölçme' işi olduğunu ve bu işlemin (üst üste getirme işlemi) doğruya en yakın şekilde yapılabilmesi için 'ne kadar az ya da fazla' değil "Ne kadar çok?" sorusu önemlidir.

Kant'ın yine yoğun ve kapsamlı büyükleri ayrımı Riemann'ın sürekli ve ayrık manifold ayrımını anımsatmaktadır. Burada birebir bir benzeşim görünmese de özellikle Kant'ın kapsamlı büyüklükleri tanımlayış ve düşünüş biçimi, Riemann'ın ayrık ve sürekli manifoldları ayırıp sürekli manifoldlarla çalışmasıyla benzerlik göstermektedir. Riemann için iki sonsuz yakınlıktaki nokta arasında ölçüm yapmak sürekli manifoldlar için geçerlidir. Bu nokta Kant'ın kapsamlı büyüklüklerin kıyaslamaya dolayısıyla ölçmeye izin veriyor olduğu görüşü ile benzerlik göstermektedir. Ayrıca Riemann manifoldun belli kısımlarından bahsetmek için *quanta* terimini kullanır. *Quanta'*ların birbiriyle kıyası ayrık manifoldlarda 'sayarak' sürekli manifoldlarda ise 'ölçerek' mümkündür.

Matematikte özellikle de geometride Kant ve Riemann'ın kapsamlı ve yoğun büyüklüklerin ayrımı, ölçümün hangi durumlarda yapılabileceği gibi kısmi noktalarda benzer kaygıları taşıyor görünürler. Ancak son değerlendirmede Kant için manifold matematiksel bilme sırasında çeşitli işlemlere (sentezlenme, sunulma, kavranma) maruz kalmak suretiyle bir anlamda *bilgi kuramının* malzemesiyken Riemann için manifold daha çok fiziksel *geometrinin* üzerinde işlem yaptığı biçimlendirilmemiş noktalar yığınıdır. Riemann "manifold" kavramının kendisini

Gauss'tan almış[191] ve *n* boyutlu geometrilerin imkânını göstermede kavramı daha çok bir matematikçinin gözüyle biçimlendirmiştir. Bu biçimlendirme esnasında Riemann'ın kullandığı matematiksel teknikler ve yüzey geometrisinin geliştirmesi Gauss, onun manifold kavramını geometrisinin merkezine oturtarak matematiksel düşünmenin olanağını genişletme girişimi ise Herbart kökenlidir.

[191] Ferreiros, J. (2004).“The Magic Triangle: Mathematics, Physics and Philosophy in Riemann's Geometrical Work”, s.3, (http://semioweb.msh-paris.fr/f2ds/docs/geo_2004/Jose_Ferreiro_2.pdf.)

BÖLÜM 2. HERBART'IN FELSEFESİNİN MANİFOLD KAVRAMI ÜZERİNDEKİ ETKİSİ

Zaman zaman Riemann'ın sergilediği resim matematik, fizik ve felsefe tarafından oluşturulan "büyülü üçlü"[192] ("magic triangle") olarak anılır. Riemann'ın matematiksel çalışmalarının felsefi meseleler ile paralel olarak ilerlediğini söyleyebiliriz. Riemann'ın çalışmalarının felsefi arka planı bakımından, 1941 yılına kadar Göttingen'de profesörlük yapan Johann Friedrich Herbart çok önemlidir. Bu bölümdeki amacım genelde Riemann'ın *Habilitationsvortrag*'ının özelde ise 'manifold' kavramının takdiminde Riemann'ın Herbart'tan hangi noktaları aldığı ve kullandığını göstermek olacaktır. Bunu yaparak 'manifold' kavramının arkasında yatan felsefi altyapıyla ilgili daha kavranabilir bir resim sunmayı hedefliyorum.

Herbart, Riemann'ın çalışmalarının epistemolojik izlerini oluşturmaktadır. Onun özellikle ileriki bölümlerde açıklanacak olan "seri formlar" teorisi (*"serial forms", "Reihenformen*") 'manifold' kavramının şekillenmesinde çok önemli bir etkiye sahiptir.

Scholz'a göre Herbart'ın Riemann'ın çalışmalarında ne ölçüde etkili olduğu konusunda literatürde bir uzlaşma bulunmamaktadır. Russell[193], Torretti[194]ve Scholz[195] Herbart'ın fikirleri ile Riemann'ın çalışmaları arasındaki ilişkiye dair olarak farklı noktalara işaret etmişlerdir. Ancak, genel olarak epistemoloji boyutunda Herbart'ın etkileri daha açık şekilde görülmektedir. Bu bölümde Herbart'ın Riemann ve onun 'manifold' kavramı üzerindeki etkileri ve bu etkilerin dereceleri hakkında öne sürülmüş farklı görüşler ele alınacaktır.

---

[192] Ferreiros, J. (2006). "Riemann's Habilitationsvortrag at the Crossroads of Mathematics, Physics and Philosophy"., J.Gray, Ferreiros, J. (Eds.), *The Architecture of modern mathematics*, New York: Oxford University Press, içinde s.67. Ferreiros "büyülü üçlü" ("magic triangle") ifadesini Sanchez Ron'un Einstein ile ilgili bir makalede kullandığı şekline atıfta bulunarak kullanır.

[193] Russell, Bertrand (1956). *An Essay on the Foundations of Geometry*, Dover Publications.

[194] Torretti, R. (1978). *Philosophy of geometry from Riemann to Poincare.* Dordrecht: Reidel: D. Reidel Publishing Company.

[195] Scholz, E. (1982). "Herbart's influence on Bernhard Riemann", 9, *Historia Mathematica* , 413-440.

2.1. Herbart'ın Felsefesi

Herbart idealist Fichte'nin bir öğrencisiydi. Herbart öğrencilik zamanlarının sonuna doğru, bu dönem Almanya'sını idealizm etkisi altına almasına rağmen hocasını eleştirerek kendisini realist olarak tanımlayacak kadar Fichte'nin fikirlerinin karşısında yer alır.[196] Fichte'nin görüşlerinden sıyrılarak Herbart kendisini Kant'ın bir destekçisi olarak değerlendirmeye başlar. Yine de burada belirtmeliyiz ki mekânın kavramsallaştırılmasında Herbart Kant ile aynı fikirde değildir. Öte yandan Herbart'ın doktrinlerinin bazı noktalarının Leibniz'den esinlendiğini görüyoruz. Leibniz gibi Herbart da Newton'cu ve Kant'çı, mekân anlayışını reddeder; (Herbart için) mekân daha ziyade, şeylerin "birlikte var olmasının" düzeni gibi görünmektedir."[197]

Herbart matematiği felsefeye en yakın bilimsel disiplin olarak görmektedir.[198] Bu görüşü anlamak için Herbart'ın felsefesinin genel hatlarına bakılabilir. Herbart felsefenin diğer bilimlerle ilişki içinde gelişmesinin önemine işaret eder ve her disiplinin teorik gelişmelere olanak verecek merkezi bir kavram etrafında kurulması gerektiğini savunur. Bütün bunların Herbart'ın, matematiği felsefeye en yakın disiplin olarak görmesini açıkladığı söylenebilir.

2.1.1. Herbart'ın Riemann Üzerindeki Etkisi

Riemann'ın Herbart'tan hangi noktalarda etkilendiği üzerine birçok görüşün olduğunu daha önce söylemiştik. Herbart'ın felsefesi ile Riemann'ın manifold kavramını şekillendirmesindeki noktaları anlaşılır kılmak için öncelikle Scholz'un 1982 tarihli makalesini incelemek istiyorum. Scholz, Göttingen Üniversitesi'ndeki Riemann Arşivinde yaptığı araştırmalar çerçevesinde kaleme aldığı bu makalede Herbart'ın felsefesinin detaylı bir analizini ve Riemann'ın Herbart'ın makaleleri üzerine çalışırken aldığı notları, yaptığı alıntıları sunmaktadır. Ben de bundan

---

[196] Ferreiros, J. (2007). *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics.* Basel, Switzerland ; Boston: Birkhauser, s.43.

[197] A.g.e.,s.46." Like Leibniz, Herbart rejects the Newtonian (and Kantian) conception of space as an absolute receptacle for physical phenomena; rather, it seems to be an "order of coexistence" of things."

[198] A.g.e.,s.46.

sonraki bölümlerde Scholz'un makalesi temelinde Herbart'ın Riemann üzerindeki etkileri üzerine daha somut bir resim sunmayı hedefliyorum.[199]

2.1.2. Scholz'un Riemann'ın 'Notlar'ı Üzerine Çalışması

Riemann'ın *Nachlass*'ından anlıyoruz ki Herbart'ın çalışmalarından seçilen alıntılar genel olarak metafizik ve psikolojiyi ilgilendirmektedir.[200]

Herbart felsefeyi farklı parçalara ayırmaktaydı; metafizik (ki bu kısım Eidoloji, Metodoloji, Ontoloji ve *Synechologie*'yi içermekteydi), estetik, pratik felsefe. [201] Herbart'ın felsefesinin genel hatlarını çizerken onun önce Fichte'nin daha sonra da Kant'ın (mekân konusunda onunla hemfikir olmasa bile) bir takipçisi olduğunu söylemiştik. Bu eğitimine paralel bir şekilde Herbart için felsefenin ve bilimlerin amacı "zıtlıklar içerisindeki duyu algılarından altta yatan gerçekliğin kavramlarına" ilerleyiştir.[202]

Herbart Fichte'nin "Ben" (*self*) kavramından etkilenmişti ve 'Ben'in zıtlıklarıyla beraber felsefenin en temel kavramlarından biri olduğunu düşünmüştü. Herbart için 'Eidoloji' 'kişi' ile ilgilenen felsefenin bir alanıdır. Metodoloji ve Eidoloji beraberce Herbart'ın epistemolojisinin temellerini oluşturmaktadır. Herbart için 'varlık' (being), 'quality' (nitelik), 'içsellik' (inherence) ve 'değişim' (change) 'realite''nin kategorileridir ve Ontoloji'nin konusu bu kavramlar tarafından şekillendirilmektedir. Ancak, bilimsel bir araştırma temeli için bizim başka bir şeye daha ihtiyacımız vardır

---

[199] Herbart'ın felsefesi ve onun Riemann için açtığı yol hakkında geniş bir literatür mevcuttur. Özellikle bakınız; Eric C. Banks (2005). "Kant Herbart Riemann", *Kant Studies*, Vol 96 ,Issue 2, ss. 208-234, Ehm Werner (2010)."Broad Views of the philosophy of nature: Riemann, Herbart and the "matter of the mind" ", *Philosophical Psychology*, 23:2, ss.141-162., Russell,.B.(1956) *An Essay on the Foundations of Geometry*, Torretti, R. (1978). *Philosophy of geometry from Riemann to Poincare.* Dordrecht: Reidel: D. Reidel Publishing Company, Ferreiros, J. (2007). *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics.* Basel, Switzerland ; Boston: Birkhauser. Ancak Ehm Werner'in (2010, s.142) de belirttiği gibi Scholz Riemann'ın Herbart'tan aldığı notları Göttingen Üniversitesindaki Arşiv temelinde 1982 makalesi ("Herbart's Influence on Bernhard Riemann") sununca 'resim değişti'; Scholz'un çalışması Herbart ve Riemann arasındaki bağlantı için temek kaynak oldu".Bu önemden ötürü bu bölümde Scholz'un çalışmalarına ve görüşlerine görece daha çok başvurulacaktır.

[200] Scholz, E. (1982). "Herbart's influence on Bernhard Riemann. *Historia Mathematica* ", 9 , s.415.

[201] A.g.y., s.415.

[202] A.g.y., s.415. "…"from contradictory sense perceptions to concepts of the underlying reality."

ki bu da ‘mekân’,’zaman’, ‘sayı’ ve ‘madde’ kavramlarının türetilmesi ile ilgilenen *Synechologie*’dir.[203]

Riemann Herbart’ın metafiziğinden, yani Eidoloji, Metodoloji, Ontoloji ve *Synechologie*’sinden etkilenmiştir. Tüm bu materyal temelinde Scholz Riemann’ın Herbart felsefesinde özel önem verdiği noktaları ‘diyalektiğin elementleri’ (elements of dialectic), ‘metodoloji’ (methodology), ‘mekânsal kavramlar’ (spatial concepts) ve ‘matematiksel araştırmanın yönelimi’(orientation of mathematical research) olarak belirler.

Riemann’ın Herbart’ın eserlerinden yaptığı alıntılara baktığımızda görüyoruz ki, ‘ben’ kavramı Schelling ve Fichte felsefelerinde temellerini bulur.[204] Dolayısıyla Riemann’ın Schelling ve Fichte felsefeleriyle ilişkisi Herbart üzerinden kurulmaktadır. Herbart, Fichte’nin özellikle ‘mutlak ben’ fikrinden çok etkilenmişti ancak Herbart daha sonraları ‘Eidoloji’ olarak adlandıracağı kendi ‘ben’ fikrini yaratmıştır.[205]

Herbart’ın ‘ben’ fikri Fichte’nin ‘ben’ -‘ben olmayan’ terminolojisinden esinlenilerek oluşturulmuştur. Herbart kendi ‘ben’ fikrini ‘düşünme’ işi (act of reflection) ve ‘düşünülme’ (reflected) arasındaki zıtlık -ki bu zıtlık ‘ben’’ in ayrılamaz bir parçasıdır- temelinde kurmuştur. Bu zıtlık yardımıyla o, ‘ben’’in karmaşık bir fikir olduğu sonucuna varmıştır; “en zengin ve en somut kavramlardan biri olarak ben fikri felsefe için bir başlangıç noktası olamazdı.”[206] ‘Ben’ fikri Herbart için fikirlerin akıcı bir yapısını içeren veya bu fikirlerin sunularının birbirine karşıt olmalarını, birbirlerini engellemelerini içeren bir ‘özellikler demetidir.’ Bu nokta Herbart için önemlidir çünkü bilgi edinme süreci ‘metodolojinin prensipleri’

---

[203] A.g.y., s.415.
[204]Scholz, E. (1982). “Herbart's influence on Bernhard Riemann. *Historia Mathematica*”, 9, s.417.
[205] A.g.y., s.417.
[206] A.g.y., s.417.“ …it was one of the richest and most concrete concepts, and so could not be the starting point for philosophy.”

ve sunuların birbirini engellemesi ve devimin kanunları’ tarafından düzenlenmektedir.[207]

Riemann’ın Herbart’ın Eidolojisinin özelliklerinden etkilendiği söylenmişti. Bunu görmek için Riemann’ın Herbart’ın pozisyonunu yeniden beyan ettiği şu sözlere bakabiliriz:

> 1. Sunular ruhun orta dereceden güçleridir. Onlar birbirinin karşısına gelirler ve birbirlerini engellerler. Ortaya çıkan zıtlıklar düşüncenin devimini yaratırlar.
>
> 2. Dış dünyanın imajları verili duyu algıları tarafından oluşturulur. Olumsuzlamanın kendisi sunuların hükümsüz kılınmalarının tecrübelerinden öğrenilmelidir.
>
> 3. Önceden şekillendirilmiş bir bağlantı ile beraber birbirleriyle içten bağlantılı imajlar/konseptler’e ulaşıldığı zaman olumsuzlamanın kendisi hükümsüz kılınır ve yeni bir pozisyon elde edilir.[208]

Sonuç olarak, Herbart’ın ‘Ben’ teorisini (Eidolojisini) incelerken Riemann, üç temel nokta belirler; “kavramların/temsillerin zıtlığı’, ‘olumsuzlama’ ve ‘hükümsüz kılınmış olumsuzlama pozisyonu.”[209]

Riemann’ın Eidoloji hakkındaki incelemesi Herbart’ın tarihsel çerçevede metafizik üzerine değerlendirmelerini içermektedir. Ona göre Platon doğanın zıtlıklar içerisindeki doğasını gördüğünde dünyayı ezeli ve ebedi fikirlerin içerildiği bilgi dünyası ile değişimlerin yaşandığı dünya olmak üzere ikiye ayırdı. Herbart’a göre Platon’un bu iki dünya arasındaki zıtlığı, idealar tarafından şekillendirilmiş hissedilir dünyanın değişken şeylerini içeren nitelikten yoksun bir töz varsayarak azaltmaya çalıştı.[210]

---

[207] A.g.y., s.417.

[208] Riemann, Scholz, E. (1982). “Herbart's influence on Bernhard Riemann”, 9, *Historia Mathematica*” , içinde s.418.
1. “Presentations are the elementary forces of the soul. They oppose and impede each other. The resulting antagonisms generate the movement of thought.
2. Images of the outside world are generated by negations of the given perceptions. Negation itself has to be learned from the given experience of the cancellation of presentations.
3. Negation is cancelled and a new position is gained, when a connection with the already formed and interdependent images/concepts is attained.”

[209] “opposition of concepts/presentations, negation, and position as canceled negation.”

[210] Scholz, E. (1982). “Herbart's influence on Bernhard Riemann.,*Historia Mathematica*” , s.418.

Öte yandan Herbart, değişen fenomen ve gerçek arasındaki ilişki meselesine farklı bir yolla yaklaşmıştır. Ona göre biz gerçeğin bilgisini fenomenin tenkit sürecinden geçirilmesi ile elde ederiz. Bu "bilginin (gerçeğe ilişkin bilginin) fenomenin ilişkilerine göre yapılandırılması" anlamına gelir. Herbart'a göre metafizik gerçeğin bilgisinin elde edilmesinden sorumludur. Ancak Herbart metafizikten fazlasını bekler; onun için metafizik 'ayrıca verili fenomenin gerçekten' ayrılması işinden de sorumludur. Bu süreç 'metodolojinin prensipleri' tarafından kontrol edilmelidir.

'Değişim problemi ve gerçeğin yapısı' meselesinde de Riemann'ın Herbart'ın eserlerini detaylı bir şekilde çalıştığı görülmektedir. Bu konuyla ilgili olarak Scholz'un sözlerine kulak verelim:

> Öncelikle, Herbart'a göre, deneyim bize özellikler ve özelliklerin demetlerini (*complexionen*) gösterir, ona bu özelliklerin atfedildiği altta yatan gerçekliğin öncelikle *şeylerde* (*things*) aranması gerekir (1825, 199*). Ancak analizin bir sonraki basamağı, diye devam ediyor Herbart, araştırmacıları Grek felsefesinin elementlerine götürür ki ondan *şeyler* (*the things*) şimdi "ödünç alınan gerçekliği" (geliehene Realitat, 1825, 199) elde ederler. Sonra bilim adamlarının analizi kimyasal elementlerin (*chemical elements*) takdimine götürür ki onlardan şimdi eski elementler (en azından su, hava ki Herbart onlara açık bir şekilde işaret etmektedir) türetilir. Son olarak, Herbart'a göre, idealist felsefe geldi ve *'ben'* fikrinin diğer tüm kavramları desteklediği ve onlara gerçekliği 'ödünç verdiği' sonucunu kimyasal elementleri, özellikleri, şeyleri ve eski elementleri çıkartarak sezgiye (Anschauung) ve düşünceye indirgedi.[211]

Sonuç olarak, Herbart hem metafizik hem de bilim üzerine düşünmüştür. Bu durum onun felsefe ile bilimler arasında keskin bir ayrım olmadığı anlayışıyla uyum göstermektedir.

Riemann'ın üzerine çalıştığı alıntıları takip ederek onun temel ilgisinin metafiziğin değişim ve değişimin gerçeklikle ilgili sonuçları açısından oynadığı rol üzerine olduğu söylenebilir. Riemann'ın, Herbart'ın gerçeği ve şeyleri "özellik demetleri"

---

[211] Scholz, E. (1982). "Herbart's influence on Bernhard Riemann.,*Historia Mathematica*" ,s.419, "In the first place, according to, Herbart, experience shows us properties and bundles [*Complexionen*] of properties, the underlying reality of which must first be sought in *things* to which the properties are ascribed [1825, 199*]. But the next step of analysis, so he continued, led investigators to the elements of Greek philosophy, from which the *things* now obtained a "borrowed reality" [*geliehene Realität*, 1825, 199]. Later scientists' analysis led to the introduction of *chemical elements* from which now the old elements (at least water and air, which Herbart explicitly referred to) were derived. Finally idealist philosophy came, according to Herbart, and reduced even chemical elements, as well as properties, things, and old elements, to intuition [*Anschauung*] and thought, concluding that the idea of the *self* underlay all other concepts and "lent reality" to them." (İtalikler orijinal).

(bundle of properties) olarak kavraması üzerine yoğunlaştığı sırada, Herbart'ın 'gerçeğin' inşası ile ilgili düşüncelerinin Riemann tarafından pek de çekici bulunmaması onun Herbart'ın ontolojisiyle hemfikir olmadığı gerçeğiyle bağdaşmaktadır. Yine de, belirtmek gerekir ki, gerçek ve değişen fenomen arasındaki ayrım ve bunlar aralarındaki ilişki Riemann'ın bilimin epistemolojisi üzerine düşüncelerini geliştirdiği noktalar olarak görülebilir.

Herbart'ın bilginin ilerlemesi fikrinin 'ben' ve 'değişim problemi ve gerçeğin yapısı' temelinde anladığını gördük. Riemann bu anlayışı bazı değişikliklerle benimsemiştir. Herbart bilgi sürecini metafiziksel bir şekilde açıklamaya çalışırken Riemann'ın Herbart'ın metodunu değiştirmiş hali bilimsel araştırmaya daha yakın durmaktadır:

1. Kavramların algılardan şekillendirilmesi (soyutlama ve indüksiyon, aposteriori sentez)
2. Algılananın kavramlardan türetilmesi (apriori sentez).[212]
   Kavram değişimi Riemann için mümkündür ve bu şu şekilde başarılır;
3. Kavrananın mümkün olmadığı ya da kavramlara göre ihtimal dâhilinde olmadığında kavramların değişimi (ya da tamamlanması) zorlukla mümkündür.

Sonuç olarak Riemann için kavramların değişimine ulaşabilmek için 'aklın ve sonucun diyalektikleriyle' ilgilenebilmemize olanak tanıyan Herbart'ın 'ilişkiler metodu' kullanışlıdır.[213] Fikirlerin değişimi ve kavramsal devrimler zıtlıkların çözülmesiyle mümkündür. Riemann'ın notları bu konuyla ilgili olarak Herbart'ın astronomi biliminde kurduğu analojiye dikkat ettiğini göstermektedir. Bu noktaya ek olarak kavramların değişimi konusunda Riemann Herbart'ı bir noktada daha işaret etmektedir. Ayrıntılarına girmeden, Herbart'ın 'Psikoloji Bilimi'nin (Eidoloji) Riemann'ın değişim ile ilgili düşünceleri üzerinde etkili olduğunu söylemek gerekir.

---

[212] Riemann Scholz, E. (1982). "Herbart's influence on Bernhard Riemann". *Historia Mathematica*, 9 , içinde s.418. Bu nokta hakkında Scholz şu tartışmalı yorumu yapar; "Açık ki Riemann Kant'ın sentetik apriori ile kastettiği şeyi söylemek istememektedir, onun aklında olan, bilginin tüm sürecinin (soyutlama ve endüksiyon) diğer yarısında varsayılan, deneyim için kavramsal bir çerçeve teşkil eden bir şeydir." Riemann'ın tam da Kant'ın sentetik apriori kavramını kast ettiğine dair yorumların tartışması için bknz: Bağçe, S. (2006). "Kant'ın Geometriye Dair Görüşlerini Kurtarmak için Bir Yol Var mı ?", *Ulug Nutku'ya Armagan*, içinde s. 341.
"1. Formation of concepts from perceptions (abstraction and induction, synthesis aposteriori),2. Generation of the perceived from the concepts (synthesis apriori), 3. Change (or completion) of the concepts as small as possible, where the perceived is impossible or unlikely according to the concepts."

[213] Riemann Scholz, E. (1982)."Herbart's influence on Bernhard Riemann", 9, *Historia Mathematica* ,s.420.

Scholz Herbart'ın felsefesinin Riemann'ın epistemolojisi üzerindeki etkileri hakkında şu noktaların altını çizer:

1) Fenomena ve altta yatan gerçek arasında bir ayırıma denk düşecek bir şekilde algı ve gerçeğin kavramsal olarak kavranması arasındaki farklılık, bunlardan ikincisi "fenomenin gerisine gitmektir" ve Riemann'a göre fenomen ve altta yatan gerçekliğin açıklanması için bir zemin hazırlama hizmetini sunmaktadır;

2) Kavramlar ile fenomen arasındaki ya da açıklama seviyelerindeki zıtlıklardan ötürü bilginin ilerlemesinin "eski kavramsal sistemlerin dönüşümü" ile olanaklı olduğuna dair inanç.[214]

Bu iki noktanın ışığında Scholz yine Riemann'ın ve Herbart'ın pozisyonlarını kıyaslarken şu üç noktaya dikkat çekmektedir:

1) Herbart hem metafiziğe hem de bilimi araştırırken ve bunlardan metafiziğe açık bir şekilde vurgu yaparken, Riemann temel olarak bilimleri soruşturmuştur.

2) Öyleyse Riemann makalesine, bilim geleneğine uyan bir şekilde materyalist doğruluk kriterini dahil edebilmiştir. Riemann için bilgi, eğer kavramların bağlantısı şeylerin bağlantısına tekabül ediyorsa doğrudur ki bu yine algılanan fenomenin bağlantısından çözülecektir.

3) Sonunda, Herbart kavramların (özellikle ontolojideki) tarihsel değişiminin hatalar zinciri şeklinde olduğunu düşünmüştür (1825, 198ff. Kısmen not (8) de alıntılanmıştır). Riemann, bilimsel bilginin gelişimine bakarak farklı bir görüş sunmuştur. O gerçekliğin belli bir kesimi hakkındaki yeni bilginin gerçekliğin aynı kesiminin eski bilgisi ile zorunlulukla doğrulama ve yanlış ilişkisi olmayabileceğini iddia eder. Kavramsal yapıda değişimler (modifications) de mümkündür ki bu yalnızca eski kavramsal elementlerinin bir kısmını ya da tamamını yanlışlamadan arıtmak ile olabilir.[215]

---

[214]A.g.y., ss.420-421. "1) A distinction between the phenomena and the underlying reality with a corresponding difference between the perception and the conceptual acquisition of reality, the latter had "to go back behind the phenomena" and according to Riemann could thus serve as a base for the explanation of the former; 2) A belief in progress of knowledge by "transformation of older conceptual systems" because of contradictions on the level of the explanations or between concepts and phenomena."

[215] Scholz, E. (1982)."Herbart's influence on Bernhard Riemann", *Historia Mathematica*, 9, s.421. "1) Riemann referred mainly to the sciences, whereas Herbart had investigated both metaphysics and science, with a clear emphasis on the former.

2) Riemann was therefore able to integrate the materialist criterion of truth, corresponding to the tradition of science, much more clearly into his essay. According to Riemann knowledge was true if the connection of the concepts correspond to the connection of things, which again was to be deciphered from the connection of the perceived phenomena [Riemann 1892b, 523].

Sonuç olarak Riemann *Habilitationsvortrag*'ında "Yazar (Riemann'ın kendisi) epistemolojide Herbartçıdır, ama ontolojide değil" derken ne demek istediği daha anlaşılır hale gelmiştir. Riemann Herbart'tan epistemolojik olarak iki yönden etkilenmiştir; öncelikle onun epistemolojisinin temellerini bir matematikçinin gözüyle inceleyip bilim geleneğinin içerisinde bu temelleri geliştirmiştir.

19. yy.'ın ilk yarısında Alman idealistleri Kant'ın zaman ve mekân anlayışına karşıydılar. Kabaca, Kant '*Birinci Kritiğin* '*Transendental Estetik'* bölümünde zaman ve mekânı 'saf görünün formları' (pure forms of intuition) olarak tanımlar ve bu anlamıyla onlar her türlü mümkün deneyimin ön koşuludur. Herbart, Fichte Schelling, Hegel ve Schleiermacher gibi idealistlerin yanında yer alarak Kant'ın bu anlayışını eleştirir. Burada idealist felsefenin Kant'a karşı çıkışını ayrıntılı olarak incelemek yerine, Herbart'ın zaman ve mekâna dair görüşlerini incelemek çalışmamın hedefleri açısından yeterlidir. İlerleyen bölümlerde daha da açımlanacak olan bu konu için şimdilik yalnızca Herbart için zaman ve mekânın 'deneyimin formları' olarak iş gören ve bu bakımdan tam da Kant'ın kategorilerinin fonksiyonuna sahip olduğunu söyleyebiliriz.[216]

Herbart'a göre mekânsal kavramlar 'deneyimin formları' olarak iş gören diğer tüm kavramlardan farklı değillerdir. Tıpkı diğer tüm kavramlar gibi mekânsal kavramlar da deneyimdedir. Ancak, ona göre biz felsefi ve bilimsel düşünme ile mekânsal kavramları şekillendirmeliyiz. Bu seviyede mekânsal tasarımlar (presentations) "insan varlığının komşuluğunda yer değiştirebiliyor olmasının yardımıyla şeylerin algısı" tarafından şekillendirilir(1824, 425*). Böylece "…tasarımlar serisi

3) Finally, Herbart had considered the historical change of concepts (mainly in ontology) to have been a chain of errors [1825, 198ff. partially cited in note [8]. Riemann, looking at the development of scientific knowledge, expressed a different point of view. He declared that the relationship of new knowledge about a certain sector of reality to older knowledge of the same sector was not necessarily that of correction and error. He stated that modification of conceptual structure was also possible, which only refined the conceptual elements of the old system without falsification of part or all of them [9]."

[216] A.g.y., s.422.

(*Vorstellungsreihen*), ki o en sonunda kendilerini biçimlendirir, düzene sokar ve birbirleriyle bağlar ve onda algılar (*aufbewahrt*) içerilir[217], varlığa gelir."[218]

Mekân ve zaman Herbart'ın daha genel 'sürekli seri formlar (*continuierliche Reihenformen*) üreteceği yola çıkış noktalarıdır. Scholz sürekli seri formlar hakkında aşağıdaki noktalara dikkat çekmektedir:

> Sonrakinin (sürekli seri formların) açıklanması çok karmaşık bir prosedürdür ve metafiziğin bir parçası olan Herbart'ın Siynekolojisi (Synechology) bununla ilgilenir. Riemann'ın alıntıları gösteriyor ki o seri formların üretilmesi ile ilgili spesifik prosedürlerle kendini sıkmadı, yine de o tüm bunun Herbart'ın geometrik düşünmesiyle nasıl ilgili olduğu ile ilgilendi, çünkü bu genel fikir mekânsal kavramların geometrik olmayan bağlama transfer edilebilmesini mümkün kıldı.[219]

Scholz 'sürekli seri formlar'ı şöyle tanımlıyor:

> Kabaca konuşursak, bir sürekli seri formlar (a continuous serial forms) özelleşmiş bir sunular grubu dereceli bir birleşme geçirdiği ("graded fusion", abgestufte Verchmelzung) zaman-ki bununla beraber uyan sunular hizaya sokulur, öyle ki hepsi mekânsal modda bir araya getirilebilir-üretilir.[220]

Scholz şöyle devam ediyor:

> Sonuç olarak Herbart için mekân yoktur; yerine *mekânlar koleksiyonu* (*collection of spaces*) vardır ki onun için varlığın modu tamamen farklıdır. Onun iki temel örneği "ses çizgisi" (*Tonlinie*) ve mavi, kırmızı, sarıdan renklerinin köşelerde olduğu ve iki boyutta iki köşe arasında karışık renklerin olduğu renk üçgenidir. Benzer şekilde o her şeyi her bir özelliğin farklı bir niteliksel süreklilikte ("qualitative continuum") bulunduğu bir özellik demeti (bundle (*Complexionen*)of properties) olarak düşünür.[221]

---

[217] Herbart, Scholz, E. (1982)."Herbart's influence on Bernhard Riemann",*Historia Mathematica* , içinde s.422. "the perception of things due to; "mobility of man in his neighborhood [1824, 425*]. So "…the series of presentations [Vorstellungsreihen], which eventually form, order, and connect themselves and in which the order of perceptions is contained [aufbewahrt] come into being."
[218] A.g.y., s.422.
[219] A.g.y., s.422. "The explanation of the latter (continuous serial forms) was a very complicated procedure and, part of the discipline of metaphysics that he (Herbart) called synechology [Herbart 1829, 110-158; Weiss 1928, 50-57]. Riemann's excerpts suggest that he did not bother about specific procedures to generate "serial forms", although he was interested in how all of this related to Herbart's geometrical thinking, because the very general idea made it possible to transfer spatial concepts into nongeometric context."
[220] A.g.y., s.422. "Vaguely speaking, a continuous "serial forms" is produced when a specified class of presentations undergoes a "graded fusion" [abgestufte Verschmelzung] through which the corresponding presentations are ordered, so that one cannot but unite them in a spatial mode [Herbart 1825, 192*] [11]".
[221] Riemann Scholz, E. (1982). "Herbart's influence on Bernhard Riemann", *Historia Mathematica*, s.423. "Consequently, Space did not exist for Herbart; instead there was a *collection of spaces* for

Sonuç olarak, Herbart her şeyi 'özellik demeti' olarak anlar. Bizim düşündüğümüz anlamda tek bir mekân yoktur, birçok mekânlar vardır. O, mekânı her birinin farklı bir varoluş karakterine sahip olduğu mekânların toplamı olarak anlar.

Şimdi de, Scholz'u takip ederek Herbart'ın bu mekân anlayışının Riemann'ın manifold kavramı üzerindeki etkilerini görelim.

1) Daha önce vurguladığımız gibi Herbart şeyleri 'özellik demetleri' olarak görüyordu, yani onun için herhangi bir özellik 'niteliksel bir süreklilik'(qualitative continuum) olarak düşünülebilirdi (Herbart 1825, 193*) (R.59) da alıntılanmıştır.). Herbart için geometrik düşünmeyi herhangi bir başka kavramsal çerçeveye taşımak "çok genel, neredeyse evrenseldir".[222] Buna zıt olarak, *Habilitationsvortrag*'ında Riemann günlük hayatta sürekli büyüklükler (continuous magnitudes) nadirdir, yalnızca yüksek matematiğin içinde sıklıkla onun örneklerini görürüz iddiasındadır.[223]

2) Bu bahsedilen son nokta, sürekli büyüklükleri yüksek matematiğin içinde görme, 19.yy. matematiğinin baskın eğilimlerinden biriydi. Bu matematiksel eğilim Scholz tarafından şu şekilde açıklanıyor: "geometrik dili cebirsel ya da birkaç değişkenlilerin analitik sistemlerine transfer etmek- ki bu eğilim en azından kısmen de olsa Gauss yoluyla Riemann tarafından biliniyordu ve bu Herbartçı felsefeden bağımsız bir eğilimdi[224] (Scholz 1980, 15ff., 53ff.). Scholz'a göre bu nokta ışığında "şu sonucu çıkartabiliriz; yine Riemann'ın kavram şekillendirmesinin arka planında

which the modes of existence completely different [Herbart 207]. His two main examples were the "line of sound" [*Tonlinie*] and the color triangle with blue, red, and yellow at the corners and the mixing colors in the two dimensional continuum in between [1825, 193*] [12]. Similarly he considered anything as a "bundle [*Complexion*] of properties," each property of which ought to be thought of as lying in a different "qualitative continuum" [1825, 193*]".

[222] Herbart, Scholz, E. (1982). "Herbart's influence on Bernhard Riemann",*Historia Mathematica* , 9 ,s.423. "So, transferring geometric thinking to any other conceptual framework "was very broad, nearly universal one for him [13]".

[223] A.g.y.,s.423

[224] A.g.y., s.423. "… to transfer geometrical language to algebraic or analytical systems of several variables, a tendency which was at least partially known to Riemann via Gauss [Scholz 1980, 15ff., 53 ff.] and which was independent of Herbartian philosophy."

baskın olan bu "*matematiksel eğilimidir*" ki onun sayesinde geometrik düşünme geometrik olmayan alanlara transfer edilebilir."[225]

3) Scholz Riemann'ın kavram şekillendirmesinin arka planı ile ilgili olarak ek bir noktaya daha dikkat çeker. Bu nokta Riemann'ın 'manifold' kavramının çok boyutluluğu ayırt edici yenilikçi yanıdır. Ancak Herbart, şeylerin geometrikleştirilmesi fikrinde üç boyuta kendisini sınırlamıştı. Dolayısıyla Riemann'ın 'manifold' kavramını şekillendirmesi Herbart'ın görüşlerinden bağımsız ve daha ziyade yukarıda bahsi geçen matematiksel eğilimin bir sonucudur.

Sonuç olarak, Scholz'a göre Herbart'ın Riemann'ın 'manifold' kavramı üzerinde direk bir etkisinin olduğunu söylemek zorlukla mümkündür. Öte yandan, büyük olasılıkla Herbart'ın seri formlarla ilgili felsefi spekülasyonları Riemann'ın ilgisini çekmişti. Burada asıl dikkat edilmesi gereken nokta, Scholz'un da altını çizdiği gibi, Riemann'ın 'manifold' kavramının temel özellikleri olan çok boyutluluk, bölgesel basit ve genel ölçekte karmaşıklık, uzatılmış büyüklüklerin niteliksel yüzünün niceliksel olanlardan ayrılması ve ondaki yapıların içsel bağlılığı ve ayrılması[226] gibi özelliklerinin Herbart'ın geometrik düşünceleriyle bir ilgisinin olmaması, Riemann'ın tüm bunları matematiksel olandan geliştirmesidir. Scholz Herbart'ın asıl etkisinin, en açık haliyle Riemann'ın matematiğin amacı ile ilgili düşünceleri üzerinde görüleceğini iddia eder.[227]

Herbart'ın 1807 makalesi onun felsefe yapmaktan ne anladığı ile ilgili bazı ipuçları vermektedir. O merkezi bir kavram ile birlikte çalışılmasını ve bu merkezi kavramın ayrıntılandırılması ve açımlanması ile 'çoklukta birliğe' ulaşılabileceğini iddia

---

[225] A.g.y.,s.423. "[W]e may draw the conclusion that again *it was this mathematical tendency* to transfer geometric thinking to nongeometric fields which was dominant background of his (Riemann's) concept formation."

[226] Riemann Scholz, E. (1982)."Herbart's influence on Bernhard Riemann", *Historia Mathematica* , 9, s.424."…multidimensionality, locally simple, globally complex behavior, separation of qualitative aspects of extended magnitudes from quantitative ones, and the separation and interdependence of structures on it."

[227] A.g.y., s.424.

eder.[228] Bu merkezi kavram herhangi bir alandaki 'birlik' fikri üzerine düşünmek için olanak yaratacaktır.[229]

Herbart felsefe ve bilimler arasında merkezi kavrama olan ilgileri çerçevesinde bir ayrım yapar. Bilimler kendi özel ilgi alanlarının içinde kendi merkezi kavramlarını şekillendirir. Oysa Herbart için "bütünleyici kavramlar şekillendirmek spesifik bir bağlamı aşar, ve bu bilimlerin felsefi çalışmalardan sahici felsefeye (*Philosophie als eigene Wissenscahft*) götürür."[230] Herbart için sahici felsefe yalnızca en bütünleyici kavramları gruplamakla kalmamalı onların "içsel zorluklarını" ("their intrinsic difficulties") da analiz edip çözümlemelidir.[231] Bunu yaparken, ona göre felsefe emprisizmin ve rasyonalizmin hatalarına düşmemelidir. Bu noktalara ek olarak, Herbart bilimler ve felsefe arasındaki ilişkiyi diyalektik olarak görür: "felsefe ve bilimler başka bir bilginin dışında değildirler, ama kendilerini *birlikte* ve *aynı* olanda oluştururlar."[232]

Sahici felsefenin oluşturulması bağlamında 'spekülasyon' Herbart'ın felsefesinde merkezi bir rol alıyor görünmektedir. Herbart spekülasyonu "kavramlar arası geçişler yapabilmenin yolunu oluşturmadaki her türlü girişim" olarak tanımlar.[233] Spekülasyonun nihai amacı ise 'gerçeği ' göstermektir. "Sonuç olarak felsefi edim (spekülasyon) karakteristik bir özelliğe sahiptir; onun nesneleri kavramlardır."[234]

Bu belirlediğimiz son noktadan, Herbart bilimlerin araştırma konusunun 'verili olan' olduğunu söyler ve felsefe ile bilimler incelemesinde matematiğe özel bir vurgu yapar:"Felsefi olarak ele alındığında o (matematik) felsefenin parçasıdır. Ve onun kendi gereksinimleri için eğer hâlihazırda yoksa bir nicelik bilimi (*Grösenlehre*)

---

[228] A.g.y., s.424.
[229] A.g.y., s.424.
[230] Scholz, E. (1982). Herbart's influence on Bernhard Riemann, *Historia Mathematica*, 9, s.424. "…to form unifying concepts transcending a specific context, and this led from philosophical studies of the sciences to philosophy proper[230] [*Philosophie als eigene Wissenschaft*]."
[231] Herbart, a.g.y. içinde s.424. "
[232] Herbart, a.g.y. içinde s.425. "[philosophy and sciences does not lie outside of other knowledge, but constitutes itself *with* and *in* the same" [14].
[233] Herbart, Scholz, E. (1982). Herbart's influence on Bernhard Riemann, *Historia Mathematica*, 9, içinde s.425." "any endeavor to make the way for transitions" between concepts [1807, 275]."
[234] Scholz, E. (1982). Herbart's influence on Bernhard Riemann, *Historia Mathematica*, 9, s.425. "So philosophical activity (speculation) had a characteristic feature, it had *concepts* as *its objects*."

yaratması gerekir."[235] Bu durum Herbart'ın matematiği neden diğer bilimler arasında felsefeye en yakın disiplin olarak gördüğünü açık bir şekilde ortaya koymaktadır.

Riemann'ın notlarında Herbart'ın 'spekülasyon' kavramı aşağıdaki şekillerde resmedilmektedir:

> --- Spekülasyon= problemlerin çözümüne doğru girişim (endeavor, *Streben*)
> --- Kavramlararası gerekli bağlantının gösterilmesi
> İlave spekü(-lasyon) problemi
> --- Bilim olarak felsefe
> Spekülasyon yardımıyla bunun (bilim olarak felsefenin) türetilmesi
> Ki o kavramlarını nesneler olarak alır…(R.177) [17][236]

Bu notlar üzerine Scholz şu yorumu yapıyor:

> Büyük ihtimalle Riemann bu notları açılış dersine (inaugural lecture) hazırlandığı sıralarda almıştı ki bu onun matematiğin ve matematiksel bilimlerin metotları ve amaçlarını yorumladığı dönem olmalıydı. Özellikle bunun nedeni eğer Herbart'ın felsefeyi karakterize etme biçimiyle Riemann'ın kendi düşünceleri arasındaki yapısal bağlantıyla ilişkilenirse, Riemann'ın Herbart'ın makalesinden neden sadece bu özellikleri alıntıladığını bilmek oldukça ilginç olurdu.[237]

Scholz'un değerlendirmelerini takiben Riemann'ın ve Herbart'ın bilim anlayışları ile ilgili üç temel noktanın altı çizilebilir;

---

[235] Herbart, a.g.y. içinde s.425. "Philosophically treated, it [mathematics] becomes part of the philosophy which had to create a science of quantity [*Größenlehre*] for its own necessities, if one did not already exist," [1807, 275].

[236] Riemann, a.g.y. içinde s.425;

> ---Speculation= endeavor [*Streben*] toward resolution of problems
>
> ---Demonstration of necessary connection between concepts
>
> A problem of further specul[-ation]
> ---Philosophy as a science
>
> General character that it is generated by speculation

That it takes concepts as its object… (R.177) [17]

[237] Scholz, E. (1982)."Herbart's influence on Bernhard Riemann", *Historia Mathematica*, 9, s.425." It is likely that Riemann wrote these notes during the preparation of his inaugural lecture [18], which must have been a very important period for his interpretation of the methods and goals of mathematics and mathematical sciences. It would be interesting to know why Riemann extracted just these features from Herbart's article, especially if the reason is related to some structural relationship between Herbart's characterization of philosophy and Riemann's own thoughts

1) Riemann bilimi “doğayı kavramlarla algılama girişimi”[238] olarak anlar. Bu girişim içerisinde zıtlıklardan doğan problemler çözülür. Bilimsel kavramların biçimlenmesi, gelişmesi ve genişletilmesi bağlamında Riemann matematiğin pozisyonunu Herbart’ın felsefeye atfettiği role benzer şekilde görür. Hatırlanacağı gibi Herbart felsefeye merkezi kavramlar oluşturma ve bu kavramlar aracılığıyla birlikteki çokluğa ulaşılması rolünü biçmişti. Riemann da benzer şekilde bilimler içerisinde bu merkezi kavramlara ulaşma ve onlar etrafında çalışmanın matematikle mümkün olacağını düşünmektedir. İlerideki bölümlerde göreceğimiz gibi *Habilitationsvortrag*’ının başlarında Riemann ‘olanak’ ve ‘ gereklilik’ gibi temel kavramlardan bahsetmektedir. Bu kavramların karşılanması için onun ‘manifold’ u merkezi bir kavram olarak faydalı olacaktır.[239]

2) Riemann’ın matematiğin farklı alanlarındaki (karmaşık fonksiyon teorisi, geometri) çalışmaları “kavramsal yapıların” ayrıntılandırılmasını göstermektedir. Scholz’a göre bu nokta çok önemlidir:

> Bu o kadar doğruydu ki, biri Herbart’ın matematiği karakterize etme biçiminin adeta Riemann tarafından verildiğini düşünebilirdi [:Matematik], bilgi edinme girişiminde beliren problemleri çözmek ve hâlihazırda tesis edilmiş bilgiler (Herbart’ ın dilinde ‘spekülasyon’) arasındaki bağlantıları netleştirmekle ilgilenen bir bilimdir [240]

3) Bu nokta- ki **1.** maddenin açıklanmasını içermektedir- Herbart için felsefenin amaçlarından ve Riemann için matematiğin amaçları arasındaki benzerliklerden kaynaklanmaktadır. Herbart’ın bilimler ve felsefe arasında gördüğü ilişki Riemann’ın matematik ile bilimler arasında gördüğü ilişkiye paralellik göstermektedir. Bu noktayı Scholz şöyle özetler: “Aslında Riemann’ın Herbart’ın (1807) makalesine

---

[238] Herbart, Scholz, E. (1982).“ Herbart's influence on Bernhard Riemann, *Historia Mathematica*, 9, s.426. “…the attempt to perceive nature through accurate concepts [1892a, 521]”

[239] Scholz, E. (1982).“Herbart's influence on Bernhard Riemann“, *Historia Mathematica*, 9, s.426. Riemann’ *Habilitationsvortrag*’ına, kendi zamanında hâkim olan Öklidyen mekânın ön kabullerinin gerekliliği ve apriori'liğini sorgulayarak başlar; ona göre Öklidyen mekânın “bağlantılarının ne kadar *gerekli*, *mümkün* veya a apriori olduğunu tespit etmek mümkün değildir.

[240] Scholz, E. (1982).“Herbart's influence on Bernhard Riemann“, *Historia Mathematica*, 9, s.426.“ This was true to such an extent that one might be tempted to read Herbart’s note as providing a characterization of mathematics as Riemann himself would have given: A science dealing with concepts generated to solve problems arising in the attempt to gain knowledge and to clarify connections between already established knowledge (“speculation” in Herbart’s language)”

olan ilgisi onun *kendi matematik anlayışını felsefenin aynasında aydınlatma* isteğinin sonucu olduğu görülmektedir."[241]

Scholz bu son noktayı Herbart'ın matematik ve felsefe arasındaki yakın ilişki ile ilgili görüşlerini de sunduğu ve Riemann'ın da üzerine çalıştığı1807 makalesine bağlayarak son bir gözlem yapar:

> (Bu) Riemann tarafından özetlenen makalede matematik ve felsefe arasında çok yakın bir ilişki Herbart tarafından işaret edildiğinden beri daha geçerlidir. Ona göre felsefi olarak ele alındığında matematik felsefenin bir parçasıdır (1807, 275), ve makalesinin başında, o bu minvalde bir şey önerir: Matematikçi dâhice (*geistvoll*) formüllerin ruhunun örtüsünü kaldırmak için çağrıyı (*Beruf*) hisseder (19).
>
> Riemann'ın matematik yapma biçimini daha iyi karakterize eden bir tasavvur çok zordur (20). [242]

Sonuç olarak matematik, bilimler ve felsefe arasındaki ilişkide Riemann matematiği, Herbart da felsefeyi bilimler ile ilişkide bir çeşit köprü olarak görür. Öte yandan hem Herbart hem de Riemann için felsefe ile matematik arasında daha yakın bir ilişki vardır. Matematik, bilimler ve felsefe arasında kurulan bu karşılıklılık ilişkileri Riemann'ın matematiksel çalışmalarının arka planında durmaktadır. O bu ilişkileri bir matematikçi gözüyle inceleyip yorumlamış ve matematik yapma biçimine dâhil etmiştir. Özellikle Herbart'ın matematiksel araştırmanın yönüyle ilgili fikirleri Riemann'ın matematik yapma biçiminin merkezinde durmaktadır. Scholz bu noktanın önemini Herbart'ın fikirleri olmaksızın Riemann "belki de asla yenilikçi ve çok büyük bir kavram olarak manifoldu formüle edemeyecekti"[243]sözleriyle ifade ediyor. Sonuç olarak denebilir ki Riemann'ın matematiksel ve geometrik fikirleri üzerinde Herbart'ın felsefesinin etkisinin dolaylı olması onun, Riemann'ın

---

[241] Scholz, E. (1982). Herbart's influence on Bernhard Riemann, *Historia Mathematica*, 9s.426. "In fact, Riemann's interest in Herbart's article [1807] seems to have been the result of his desire to *clarify his own perception of mathematics in the mirror of philosophy."*

[242] A.g.y., s.426. "This is all the more likely since a very close relation between mathematics and philosophy was suggested by Herbart in the very article summarized by Riemann. According to Herbart, mathematics became a part of philosophy if dealt with philosophically [1807, 275], and at the beginning of his article, he proposed something very much along this line: The mathematician feels the call [*Beruf*] to unveil the spirit of his ingenious [*geistvoll*] formulas [19].
It would be difficult to imagine a better characterization of Riemann's way of doing mathematics [20]"

[243]Scholz, E. (1982). Herbart's influence on Bernhard Riemann, *Historia Mathematica*, 9, s.426.

matematikte öne sürdüğü yenilikçi düşünceler üzerindeki etkisinin önemini azaltmamalıdır.

Şu halde ortaya çıkan sonuçlar şu şekilde özetlenebilir:

1) Herbart'ın 'seri formlar teorisi' (*Reihenformen*) Riemann'ın 'manifold' kavramını şekillendirmesinde teşvik edici bir rol oynamıştır.

2) Yine de Scholz'un açık bir şekilde vurguladığı gibi 'manifold' kavramı köklerini 19.yy. Almanya'sının matematiğinin ruhunda bulunmaktadır. Bu dönemde geometrik olmayan alanların geometrikleştirilmesi eğilimleri vardı.

3) Riemann'ın matematiğe bakışı ile Herbart'ın felsefeye bakışı temel bazı benzerlikler taşımaktadır. Hatırlamak gerekirse, Herbart'a göre matematik felsefi biçimde ele alındığında felsefenin bir parçasıdır, Riemann'ın matematik yapma biçimi de tam da Herbart'ın matematiğin metodu ile ilgili önerisi ile uyumludur.

4) Riemann Herbart'ın fikirlerini bir bilim adamının gözüyle matematikle uyumlu hale getirmiştir. Herbart'ın Riemann üzerindeki etkisi genel anlamda matematiğin metodolojisi ve görevi ile ilgili eğilimlerinde görülür. Riemann Herbart'ın bu konularla ilgili görüşlerini dikkatlice çalıştı ve kendi görüşlerine göre değiştirdi. "Scholz'a göre "bu tam da Herbart'ın felsefenin bilimlerle ilişkisinde yapmasını beklediği şeydi"[244], "o uzaktan gelen bir ışık"[245]olarak felsefe anlayışını reddetti ve onu dışarıda değil ama tamamen diğer "bilgilerle içkin yapısında"[246]geliştirmek istedi."[247]

5) Sonuç olarak Herbart'ın Riemann üzerindeki etkisi epistemoloji ve matematiğin metodunda görülmektedir.

---

[244] Scholz, E. (1982). Herbart's influence on Bernhard Riemann, *Historia Mathematica*, 9, s.428. "This was exactly what Herbart had expected philosophy could do in relation to science."
[245] Herbart, a.g.y.içinde s.428.
[246] Herbart, a.g.y. içinde s.428.
[247] Scholz, E. (1982). "Herbart's influence on Bernhard Riemann", *Historia Mathematica* , 9, s.428. "He rejected philosophy as "light coming from afar" and wanted to develop it not outside but in " a thoroughly immanent relationship to" other knowledge[247] [1807, 230]".

2.1.3. Russell'ın Herbart-Riemann ilişkisine dair görüşleri

Russell "*An Essay on the foundations of geometry*"[248] adlı eserinin birinci bölümünü 'metageometriye'[249] ayırır. O metageometrinin tarihini de üçe ayırır. Birinci dönem Gauss, Lobachevski ve Bolyai'yi, ikinci dönem Riemann ve Helmholtz'u, üçüncü dönem de Cayley ve Klein'ı içerir. Tezin konusu Riemann'ın manifold kavramı olduğu için, ben burada sadece Russell'ın ikinci döneme ilişkin düşüncelerini ele alacağım.

Russell'a göre Riemann'ın ait olduğu metageometrinin ikinci dönemi birinci ve üçüncü dönemlere göre dikkate değer bir şekilde farklı bir pozisyona sahiptir. Russell için bu dönem yöntemlerinde yapılaştırıcı (constructive) ve amaçlarında felsefidir. Metodolojik olarak bu dönem metrik geometriyi kullanarak Öklidyen olmayan iki geometrinin; Lobacevski ve küresel (spherical) geometrilerin kuruluşunu göstermiştir. Russell'a göre Riemann'ın mekânı ele alış biçimi mantıksal analiz çerçevesinde değil daha ziyade felsefi bir motivasyonla kurulmuş olan 'manifold' kavramının bir örneğidir.[250] Russell bu dönemin temel kavramlarının 'manifold' ve "eğriliğin ölçüsü" (measure of curvature) olduğunu belirler. Ona göre manifold kavramı mekânın çok genel büyüklüklerin (magnitudes) özel bir örneği olarak tanımlanışı bakımından felsefi bir öneme sahiptir. "Eğriliğin ölçüsü" (measure of curvature) ise mekânın noktadan noktaya değişimini belirleme açısından hem felsefi hem de matematiksel bir öneme ve kullanıma sahiptir.[251] Eğriliğin ölçüsü" Gauss'un *Olağanüstü Teoreminin* sonucudur. Bu teoremle Gauss a) yüzey üzerinde metrik değişkenlerin noktadan noktaya değişmesi yüzeyin tüm geometrisinin bilgisini içerir, b) bir yüzeyin toplam eğriliği (**K** sabiti) yüzeyin mutlak özelliğidir gibi önemli matematiksel sonuçlara ulaşır. Felsefi olarak ise yüzeyin toplam eğriliğinin onun içsel bir özelliği olduğu ve başka hiçbir şeye (örneğin üçüncü bir boyuta) referansı olmaksızın bilinebileceğini göstermesi bakımından önemlidir. Yine de Russell için bu kavramın matematiksel önemi felsefi karakterine önseldir.[252] Çünkü eğriliğin

---

[248] Russell, Bertrand (1956). *An Essay on The Foundations of Geometry,* Dover Publications.
[249] Russell Metageometri'yi Öklidyen olmayan geometriler ile eş anlamlı kullanır, a.g.e., s.7.
[250] Russell, Bertrand (1956). *An Essay on The Foundations of Geometry,* Dover Publications s.14.
[251] A.g.e.,s.14.
[252] A.g.e.,s.14.

ölçüsü Riemann'ın *Habilitationsvortrag*'ında sunduğu fikirlerin çekirdeğinde yatmaktadır. Russell Herbart'ın geometri ile ilgili fikirlerinin çok büyük önem arz etmediğini düşünmekle beraber onu Kant'tan sonra gelen felsefeciler arasında geometri teorisini geliştirenlerden birisi olarak görür.[253] Yine de Russell'a göre Herbart'ın önemi Riemann üzerindeki etkisi aracılığıyla anlaşılabilir. O bu etki ile ilgili olarak beş noktaya işaret eder:

> … Ama onun psikolojik mekân teorisi, uzamı (mekânı) noktalar serisinden yapısallaştırması, onun mekânı ton ve renk serileriyle kıyaslaması, onun genel olarak sürekli olan yerine parçalı olanı tercih etmesi ve son olarak onun mekânı diğer seri formlarla kıyaslamasının önemine dair inancı Riemann'ı çağ açan spekülasyonlarına yol açmış ve onu mekânın yalnızca analitik ve niceliksel özelliklerle açıklanması için cesaretlendirmiştir.[254]

2.1.4. Torretti'nin Herbart-Riemann ilişkisine dair görüşleri

Torretti için bu beş nokta arasında Herbart'ın mekânı ton ve renk serileriyle kıyaslamasını içeren üçüncü husus özellikle Herbartçıdır çünkü "bir cinsin özelleşmelerinin kümesi olarak tanımlanan manifold kavramı noktalar olarak düşünülen mekândan daha çok renkler ve renkliliğin manifolduna uygun düşmektedir." "kuvvetli şekilde Herbart'çıdır ve büyük ihtimalle Riemann'ın manifoldu bir cinsin (genus) özelleşmelerinin kümesi olarak tanımlamasına- ki bu tanım renkleri ve renkliliğin (colour-hues) manifolduna mekânın noktalarına uyduğundan daha iyi uymaktadır."[255] Torretti'ye göre Herbart'ın psikolojik mekân

---

[253] A.g.e., s.62.
[254] Russell, Bertrand (1956). *An Essay on The Foundations of Geometry,* Dover Publications, ss.62-63. "… But his psychological theory of space, his construction of extension out of series of points, his comparison of space with the tone and colour-series, his general preference for the discrete above the continuous, and finally his belief in the great importance of classifying space with other forms of series (Reihenformen), gave rise to many of Riemann's epoch-making speculations, and encouraged the attempt to explain the nature of space by its analytical and quantitative aspect alone."
[255] Torretti, R. (1978). *Philosophy of geometry from Riemann to Poincare.* Dordrecht: Reidel: D. Reidel Publishing Company, s.107. Ayrıca Mekân ve renkler arasındaki ilişkinin bir incelemesi için Mach, E. (1906). *Space and Geometry In The Light of Physiological, Psychological and Physical Inquiry*, trans.by Thomas J. McCormac'ın özellikle 98,99,100. sayfalarına bakınız.
Ek olarak, Russell (1956,s.68) renk ve manifoldlar arasındaki benzerliği kavramada zorlandığını söyler. Russell'ın bu şikâyeti Banks E.C. (2005, s.230) tarafından yanıtlanır; "Sonuç olarak Russell'ın Riemann'ı bir rengi başka bir renk ile hareket ettirerek ya da üst üste bindirerek kıyaslama yapmak için aracının olmaması temelinde onun renklerle mekân arasında analoji kurmasını eleştirmesi oldukça haksızdır. Metrik özellik, eğer bir tane varsa, koordinatların karar verildiği özellikle aynı şey olmak zorunda değildir. Aslında, Riemann'ın yaptığı gibi manifoldun katlarını ve metrik değerlendirmeleri çekip ayırmak daha iyi olacaktır. Russell- ki o açıkça kafasında fiziksel durumların sezgisine sahip değildi- serbest hareketin (free mobility) ya da bir pozisyondan diğerine geçerken mesafenin

teorisi Kant'taki zaman-mekânı da içeren sınıfı işaret etmek için kullandığı *Manningfaltigkeit* kavramında köklerini bulmaktadır.[256] Torretti Herbart'ın psikolojik mekân teorisinin Riemann'ın 1854 *Habilitationsvortrag*'ındaki üzerindeki etkisini kavramakta zorlandığını belirtir. Ona göre Riemann *Habilitationsvortrag*'da Herbart'tan olsa olsa "empirist önyargı" noktasında etkilenmiş olabilir.[257] Herbart'a göre bizdeki mekân temsili empirik olanla başlar ancak *Habilatationsvortrag*'da, Torretti'nin de belirttiği gibi, psikoloji kaynaklı bir mekân algısının (psychogenesis'in) yeri yoktur. Russell'ın listesindeki parçalı olanın sürekli olana tercih edilmesi iddiası ile ilgili olarak Torretti. Russell'ın bunu iddia ederken tam olarak neyi düşünmüş olabileceği hakkında bir fikri olmadığını, böyle bir tercihin Riemann'ın yazılarının neresinde rastlanıldığını anlayamadığını söyler.[258] Torreti'nin bu iddialarında haklı olduğunu düşünüyorum, çünkü ilerde *Habilitationsvortrag*'ı

---

korunması (the preservation of distance from one position to another) özelliğinin de geçerli olmadığı bir koordinat sisteminin bir manifold üzerinde kurulmasının mümkün olmadığına inandı. Ancak bu yalnızca eğer koordinat sistemi mekân mesafe ölçüsünün yardımıyla ("with the help of spatial distance measurement") döşenirse ve sonra mesafenin bir özelliği bu koordinatlardan gizli bir şekilde türetilirse doğrudur (böylece Russell ve diğerlerinin suçladığı gibi Riemann geometrisi sorun ihtiva etmesiyle suçlu olurdu). Ancak, renk manifoldu veya görsel mekân ile yapılan kıyaslamaların tüm *göstermek istediği*, bölgeselliğin özellikleri ("properties of locality) ve yön ("direction") mesafeye önceldir ("prior to distance"). Russell ayrıca *kendisinin* mekân felsefesinin temel aranılan bir niteliği ("main desideratum") olan mekânsal özelliklerin çok daha temel olan niteliksel belirlenimlerden soyutlanması olarak belirlediği şeyin tam da Riemann'ın başarmak için gayret gösterdiği şey olduğunu görmedi." (Alıntının orijinali: "Thus Russell's criticism of Riemann's analogy of colors with space, viz., that he had given no means of comparing one color with another by motion or superposition, is quite unfair. Thus Russell's criticism of Riemann's analogy of colors with space, viz., that he had given no means of comparing one color with another by motion or superposition, is quite unfair. The metric property, if there is one, need not be the same property by which the coordinates are determined. In fact, it is better to pull apart the stages of manifold determination and metric considerations as Riemann does. Russell – who apparently did not have sense-physiological cases in mind – believed it was "impossible to set up a coordinate system in a manifold in which free mobility or the preservation of distance from one position to another did not also hold." But this is only true if the coordinate system is laid down with the help of spatial distance measurement, and then a property of distance surreptitiously derived by means of those coordinates (then indeed Riemannian geometry would be guilty of question begging, as Russell and others accused). But the whole *point* of comparisons with the color manifold, or with visual space, is to show that the properties of locality and direction are prior to distance. Russell also does not see that his *own* main desideratum of a philosophy of space, namely that spatial properties be abstracted from more fundamental qualitative determinations, is the very thing that Riemann also strove to accomplish.")

[256] Torretti, R. (1978). *Philosophy of geometry from Riemann to Poincare.* Dordrecht: Reidel: D. Reidel Publishing Company, s.107.
[257]Torretti, R. (1978). *Philosophy of geometry from Riemann to Poincare.* Dordrecht: Reidel: D. Reidel Publishing Company s.107.
[258] Torretti, a.g.e., s.108. "I do not know what Russell had in mind when he spoke of "Herbart's his general preference for the discrete above the continuous", so that I cannot judge wherein such preference shows up in Riemann's writings."

incelerken hemen girişinde göreceğimiz gibi Riemann günlük hayatta parçalı manifoldların (discrete manifold) örneklerine çok, sürekli manifold örneklerine ise az rastladığımızı söyler ama bizim içinde çalıştığımız yüksek matematikte sürekli manifold örneklerine daha çok rastladığımızı ve bunların daha temel bir rolü olduğunu belirtir. Yani, parçalı manifoldların örneklerine nicelik olarak sürekli manifoldlara nazaran daha çok rastlasak bile Riemann genel olarak matematikte özel olarak da mekân ve geometri çalışmalarında sürekli manifoldlara niteliksel farkından (sürekli olmaları sebebiyle yapılaştırmaya olanak tanımaları) ötürü daha büyük bir önem verir. Riemann'ın sürekli manifoldları ayrı tutmasının kaynağını Riemann'ın *Habilaltionsvortrag*'ın yeniden inşa etme girişimimizde daha detaylı olarak inceleyeceğiz.[259] Sonuç olarak, Russell'ın Herbart'ın parçalı olanı sürekli olana tercih ettiği ve bunun Riemann üzerinde etkili olduğunu iddia ettiği dördüncü maddenin anlaşılmazlığı konusunda Torretti ile hemfikir olduğumu belirtmeliyim.

Öte yandan, Torretti Russell'ın ikinci iddiası, yani Riemann'ın "mekânın noktalar serisinden yapısallaştırılması"nın büyük bir olasılıkla Herbart'ın sistemindeki 'süreklilik teorisinden' etkilendiği iddiası ile kısmen hemfikirdir.[260] Çünkü Torretti'ye göre Herbart'ın süreklilik teorisi yardımıyla mekânı oluşturması ile Riemann'ın yapılaştırması arsında fark vardır. Herbart bu yapılaştırmada değişmez, katı dizilerin yapılaştırması (rigid line) ile sınırlı kalırken, Riemann *Habilitationsvortrag*'da sürekli dizilerin (continuous line) yapılaştırmasının yöntemini verir.

Sonuç olarak, Torretti Russell ile Herbart'ın Riemann'ı etkilediği noktalar konusunda kısmen hemfikir görünmektedir. Herbart'ın ton ve renk serilerini mekân ile kıyaslamasının Riemann üzerinde etkili olduğu fikrinde Torretti Russell ile hemfikirken, Riemann'ın 'manifold'un yapısallaşmasını 'seri geçişler'(continuous transitions) olarak açıklama biçiminin- ki bu bir çeşit noktalar arasında durağan olmayan, karşılıklı, düzenli bir hareketi ima eder- Herbart'ın nokta kümelerinin

---

[259] Bakınız Beşinci Bölümde *1. "N-kez Yer Kaplayan Manifold Kavramı"* başlığı altında 1,1."Sürekli ve ayrık manifoldlar"

[260] Torretti, R. (1978). *Philosophy of geometry from Riemann to Poincare.* Dordrecht: Reidel: D. Reidel Publishing Company, s.108.

yapısallaştırılması düşüncesi ile bir benzerliği olduğu iddiasında Russell'dan ayrılır; Riemann'ın yapılaştırma yöntemi sürekliliğin yöntemini verirken Herbart'ın yöntemi değişmez, esnek olmayan nokta kümesini sağlamakla yetinir.

2.1.5. Ferreiros'un Herbart-Riemann ilişkisine dair görüşleri

Ferreiros[261] Scholz'un Herbart'ın Riemann üzerindeki etkisi ile ilgili verdiği açıklamalarla hemfikir olmakla beraber felsefeci ve matematikçi arasında daha fazla direk bağlantılar olduğunu iddia eder. Daha önce gördüğümüz gibi Herbart'ın mekân kavrayışı onun süreklilik teorisi ile (Synchology) bağlantılı bir şekilde geliştirilmiştir. Herbart mekân, zaman, sayı ve madde gibi 'süreklilik' içeren kavramların oluşlarına 'dereceli birleşme' ('graded fusion' ,*abgestufte Verschemelzung*) kavramı ile açıkladı. Bu görüşün ışığında, Ferreiros Riemann'ın Herbart'ın süreklilik ile ilgili verdiği hesabın ayrıntılarını kabul etmediğini "Herbart'ın bakış açısının çok genel taraflarını kabul ediyor göründüğünü"[262] iddia eder.

Ferreiros'un çalışması ile ilgili bir başka nokta da onun Leibniz ile Herbart ve Riemann arasında mekâna dair fikirleri bağlamında bir köprü kurmaya çalışmasıdır. Ona göre, Herbart'ın mekân ile ilgili fikirleri Leibniz'in mekânı aynı anda olmaklığın düzeni (space as order of coexistence) olarak tanımlaması ile uyumludur. Herbart için mekân deneyim sonucunda edinilen zihinsel imgelerin bir sonucu olarak hayal gücümüzde oluşan bir formdur. Bu görüşü takiben, her türlü zihinsel imge 'sürekli seri formların'-ki bu imgelerin hepsinde mekânın kavramlaşması cereyan eder- üretilebilmesine neden olabilirdi. Öyleyse her şey; zaman, mekân, madde, sayı

[261] Ferreiros, J. (2007). *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics.* Basel, Switzerland ; Boston: Birkhauser. Ferreiros Riemann'ın 'manifold' kavramına farklı bir şekilde yaklaşır. Onun bu kavramın şekillenmesindeki temel vurgusu mantık, özellikle de set teori temelindedir. Yine de, Ferreiros (s.39) set-teorik bakış açısıyla Riemann'ın 'manifold' kavramı arasında direk bir ilişki yerine set teorinin gelişiminin Riemann'ın kavramını yapısallaştırma motivasyonu ile bir paralellik olduğunu önerir. Buna ek olarak, Detlef, L. (1999). Turning Points in the conception of mathematics, Bernhard Riemann 1826–1866: Birkhauser, ss.231–232, de Ferreiros'un set teorinin gelişimi ile Riemann'ın 'manifold' kavramını şekillendirmesinde arasında bir ilişki olduğu görüşünü paylaşıyor görünür. Yine de, bu görüşün geçerli olup olmadığına bu çalışmada yer verilmeyecektir.

[262] Ferreiros, J. (2007). *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics.* Basel, Switzerland ; Boston: Birkhauser, s.46. "…he seems to have adopted some quite general aspects of Herbart's approach."

geometrikleştirilebilirdi. Dolayısıyla Herbart için mekânsal formlar hem fiziksel dünyaya hem zihinsel temsillere uygulanabiliyordu. Ferreiros Leibniz'in ve Riemann'ın mekânı kavrama biçimleri arasında gördüğü ilişkiyle ilgili olarak sözlerini şöyle bitirir; "Tarihsel bakış açısıyla, açıkça, Leibniz ve Riemann 'ın böyle bir kavramsallaştırma önerileri arasında bir bağlantı- ki bu bağlantı Herbart'ın doktrinleri tarafından kurulmaktadır- bulmak oldukça ilginçtir."[263]

Ferreiros Herbart-Riemann bağlantısına ilişkin bir noktaya daha dikkat çeker. Ona göre Riemann'ın 1853 makalesinde açıkladığı 'manifold' kavramı Gauss'un 1831 yılındaki makalesinde açıkladığı fikirlerden çok Herbart'ın fikirlerine yakındır. Bahsi geçen makalede Riemann 'manifold' fikrini "fiziksel bir sistem içinde iki ya da *n* fiziksel büyüklüğün, değerlerinin belirlendiği ölçüm deneyindeki bütün olasılıklı sonuçların toplamına işaret ederek kullanır." Ferreiros bunu "bir sistem için durumların mekânının kavramı"[264] ("the notion of the space of states for the given system") olarak anlayabileceğimizi söyler ve bu şekilde alındığında ona göre 'manifold'' Gauss'un 1831 kullandığı anlamda 'manifold' tanımından oldukça farklı hale gelir. Gauss bu makalesinde manifoldları ilişkiler ve özellikler açısından ele alır ve manifoldları soyut büyüklükler teorisinden ayırmak gerektiğini ve manifoldların sezgisel örneklemelerinin mekânsal kavramların yardımıyla temsil edilebileceğini iddia eder. Ancak "Riemann söz konusu kavramın çok boyutlu manifold'a işaret ettiğini gösterir, üstelik bu kavram (multidimensional manifold) tüm geometrinin mekânsal sezgiye güvenmeksizin geliştirilebilmesi için tatmin edici bir zemin sağlar."[265] Manifold'un bu şekilde tanımlanışı ve açıklanışı Herbart'ın her şeyin her özelliğinin farklı bir niteliksel süreklilikte yatan özellikler toplamı olarak ele alma düşüncesi ile paralellik göstermektedir.

---

[263] Ferreiros, J. (2007). *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics.* Basel, Switzerland; Boston: Birkhauser, s.46." From a historical point of view it is quite interesting to find that, apparently, there was a connection between Leibniz's and Riemann's proposals of such a conception, the link being Herbart's doctrines."

[264] A.g.e., s.47.

[265] A.g.e., s.58. "But Riemann indicates that the notion in question is that of a multidimensional manifold and, moreover, that this notion affords a satisfactory basis for developing the whole of geometry without the least reliance on spatial intuition."

Sonuç olarak Ferreiros Scholz'un Riemann'ın *Nachlass*'ı temelinde çizdiği resim ile hemfikirdir. Ancak, ona göre Herbart'ın felsefesi ile Riemann'ın çalışmaları arasında görece daha çok direk bağlantı vardır. Ferreiros'a göre, Herbart'ın süreklilik ile ilgili açıklaması ile mekânı fiziksel nesnelerin özelliklerine bağlantılı olarak kavramsallaştırması ve Riemann'ın 'manifold'u açıklama ve tanımlama biçimi arasında bağlantılar vardır.

2.1.6. Herbart'ın Kant ile İlişkisi ve Riemann Üzerindeki Etkisi

Bu bölümde öncelikle Herbart'ın, mekân ve geometriyi kavrayış biçimi temelinde Kant ile ilişkisini inceleyeceğim. İkinci olarak Herbart'ın, Riemann'ın geometri anlayışında ve mekânı manifold olarak ele almasında ne şekilde ve ne seviyeye kadar etkili olduğunu göstermeye çalışacağım.

Herbart'ın Kant'ın mekânı saf görünün formu olarak ele almasından duyduğu rahatsızlık Herbart'ın felsefesinin genel hatlarının çizildiği bölümde belirtilmişti. Herbart bu rahatsızlıktan hareketle Kant'ın *Eleştirel* felsefesini yeniden ele alma düşüncesindeydi. Bu amacın merkezinde ise zaman mekân ile kendinde şeyler arasındaki ilişki yatar. Herbart Kant'ın bu ikisi arasında kurduğu ilişkiyi açık bulmaz. Herbart bu ilişkiyi açık kılmak için önce Kant'ın nedensellik anlayışını yeniden ele alır. Bu ilişkiyi o, Kant'ın Eleştirel felsefesi ile Leibniz-Wolff sistemi arasında kurmaya çalışır, ki bu Kant'ın Eleştiri öncesi döneminde yaptığı Leibniz–Wolff sistemi ile Öklid geometrisi ve Newton'un doğa felsefesi arasında denge kurma girişimine öykünmektedir. Kant kendi sentezleme girişiminin sonucunda mekânın üç boyutlu, sonsuz bölünebilir olduğunu, mekânsal özelliklerin ise Leibniz-Wolff sisteminin, monadik mekân tasarımıyla açıklanamayacağını görmüştü. Çözüm olarak dış dünya tarafından sağlanan duyusal görünün insanın bilişsel kapasitesi ile nasıl ilişkide olduğunun hesabını vermek için mekânın saf görüsü kavramını insan zihnine yerleştirmişti. Bu yolla hem mekân görüsünün özel bir karakteri olduğunu vurgulamış hem de anlama yetisinin sağladığı kurallar, şemalar ve genel inşa işlerinin duyusal görünün nesnelerine nasıl uygulandığının hesabını vermişti. Sonuç olarak anlama yetisinin saf kavramlarının uygulanabilirliğini zaman ve mekânda görünüşler dünyasıyla sınırlamıştı.

Öte yandan Herbart'ın temelde zaman-mekân ile kendinde şeyler arsındaki ilişkiyi tesis etmek için iki önerisi vardır.[266] Bunlardan ilki nedenselliği kendinde şeylerin gerçek yapısının bir parçası olarak ele alarak Kant'ın nedensellik kategorisini görünüşler dünyasına sınırlandırılmasını kaldırmaktır. Bu yolla Herbart öznel ve nesnel mekân arasındaki farkı kaldırabileceğimizi düşünüyordu. Bu yolda katı cisim (rigid body) kavramı onun için anahtar roldeydi.[267]

Herbart'ın ikinci önerisi ise Öklidyen geometrinin bir örnek olacağı farklı uygulamalı geometrilerin temeli olabilecek 'soyut bir ilişkiler bilimi' kurmaktı.[268] Herbart için kavranabilir mekân tutarlı mantıki ilişkilerin soyut bir bilimiydi:

> Geometri mekânı verili olarak alır ve onun içeriğini, çizgilerini, açılarını yapılaştırma ile elde eder. Ama basit özler için mekân verili değildir (ve doğal felsefe onları gerçek için kati bir zemin oluşturma amacıyla indirgemelidir). O (mekân) onun tüm belirlenimleri ile beraber üretilmelidir. Geometrinin durumu metafizik için çok aşağıdadır. Metafizik onu kullanmadan önce geometrinin olanağını ve geçerliliğini olanağını ve geçerliliğini açık hale getirmelidir.[269]

Herbart'a göre geometrici tarafından varsayılan mekân duyular dünyasından yani Kant'ın 'mekânsal görüler dünyası'ndan alınmak suretiyle varsayılmaktadır.[270] Hâlbuki Herbart'a göre kavranabilir mekânın geometrisi (the geometry of intelligible space) geometrinin bir üst biçimidir ve o kavramlarını duyulur deneyimden almaz bunun yerine bu kavramları belli ilk kavramlar temelinde kurar. Herbart kavranabilir mekânın geometrisi 'pozisyon', 'aralarında', 'içinde' 'dışında', gibi ilksel kavramlarla ve farklı mantıki ilişkilerle işe başlar. 'Katı çizgi' (rigid line) ve 'düz

---

[266] Lenoir, T. (2006). "Operationalizing Kant: Manifolds, Models, and Mathematics in Helmholtz's Theories of Perception", *The Kantian Legacy in Nineteenth-Century Science,* M. Friedman, A. Nordmann (Eds.), MIT Press, içinde, s.151.
[267] A.g.y., s.151.
[268] A.g.y., s.151.
[269] A.g.y., s.152.
[270] A.g.y., s.152.

çizgi' (straight line) bu geometri için anahtar kavramlardır.[271] Herbart'ın çizgileri ve düzlemleri tartışması bu bakış açısı ve onun psikolojik ve nesnel mekân ile ilgili görüşleri ile yakından ilgilidir. Herbart çizgiyi 'yönlü büyüklük' olarak anlar ve bunu iki nokta arsındaki en kısa yolu belirlemek için kullanır.[272] Çizgiyi bu şekilde birleşik yönlerin toplamı olarak düşünen "felsefi" bir geometrinin en önemli sonucu mekânsal boyutların sayısı konusunda ilkece sınırlı olmayışımızdır. Aynı prosedür iki ya da üç boyutlu büyüklüklerin inşasında dört, beş ya da daha fazla boyuta izin verecektir. Ancak Herbart'a göre böyle bir yapılaştırma yalnızca kavramlarla ve yapılaştırmanın kurallarıyla oynamaktır ve "Kavranabilir mekân tıpkı görülenebilir olan gibi yalnızca üç boyutludur."[273]

Riemann manifoldun kurulması işinden bahsederken, tek boyutlu manifoldda tek bir yönde; (ileri ve geri) hareket edilebilirliği benzer şekilde iki boyutlu bir manifold (yüzey) üzerinde hareket tanımlamak için iki ayrı yönün gerektiğini ve *n* boyutlu manifolda *n* tane ayrı yön ile belirlendiğini gösterir. Dolayısıyla Herbart'ın felsefi geometrisinde çizgilerin yönlü büyüklükler olarak tanımlanması Riemann'ın manifoldun tanımını verdiği genel çerçevede görülebilir.

Herbart benzer bir işlemsel bakışa diğer anahtar kavramların türetimi için de sahiptir.[274] Doğru çizgileri, harekete olabildiğince az başvurmak suretiyle tanımladığı şekilde maddeyi de içsel ilişkileri olan ve bu ilişkileri hareket boyunca koruyan noktaların, çizgilerin, yüzeylerin toplamı olarak tanımlar.[275] Herbart dolayısıyla "atomların toplamı" ya da "kohezyon" olarak ya da itim ve çekim arasındaki ilişkinin "içine işlememezliği" (impenetrability) sağlaması şeklindeki Kant'ın *Metaphysical Foundations of Natural Science*[276]'da başvurduğu tanımlardan ayrılır. Herbart için 'katı cisim'i tanımlamak noktaların, çizgilerin, yüzeylerin aktarım ve dönme gibi

[271] A.g.y., s.152.
[272] A.g.y., s.153.
[273] A.g.y., s.154.
[274] A.g.y.,s.154.
[275] A.g.y., s.154.
[276] Kant, I (2004). *Metaphysical Foundations of Natural Science*, translated and ed. M. Friedman, Cambridge University Press.

hareketleri boyunca aynı sistematik özellikleri koruması için tutarlı sabit bir kural belirlemektir.[277]

Herbart'ın 'katı cisim' tanımakla ilgili vurgusu hem Riemann hem de ondan sonra gelen geometriciler[278] tarafından da ele alınmıştır. Riemann *Habilatitionsvortrag*'da mekânın topolojik özelliklerinin nasıl belirlenebileceği üzerine odaklanmıştır. Bu topolojik özellikler figürlerin mekânsal, dönüşümlerde değişmeyen yani figür mekânda hareket ettiğinde değişmeden kalan özelliklerdir. Riemann *n* boyutlu bir mekânda yani *n* tane sürekli ve bağımsız değişken tarafından belirlenen bir mekânın sabit eğriliğe sahip olduğunu mekânsal figürlerin formları bozulmadan hareket ettirilebileceğini, döndürülebileceği *hipotezine* dayanarak göstermiştir.

Figürlerin mekândan bağımsız olarak bulunması ancak ve ancak cisimler hareket ettirildiklerinde değişmeyen bazı özellikleri olduğunda mümkündür. Yani, eğer cisimler yerini değiştirdiğinde aynı özelliklerine farklı mekânlarda halen koruyabilirse, özellikleri dönüşüm durumunda da değişmeden kalır. Riemann'a göre

---

277 Lenoir, T. (2006). "Operationalizing Kant: Manifolds, Models, and Mathematics in Helmholtz's Theories of Perception", *The Kantian Legacy in Nineteenth-Century Science,* M. Friedman, A. Nordmann (Eds.), MIT Press, içinde, s.154.

278 Helmholtz 1868 tarihli *On the Facts Underlying Geometry* makalesinde benzer ama bir yanıyla farklı bir konuya odaklanır. O da Riemann ile figürleri kıyaslamadan ve ölçmeden geometri yapmamızın imkânsız olduğunu ve bu işlemleri yapabilmek için de ölçüm aletlerimizin değişmeden kalan bazı özelliklerinin bulunması konusunda hemfikirdir. Ama onun sorusu daha spesifiktir; figürlerin özelliklerinin değişmeden kaldığı hareketlere dair geometrik *aksiyomlarımız* neler olmalıdır? Helmholtz bu soruyu "kalıplaşmış hareketler" (rigid motions) ile yanıtlamaya çalışır. Bu hareketler nesnelerin özelliklerini koruyan hareketlerdir. Örneğin bir küre kendi merkezi ekseni etrafında döndürüldüğünde bu hareket kürenin *X* ve *Y* eksenlerindeki simetrisini korur, dolayısıyla bu simetriler dönüşümlerde değişmezler.
Helmholtz da makalesinde katı cisimlere (rigid bodies) ve ışık ışınlarına (light rays) vurgu yapar. Bu iki alet bize geometri yapabilmemize temel teşkil eden düz çizgi ve benzerlik kavramlarını türetebilmemize fırsat verirler. Düz çizgi ve benzerlik de yön, mesafe, büyüklük, geometrik inşa gibi kavram ve işlemlerimizin arka planındadırlar. Helmholtz'a göre katı cisimler ve ışık ışınları geometrinin prensiplerinin empirik temelli olduğunu anlamamıza temel teşkil ederler. Bilgi kuramsal olarak bu anlayış, Riemann'ın programının temel bileşenlerinden olan 'serbest hareketlilik' fikrini uca taşımaktadır. Riemann için serbest hareketlilik fiziksel cisimlerin tamamen sağlayamayacağı, yalnızca *yaklaşabileceği* bir özelliktir. Ayrıca Riemann kalıplaşmış hareketlere uzlaşımla karar vermek yerine fiziğin avantajlarını kullanarak daha küçük skalalarda daha kesin kavramlara ulaşabileceğimizi düşünür. Yani Riemann için serbest hareketlilik fiziksel geometrinin bir koşulu değil, bir kabuldür. Mikroskobik ilişkileri ve cisimlerin doğası hakkında daha derin bir kavrayışa sahip olduğumuzda pekala bu kabul uygulanamaz hale gelebilecektir. Helmholtz, H.V.(1977). *Epistemological Writings, Boston Studies in the Philosophy of Science,* ed.Robert T., S Cohen and Marx W. Wartofsky, Dordrecht Reidel Publishing, içinde s.s.39-71, DiSalle, R(2006). Understanding Space –Time, Cambridge University Press, ss.77-78.

bu kabul olmaksızın iki kısa arasındaki en kısa yol olarak ışık ışını ve mesafe ölçümlerinde kullandığımız metre çubuğu gibi katı cisimler güvenilir ölçümleri temellendirebileceğimiz özelliklerden yoksun olurlar. Yani geometrinin temeli olan ölçüm işlemini yapabilmek için bu temel aletler değişmeyen bazı özelliklere sahip olmalıdır.

Herbart katı cisimlerle ilgili bu fikirleri ilişkilerin soyut biliminin çok sayıdaki uygulamasından biri olarak gördüğü geometriye uygular ve duyulur mekânı (sensory space) kurmanın hesabını vermeye çalışır.[279] Herbart, Kant'ın mekânın saf görü olduğu fikrine alternatif olarak, Locke'un ve şeyleri özellik demetleri olarak ele alan geleneğin anlayışı temelinde, psikolojik mekânın duyulardan yola çıkılarak empirik olarak kurulabileceğini göstermeye çalışır.[280]

Temel renklerin, tonların ve benzerlerinin olması Herbart'ın çıkış noktasıdır. Bunların fark edilebilmeleri için onların arasında tezat bir duyumun olması yani farklılık yaratacak bir duyumun olması gerekir. Herbart' a göre biz algı seviyesinde zaten kıyaslama ve ölçmenin psikolojik sürecini yaşarız ve bu sürekli olarak olur. Ona göre örneğin, herhangi bir varyasyon olmadan "do" notasına sürekli maruz kalmak o sesin duyulmamaya başlamasına yol açar benzer şekilde gözlerimizi kıpırdatmadan mavi bir kumaş parçasına bakmak da onun yavaş yavaş gözden kaybolmasına sebep olur.[281] Böyle bir anlayışta algılar yoğunlukta[282] derecelenmek suretiyle birbirlerini dengeleyen kuvvetler olarak değerlendirilir. Herbart duyumları kuvvetler olarak tanımlayarak buradan dokunmada hissedilen direnç ve keyif ve acı olarak hissedilen kuvvet ile bir benzerlik kurar. Herbart kuvveti dışsal bir aracı ile

---

279 Lenoir, T. (2006). "Operationalizing Kant: Manifolds, Models, and Mathematics in Helmholtz's Theories of Perception", *The Kantian Legacy in Nineteenth-Century Science,* M. Friedman, A. Nordmann (Eds.), MIT Press, içinde, s.154.

280 A.g.y., s.154.

281 A.g.y., s.155.

282 Herbart'ın mekânsız duyumlarla ilgili düşüncelerinin Kant'ın "yoğun büyüklükler doktrini" ile ilişkisi için bakınız; Eric, C. Banks (2005). "Kant Herbart and Riemann", *Kant Studies,* Vol 96, Issue 2, ss. 211.

onla iletişim kurulan fizyolojik aygıt arasındaki bir ilişki olarak anlar. Öznenin deneyimlediği bu ilişkiye Herbart 'engelleyici özellik'[283] (*Hemmung*) adını verir. [284]

Herbart' ın algıları kuvvetler olarak tanımlaması onları kendi yeni psikofiziğinin ölçüsüne indirgeme amacına yönelik olarak düşünülmelidir.[285] Herbart'ta görüngüler dünyası basit duyuların ve onların kombinasyonlarının deneydeki dinamik ve statik ilişkilerinden yapılaştırılarak kurulur. Bu yeni duyum fakültesi teorisinin merkezinde onun *Reihenformen* adını verdiği doktrini vardı. Bu doktrinin amacı duyular arasındaki ilişkileri yoğunluk, kalite ve niceliğe göre göstermektir. Aynı dinamik kurallar az ya da çok sınırlanmış şekliyle algının her modelinin kurulmasını ve onların daha üst ve düzenli bir birlik olarak sentezlenmesini kontrol eder. Bu daha üst düzenli birlik *Complexionen*'dir. Böyle bir anlayışta mekân 'verili' bir şey değildir daha ziyade dünya ile ilişkimizdeki farklı duyumsal modlarımızın sembolize edildiği ve onların tek bir deneyimde sentez edildiği bir şeydir:[286]

> Duyusal mekân, kati olmak gerekirse, orijinal olarak tek bir mekân değildir. Daha ziyade gözler, ve hissetme ve dokunma birbirlerinden bağımsız olarak mekânın üretimini başlatırlar; hemen sonra hepsi bir araya gelir [*verschmolzen*] ve daha fazla gelişir. Yeteri kadar sıklıkla tek bir mekân (fenomenal mekân) olduğu şeklindeki önyargıya karşı uyarıda bulunamıyoruz. Mekân diye bir şey yoktur; ama algıları tekrar üretmenin kanunlarının ağı [*Gewebe*] (ki algılayan için onların nesnesi mekânsaldır) boyunca kaynaştırarak algılar sistemini üretmek için motivasyonlar [*Veranlassungen*] vardır. Böyle yapılaştırmalar için çok sayıda motivasyon vardır. Bunların hepsi eşit derecede başarılı değildir; mekânı yapılaştırma denemelerinin çoğu eksik ve karanlıkta kalmaktadır; örneğin optik illüzyonlar.[287]

---

[283] Lenoir, T. (2006). "Operationalizing Kant: Manifolds, Models, and Mathematics in Helmholtz's Theories of Perception", *The Kantian Legacy in Nineteenth-Century Science,* M. Friedman, A. Nordmann (Eds.), MIT Press, içinde, s.155.

[285] Lenoir, T. (2006). "Operationalizing Kant: Manifolds, Models, and Mathematics in Helmholtz's Theories of Perception", *The Kantian Legacy in Nineteenth-Century Science,* M. Friedman, A. Nordmann (Eds.), MIT Press, içinde, s.155.

[286] A.g.y., s.155.

[287] A.g.y., s.157. "Sensory space, to be exact, is not originally a single space. Rather the eyes, and the sense of feeling or touch independently from one another initiate the production of space; afterward both are melted together [*verchmolzen*] and further developed. We cannot warn often enough against the prejudice that there exists only one space, namely phenomenal space. There exists no such thing as space; but there do exist motivations [*Veranlassungen*] for generating a system of perceptions by fusing them through a network [*Gewebe*] of laws of reproduction, whose perceived object is something spatial, nemely fort he perceiver. There are numerous motivations for undertaking such constructions, and they are not all equally successful; for many attempts to construct space remain incomplete and in the dark [e.g., in optical illusions]. (1824/1825, 5:489-490)"

Dolayısıyla Herbart' ın amacı farklı manifoldları duyu verisiyle ilişkilendirererek mekânın verili ve tek olmadığını, üretilen bir şey olduğunu göstermektir.

Herbart'a göre Herbart'ın zaman-mekân ile kendinde şey arasındaki ilişkiyi kurmak için ikinci önerisi olan ilişkilerin soyut bilimi iki farklı ama paralel problemi çözebilirdi; kavranabilir tözlerin mekânsal olmayan dünyasının fenomenal dünya ile ilişkisini ortaya koymak, diğeri ise empirik psikolojide dış kaynaklı duyu verisinin bizim üç boyutlu görsel deneyimimizle ilişkisini açıklamak.[288]

Herbart'ın kaygılarından biri duyu verisi ile görsel deneyim arasındaki ilişkidir. Ona göre fizyoloji kavranan nesnenin duyumda ortaya çıkışını göstermede başarılı olabilse bile duyu verisi ile görsel deneyim arasındaki ilişkide yine de bir boşluk olacaktır: "Şimdi ruh, retinal görüntüdeki tamamen yok olmuş mekânsal ilişkileri tepeden tırnağa baştan üretmek zorundadır. Ve bunu, algılarına en ufak bir zarar vermeden yapmalıdır. Ama mekânsal bir şeyin algısı, algısı olduğu mekânsal şeye belli bir benzerlik göstermelidir. Yoksa bu algı işlemi sonucu algılanan nesne mekânsal bir şey hariç her şey olabilir."[289]

Herbart'a göre retinamızdaki sinirlerin dış dünya kaynaklı duyu verisinin birebir eşleşmesini temel alan bu tür bakış açılarının hatası empirik psikolojinin konusu olan fenomenal mekânı biyolojik donanımımızda "verili" olarak değerlendirmesinde yatar.[290] Herbart'a göre empirik psikolojinin mekânı gerçek ve içine şeylerin yerleştirildiği bir kap değildir. Mekân bizim duyularımız aracılığıyla dünyadaki farklı etkileşimlerin sunulması ve sembolize edilmesi için bir araçtır. Mekânın ölçüsü kendiliğinden verilmez daha ziyade "büyüklüğün tüm kavramları gibi, varlığının uygulandığı nesnelerin doğası uyarınca bükülen ve şekil verilen yalnızca

---

[288] A.g.y., s.152.

[289] Herbart, a.g.y., içinde, s.153. "The soul must now generate from ground up the completely destroyed spatial relationships [within the retinal image]. And it has to do this without distorting its perception slightest. … But the perception of something spatial must have a certain similarity to the spatial thing itself, otherwise the perceived object resulting from this act of perception might be anything but something spatial" (1829,118).

[290] Lenoir, T. (2006). "Operationalizing Kant: Manifolds, Models, and Mathematics in Helmholtz's Theories of Perception", *The Kantian Legacy in Nineteenth-Century Science*, M. Friedman, A. Nordmann (Eds.), MIT Press, içinde, s.153.

düşünceye yardım olarak düşünülmelidir ve asla yanlış şekilde o nesnelerin gerçek yüklemlerini sunduğu düşünülmemelidir.”[291]

Bu değerlendirmeler ışığında temelde Herbart’ın Kant’çı mekân görüsünden rahatsız olup mekânı daha çok Leibniz’ci bir çerçevede “ilişkisellik” bağlamında ve Kant’ın mekân görüsünü eleyecek şekilde ele alması, geometriyi “soyut ilişkiler bilimi” olarak değerlendirmesi Riemann’ı doğrudan olmayan bir şekilde etkiler. Riemann’da, ‘manifold’ kavramı ile genel mekânı, ‘fiziksel mekân’ ile Almanca’da (der) *Raum* olarak karşılanan içinde bulunulan yeri düşünür. Herbart’ın Kant’ın mekân görüsünü elemeye çalışması Riemann’ın mekân görüsüne başvuru olmaksızın ya da görülenebilir mekânın yalnızca bir seçenek olarak değerlendirilebileceği iddiasında bulunmasında etkili olduğu düşünülebilir. Ancak Riemann’ın bu iddialarında genel olarak Gauss ve dönemin matematik anlayışı ile mekân görüsünün doğası üzerine bir hesaplaşma içinde olduğu düşünülebilir dolayısıyla Riemann’ın görü ile ilgili kendi görüşlerini sunmadığı dönemim matematiğinin iddiaları ile bir tartışma içinde olduğu söylenebilir.[292] Örneğin ilerleyen bölümlerde göreceğimiz gibi, Riemann çoğu alıntıda adeta Kant’ın mekân görüsüne karşı konuşuyormuş gibi görünse de görü ile tam olarak Kant’ın mekân görüsünü kastettiği net değildir. [293]

Öte yandan Herbart’ın Riemann’ın manifold kavramını açıklamasında direk etkilememiş olması, etkisinin daha genel bir seviyede görülmesi anlaşılabilir bir durumdur. Riemann Herbart’ın önerilerini bir matematikçinin[294] gözüyle ele almış ve kendi çalışmalarında değerlendirmiştir. Bu anlamda Riemann’ın bu tutumu, tam da

---

[291] Herbart, 2006). “Operationalizing Kant: Manifolds, Models, and Mathematics in Helmholtz’s Theories of Perception”, *The Kantian Legacy in Nineteenth-Century Science,* M. Friedman, A. Nordmann (Eds.), MIT Press, içinde, s.153. “…like all concepts of magnitude, must be considered merely as an aid to thought which has to be bent and shaped in accordance with the nature of the objects to which it is being applied, and necer mistakenly conceived as delivering up their real predicates” (1821, 312).

[292] Ferreiros, J. (2011), Scholz, E.(2011). Kişisel diyalog.

[293] Ferreiros, J. (2011), Scholz, E.(2011), Wilson, M. (University of Pittsburgh) (2011). Kişisel diyalog.

[294] Herbart, Fichte ve özellikle de Kant’ın düşüncelerini yorumlayan, netleştiren ve bilim insanları için daha kolay kabul edilebilir hale getiren bir filozoftu. Herbart’ın etkilediği diğer bilim insanlarına Mach ve Grassman örnek gösterilebilir. Bakınız; Eric, C. Banks (2005). “Kant Herbart and Riemann”, *Kant Studies*, Vol 96 Issue 2, ss. 208-209.

Herbart'ın felsefeden beklediği bilimlerle ilişkiye geçme hedefine uygun düşmektedir. Herbart'ın felsefesi Riemann'ın araştırma programının nasıl olması gerektiği ve hangi yönde yapılması gerektiğinin yani matematiksel çalışmanın oryantasyonu[295] sorusunun yanıtını vermiştir. Sonuç olarak Herbart'ın Riemann'ın manifold kavramını açıklamasında doğrudan bir etkisinin olmaması bu kavramın açıklanmasında çok önemli bir etkisi olmadığı anlamına gelmemektedir:

> Riemann'ın matematik üzerine düşünceleri onun Herbart'ın felsefesini kapsamlı bir şekilde çalışmasını tarafından derinleşmiş ve netleşmiştir. Üstelik bu oryantasyon olmadan Riemann çok önemli ve yenilikçi manifold kavramını belki de asla formüle edemeyecekti. Herbart'ın Riemann'ın matematiği ve (özellikle) geometrisi üzerinde bu dolaylı ama etkili tesirini temsil etmektedir.[296]

Herbart'ın genel olarak epistemolojisi özellikle de felsefenin bilimlerle ilişkisi ile ilgili görüşleri Riemann'ın matematiğin neyi başarması gerektiği ile ilgili fikirlerini etkilemiştir. Herbart'ın realist epistemolojisi bilginin deneyimden yola çıkılarak fenomenin açıklanmasında altta yatan gerçekliğin kavramsal olarak netleştirilmesi ile elde edilebileceğini düşünür. Bu bakış açısıyla matematiğin bir bilim olarak nesnesine net bir kavramsal bakış geliştirmesi gerektiği fikrinin manifold kavramının açıklanmasında Riemann'ı etkilemiş olması mümkündür. Bu noktada yine Herbart'ın her disiplinde merkezi bir kavramla (*Hauptbegriff*) çalışma önerisi yine Riemann'ın geometrisini etkilemiştir. Manifold kavramı *Habilitationsvortrag*'ın ilk bölümünde tanımlanır *Habilitationsvortrag*'ın diğer iki bölümü olan geometri ve fiziğe sunulur. Bu sunum esnasında yapılan tüm belirlenimler manifold kavramı üzerinden yapılır. Riemann'ın bilimi "doğayı uygun kavramlarla kavrama girişimi"[297] olarak anlar. Bu girişim kavramlardaki ya da kavramlarla deneyim arasındaki ilişkiler sonucunda ortaya çıkan sorunların derece derece çözülmesiyle olur. Burada yine Herbart'ın

---

[295] Scholz Herbart'ın matematiksel araştırmanın oryantasyonu bağlamındaki Herbart-Riemann ilişksinin benzerinin Schleiermacher- Grassmann arasında da bulunduğunu iddia eder. Grassmann'ın döneminde çok tanınmamış olması ama Riemann'ın dönemin matemetiğinde merkezi bir figür olması dolayısıyla Herbart-Riemann arasındaki ilişki Schleiermacher ve Grassmann arasındaki ilişkiden daha çok dikkat çekmektedir. Bakınız; Scholz, E. (1982). "Herbart's influence on Bernhard Riemann", *Historia Mathematica* , 9, s.428.

[296] Scholz, E. (1982). "Herbart's influence on Bernhard Riemann", *Historia Mathematica* , 9, s.426.

[297] A.g.y., s.426.

temel kavramların şekillendirilmesi, geliştirilmesi ve kapsamının genişletilmesi ile ilgili fikirlerinin yankısı görülür. Riemann bilimlerle ilişkisinde matematikten Herbart'ın felsefeden beklediğini bekler: Riemann *Habilatitionsvortrag*'a geometrinin temel kavramları arasındaki ilişkilerinin "zorunlu" ve "olanaklı" olması ile ilgili sorularla başlar ve manifold kavramının kurulmasının 'felsefi bir iş' olduğunu belirtir ve bu kavramın geometrinin temel kavramları arasındaki sorunların derece derece (empirik gözleme ısrarla vurgu yaptığı bölümde derinlemesine irdelenecektir) çözülmesinde işe yarayacağını iddia eder.

BÖLÜM 3. BİR GEOMETRİ TARİHİ

Önceki bölümlerde Herbart felsefesi ve Gauss'un *"Olağanüstü Teorem"*inin Riemann'ın manifold kavramı arasındaki ilişkiler ele alınmıştı. Bu bölümde, 19.yy. Almanya'sının *Grössenlehre* olarak matematik anlayışı ve Öklidyen olmayan geometrilerin keşfi [298]ile 'manifold' kavramı arasındaki ilişkiler ele alınacaktır.

3.1. Öklidyen olmayan geometrilerin kısa bir tarihi

Bundan önceki bölümlerde Kant'ın dünyanın gerçek doğasını anlamak için gerekli olan bilim anlayışını geometrinin sentetik apriori yargıları temelinde biçimlendirdiğini görmüştük. 19.yy Kant'ın felsefesinin hâkimiyeti altında geometride yalnızca matematikçilerin değil, felsefecilerin de ilgisiz kalamayacağı gelişmelere şahit olmuştur. Bu gelişmeler 'Öklid'in Beşinci Postülatı'nı ispatlama girişimlerinin sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Öklid'in Beşinci Postülatı şöyledir:

> Eğer bir düz çizgi diğer iki düz çizgiyi keserse, öyle ki, bir kenardaki iki iç açının toplamı iki dik açıdan küçükse, şu halde iki düz çizgi yeterince uzatıldığında, bu açıların olduğu ilk çizginin aynı kenarında kesişirler.[299]

Beşinci Postülatın ispatlanması girişimlerinde farkı yöntemler denenmiştir. Birinci gruptaki denemeler ya Beşinci Postülatı diğer dört postülttan çıkarmayı ya da onu daha kendisinde açık bir postülat ile değiştirmeyi denediler. İkinci gruptaki denemeler Beşinci Postülatı reddetti ve bu süreç 'mutlak geometrinin' (absolute geometry) keşfine yol açtı. Üçüncü grup denemeler ise Beşinci Postülatı varsayıp bir

---

[298] Öklidyen olmayan geometrilerin keşif serüveni uzun bir süreçtir. Bu süreç ardı ardına birbirini dizgesel şekilde takip eden gelişmelerden oluşan bir süreç değildir. Bu tezin odak noktası manifold kavramı ve yeni bir geometri ve mekân anlayışındaki yeri olduğundan bu süreç yoğunlaştırılmış ve özet şeklinde sunulmuştur.

[299] Barker, Stephen F (2003). *Matematik Felsefesi*, çev. Yücel Dursun, İmge Kitabevi, s.40.

zıtlık bulmayı denediler, bu denemeler de ‘Hiperbolik geometrin’nin keşfiyle sonuçlandı.[300]

Beşinci Postülatı ispatlama girişimlerinin bölümlenmesi ile ilgili olarak Gray “Standard hesap” (standart account)’u ayrıntılandırır. Ona göre Bonola’nın, Coolidge’in ve Kline’ın Öklidyen olmayan geometrilerin tarihi okumalarının ortak noktası onların bu tarihi dört dönemde incelemesidir.[301] Bu ortaklık temelinde onlar, bir dönemi Öklidyen olmayan geometrilerin öncülleri, bir dönemi Gauss, Schweikart ve Taurinus, bir dönemi Bolyai Lobachevski ve bir dönemi de sonraki gelişmelere ayırır.[302] Gray’a göre, Bonola, Coolidge ve Kline’ın Öklidyen olmayan geometri tarihini sınıflandırmaları tarihsel sıralamaya ek olarak bu tarihte kullanılan matematiksel yöntemlere bölümlemede de ortaktır. Gray bu noktayı şöyle özetler: “18.yy. da Saccheri ve Lambert klasik geometriyi kullandılar; 18.yy başlarında Bolyai ve Lobachevski analizi kulandılar; 19.yy ortalarında Riemann ve Beltrami diferansiyel geometrinin tekniklerine döndüler.”[303]

Saccheri’nin yeni yaklaşımına kadar olan birinci dönem Beşinci Postülatı ispatlamanın ilk girişimlerini içerir. Saccheri’ye kadar Beşinci Postülatı ispatlama girişimlerinin ortak noktası onu sistemden çıkarıp yerine yeni bir postulat koyma çabasıydı. Ancak Saccheri Beşinci Postülat üzerine çalışırken *reductio ad absurdum* (olmayana ergi-bundan sonra *RAA* olarak kısaltılacaktır) yöntemini kullandı. Onun amacı Beşinci Postülatın yanlışlığını kabul ederek bu kabulden bir çelişki türetmekti. Bu da, Beşinci Postulatın yanlış kabul edilmesi halinde, Öklid’in sisteminin kalanıyla bir zıtlık bulunacağı anlamına gelmekteydi. Saccheri *RAA*’yı kullanan ilk kişi değildi, Öklid de bu yöntemi kullanmıştı.[304] Ancak, Saccheri *RAA*’yı sistematik olarak kullandı ve bu paraleller problemine yeni bir şelkilde yaklaşabilmek için yeni bir höristik (Heuristic) sağladı. Buna ek olarak Saccheri Beşinci Postülatı

---

[300] Inaltong M.C. (2000) *The Discovery of Non-Euclidean Geometries and Kant: The Possibility of Non-Euclidean Geometries in Kant’s Philosophy*, basılmamış master tezi, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, s.19.
[301] Gray, J. (1989). *Ideas of space.* Oxford: Clarendon press, s.168.
[302] A.g.e., s.168.
[303] A.g.e., s.168.
[304] Inaltong M.C. (2000) *The Discovery of Non-Euclidean Geometries and Kant: The Possibility of Non-Euclidean Geometries in Kant’s Philosophy*, basılmamış master tezi, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, s.3.

quadrileteraller, üçgenler ve alanlar (quadrilaterals, triangles and angles) ile ilişkisinde ele almıştır ki bu Beşinci Postülatın ispatı girişimleri için yeni bir bakış getiren diğer bir gelişmedir. İslam geleneğinden bir geometrici olan Nasir Edin Tusi quadrileterali daha önce kullanmıştır ancak Saccheri'nin durumunda quadriletaralin *RAA* metoduyla beraber kullanıldığını görüyoruz. Saccheri bu amacında başarılı olamamıştır; yani Beşinci Postulatın yanlışlığını kabul ederek sistemin diğeri ile çelişecek önermeler ispat edememiştir. Bu da, Beşinci Postulatın Öklid sistemi için zorunlu olduğunun ispat edilememiş olduğu anlamına geliyordu.

19. yy.'ın başlarına geldiğimizde Beşinci Postülatın Öklidyen Geometri için konumu ile ilgili tartışmalar ve ispatlama girişimleri halen güncelliğini korumaktaydı. Hiperbolik trigonometrik fonksiyonların keşfiyle beraber, Beşinci Postülatın konumuna ışık tutacak gelişmeler de başlamış oluyordu. Öklidyen olmayan geometrilerin keşfinde yaratacağı imkânların farkında olmaksızın, Lambert trigonometrik fonksiyonları astronomi çalışmalarında kullanmıştır. Öte yandan, Gauss ve Taurinus bu fonksiyonların taşıdığı potansiyeli görmüş ve geometriye yeni bir bakış getirecek olan kendi çalışmalarında kullanmıştır.[305] Gauss'tan bağımsız bir şekilde Johann Bolyai Macaristan'da, Nikolai Lobachevski Rusya'da Öklidyen olmayan geometriler keşfettiklerini duyurmuşlardır.[306]

Diferansiyel denklemlerin kullanılmaya başlanması üçüncü dönemi belirlemektedir. Diferansiyel denklemlerin geometriye uygulanması ile 'eğrilikler', 'jeodesikler' (curvatures, geodesics) gibi kavramlar mekân ve geometri çalışmalarında kullanılmaya başlanmıştır.[307]

Öklidyen mekân anlayışından Öklidyen olmayan mekân anlayışına doğru geçirilen evrimin bilgi kuramı ile ilgili hiçbir sonucunun olmaması düşünülemezdi. 19. yy.'a

---

[305] Inaltong M.C. (2000). *The Discovery of Non-Euclidean Geometries and Kant: The Possibility of Non-Euclidean Geometries in Kant's Philosophy*, basılmamış master tezi, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, s.3.
[306] Wolfe, H.E. (1945). *Introduction to Non-Euclidean Geometry*, New York and London: Holt, Rinehart and Winston, s.45
[307] Inaltong M.C. (2000) *The Discovery of Non-Euclidean Geometries and Kant: The Possibility of Non-Euclidean Geometries in Kant's Philosophy*, basılmamış master tezi, Ortadoğu teknik Üniversitesi, s.3.

kadar olan dönemde Öklidyen mekân'ın fiziksel evren için de geçerli olduğu konusunda pek şüphe duyulmamaktaydı. Öklidyen olmayan geometrilerin keşfi, Kant'ın felsefesinin etkisindeki felsefede "mekân problemi" olarak adlandırılan felsefi problemle ilgili tartışmalar için de önemli sonuçlara sahipti. Kant'ın anladığı şekilde Öklidyen geometrinin elimizdeki tek alternatif olduğu ve bir bilgi modeli olarak iş gördüğü fikri yeni geometrilerin keşfiyle tartışmalı bir hal almıştır.[308]

Mekân fikrinin evrimindeki bu dönüşümlere ek olarak Kant'ın felsefesinin matematikteki ve felsefedeki hâkimiyetinin sarsılmaya başlamasıyla açılan yeni yollarda Kant'ın matematik anlayışının karşısında yer alan isimler ön plana çıkmaya başlamıştır. Gauss fizik ve matematik ile ilgili düşünceleriyle bu isimler arasında Riemann'ın ustalarından biri olarak yer almaktaydı. Sonuç olarak, Riemann mekâna dair görüşlerini bu konuda hem felsefi hem de matematiksel çeşitli tartışmaların ve yeni düşüncelerin ortaya atıldığı zengin bir dönemde geliştirmiştir. Onun 'manifold' kavramını açık hale getirmeye çalıştığı bu dönem Herbart'ın felsefesi, Gauss, Öklidyen olmayan geometrilerin keşfi ve Kant'ın felsefesi tarafından oluşturulan düşünce iklimi çerçevesinde düşünülmelidir.

3.2. Bir matematik anlayışı geleneği olarak *Grössenlehre*

Manifold kavramının ortaya çıktığı bağlamı araştırırken başka bir yol da göz ardı edilmemelidir. 19.yy. ortalarında matematik halen Grek'lerden beri süregelen geleneksel bir şekilde *büyüklüklerin bilimi* (science of magnitudes) olarak tanımlanıyordu. Greklerde, örneğin Aristoteles'te sayıları içeren parçalı (discrete magnitudes) büyüklükler ve sürekli büyüklükler (continuous magnitudes) olarak da

---

[308] Öklidyen olmayan geometrilerin keşfinin Kant'ın felsefesi ile ilişkisi üzerine tartışmalar başlıca iki görüş temelinde sürdürülmektedir. Birinci görüşe göre Öklidyen olmayan geometrilerin keşfinin Kant'ın genel anlamda epistemolojisini daha özelde de mekân teorisini desteklemektedir. Diğer görüşe göre ise Öklid geometrisinden farklı ama yine de tutarlı bu geometrilerin keşfi Kant'ın epistemolojisini ve mekân anlayışının geçerliliğini yitirmesine neden olmuştur. Bu çalışmada ayrı bir tartışma konusu olduğundan bu görüşlerden hangisinin geçerli olduğunu tartışmayacağım. Bu tartışmalarla ilgili bakınız; , Bağçe, S. (2004). "Are non-Euclidean geometries possible for Kant?", Mugla Üniversitesi Felsefe Bölümü Uluslararası Kant Sempozyumunda sunulan bildirilerden ss.29-37, Friedman, M. (1985). "Kant's Theory of Geometry", *the Philosophical Review*, 94, ss.455-506, Amit H. (2008). "Kant and non-Euclidean Geometry", *Kant Studien*, ss.80-98

çizgi, yüzey ve cisim arasında bir ayrım vardır.[309] Aristoteles'e göre büyüklükler ve sayılar (magnitudes and numbers) matematiğin konuları arasındadır.[310] Bu Grek anlayışının 19.yy Almanya'sında matematiği şekillendirdiğini söylemek mümkündür. Bu tarz bir bakış açısı aritmetik ve geometrinin aynı başlıkta toplanabileceği basit matematiğin genel bir açıklamasını öneriyordu. Bu dönemde Almanya'da matematiğin büyüklüklerin bilimi olarak kabulünün farklı örneklerini sunmak mümkündür. Örneğin Ferreiros'un, Euler'in *Cebir'*inden yaptığı aşağıdaki alıntı bunlara bir örnektir:

> Öncelikle her şeyin arttırılabilir ya da azaltılabilir, ya onlara bir şeylerin eklenip onlardan bir şeyler çıkartılabileceği büyüklükler olduğu kabul edilecektir… matematik onları ölçebilecek metotlar bulan *büyüklüklerin biliminden* başka bir şey değildir.[311]

Ferreiros matematiğin *Grössenlehre* (science of magnitudes) olarak kabulüne ilişkin başka kanıtlar da sunar. Örneğin Klügel ve Hoffman'ın matematiksel sözlüklerinde matematik "büyüklükler teorisi olarak" tanımlanır.[312] Bu tanım dönemin matematikçiler tarafından da kabul görmüştür. Gauss, Bolzano, Grassmann ve Weierstrass çalışmalarını matematiğin bu klasik tanımı çerçevesinde yürüten isimlerdi. Bu isimler arasında yalnızca Gauss topoloji alanındaki çalışmalarıyla bu geleneksel matematik anlayışının ötesine geçmiş görünür. Yine de bu geleneksel matematik anlayışı içinden gelmesine rağmen bu kavrayışı çok daha öteye götürme anlamında Riemann, Gauss gibi bahsi geçen önemli isimlere göre farklı bir konumda bulunmaktadır.

---

[309] Ferreiros, J. (2007). *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics.* Basel, Switzerland; Boston: Birkhauser, s.41.

[310] A.g.y., s.41.

[311] Euler, Ferreiros, J. (2007). *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics.* Basel, Switzerland ; Boston: Birkhauser, içinde s.41. "First, everything will be said to be magnitude, which is capable of increase or diminution, or to which something may be added or substracted. …mathematics is nothing more than the *science of magnitudes*, which finds methods by which they can be measured."

[312] Ferreiros, J. (2007). *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics.* Basel, Switzerland ; Boston: Birkhauser, s.42.

BÖLÜM 4. GAUSS'UN MATEMATİĞİNİN MANİFOLD KAVRAMININ AÇIKLANMASINDAKİ YERİ

Gauss'un karmaşık sayılar üzerine erken dönem çalışmaları, 'büyüklükler' üzerine değerlendirmeleri ve eğri yüzeyler (curved surfaces) üzerine olan çalışmaları Riemann 'manifold' kavramını ortaya atmasında etkili olmuştur. Özel olarak, Gauss'un 1827 tarihli *Disquisitiones Generales Circa Superficie*s *Curvas* eserinde açıkladığı *Theorema Egregium* (*"Olağünüstü Teorem,"Remarkable Theorem")* Riemann tarafından daha sonra kendi adıyla anılacak olan geometrinin kuruluşunda kullanılacak ve geliştirilecek olan tüm sonuç ve kavramları içermekteydi.

Bu suretle, bu bölümdeki amacım önce Riemann'ın 'manifold' kavramı ile Gauss'un geometrinin özünlü özellikleri (intrinsic properties of geometry) üzerine yaptığı çalışmalar arasındaki ilişkiyi, ikinci olarak da Gauss'un karmaşık sayılar üzerine olan çalışmaları ile 'manifold' kavramı arasındaki ilişkiye dair spekülasyonları incelemektir.

4.1. 'Eğriler (curves) ve eğrilikler (curvatures)'

Bir yüzeyde **A** ve **B** gibi iki nokta belirleyip bu iki nokta arasındaki en yakın mesafeyi bulmaya çalıştığımızda, **A** ve **B** arasındaki noktaları birleştirerek bu yüzeye ait bir 'jeodezik' (geodesik) elde ederiz. Bu yüzey bir kürenin yüzeyi ise bu jeodezik "çapın uç noktaları değil, bu iki nokta boyunca uzanan en büyük çemberin yayıdır."[313] Öyleyse, yukarıda tanımladığımız düzlem ve küre yüzeyine göre jeodesikler yardımıyla küre üzerindeki yüzeyin geometrisi ile düzlemin geometrisini karşılaştırmaya başlayabiliriz. Bu durumda küre üzerindeki noktalar ile düzlem üzerindeki noktalar arasında bir uyum olacak ve **A** ve **B** noktaları arasındaki mesafe her iki durumda da eşit olacaktır.

---

[313] R.Bonola. (1912). *Non-Euclidean geometry, a critical and historical study of its develeopment.* Chicago: Open Court Publishing Co., s. 130. "…not the extremities of a diameter, is an arc of the great circle through the two points."

Böyle bir eşitliğe ulaşabilmek için bir başka varsayıma daha ihtiyacımız vardır; "yüzey esneyebilen ve uzatılamayan bir kâğıttan yapılmış olsun."[314] Bu varsayım temelinde eşit olduğuna karar verdiğimiz figürleri içeren yüzeyi hareket ettirerek bir figürü diğerinin üzerine getirelim. Bu noktada bir dünya haritası düşünmek faydalı olacaktır; dünyanın bir küresel modeli yüzeye yalnızca eğerek ancak deforme etmeyerek transfer edilebilir. Böyle bir durumda "genel olarak bu iki figürün mekânda eşit olmamasına rağmen, yüzey üzerinde çakıştıkları noktalarda aynı alanlarla eşit oldukları"[315] açıktır.

Öyleyse, eğerek ama yırtmayarak yüzeyler birbirine dönüştürülebildiğinde aynı geometriyi elde ederiz. Yani yüzey (kürenin yüzeyi) üzerinde geometri ile düzlem üzerinde geometri arasında temel bir fark[316] olmasına rağmen "Aralarında önemli bir analoji vardır. Bu analoji kendisini kürenin kendi üzerinde serbest şekilde hareket ettirilebilmesinde bulur, öyle ki yüzey üzerinde benzerlik postülatlarına her şekilde benzeşim gösteren önerme küre üzerindeki eşit figürler için de geçerlidir."[317]

Küre yüzeyi- düzlem geometrilerinin analojisinin sağladığı sonucu genelleyebilmek için, bizim "bükmeyle değişmeyecek, yüzey üzerinde tüm noktalarda *sabit bir değere* sahip olması gereken kesin bir sayı [K]" belirlememiz gerekmektedir. Gauss ulaştığı bu sabit değeri *eğrilik* (*curvature*) ya da *Gauss Eğriliği* (*Gaussian Curvature*) olarak isimlendirir.[318]

---

[314] A.g.e., s.130.

[315] A.g.e.,s.130. "…two figures ought to be called equal on the surface, which coincide with equal areas on the plane, through of course two such figures are not in general equal in space."

[316] Kürenin bir kısmını düzleme uygulayamayız.

[317] R.Bonola. (1912). *Non-Euclidean geometry, a critical and historical study of its development.* Chicago: Open Court Publishing Co. s.131. "There is an important analogy between the geometry on the plane and the geometry on the sphere. This analogy has its foundation in the fact that the sphere can be freely moved upon itself, so that prepositions in every way analogous to the postulates of congruence on the plane hold for equal figures on the sphere."

[318] R.Bonola. (1912). *Non-Euclidean geometry, a critical and historical study of its develeopment.* Chicago: Open Court Publishing Co. s.131.

4.1.1. Gauss Eğriliği (Gaussian Curvature)

Yüzeydeki bir noktadaki Gauss 'eğriliğini' anlamak eğriliğin ne olduğunu anlamamızı gerektiriyor. Bu amaçla, bu başlıkta eğri ve eğrilikleri inceleyeceğim. Basitçe, eğriliği düz bir çizgiden sapmanın ölçüsü olarak tanımlayabiliriz. Yüzey eğriliği üzerine çalışmalar küçük ölçeklerde Yunanlılar tarafından başlatılmış olsa da 17–18. yy'da bu çalışmaların henüz açıklanmış olan koordinat geometrisiyle beraber daha kapsamlı bir gelişme göstermiştir.[319] Eğriliğin en önemli bölgesel özelliği olarak yön (direction) çalışmaları kalkülüs'ün keşfedilmesinde temel bir rol oynamıştı. Bunun karşılığında eğriliklerin teorisinde kalkülüsün sağladığı metotlar dikkate değer bir öneme sahiptir.[320]

Eğrilik kavramını açıklamak için 'uzunluğun' düz çizgiden çıkarsandığı örneğini ele alabiliriz. Uzunluk kavramını benzer şekilde eğriliklere onları sonsuz küçük düz çizgilere bölerek uygulayabiliriz. Bu düşünce şekline paralel olarak, 'eğrilik' kavramı çemberden çıkarsayıp onu çemberi sonsuz küçük yaylara bölerek uygulayabiliriz.[321]

Basit bir çember örneğiyle başlayalım. Bir çemberde eğrilik; yani düz bir çizgiden (bu örnekte çemberin eğri çizgisinden) sapma miktarı, yarım çemberlerin karşılılıkları tarafından ölçülür. Yani, bir çemberin eğriliği yarıçapı ile ters orantılıdır.[322] Ancak başka yüzeylerdeki eğrilikleri düşündüğümüzde durum değişir ve zorlaşır. Örneğin eğri büğrü bir yüzeyi ele alalım; sürekli kıvrımlara sahip, dolayısıyla eğriliğin belirli olmadığı böyle bir yüzeyde çembere nazaran düzlükten sapma derecesini ölçmek daha zor olacaktır. Böyle bir ölçüm sonsuz yakın noktaların aralarındaki mesafelerin hesaplanmasını gerektirecektir.[323]

---

[319] Torretti, R. (1978). *Philosophy of geometry from Riemann to Poincare.* Dordrecht: Reidel: D. Reidel Publishing Company, s.68.
[320] A.g.e.
[321] Russell, Bertrand (1956). *An Essay on the Foundations of Geometry,* Dover Publications, s.17.
[322] Greenberg, M..J. (1994). *Euclidean And Non-Euclidean Geometries Development and History* ,3th edition, W.H. Freeman and Company, New York, s.443
[323] Russell, Bertrand (1956) *An Essay on the Foundations of Geometry,* Dover Publications, ss.17-18.

Eğrilikler teorisine ve tarihine kısaca değindikten sonra Gauss'un kendi ismiyle anılan eğriliğe ilişkin sözlerine bakmak yararlı olacaktır:

> Diyeceğiz ki, verili bir çevre ile sınırlandırılmış eğriliğe sahip bir yüzeyin parçası şeklin kürenin yüzeyindeki şekle uygun düşen alan tarafından sağlanan toplam bir eğriliğe sahiptir. Toplam eğrilik ile eğriliğin ölçüsü diyeceğimiz bir çeşit spesifik eğrilik arasında açık bir ayrım yapmalıyız. Bunlardan ikincisi yüzey üzerindeki bir noktaya aittir ve onun kesri noktaya bitişik yüzeyin bir unsurun (an element) bu unsurun alanı tarafından toplam eğriliğin (total curvature) bölünmesiyle elde edilir ve sonuç olarak küre yüzeyinde ve eğrili yüzeyde tekabül eden sonsuz küçük alanların oranını verir. Umuyoruz ki son tahlilimiz bu yeni kavramların yararını tam bir şekilde açıklayacaktır.[324]

Gauss şöyle devam eder:

> Yüzey üzerindeki bir noktadaki eğriliğin ölçüsü payı 1 olan ve paydası 'normal kısım' (normal section)'un iki asil (principal curvatures) eğriliğinin çarpımı olan kesire eşittir.
>
> Konveks-konveks ve konkav-konkav yüzeyler için eğriliğin ölçüsünün pozitif olduğu (bu önemsiz bir ayrımdır), konveks-konkav yüzeyler için ise eğriliğin ölçüsünün negatif olduğu açıktır. Eğer yüzey her iki türün (konveks-konveks, konkav-konkav) parçalarından oluşuyorsa, sınırlarında eğriliğin ölçüsü yok olmalıdır.[325]

Son olarak Gauss eğriliğin ölçüsü ile ilgili çalışmalarının sonucu üzerine yorum yapar:

> Son kısımdaki formülün kendisi bizi şu olağanüstü teoreme götürür; eğer eğri bir yüzey başka bir yüzeye uygulanırsa her noktadaki eğriliğin ölçüsü değişmeden kalır.
>
> Ek olarak, açıktır ki eğri bir yüzeyin her sonlu parçası başka bir yüzeye uygulandıktan sonra, toplam eğriliğinde muhafaza edilir.

---

[324] Gauss , C.F. *Werke*, Rosenfeld, B. (1988). *A history of Non-Euclidean geometry*. New York: Springer-Verlag., içinde s.285." We shall say that a part of a curved surface bounded by a given contour has total curvature given by area of the corresponding figure on the surface of the sphere. One must draw a clear distinction between the total curvature and a kind of specific curvature that we shall call the measure of curvature. The latter pertains to a point on the surface and is fraction obtained by dividing the total curvature of an element of the surface adjacent to the point by the area of that element, and thus gives the ratio of corresponding infinitesimal areas on the sphere and on the curved surface. We hope that our subsequent exposition will fully explain the utility of these new concepts."

[325] Gauss. C.F.*Werke*, a.g.e. içinde,s.286. "The measure of curvature at a point of the surface is equal to fraction whose numerator is 1 and whose denominator is the product of the two principal curvatures of the normal section. It is clear that the measure of curvature is positive for convex-convex or concave-concave surfaces (this is a trivial distinction) and negative for convex-concave ones. If the surface is made up of parts of both kinds, then on their boundary the measure of curvature must vanish."

> Geometricilerin kendi çalışmalarını şimdiye kadar sınırlandırdıkları özel durum bir düzleme uygulanabilen (applicable to a plane) durumdur. Bizim teorimiz kolayca böyle yüzeylerdeki her noktada eğriliğin ölçüsünün sıfır olduğunu gösterir…[326]

Tüm bu alıntılarda geçenleri modern terimlerle ve daha açık bir şekilde ifade etmeye çalışalım. **S** yüzeyindeki **P** noktasında bir **S** yüzeyinin eğriliğini tanımlamak için önce "**S** yüzeyindeki **P** noktasında **S** yüzeyine normal içeren düzlemler tarafından oluşturulmuş **S** yüzeyinin kısımlarını"[327] düşünmeliyiz. Bu şekilde düşündüğümüzde " **P** deki yüzeye normal içeren düzlemlerin yüzeyi çok farklı eğrilerle, farklı eğriliklerle kesebildiğini"[328] görürüz. Bu eğrilikler arasında bir tane maksimum bir tane de minimum **P** eğriliği bulmak olanaklıdır (maximum and minimum curvatures at **P**). Bu maksimum ve minimum eğrilikleri sırasıyla $\mathbf{k_1}$ ve $\mathbf{k_2}$.ile gösterdiğimizde, bu iki değerin çarpımı bize *Gauss Eğriliği* olarak bilinen **K** sabitini verir;

$\mathbf{K=k_1k_2}$ ki bu değer bir yüzey başka bir yüzeye uygulandığında değişmez.

Burada dikkat etmemiz gereken nokta asli eğriliklerin (principal curvatures) yönleridir. Eğer iki asli maksimum ve minimum eğrilik aynı taraftaysa **K** sabiti pozitif (yüzey vadi şeklinde), eğer ikisi farklı taraftaysa **K** negatif (semerli yüzey), iki asli eğrilikten eğer en azından biri sıfır ise **K** da sıfır olur (yassı yüzey). Silindir ve düzlem sıfır *Gauss Eğriliği*'nin örnekleridir.[329]

Gauss'un hesaplamalarına ilişkin bir başka önemli nokta da onun **K** sabitini $\mathbf{R^3}$ içinde çalışarak elde etmiş olmasıdır. Bu Gauss'un $\mathbf{R^2}$ teki yüzeyleri $\mathbf{R^3}$ te modern ifadeyle

---

[326] Gauss , C.F. *Werke,* Rosenfeld, B. (1988). *A history of Non-Euclidean geometry.* New York: Springer-Verlag., içinde, s.286. "The formula in the last section leads, of itself, to the following remarkable theorem. If a curved surface is applied to another surface then the measure of curvature at each points remains unchanged.
Also, it is clear that every finite part of a curved surface will, after application to another surface, retain its total curvature. The special case to which geometers have until now limited their investigations is the case of surfaces applicable to a plane. Our theory readily shows that the measure of curvature of such surfaces in any point is zero."

[327] Eves, H. (1990) *An Introduction to History of Mathematics,* s.557. "…sections of surface **S** made by planes containing the normal to **S** at a point **P** on **S.**"

[328] Stillwell, J. (2002) *Mathematics and its history,* New York, Springer, s.243. "…different planes normal to the surface at **P** may cut the surface in quite different curves, with different curvatures."

[329] Eves, H. (1990) *An Introduction to History of Mathematics,* s.557

'gömülü' (embedded) olarak almıştır. Başka bir şekilde söylemek gerekirse Gauss 2 boyutlu bir yüzeyde etrafını saran 3 boyutlu Öklidyen mekân olmaksızın geometri yapabileceğimizi göstermiştir.[330] Bu nokta Riemann'ın 'doğru çizgisi unsuru' (the line element) formülünü incelerken tekrar ele alınacaktır.[331]

Gauss Eğriliği çok önemli sonuçları beraberinde getirmiştir. Öncelikle bu sabitin sayesinde "eğer bir yüzey bükülürse (yırtmadan, kırıştırılmadan, gerilmeden), her noktadaki toplam eğrilik değişmeden kalır."[332] Yani bir yüzeyi bir başka yüzey üzerine getirdiğimizde mekânda genel olarak benzemeseler de bu iki yüzey aynı geometrilere sahiptir. Diyebiliriz ki "bir düzlem ve bir silindir mekân genel olarak farklı diferansiyel geometrilere (global differential geometry) sahip olmasına rağmen, aynı bölgesel içsel geometriye sahiptir[333] (local intrinsic geometry). Burada önemli olan nokta bizim araştırma konumuzun bölgesel geometri olduğudur; bu da "küresel bir yüzeyi düzleme uygulayamayacağımız"[334] anlamına gelir.

İkinci olarak, bir noktadaki normal eğriliklerin yüzeyin göreli özellikleri olmasına rağmen (relative properties of surface) asli eğriliklerin çarpımı olan "**K** yüzeyin mutlak özelliğidir."[335] Yani eğer bu **K** sabitinin değerini bilirsek ardından tüm ölçüm ilişkileri evrensel bir şekilde belirlenebilir. Dolayısıyla *Gauss Eğriliği* yardımıyla biz değişken olmayan bir yapıya (invariant structure) ulaşırız. Çünkü "Bir yüzey üzerinde metrik değişkenlerin noktadan noktaya değişmesi yüzeyin tüm geometrisinin bilgisini içermektedir."[336] "Bir yüzeyin toplam eğriliği **K,** yüzeyin

---

[330] Gray, J. (1989). *Ideas of space.* Oxford: Clarendon press, s.193.
[331] Riemann'ın *Habilitationsortrag*'ının yeniden yapılandırma denemesini alan 5. Bölümde manifoldun ölçüm ilişkilerinin eğrilik yardımıyla belirlenmesini araştıran "2.2. "*N*-boyutun manifoldluğunu aramak" kısmına bakınız.
[332] Gray, J. (1989). *Ideas of space.* Oxford: Clarendon press, s.193. "…if a surface is bent (without stretching, creasing, or tearing), the total curvature of the surface at each point remains unaltered."
[333] Gray, J. (1989). *Ideas of space.* Oxford: Clarendon press, s.193. "A plane and a circular cylinder have the same local intrinsic geometry and not global differential geometry."
[334] R.Bonola. (1912). *Non-Euclidean geometry, a critical and historical study of its develeopment.* Chicago: Open Court Publishing Co., s.131.
[335] Eves, H. (1990) *An Introduction to History of Mathematics,* s.557. "**K** is an absolute property of the surface."
[336] A.g.e., s.557. "How metric coefficients vary from point to point on a surface contains all the information of the geometry of the surface."

mutlak özelliğidir ifadesi Gauss'un *Theorema Egregium*'u (*Olağanüstü Teorem*) olarak bilinir."[337]

4.2. Gauss ve karmaşık sayılar

Bu kısımda teknik detaylarına girmeden Gauss'un karmaşık sayılara ilişkin çalışmalarının Riemann'ın 'manifold' kavramını geliştirmesi sürecinde etkisini ve bu etkinin ne şekilde gerçekleştiğini konu edeceğim.[338] *Habilatitionsvortrag*'ın 'manifold' kavramından bahsetmeye başlamadan önceki kısmında Riemann açık bir şekilde; Gauss'un *Bikuadratik Kalıntılar* ("Biquadratic Residiues") üzerine olan ikinci incelemesinde, *Göttingen Gelehrte Anziege*'de ve onun ellinci yıl dönüm kitabında ("Jubilee book") yer alan çok kısa ipuçlarından bahsederek Gauss'a işaret eder.[339] Gauss ayrıca "karmaşık sayıların tamamen kabulünde" önemli bir figür olarak karşımıza çıkar.[340]

Gauss'un 'manifold' kavramı ile ilgili verdiği ipuçları için onun 1832 yılındaki *Bikuadratik Kalıntılar* eserine, 1831 yılındaki bu makalenin tebliğine ve 1849 yılındaki cebirin temel teoreminin ispatına ("*proof of the fundamental theorem of algebra*") bakılabilir. Tüm bu çalışmaların karmaşık sayılarla ilgili olduğuna dikkat etmek önemlidir.[341]

Bunlara ek olarak, Gauss'un karmaşık sayıları manifoldları işaret eden düşünüş biçimiyle ilgili olarak Ferreiros şunları söyler:

> Karmaşık sayıların çok daha soyut anlamının yalnızca misali olarak Gauss onların düzlem üzerinde noktalar olarak yorumunu düşündü. Ona göre bazı fiziksel şartlar özel türde sayıların kullanılması için fırsat önerirken bazıları önermez. Kesirli parçaların ya da zıtlarının olacağı durumların olması kesirler teorisinin ya da negatif sayıların tamamıyla anlamlandırılabilmesi için yeterlidir. Aynısı özlerle değil ama özler

---

[337] A.g.e., s.557. "The statement that the total curvature **K** of a surface is an absolute property of the surface is known as Gauss's *Therema Egregium.*"

[338] Ferreiros, J. (2007). *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics.* Basel, Switzerland ; Boston: Birkhauser., ss.43-44.

[339] A.g.e.

[340] A.g.e.

[341] Ferreiros, J. (2007). *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics.* Basel, Switzerland ; Boston: Birkhauser s.43.

> arasındaki ilişkilerle ilgilendiğimizde uygulama bulan karmaşık sayılar için olur. Gerçek ve karmaşık birimler ölçüm için gereklidir.[342]

Gauss'un kendi sözlerine bakmak gerekirse:

> …eğer nesneler tek bir sınırsız seride hizaya konamayacak şekildeyse, ancak serilerin bir serisine hizalanacaksa , eğer 2 boyutlu bir manifold biçimlendireceklerse ve eğer seriler arasındaki ilişkilerde bir ilişki olacaksa, ya da birbirleri arasında birinden diğerine geçiş olacaksa ki bu zaten bahsedilmiş olan bir üyeden aynı serinin başka bir üyesine geçişe benzemektedir…Bu şekilde, 2 katı şekilde serilerin serilerini hizaya sokmak mümkün olacaktır.
>
> Matematikçi tamamen nesnelerin niteliğinden ve onların ilişkilerinin içeriğinden soyutlama yapmalıdır; o yalnızca onların birbirleriyle ilişkilerini saymak ve kıyaslamak ile meşgul olmalıdır.[343]

Gauss'un sözleri karışık görünse de soyut büyüklükler teorisi (abstract theory of magnitudes) ile ne anladığı hakkında bir fikir edinebiliyoruz. O 'manifold'u ilişkiler ve özellikler açısından anlamaktadır. Yani, Gauss için bir manifold "bazı ilişkilerle bağlantılı olan, boyutu ilişkilerinin içsel bağlantıları ve özelliklerine bağlı olan nesnelerin bir sisteminden"[344] başka bir şey değildir. Gauss'un vurgulamak istediği nokta 2 boyutlu bir manifold'u düşünebilmek için gerekli olan özelliklerdir. İleride göreceğimiz gibi Riemann 'manifold'u açıklamaya çalışırken Gauss'un bu anlayışını başlangıç noktası olarak alacaktır.

---

[342] A.g.e., s.43. "Gauss regarded the interpretation of complex numbers as points in a plane as a mere illustration of the much more abstract meaning of complex numbers. He argues that some physical situations afford an occasion for employing a particular kind of numbers, and some not. It suffices that there be situations where fractional parts or opposites occur, to make full sense of a theory of fractions or of negative numbers. The same happens with complex numbers, which, in his view, only find application then we are not dealing with substances, but with relations between substances [Gauss 1863/1929, vol.2, 175-76]. The use of real and complex units for measurement is required."

[343] Gauss C.F, a.g.e., içinde s.44. "if the objects such that they cannot be ordered in to a single unlimited series, but only into a series of series, or, what comes to the same, if they form a manifold of two dimensions; And if there is a relation between the relations among the series, or between the transitions from one to another, which is similar to the already mentioned transitions from one member of a series to another one belonging to the same series…In this way, it will be possible to order the system doubly into series of series. The mathematician abstracts entirely from the quality of the objects and the content of their relations; he only occupies himself with counting and comparing their relations to each other."

[344] Ferreiros, J. (2007). *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics.* Basel, Switzerland ; Boston: Birkhauser., ss.43-44. "a system of objects linked by some relations, the dimensionality of the manifold depending on the properties and interconnections of the relations."

Laugwitz[345] de Gauss' un karmaşık sayılar üzerine yaptığı çalışmalar ile Riemann'ın 'manifold' kavramını biçimlendirmesi arasındaki ilişkiye Gauss'u alıntıladığı şu cümlelerle dikkat çeker:

> Gauss'un imaları karmaşık düzlem (complex plane) ile bağlantılıdır. Bunlardan doktora derecesini almasının ellinci yıldönümü ile ilgili olarak 1849 yılında yazılan *Cebir denklemlerinin teorisine katkılar* (*Beitrage zur Theorie der Algebraischen Gleishungen* (*Contributions to the theory of algebraic equations*)'da bulunan bir tanesini alıntılıyoruz: "Kanıtın üslubu pozisyonun geometrisinden alınır, çünkü bu şekilde en üst düzeyde sezgisel çekicilik ve basitlik kazanır. Kelimenin tam anlamıyla, iddianın tüm içeriği daha yüksek, mekândan bağımsız, süreklilik tarafından sağlanan büyüklük kombinasyonlarını araştıran büyüklüklerin genel soyut biliminin alanına aittir. Hâlihazırda bu alan pek gelişmemiştir ve mekânsal imajların dilini ödünç almaksızın ilerlemek mümkün değildir."[346]

Laugwitz bu alıntı üzerine şu yorumda bulunur:

> Bu kesinlikle geometrik dilin geometrik olmayan bir bağlamda kullanılmasına olduğu kadar, sayıların *n* tane elemandan oluşan sıralı dizilerin (n-tuples) sürekliliği tarafından koordine edilen manifoldlara da bir ima olarak düşünülebilir. Gauss düzlemin noktalarını *t, u* gerçek koordinatları tarafından verili değerlendirdi ve karmaşık sayıların "cebirsel yapısını" tarif etti. Riemann *n* tane elemandan oluşan sıralı dizileri "metrik yapıyı" araştırmak için tanımlayacaktı.[347]

Bunlara ek olarak, Gauss'un karmaşık sayıları ele alış biçimi ve Riemann'ın 'manifold' kavramı arasındaki ilişki Riemann'ın 1851 yılında vermiş olduğu ve "karmaşık değişkenlerin fonksiyonlarının teorisinin temelleri üzerine"[348] odaklandığı doktora tezini düşündüğümüzde daha açık bir hal alacaktır. Onun doktora tezinden

---

[345] Detlef, L. (1999). *Turning points in the conception of mathematics,Bernhard Riemann 1826-1866.* Boston: Birkhauser.

[346] Gauss C.F. *Werke*, Detlef, L. (1999). *Turning points in the conception of mathematics,Bernhard Riemann 1826-1866.* Boston: Birkhauser, içinde, s.225. Gauss' allusions are connected with the complex plane. We quote one of them. It is found in his paper *Beitrage zur Theorie der algebraischen Gleichungen* (Contributions to the theory of algebraic equations), written in 1849 in connection with the fiftieth anniversary of the awarding of his doctoral degree: "The wording of the proof is taken from the geometry of position, for in this way it gains maximal intuitive appeal and simplicity. Strictly speaking, the essential content of the whole argument belongs to a higher, space-independent, domain of the general abstract science of magnitude that investigates combinations of magnitudes held together by continuity. At present, this domain is poorly developed, and one cannot move in it without the use of language borrowed from spatial images."

[347] Detlef, L. (1999). *Turning points in the conception of mathematics,Bernhard Riemann 1826-1866.* Boston: Birkhauser, s.226. "This can certainly be regarded as an allusion to manifolds coordinazited by continua of *n*-tuples of numbers, as well as to the use of geometric language in a nongeometric context. Gauss considered points of the plane given by real coordinates *t, u* and introduced an "algebraic structure", that of the complex numbers. Riemann was to introduce real *n*-tuples and to investigate a "metric structure."

[348] Gray, J. (2007). *Worlds Out of Nothing*, Springer-Verlag, London,s.189.

Habilitationsvortrag'a olan süreçte Gauss'un karmaşık sayılarla ilgili çalışmalarını önceden incelemiş olduğu yüksek bir ihtimaldir.[349] Gauss bu çalışmalarında karmaşık sayıların yorumu için seriler arası geçişlerden bahsederken iki boyutlu manifoldun kurulmasından bahseder ve böylece manifoldun terminolojisi için ve boyutluluk ile ilgili ipuçları verir. Riemann da doktora tezinde cebirsel eğriliği ele alırken Gauss'un verdiği ipuçlarını değerlendirir. Bu değerlendirmede Riemann'ın bakış açısıyla bir eğrilik üzerindeki karmaşık noktaların gerçek bir yorumuna gerek yoktur. Cebirsel eğrilik karmaşık sayılar üzerine tanımlanır ve karmaşık düzlem (complex plane) en temel Riemann yüzeyini oluşturur. Bu nokta ile ilgili Gray'in şu sözleri toparlayıcı olacaktır: "Riemann yüzeyleri onun büyüklükler ve nicelikler felsefesinin güzel bir örneğidir. Onun bakış açısından bir eğrilik üzerinde karmaşık noktaların gerçek bir yorumuna gerek yoktur. İlk defa bir eğrilik karmaşık noktalara kendi üzerinde basitçe bulundurabilirdi."[350]

4.3. Gauss'un Matematiğin Temellerine İlişkin Görüşleri ve Kant ile İlişkisi

Gauss'a göre matematiğin konusu tikel belli nesneler değil, nesneler arasındaki ilişkiler ve bu ilişkiler arsındaki ilişkilerdir. Ona göre matematik "en genel anlamıyla ilişkiler bilimidir."[351] Ona göre "Matematikçi tamamen nesnelerin niteliğinden ve nesnelerin ilişkilerinin içeriğinden soyutlar; o, yalnızca nesnelerin birbirleriyle ilişkilerini hesaplamak ve karşılaştırmak ile ilgilenir."[352] Yani Gauss için matematiksel büyüklükler soyut nesneler ve matematik ilişkisel yapıların bir teorisiydi.[353]

---

[349] Ferreiros, J. (2007). *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics.* Basel, Switzerland ; Boston: Birkhauser., s.43.
[350] Gray, J. (2007). *Worlds Out of Nothing,* Springer-Verlag, London,s.185. "Riemann surfaces are a good example of Riemann's philosophy of magnitudes and quantities at work. From Riemann's standpoint there was no need for a real interpretation of complex points on a curve. For the first time, a curve may simply have complex points on it."
[351] Gauss, Ferreiros, J. (2006). "The Rise of Pure Mathematics as Arithmetic with Gauss", *The Shaping of Arithmetic: Number theory after Carl Friedrich Gauss's Disquisitiones Arithmeticae,* ed. por C. Goldstein, N. Schappacher, J. Schwermer. Springer, Berlin, içinde, s.226.
[352] Gauss, a.g.y. içinde, "The mathematician abstracts entirely from the quality of the objects and the content of their relations; he just occupies himself with counting and comparing their relations to each other", s.226.
[353] A.g.y., s.226.

Gauss'un mekânın doğası ve nasıl bilinebileceğine dair görüşlerinin kimi yerlerde Kant'çı kimi yerlerde ise Kant ile zıt özellikler taşıdığını görüyoruz. Bunu görmek için Gauss'un kendi sözlerini değerlendirebiliriz:

> Her gün, geometrimize olan ihtiyacımızın en azından akıl yürütmeyle ortaya konamayacağına biraz daha ikna oluyorum. Belki bir başka hayatta, mekânın özüne dair şu anda bizim için elde edilebilir olmayan neticelere varacağız. Fakat o zamana kadar geometri, saf bir şekilde apriori olan aritmetik yerine mekaniği eşdeğer sayılmalıdır.[354]

Bu alıntıda birkaç noktanın altı çizilmelidir. Öncelikle Gauss, matematiğin metafiziğine, dolayısıyla temellerine ilişkin görüşlerini felsefi bir dille ifade eder.[355] İkinci önemli nokta ise Gauss'un yukarıdaki alıntıda geometrinin temelleri ile aritmetiğin temelleri arasında aritmetiği "saf bir şekilde apriori" olarak belirleyerek yaptığı ayrımda göze çarpar; Gauss'un bu ayrımı yaparken kullandığı dil Kant'çıdır.[356]

Gauss'un Kant felsefesine, görünün işlevi konusunda benzer düşündüğünü gösteren bir örnek vardır.[357] Bu örneği Gauss'un Johann Christoph Schwab'ın 1816 tarihli bir kitabı üzerine yorumunda görürüz. Sözkonusu kitapta Schwab'ın iki temel amacı vardır. Bunlardan ilki paralellik aksiyomunun yanlışlanmaya çalışılmasıdır ki Gauss bunu yanlış bir deneme olduğunu düşündüğü için eleştirir. Kitabın ikinci temel hedefi Kant'ın yanıldığını ve "geometrinin duyularda ve *görüde* değil zihinde"[358] olduğunu göstermektir. Gauss, bu denemeyi de Kant'ın geometricilerin sürekli mantıki prensipler kullandığını reddetmediğini ancak bu prensiplerin postülatların kendilerini temellendirmek için yeterli olmadığını ve Kant'ın postülatların

---

[354] Gauss, a.g.y., içinde, s.19. "I become more certain every day that the need for our geometry cannot be demonstrated, or at least not by human reasoning. Perhaps in some other life we will reach other conclusions on the essence of space, which are for the time being unattainable to us. Until that moment geometry must be placed on a par with mechanics rather than with arithmetic, which is purely apriori."

[355] Ferreiros, J. (2006). "The Rise of Pure Mathematics as Arithmetic with Gauss", *The Shaping of Arithmetic: Number theory after Carl Friedrich Gauss's Disquisitiones Arithmeticae,* ed. por C. Goldstein, N. Schappacher, J. Schwermer. Springer, Berlin, içinde, s.209

[356] A.g.y., ss.209-210.

[357] Ferreiros, J. (2006). "The Rise of Pure Mathematics as Arithmetic with Gauss", *The Shaping of Arithmetic: Number theory after Carl Friedrich Gauss's Disquisitiones Arithmeticae,* ed. por C. Goldstein, N. Schappacher, J. Schwermer. Springer, Berlin, içinde, s.229.

[358] Gauss, a.g.y., içinde, s.229.

kendilerini temellendirmek için görüye ihtiyaç duyduğunu belirterek eleştirir. Bu bir anlamda Kant'çı bir tutum benimsemektir.

Gauss'un matematik ve geometride görünün gerekliliği ile ilgili bu tutumunun 1800'lerde yazılmış olan *Zur Metaphysik der Mathematik* adlı müsveddelerinden kalma olduğu iddia edilir.[359] Bu çalışmasında Gauss matematiğin konusunu birbirleriyle ilişkili büyüklükler olarak değerlendirir:

> Matematik gerçekten genel büyüklükler arasındaki ilişkilerle ilgili doğruları öğretir ve onun amacı büyüklükleri *tanımlamak*- ki bu büyüklükler bilinen ilişkileri *bilinen büyüklüklere* taşırlar ya da *bu büyüklüklere bilinen büyüklükler* bilinen ilişkileri taşır- ve böylece onların temsilini olanaklı kılmaktır.[360]

Demek ki Gauss için büyüklüğün temsili 1) dolaysız görü (dolaysız temsil), 2) bilinen büyüklükleri kıyaslamak suretiyle mümkündür. Geometri büyüklükleri dolaysız olarak "yapılaştırma ya da geometrik temsil ile gösterir".[361] Dolayısıyla Gauss için görü matematiksel büyüklüklerin temsili için anahtar bir rol oynar.

Kant'ın çokluları (*manifold, quanta, quantitas*) ele alış biçimini incelediğimiz bölümde Gauss'un bu ayrımına çok benzeyen bir ayrım görmüştük; Kant için geometri büyüklüklerini *doğrudan* (ostensive) gösterir, aritmetik ise s*embolik* olarak bunu yapar. Dolayısıyla bu alıntıdaki fikirler kullanılan terminoloji ve fikirler bağlamında Gauss Kant ile benzer görüşleri benimsiyor gibi görünmektedir.[362] Gauss için geometri büyüklükler arasındaki ilişkileri doğrudan ele alırken, aritmetik bu ilişkileri dolaylı yoldan ve genel bir şekilde ele alır. Dolaysız görü (dolaysız temsil)'in rolü geometri ve aritmetiği iki farklı alan olarak ayırmadan önce teyit

---

[359] A.g.y., s.229.
[360] Gauss, a.g.y., s.229 içinde; "Mathematics really teaches general truths concerning the relations between magnitudes, and its aim is to *describe* magnitudes that bear known relations to *known magnitudes* or *to which known magnitudes* bear known relations, i.e., to make possible a representation of them."
[361] Gauss, a.g.y., içinde s.230.
[362] A.g.y., s.230. Ferreiros bu alıntılar ışığında Gauss'un 1816'ya kadar Kant'ın matematik ile ilgili birçok görüşünü paylaştığını ve özellikle aritmetiğin doğası ile ilgili görüşlerinde Gauss'un Kant'a 1800'lerde sonraki 25 yılına göre çok daha yakın olduğunu iddia eder.

edilir dolayısıyla aritmetiğe de dolaysız görü uygulanabilir.[363]Aritmetiğin saf apriori olması için aritmetiğin empirik değil saf görüde temellenmiş olması gerekir. Öte yandan Gauss Ortodoks bir Kant'çı olmadığından geometriyi empirik görüye dayandırır.[364] Gauss'a göre beşinci postülata apriori değil empirik olarak karar verebiliriz.[365] Bu görüşle beraber Gauss artık geometriyi saf matematik olarak değerlendirmeyi bırakır:[366]

> Benim en derin inancım odur ki, mekân teorisi apriori bilgimize göre saf büyüklükler teorisinden tamamen farklı bir yere sahiptir. Mekân teorisine ilişkin bilgimiz, saf büyüklükler öğretisinin karakteristiği olan, onun zorunluluğuna (ve böylece onun mutlak doğruluğuna) dair bu inanca tamamen ihtiyaç duyar. Bu yüzden tevazu içinde kabul etmeliyiz ki eğer sayı yalnızca zihnimizin ürünüyse, mekân bizim zihnimiz dışında da bir gerçekliğe sahiptir, ve biz onun yasalarını apriori olarak tanımlayamayız.[367]

Bu alıntıda Gauss yine zorunlu, kesin, mutlak doğrulardan oluşan aritmetiğin doğasının apriori olduğunu söylüyor. Ancak bu alıntıyı dikkatlice ele aldığımızda Gauss'un fazladan ve daha önemli bir şey daha söylediğini görüyoruz. Gauss 1830'larda, Carnap'tan çok önce, saf ve uygulamalı matematik arasında bir ayrım yapmaktadır.[368] Carnap Kant'ın saf ve uygulamalı matematik arasındaki farkı

---

[363] A.g.y., s.230.
[364] A.g.y., s.230.
[365] A.g.y., s.230.
[366] A.g.y., s.230.
[367] Ferreiros, J. (2006). "The Rise of Pure Mathematics as Arithmetic with Gauss", *The Shaping of Arithmetic: Number theory after Carl Friedrich Gauss's Disquisitiones Arithmeticae,* ed. por C. Goldstein, N. Schappacher, J. Schwermer. Springer, Berlin, içinde, s.209-10. "According to my most intimate conviction, the theory of space has a completely different position with regards to our knowledge apriori, than the pure theory of magnitudes. Our knowledge of the former lacks completely that absolute conviction of its necessity (and therefore of its absolute truth) which is characteristic of the latter. We must humbly acknowledge that, whereas number is just a product of our minds space also has a reality outside of minds, whose laws we cannot be prescribe apriori". Ferreiros Gauss'un apriori ile yalnızca aritmetiği değil "saf büyüklükler teorisi" ("reine Grössenlehre") olarak andığı karmaşık sayıların teorisindeki bütün farklı durumları kapsayacak biçimde bir belirleme yaptığını düşünür. Bkz. Ferreiros, J. (2006). "The Rise of Pure Mathematics as Arithmetic with Gauss", *The Shaping of Arithmetic: Number theory after Carl Friedrich Gauss's Disquisitiones Arithmeticae,* ed. por C. Goldstein, N. Schappacher, J. Schwermer. Springer, Berlin, içinde, s.210.
[368] Kvazs, L. (2011). "Kant's Philosophy of Geometry-On the Road to a Final Assessment", *Philosophia Mathematica* (III) 19, ss.151-153. Bu makalesinde Kvazs Gauss'un bu ayrımı Carnap'tan önce yaptığını göstermek için Carnap'ın söylediklerini neredeyse birebir şekilde Gauss'a yalnızca Carnap'ın bu açıklamayı yaptığı 1966 yılını Gauss için 1830 olarak değiştirerek söyletir. Ayrıca bu ayrımın Gauss tarafından Carnap'tan önce yapıldığını Ferreiros'ta iddia eder. Bakınız; Ferreiros, J. (2006). "The Rise of Pure Mathematics as Arithmetic with Gauss", *The Shaping of Arithmetic: Number theory after Carl Friedrich Gauss's Disquisitiones Arithmeticae,* ed. por C. Goldstein, N. Schappacher, J. Schwermer. Springer, Berlin, içinde, s.210.

göremediği için yanıldığını iddia eder. Carnap'a göre Kant bu ayrımı yapabilmiş olsaydı saf matematiğin analitik ve apriori olduğunu ancak fiziksel (yani uygulamalı geometrinin) geometrinin sentetik aposteriori olduğunu görebilecek ve geometrinin sentetik apriori yargıları olduğu fikrini ileri sürmeyecekti.[369] Sentetik apriori yargıların doğası ve geometrinin saf görüde temellendirilmesi fikri Mantıksal Olgucular tarafından eleştirilmiştir. Bu eleştiriler temellerini Hilbert'in Öklid geometrisini mantıki olarak titiz bir şekilde aksiyomlaştırmasında, Öklidyen olmayan geometrilerin keşfinde ve bu geometrilerden biri olan Riemann geometrisinin Einstein'ın "Görelik" kuramında kullanılmasında bulmaktadır. Bu gelişmeler ile beraber Russell, Carnap, Schlick ve Reichenbach gibi Mantıksal Olguculular matematiği felsefi olarak yeniden yapılandırma girişimlerinde artık Kant'ın geometriyi mekân görüsünde temellendirmeye çalışmasının ve geometrinin yargılarının sentetik apriori olduğu iddialarının tutarlı bir şekilde savunulamayacağını düşünmeye başlamışlardır.[370] Onlara göre saf matematik tamamıyla apriori iken geometri ve mekaniğin içerildiği uygulamalı matematiğin empirik kökenleri vardır. Gauss için de durum henüz 1830'larda buna benzerdir; ona göre "Metafizikçi filozofların boş, sözel bilgelikleri"[371] nin aksine mekân üzerine bilebileceklerimiz şunlardır:

> Mekânın gerçek özüne dair o kadar az şey biliyoruz ki gözümüzde doğal olmayan bir şeyi imkânsız bir şey olarak değerlendirmemiz son derece mümkündür. Eğer Öklidyen olmayan geometri gerçek geometri olsaydı ve bu sabit dünyaya dair ölçümlerimizdeki çoklukla bir ilişkiye sahip olsaydı, bunu ancak aposteriori keşfedebilirdik.[372]

Gauss J. Bolyai'ye yazdığı bir mektupta şunları söyler:[373]

---

[369] Carnap, R. (1966). *Philosophical Foundations of Physics*, ed. Martin Gardner, Basic Books Inc, ss.181,182,183. Bu ayrım Einstein'ın şu sözleriyle formüle edilir; "Geometrinin kanunları gerçekliğe işaret ettikleri sürece kesin değildirler ve kesin oldukları sürece de gerçekliğe işaret etmezler." Friedman, M. (1985). "Kant's Theory of Geometry", Vol. 94, No.4. *Philosophical Review*, s.456.

[370] Kant'ın mekânı görüsünün Mantıksal Olgucularca reddinin nedenleri ayrı bir çalışmanın konusu olabilir. Bu konuyla ilgili olarak bakınız; Friedman, M. (1999). *Reconsidering Logical Positivism*. Cambridge University Press, ss.6,20,21,26,27,28,30,33,34,36,40,44.

[371] Gauss, a.g.y., içinde, s.19. "…empty verbal wisdom of the metaphysical philosophers".

[372] Gauss, Bottazini, U. (1994). "Geometry and "metaphysics of space" in Gauss and Riemann", In *Romanticism in Science*, eds. S.Poggi, M. Rossi, Dordrecht: Kluwer, içinde s.19. "So little, not to say nothing, about true essence of space that we would be quite capable of mistaking something which appears in our eyes to be unnatural with something absolutely impossible. If non-Euclidean geometry were the true geometry, and that constant were in some relationship to a quantity existing in the realms of our measurements on earth or in the heavens, we could discover this aposteriori."

[373] A.g.y., s.23.

> Tam da ∑ ve S arasındaki seçimi apriori olarak yapamayacağımız Kant'ın mekânı yalnızca bizim görümüzün formu olarak açıklamasının yanlış olduğunu en açık şekilde göstermektedir. Kant'ın açıklamasının yanlış olduğunu diğer ve en az bunun kadar kuvvetli bir sebebi *Göttingischen gelehrten Anzeigen 1831* de kısa bir notla belirtmiştim.[374]

Gauss bu alıntının sonunda geçen ve Kant'ın mekânın doğasına ilişkin açıklamalarının yanlış olduğunu gösterdiğini iddia ettiği "kuvvetli sebep" ile Gauss Kant'ın meşhur "örtüşmeyen eşler" uslamlaması ve onun sonuçlarını kasteder.[375] Gauss mekânın doğasının Kant'ın mekânın görünün saf formu olduğu iddiasını "fantastik bir fikir" (*Einbildung*) olarak değerlendirir.[376] Kant mekânın görünün saf formu olduğunu göstermek için "örtüşmeyen eşler" uslamlamasını kullanır ve Gauss bu uslamlamadan yine J.Bolyai'ye yolladığı bir mektupta bahseder:[377]

> …sağ ve sol arasındaki ayrım, sabit bir düzlemde rastgele birer ön ve arka yön, düzlemin iki yüzeyine göre aşağı ve yukarı yön seçildiğinde tamamen tanımlanmış olur; ancak bu ayrımla ilgili görülerimizi değiştirirsek bunu gerçekten var olan, maddi nesneleri kullanarak aktarabiliriz.[378]

Gauss bu iki gözlemin de Kant tarafından yapıldığını ama böylesine algısı yüksek bir filozofun özellikle ikinci gözlemde tam tersine, görüsel kapasitemiz olmaksızın, "mekânın görümüzden bağımsız olarak gerçek bir anlamı olması gerektiğine"[379] dair böyle bir ispat varken birinci gözlemi mekânın basitçe "bir tür görü" olduğuna dair bir kanıt olarak görmesini anlayamadığını belirtir.[380] Yani "örtüşmeyen eşler" uslamlamasının yorumu ve anlamı Kant ve Gauss için çok farklıdır. Kant için bu

---

[374] Gauss, a.g.y., içinde s. 23. "Precisely in the impossibility of deciding apriori between ∑ and S that we find the clearest demonstration that Kant was wrong to state that space is only a form of our intuition. Another and just as strong reason I have had occasion to point out in a short note in the *Göttingischen gelehrten Anzeigen 1831."*

[375] Ferreiros, J. (2006). "The Rise of Pure Mathematics as Arithmetic with Gauss", *The Shaping of Arithmetic: Number theory after Carl Friedrich Gauss's Disquisitiones Arithmeticae,* ed. por C. Goldstein, N. Schappacher, J. Schwermer. Springer, Berlin, içinde, ss.230-231.

[376] A.g.y., ss.230-231.

[377] Gauss, Bottazini, U. (1994). "Geometry and "metaphysics of space" in Gauss and Riemann", In *Romanticism in Science,* eds. S.Poggi, M. Rossi, Dordrecht: Kluwer, içinde s. 23.

[378] Gauss, a.g.y., içinde s. 23. "…this difference between right and left is in itself completely determined soon as a random front and back have been fixed on a plane and above and below in relation to the two surfaces of the plane; only if we change our intuition of this difference can we communicate it by indicating really existing material objects."

[379] Gauss, a.g.y., s23. "… space, regardless of our capacity of intuition, must have a real meaning".

[380] A.g.y., s.23.

uslamlama mekânın görünün saf formu olduğuna dair bir delildir. Gauss ise bu uslamlama ile Kant ile neredeyse taban tabana zıt bir sonuca ulaşır. Gauss bu uslamlamayı sağduyusal bir bakışla ele alır. Bu bakış açısıyla bu uslamlama geometrik modellerinin mekânı *gerçekçi* bir şekilde yorumlayabileceğimizi kanıtlamaktadır.[381] Gauss böylece bu uslamlamanın "nihai" ("a decisive refutation") olarak Kant'ı yanlışladığını düşünür.

Bu görüş farklılıklarına rağmen yine de Gauss'un Kant'ın epistemolojisinin tamamıyla karşısında olduğunu iddia etmek doğru olmayacaktır. İkisinin arasında önemli farklar olmasına rağmen Gauss'un Kant'çılığın içinde kalarak bazı revizyonlar yaptığını görmek mümkündür.[382] Örneğin mekaniğin bazı kanunlarının apriori olmasına rağmen empirik bir kısmının olduğunu Kant da düşünür. Gauss da geometrinin apriori bir kısmının olduğunu düşünür; mekânın üç boyutlu manifold olması büyüklüklerin saf teorisi aprioridir. Gauss için yine mekânın topolojik özellikleri örneğin süreklilik veya tamlık, üç boyutluluk ("continuity or completeness, three-dimensionality") ve Lobachevski-Bolyai geometrisinin bazı metrik özellikleri de apriori'dir.[383]

Gauss döneminin matematiği ve Kant ile ilişkisini analiz etmek için tekrar görü meselesine dönelim. 19.yy başlarında matematiksel bilginin *görülenebilirliği* Alman bilim insanları ve matematikçileri tarafından bilinen bir tezdi.[384] Gauss'un da bu tezi değerlendirip takip ettiği, bu nedenle karmaşık sayıları takdiminin "görüden uzak bir şekilde"[385] yapılamayacağını, bilakis Gauss yüzeyleri yardımıyla "karmaşık sayıların aritmetiğinin en görüsel düzeyde temsil edilebileceğini"[386] söyler. Gauss'un buradaki anlamıyla görüyü genel ve soyut bir gösterimin aracı olarak anladığı bu anlamda görüyü analoji kurmanın bir şekli olarak yorumladığı görünmektedir. Oysa görünün bu yorumu Kant'ın görüye yüklemek istediği anlamla tam bir uyuşma

[381] Ferreiros, J. (2006). "The Rise of Pure Mathematics as Arithmetic with Gauss", *The Shaping of Arithmetic: Number theory after Carl Friedrich Gauss's Disquisitiones Arithmeticae,* ed. por C. Goldstein, N. Schappacher, J. Schwermer. Springer, Berlin, içinde, s.231.
[382] A.g.y., s.231.
[383] A.g.y., s.231.
[384] A.g.y., s.227.
[385] Gauss, a.g.y., s.227 içinde.
[386] Gauss, a.g.y., s.227 içinde.

içinde değildir. Gauss her ne kadar geometrinin görüsel temelini vurguluyor görünse de görünün yapısı bağlamında Kant ile aynı fikirleri paylaşıyor görünmemektedir. Kant'ın, mekânı, şeyleri uzamsal ilişki içinde ortaya çıkışının apriori koşulu olarak belirlemesi nettir. Gauss görünün saf mı empirik mi olduğu konusunda net değildir ayrıca eğer mekânın apriori bir görüsü varsa bunun metriksel değil topolojik olabileceğini düşünmektedir.[387]

Gauss'un aritmetik ve geometrinin doğasına ilişkin görüşlerinin süreç içinde evrildiğini görmekteyiz. Gauss'un, Kant'ın matematik ve geometri felsefesi ile önemli bir noktaya kadar hemfikir olduğu söylenebilir. Gauss sayı teorisi (number theory) ve karmaşık analiz (complex analysis) gibi "aritmetiksel bilimlerin" dolayısıyla saf matematiksel bilginin doğasının apriori olduğunu düşünür ve bu Kant ile paylaştığı bir noktadır. Öte yandan Gauss'un saf matematik ile uygulamalı matematik arasında yaptığı ayrımın kendi düşünce dizgesinde bir dönüm noktası oluşturduğunu görüyoruz. Bu ayrımla beraber Gauss Öklidyen geometrinin doğasının mekanik ile beraber yarı empirik olduğunu düşünmesi temelinde Kant'tan ayrılır. Gauss'un görü kavramı ile ilgili düşüncelerinin de kısmi olarak Kantçı bir tutum benimsediğini görüyoruz. Gauss da geometriyi görü temelinde kurmayı hedefler ancak bunu apriori değil, empirik görü yardımıyla yapmak istiyor görünmektedir. Dolayısıyla onun görü yorumu Kant'ın yorumuyla tam bir uyuşma içinde değildir.[388] Bu noktayı Gauss'un "örtüşmeyen eşler" uslamlamasından yola çıkarak görmek mümkündür. Gauss için bu uslamlamadan mekânın görünün saf formu olduğu sonucu çıkmaz, aksine mekânın görü kapasitemiz olmaksızın gerçek bir anlamı olduğu düşüncesi çıkar. Gauss için bu sonuç nihai olarak Kant'ın geometri felsefesini yanlışlar.

---

[387] Ferreiros, J. (2011). Kişisel diyalog.
[388] Ferreiros, J. (2011). Kişisel diyalog.

BÖLÜM 5. RIEMANN'IN 'HABILITATION' DERSİ

5.1. Riemann'ın 1854 Tarihli *Habilitationsvortrag*'ının Olası Bir Yeniden İnşası

> Bir düşünürün katkılarının en önemli ve en kolay görmezden gelinen kısmı, mevcut görüşlere getirdiği eleştirilerdir. Bu eleştiriler düşünürün alternatif teorisinin başlangıcı olmasa dahi, yerinde eleştiriler oldukları sürece, rasyonel diskur gereği o veya bu yönde bir değişime yol açarlar.[389]

Alıntıda bahsi geçen görüşe uygun olarak, takip eden kısma, Riemann[390]'ın mevcut duruma getirdiği eleştirilerle başlıyoruz.

"Araştırma Planı"

Riemann bu bölüme geometriyle ilgili kafa karışıklıklarından söz ederek başlar. Riemann, tarih boyunca geometri çalışmalarında ana kavram ve savları ön kabul olarak aldığımızı belirtir. Geometrideki temel kavramları tanımlamak için kullandığımız ve sadece ismen var olan tanım ve kavramlara atfettiğimiz niteliklerin içkin özellikleri ve ilişkilerine dair bir ipucu vermez. Bu bakış açısından hareketle, Riemann mekân kavramını (mekân kavramı çok boyutlu yer kaplayan büyükler olarak tanımlanan genel kavramın sadece bir örneğidir) çok boyutlu yer kaplayan büyüklükler olarak tanımladığı *genel kavram'*dan ayırır.[391] Riemann bu *genel kavramı niceliğin genel kavramlarından* inşa etmeyi önerir.[392] Böyle bir inşa etme ile sorunu yeniden tanımlamış oluruz; niceliğin genel kavramlarından yapılaştırılan çoklu yer kaplayan büyüklük olarak mekân üzerinde farklı metrik sistemler bulunabilir. Bu bağlamda, Riemann, kendi zamanında hâkim olan Öklidyen metriğin geçerli olduğu mekânın ön kabullerinin gerekliliğini ve apriori olup olmadığını

---

389 Agassi, J.(1969). "Leibniz's Place in the History of Physics" , *Journal of the History of Ideas,* Vol. 30, No. ss. 333- 334.

390 Aksi belirtilmediği sürece tırnak tüm alıntılar Riemann, Bernhard, "On the Hypotheses Which Lie at The Foundations of Geometry", çevr. Simith,D.E.(1929) in *A Source Book in Mathematics*, 'den yapılacaktır.

391 Torretti, R. (1978). *Philosophy of geometry from Riemann to Poincare.* Dordrecht: Reidel: D. Reidel Publishing Company, s.83.

392 A.g.e., s.83.

sorgulayarak başlar; “bu kabullerin bağlantılarının ne kadar gerekli, mümkün veya apriori olduğunu tespit etmek mümkün değildir.”[393]

Bu vurgulanmaya değer bir noktadır zira Riemann, mekânı geniş anlamıyla almaz. Ona göre, “mekân, kendi sözleriyle *der Raum*, fiziksel cisimlerin yeri ve fiziksel hareketin yeri olan eşsiz bir varlıktır.”[394] Geleneksel anlayışta, mekân, Öklidyen geometrinin doğa bilimlerinde uygulanabilirliğini sağlayan geometrik noktalar kümesinin kabı (holder) olarak anlaşılıyordu. Mekânı Riemann'ın anladığı şekliyle, yani toplanmış (kümelenmiş), yapılandırılmış bir noktalar kümesi olarak alırsak başka geometrilerin de mümkün olduğunu görürüz. Bu, başka geometrilerden hangisinin geometrik yapılara ve doğal fenomenlerin açıklanmasına daha uygun olduğu gibi önemli bir soruyu beraberinde getirir. Böylece, bu sorunun öğeleri ve yanıtları eğer “mekân daha büyük, türlerinden her biri bir geometriyle ayırt edilen bir sınıf olarak kabul edilirse” elde edilebilir.[395]

Riemann, tarih boyunca ne matematikçilerin ne de filozofların, geometrinin temellerinde yatan “karanlığı” aydınlatamadığını iddia eder. Riemann bunun sebebini şuna bağlar:

> Mekânsal-büyüklüklerin kavrandığı çok boyutlu yer kaplayan büyüklüklerin genel kavramı hiç açıklığa kavuşturulmamıştır. Bu yüzden, kendime ilk problem olarak genel nicelik kavramlarından çoklu yer kaplayan büyüklük kavramını oluşturmayı seçtim. Buradan, birçoklu yer kaplayan büyüklüğün birçok metrik bağıntıya elverişli olduğu ve mekânın sadece üç boyutlu yer kaplayan büyüklüklerin tekil bir örneği olduğu sonucu çıkacaktır.[396]

---

[393] Riemann, Bernhard, “On the Hypotheses Which Lie at The Foundations of Geometry”, çevr. Simith,D.E.(1929) in *A Source Book in Mathematics*, s.411. “…one sees neither whether and in how far their connection is necessary, nor apriori whether it is possible.”

[394] Torretti, R. (1978). *Philosophy of geometry from Riemann to Poincare.* Dordrecht: Reidel: D. Reidel Publishing Company, s.83. “Space is, in his words, *the* space, *der Raum*, a unique entity which is the site of physical bodies and the locus of physical movements.”

[395] Torretti, R. (1978). *Philosophy of geometry from Riemann to Poincare.* Dordrecht: Reidel: D. Reidel Publishing Company, s.83. “…space is considered as an instance of a broader genus, each of whose species is characterized by geometry.”

[396] Riemann, Bernhard, “On the Hypotheses Which Lie at The Foundations of Geometry”, çevr. Simith,D.E.(1929) in *A Source Book in Mathematics*, s.411. “The general concept of multiply extended magnitudes in which spatial-magnitudes are comprehended has not been elaborated at all. Accordingly I have proposed to myself at first the problem of constructing the concept of a multiply extended magnitude out of general notions of quantity. From this it will result that a multiply extended

Bu nokta çok önemlidir zira göreceğimiz gibi, Riemann "çok boyutlu yer kaplayan büyüklüğü", geometrinin temeli olarak alıp detaylandırmak istemiştir. Geometri hakkındaki kafa karışıklığının diğer sebebi olarak, Riemann, kendi zamanına kadar şekle bağlı özelliklerle metriksel, ölçüme dayalı özelliklerin ayrılmamasını gösterir. Riemann bu bahsi geçen bağıntıları ayıracağını, bu vesileyle "üç boyutlu yer kaplayan büyüklüklerin" (manifold) değişik metriksel sistemlere sahip olabileceğini görebileceğimizi işaret eder. "Araştırma planı" nın sonunda Riemann der ki:

> Bu olgular, tüm olgular gibi, gerekli değil sadece empirik bir kesinliğe dairdir; bunlar birer hipotezdir ve bu yüzden olasılıkları araştırılabilir ki bu olasılıklar gözlemlenebilenin sınırları içerisinde çok yüksektir ve bundan sonra da hem ölçülemeyecek kadar büyük, hem de ölçülemeyecek kadar küçük olanlar için bunları gözlemin sınırları dışarısına genişletmenin kabul edilebilirliği ile ilgili karar verilebilir.[397]

Bu anlayış, önemli bir noktayı da beraberinde getirir; Riemann'a göre mekân, yaşadığımız dünyadır, ama "çoklu yer kaplayan büyüklüklerin" (manifold) sadece biridir. Başka bir deyişle, Riemann, böyle büyüklüklerde (manifoldların) farklı metriklerin de mümkün olduğuna, yani gerçek dünyanın bu farklı metriksel bağıntıların sadece biri olduğuna işaret eder. Bunun sonucu olarak, eğer başka metriksel bağlantılar da mümkünse, o zaman "mekânın gerçek geometrisi salt kavramsal analizle tespit edilemez."[398] Buradan hareketle Riemann, "mekânı, düşünülebilecek diğer üç boyutlu yer kaplayan niceliklerden ayıran özellikler sadece deneyim yoluyla elde edilebilir"[399] der.

---

magnitude is susceptible of various metric relations and that space accordingly constitutes only a particular case of triply extended magnitude."

[397] Riemann, Bernhard, "On the Hypotheses Which Lie at The Foundations of Geometry", çevr. Simith,D.E.(1929) in *A Source Book in Mathematics*, s.412, "These facts are, like all facts, not necessary but of a merely empirical certainty; they are hypotheses; one may therefore inquire into their probability, which is truly great within the bounds of observation, and thereafter decide concerning the admissibility of protracting them outside the limits of observation, not only toward the immeasurably large, but also toward the immeasurably small."

[398] Torretti, R. (1978). *Philosophy of geometry from Riemann to Poincare.* Dordrecht: Reidel: D. Reidel Publishing Company, s.84. "…true geometry of space cannot be determined by conceptual analysis alone."

[399] Riemann, Bernhard, "On the Hypotheses Which Lie at The Foundations of Geometry", çevr. Simith,D.E.(1929) in *A Source Book in Mathematics*, s.412. "…those properties which distinguish space from other conceivable threefold extended quantities can be gathered only from experience."

Riemann'ın empirik kesinliği sorgulamadaki ısrarı dikkate değerdir; zira *Habilatitionsvortrag*'ın sonuna doğru ilk iki kısımda sunduğu sonuç ve yapıların empirik geçerliliğini sorgular. Bölüm **3.2** (Bu empirik tespitlerin geçerliliğini sorgulamak) bu noktayı açıklığa kavuşturacaktır.

"N-kez Yer Kaplayan Manifold Kavramı"

Mekânı "çok boyutlu yer kaplayan büyüklük" olarak belirledikten sonra, Riemann bu genel kavramı kesinleştirmeye girişir. Bunun için de bazı bölümlemeler yapar; bu kısım manifoldlar hakkındaki genel fikirleri şu alt başlıklar altında inceler;

Sürekli ve ayrık manifold

Riemann manifoldları ikiye ayırır; şayet bir manifolttan bir başkasına sürekli bir yol (path) varsa bu manifold "sürekli manifold", aksi takdirde "ayrık manifold" olarak adlandırılır. Sürekli manifoldlarda "tek özelleşmeler"e (individual specializations) *nokta*, ayrık manifoldlarda ise *manifold ögeleri* ismi verilir. Riemann sürekli manifoldlara örnek olarak "renkler"i ve "duyusal nesnelerin konumları"nı verir. Riemann bunlara örnek vermese de, yüksek matematikte sürekli manifoldlara başka örnekler bulmanın mümkün olduğunu iddia eder. Ayrık manifoldların örneklerine ise daha sık rastlanır. Riemann'ın cümleleriyle:

> Özelleşmeleri ayrık manifoltluk yaratan kavramlar o kadar yaygındır ki, en azından gelişmiş dillerde (developed languages) onların var olduğu bir kavram bulmak her zaman mümkündür. Bu yüzden matematikçiler bazı şeylerin denk sayılabileceği varsayımından hareketle ayrık büyüklükler teorisini kolayca kurabilmişlerdir.[400]

Riemann iki genel tip manifold tanımlasa da, *Habilatitionsvortrag*'ındaki değerlendirmelerine sürekli manifoldlar üzerinden devam etmeyi tercih etmiştir. Bunun sebepleriyle ilgili Scholz şu noktaya işaret eder:

---

[400] Riemann, Bernhard, "On the Hypotheses Which Lie at The Foundations of Geometry", çevr. Simith,D.E.(1929) in *A Source Book in Mathematics*, s.423. "Notions whose specialisations form a *discrete* manifoldness are so common that at least in the cultivated languages any things being given it is always possible to find a notion in which they are included. (Hence mathematicians might unhesitatingly found the theory of discrete magnitudes upon the postulate that certain given things are to be regarded as equivalent.)"

> Sonlu veya ayrık manifoldlarla bazı – daha sonradan geliştirilen küme kuramına rağmen - ender açıklamaları saymazsak, Riemann doğrudan tekil örnekleri *sürekli geçişe* izin veren durumlarla devam etmiştir. Bu sezgisel bir şekilde anlaşılmalıdır, zira süreklilik ancak gerçel sayılar ortaya çıktıktan ve küme-kuramsal fikirler ortaya konduktan sonra matematiksel açıdan çözümlenebilmiştir ki bu da 1870/80lerden önce yapılamamıştır. Riemann'ın yaklaşımı Herbart'ın seri formlar (serial forms) teorisiyle paralellik taşır; fakat Riemann kavramın tekil örneklerini belirlemenin, 1-parametreli, 2-parametreli, …, (n-1)-parametreli ve son olarak n-parametreli varyasyonları kısmen- sinematik (quasi-cinetamatical) anlamda yerel, ardışık bir şekilde yeniden yapılandırarak, bu fikri bir adım öteye taşımıştır. Bu durumlarda, açık ama fazlasıyla genellenmiş bir geometrik kavram olarak *noktayı* genel kavramın (manifold) tekil bir örneği olarak kullanır.[401]

Riemann'ın bu tercihi, Herbart'ın daha önce anlatılan süreklilik ile ilgili felsefi spekülasyonlarıyla uyumlu görünmektedir. Bu tercih için başka bir sebep ise sürekli manifoldların doğasında yatıyor olabilir; Riemann'ın programının merkezinde yer alan iki sonsuz yakınlıktaki nokta arasında ölçüm yapma fikri, ancak sürekli manifoldların içinde mümkündür.

Riemann, manifoldun belli kısımlarından bahsetmek için “Quanta” terimini kullanır. Quanta'ların karşılaştırması ayrık manifoldlarda “sayım” (counting) ile sürekli manifoldlarda ise “ölçüm” (measuring) ile mümkündür.

Manifoldları ayrık ve sürekli olarak ikiye ayırdıktan sonra, sürekli manifoldlarda, sürekli manifoldların özelleştirilmelerini takip ediyoruz. Sürekli manifoldlar “büyüklük bağıntıları”(size relations) ve “alan bağıntıları” (region relations) üzerinden birbirinden ayrılabilir. Bu ayrımın, Riemann'ın “Araştırma planını” kısmında bahsettiği ikinci problemle doğrudan ilişkili bir şekilde ele alınması mümkündür. Hatırlanırsa, Riemann geometri hakkındaki kafa karışıklığını iki probleme bağlamıştı; çoklu yer kaplayan büyüklüklerin muğlâk konumu ve *şekilsel* (depend on shape) ve *metriksel* (depend on measure) özelliklerin birbirinden

---

[401] Scholz, E,(1992). “Riemann’s vision of a new approach to geometry”, Boi, Flament and Salanskis, ed., içinde s.22. “Leaving some sparse - even if in the light of the later development of set theory important - remarks on finite or discrete manifolds aside, Riemann proceeded immediately to those situations where the particular instances of the concept admit *continuous transitions.* That was to be understood in an intuitive sense, as the concept of continuity came to be mathematically analyzed only after the formal definitions of real numbers had appeared and set theoretic ideas were being formulated, that is not before the 1870/80s.a Riemann's approach was somehow parallel to the introduction of Herbart's serial forms; but Riemann specified the idea further by a local successive reconstruction in a quasi-cinematical sense, by 1-parameter, 2-parameter, ..., (n - 1)- parameter, and finally n-parameter variation of the determination of instances of the concept. In these cases he admitted the obvious, but drastically generalized geometric terminology of *point* for a particular instance of the general concept (manifold).”

ayrılmamış olması. Sürekli manifoldların *büyüklük* (size) ve *alan bağıntıları* (region) üzerinden ayrılmasını, şekilsel ve metriksel özellikler ayrımı bağlamında değerlendirmek mümkündür.

Sürekli Manifoldların Bölümlenmesi

Eğer "Sürekli manifoldların, konfigürasyondan bağımsız oldukları varsayımının geçerli olduğu büyüklük bağıntılarına göre bölümlenmesi"[402]mümkün değilse, "iki büyüklüğü ancak biri diğerinin parçasıyken ve o zaman da birinin diğerinden ne kadar büyük olduğu değil sadece hangisinin diğerinden büyük olduğu üzerinden karşılaştırabiliriz".[403] Ölçüm (süper pozisyon, üst üste getirme işlemi), ancak biz "konumdan bağımsız büyüklükler varsayılmalıdır" savını kabul edersek mümkün olur. Yani, büyüklük ölçümünün kullanılabilirliği, konumdan bağımsız büyüklük bağıntılarının varlığına bağlıdır. Aksi takdirde, ölçüm yapılabilmesinin temel şartlarından olan standart ölçüm birimini tespit etmek mümkün değildir.

Konumdan bağımsız büyüklükler prensibinin, sabit eğriliğe sahip mekânlarla da önemli bir ilişkisi vardır. Riemann göre, "Nesnelerin varoluşunun onların mekânda nasıl durduklarına bağlı olmadığı iddiası ancak mekân sabit eğrilik manifoldu ise savunulabilir."[404] Yani, "katı cisimlerden" (rigid bodies) bahsetmek ancak sabit eğrilik olduğu zaman anlamlıdır.

"Sürekli manifoldların, konfigürasyondan bağımsız oldukları varsayımının geçerli olmayabileceği alan bağıntılarına göre bölümlenmesi"

Büyüklük bağıntılarının incelenebildiği sürekli manifoldların dışında, "büyüklüklerin konumdan bağımsız bir şekilde düşünülemeyeceği ve bir birimle değil ancak manifolddaki alanlarla gösterilebileceği" sürekli manifoldlar da mevcuttur. Riemann bu manifoldların "çok-değerli analitik fonksiyonların incelenmesi" gibi matematiğin

---

[402] "Division of continuous magnitudes with respect to size relations in which the assumption that magnitudes independent from configuration must be hold"

[403] "…one can compare two magnitudes only when the one is the part of the other, and even then one can only decide upon the question of more or less, not upon the question of how many."

[404] Torretti, R. (1978). *Philosophy of geometry from Riemann to Poincare.* Dordrecht: Reidel: D. Reidel Publishing Company, s. 100.

farklı alanlarında gerekli olduğunu ve "diferansiyel denklemler teorisinin verimsizliğinin" de bu manifoldların eksikliğinden kaynaklandığını belirtir. Bundan başka da konumdan bağımsız büyüklükler varsayımının geçerli olmadığı manifoldlara dair başka bir detay veya açıklama sunmaz.

Çoklu yer kaplayan manifoldlar kavramının üretimi

Riemann "*n*-kez yer kaplayan manifold" kavramını tanımlamak için kullanacağı bir savla başlar; "Nicelik kavramları, ancak hâlihazırda değişik biçimde belirlemelere (determination) izin veren bir genel kavram mevcutsa var olabilir".[405] Buradan yola çıkan Riemann, manifold üretimini açıklamaya girişir. Burada "belirleme biçimi sürekli değişen" bir kavramdan bahseder; eğer bir biçimden diğerine tam belirlenmiş bir yoldan ilerlenirse bir basit yer kaplayan manifold elde ederiz. Riemann bunu "eğer bir kavramın özelleşmiş halleri sürekli bir manifold oluşturuyorsa ve bir özelleşmiş halden diğerine belli bir biçimde geçilebiliyorsa, geçilen özelleşmeler bir basit yer kaplayan manifold oluşturur"[406] diyerek açıklar. Eğer bir manifoldun her bir noktasından bir başkasına ilerlersek iki boyutlu (iki kez yer kaplayan) bir manifold ortaya çıkar. Eğer bu, iki manifold üçüncüsüne uygulanırsa üç boyutlu (üç kez yer kaplayan) bir manifold ortaya çıkar. Burada önemli bir nokta, tek boyutlu durumda tek bir doğrultuda hareket edilebiliyor olmasıdır; ileri ve geri. Yani, iki boyutlu bir manifold (yüzey) üzerinde hareket tanımlamak için iki ayrı doğrultudan bahsedilebilmelidir, üç boyutlu manifoldlar (mekân) içinse üç ayrı doğrultu var olmalıdır. *N*-boyutlu manifoldlar da benzer şekilde düşünülebilir (*n* farklı doğrultu). Yani, manifoldun basitçe "değişken bir nesne" ve onun değişik evreleri ("belirleme biçimleri veya modelleri") arasındaki bağıntı sonucunda üretildiğini söylemek mümkündür; bu değişik evreler manifoldun "nokta"larını oluşturur.

Bir noktanın n-adet değişkenle temsili

---

[405]"… a concept "whose mode of determination varies continuously."

[406] "If in the case of a notion whose specialisations form a continuous manifoldness, one passes from a certain specialisation in a definitive way to another, the specialisations passed over form a simply extended manifoldness."

Bu prosedürü görebilmek için "tek boyutlu bir manifoldun, manifoldun her noktasında o noktayla beraber değişen tanımlı birer değeri olan – ve değerlerin karşılaştırılabilirliği açısından sabit bir başlangıca sahip olan - değişken bir kısmı"[407] nı düşünelim. Yani bu manifold içerisinde değeri sabit olmayan "sürekli bir konum fonksiyonu" farz edelim. Bu durumda, fonksiyonun sabit değere sahip olduğu noktalar "verilen manifolttan daha az boyuta sahip bir sürekli manifold" oluşturur. Fonksiyonun değerinin değişmesiyle birlikte "bu manifoldlar sürekli bir şekilde birbirine geçer". Bu geçiş, her bir noktanın "diğerindeki sabit bir noktaya" geçişiyle mümkündür. Yani "hepsinin (manifold), bir tanesinden doğduğu kabul edilebilir".[408]

Daha önce de değindiğimiz sabit bir başlangıç noktasına ve tanımlı değerlere sahip sürekli bir fonksiyonu kullanarak, *n*-kez genişleme üretimini "bir boyutlu bir değişkenlik ve daha az boyutlu bir değişkenlik"[409] olarak tersine çevirmek mümkündür. Riemann bundan "bir manifoltta konum belirtmek mümkün ise, bu konum sonlu sayıda çokluğun belirlenmesine indirgenebilir" [410]sonucunu çıkarır. Bu yüzden de "bir *n*-kez genişlemenin temel belirtisi" olarak" konumun belirlenmesi *n* adet çokluk belirlemesiyle ifade edilebilir." Daha açık söylemek gerekirse, *n*-boyutlu bir manifoltta bir noktanın konumunu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gibi *n* adet değişken parametre ile belirtebiliriz ($x_1, x_2, \ldots, x_n$ koordinat adlarıdır).

"Her Doğrunun Konumundan Bağımsız Bir Uzunluğa Sahip Olduğu, Yani Her Doğrunun Her Bir Diğer Doğruyla Ölçülebildiği, Varsayımıyla, N-boyutlu Bir Manifoldun Metrik Bağıntıları"

Bu kısmın yapısından bahsetmeden önce, bazı genel saptamalarda bulunmak faydalı olacaktır. Bu kısımda *Habilitationsvortrag*'ın matematiksel sonuçları

---

[407] "…a variable portion of a manifold of one dimension, -reckoning from a fixed starting point or origin, so that its values are comparable with another- which has for every point of the given manifold a definite value changing continuously with that point".

[408] By means of changes in the value of the function, "these manifolds pass over, one into another, continuously". This passing over is possible by passing every point into "a definite point of the other". So, "one may assume that from one of them (manifold) all the rest emanate".

[409] "…a variability of one dimension and a variability of fewer dimensions".

[410] "…fixing of position in a given manifold is reduced, whenever this is possible, to the determination of a finite number of quantities".

verilecek olup, bunları bu sonuçlarla ilgili saptamalar takip edecektir. Riemann bu noktaya kadar bahsettiği hususları hatırlatarak başlar. Bu hususlardan ikisi “manifoldun üretimi” ve “manifoldluğun” temel belirtisi olarak konumun n adet büyüklük belirlemesiyle ifade edilebilmesi”dir. Konferansın bu kısmının başlığından da anlaşılabileceği gibi, Riemann bu kısımda n-boyutlu manifoldlardaki metriksel bağıntılara odaklanır. *N*-kez yer kaplayan manifold bu metriksel sistemler ışığında incelenir.

Bu kısımda, uzunluklar ve eğriler birincil öneme sahiptir. Russell da Riemann’ın fikirlerinden bahsederken bu önemden şöyle söz eder:

> Riemann, ki mantıksal olarak Einstein’ın selefidir, değeri yarım yüzyıl boyunca anlaşılamamış yeni bir fikir ortaya attı. Geometrinin, sonsuz küçük olandan (infinitesimal) başlaması ve sonlu uzunluklar, alanlar ve hacimler hakkındaki ifadelerin bütünleştirilmesi üzerine kurulması gerektiğini düşündü. Bu da, başka şeylere ilaveten, doğrunun bir eğriyle değiştirilmesini gerektirir; ikincisinin sonsuz küçüklükteki mesafelere dayanan bir tanımı varken birincisinin yoktur. Geleneksel görüş, iki nokta arasındaki bir doğru parçası bir bütün olarak alınabilirse bile parçalarının toplamı veya limiti olarak alınamayacağıydı. Riemann’ın görüşü ise doğrunun bu anlamda eğriden bir farkı olmadığı yönündeydi.[411]

Yani eğrilerin ölçülmesiyle ilgili bu vurgu, Riemann’ın programının muhakeme sırasından kaynaklanır; a) daha kesin olmak için sonsuz küçüklükler kapsamında çalışmalıyız, b) sonsuz küçüklükler kapsamında çalışabilmek sonlu uzunluklara ihtiyaç vardır; c) zira eğrilerin tanımlanması sonsuz küçüklükteki mesafelere ihtiyaç duyar. Bu akıl yürütmeyi takip edip Riemann’ın ne söylediğini anlamak için eğrilere uzunluk atfedilmesi prosedürünü hatırlamalıyız. Riemann burada eğrilerin uzunluk kullanılarak ölçülmesini önerir. Bu süreçte Riemann’ın Gauss’un eğri yüzeyleri incelediği ve “mekânın geometrisi, bizzat yüzeye

---

[411]Russell, B., *Source Book on Mathematics*, içinde, s.425. “Riemann, who was logically the immediate predecessor of Einstein, brought in a new idea of which the importance was not perceived for half a century. He considered that geometry ought to start from the infinitesimal and depend upon integration for statements about finite lengths, areas, or volumes. This requires, inter alia, the replacement about straight line by the geodesic: the latter has a definition depending upon infinitesimal distances, while the former has not. The traditional view was that, while the length of the straight line between two points could be defined as a whole, not as the limit or a sum of the bits. Riemann’s view was that a straight line does not differ from a curve in this respect.”

odaklanarak incelenebilir"[412] iddiasında bulunduğu *Therorema Egregium* (*Olağanüstü Teorem*) çalışmasını ilerlettiğini görürüz.

Gauss'un eğriler üzerine olan çalışmalarını daha önce incelemiştik. Riemann'ın eğrilerin uzunluklarla ölçülmesine odaklanan başlangıç noktası, Gauss'un *Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas* adlı çalışmasına dayandırılabilir. Bu çalışmada Gauss'un en önemli keşfi, evrensel olarak her yüzeyde metriksel bağıntıların o yüzeyin eğriliğiyle belirlenebilir olduğudur. Bu saptamayla Gauss, Öklidyen mesafe kavramını eğri yüzeyleri de kapsayacak şekilde genişletir. Yani Riemann'ın kendine biçtiği "mekânın metriksel bağıntılarının saptanabileceği en basit gerçekleri bulmak" amacının kökleri Gauss'un eğriler ve mekânın içkin geometrisi üzerine yaptığı çalışmalara dayanır.

Altı çizilmesi gereken bir başka önemli noktaysa "doğruların konumlarından bağımsız uzunluklara sahip olduğu, yani, her doğrunun diğer her bir doğruyla ölçülebileceği" varsayımıdır. Bu önermenin ne anlama geldiğini anlamak için Tazzioli'ye başvurabiliriz:

> Sezgilerimize yardımcı olması amacıyla ölçülecek çokluğun üç boyutlu bir uzaya yerleştirildiğini düşünelim. Şu halde eğer standart bir uzunluğa (mesela bir metre) sahip bir parçayı kullanıp ölçülecek çokluğun üstüne koyarsak ölçüm yapmak mümkün hale gelir; çokluğun boyutları bu uzunluk birimi esas alınarak ölçülebilir. Bu prosedür ancak "doğruların konfigürasyonlarından bağımsız bir uzunluğa sahip olduğu ve böylece her doğrunun başka her bir doğruyla ölçülebileceği" varsayımında bulunulursa kullanılabilir. Aslında, şayet bu varsayım yanlışsa, birim uzunluk hareket ettikçe uzayacak ve kısalacak ve haliyle mekânda çoklukların ölçümü imkânsızlaşacaktır; yani "katı cisim" – noktaları arasındaki mesafeler sabit olan bir cisim – hareket ederken şekil değiştirecektir.[413]

---

[412] Kline, M. (1972). *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, Oxford University Press , s.888

[413] Tazzioli,R. (2003). "Towards a history of the geometric foundations of mathematics Late XIXth century", Revue de Syntese, Volume124, Number 1, s.17. "In order to help intuition, one can image a 3-dimensional space where the quantity to be measured is placed. Measurement is then possible if one considers a segment with standard length (for example 1 meter long) and superposes it on the quantity; then the dimensions of the quantity are evaluated with respect to the unit of length. This procedure is allowed only on the assumption that 'lines have a length independent of their configuration, so that 'every line can be measured by every other'. In fact, if this hypothesis is not valid, the unit of length will become shorter or longer during its motion which amounts to saying that measurement of quantities in space would not be possible; that is to say, 'a rigid body'- a body in which distances between its points are constant- would change its shape during the motion."

Bu yüzden, “katı cisimlerin serbest hareketi” prensibi ve “eğrilere uzunluk atfeden” işlemler konferansın bu bölümünün temellerini oluşturur. Bu noktaların ışığında, sürekli manifoldlarda temel işlemimizin ölçüm olduğu ve bunun da “cisimlerin hareket ederken şekillerini korumaları”nı gerektirdiği görülebilir.

Burada Riemann’ın çıkış noktası “metrik belirlemesi konumdan, yani birden fazla şekilde ortaya çıkabilen bir özellikten bağımsız olmalıdır” [414]saptamasıdır. Bu önermeden ve iki nokta arasındaki mesafeyi ölçmek amacından yola çıkan Riemann “ilk akla gelen ve benim de burada takip etmeye niyetlendiğim varsayım ‘doğruların uzunluklarının durumlarından bağımsız olması, bu vesileyle her bir doğrunun diğer her bir doğruyla ölçülebilmesi’ olabilir” der. Eğer bu elde edilebilirse, “bir eğrinin büyüklüğü içkin bir özellik, yani, tek boyutlu bir manifold olarak eğrinin, dışında kalan noktalarla ilişkisinden bağımsız olarak sahip olduğu bir özellik olarak tespit edilebilir.”[415]

Yukarıdaki varsayımlardan yola çıkarak iki nokta arasındaki mesafenin tespitiyle, yani “doğrulara bir uzunluk” atfederek, “daha sonra diğer doğruların uzunluğu, doğruyu oluşturan ve doğrulardan meydana gelen eğrilerin en küçük üst sınırı ile belirlenebilir”[416] saptamasıyla başlıyoruz. Eğrilere uzunluk atfedilerek, eğrilerin doğrularla ölçülmesini mümkün kılınabilir. Buna rağmen Riemann, muhtemelen eğrilere uzunluk atfetmenin iki sonsuz yakınlıktaki nokta arasındaki mesafeyi ölçmek için esas olmasından dolayı, kendisini bununla sınırlamaz; zira mesafe ölçümündeki sınırlamalar genelliği koruyarak ilerlemesine engel olacaktır. Bu yüzden “tüm eğrilere bir uzunluk atfetmenin, önceden belli bir eğri sınıfının tanımlanmasına bağlı olmayan, örnek (uniform) bir metodun düşünülmesi”[417] önerisinde bulunur.

---

[414] “Determinations of measure require to be independent of location, a state of things which can occur in more than one way”.

[415] Torretti, R., (1978), *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*. Dordrecht: Reidel: D. Reidel Publishing Company, s. 91. “the length of an arc in a manifold will be determinable as an intrinsic property, i.e. as a property belonging to the arc as a one-dimensional submanifold, no matter what its relation to the points outside it.”

[416] Spivak, M., (1975). *A comprehensive Introduction to Differential Geometry,* Vol 2,Eds., s.156

[417] Spivak, M., (1975). *A comprehensive Introduction to Differential Geometry,* Vol 2,Eds., s.156

Riemann daha önce bir noktayı $x_1,x_{2,\ldots\ldots,}x_n$ koordinat adları olmak üzere, *n*-değişkenli parametreler $x_1,x_{2,\ldots\ldots,}x_n$ ile temsil etmişti (Bakınız; **1.3.** bir noktanın *n*-adet değişkenle temsilinin incelendiği kısım). *N* adet fonksiyonun oluşturduğu $(x_1(t), x_2(t)\ldots., x_n (t))$ kümesi *t*'nin bazı değerleri için bir eğri tanımlar. Eğri üzerindeki sürekli hareket *t* için *dt* tarafından ve her bir *x* için *dx* tarafından sağlanır.[418] Eğri boyunca ds^2 mesafesi (iki sonsuz yakınlıktaki noktanın arasındaki mesafenin ölçüsü olan "doğru çizgisi unsuru"nun (line element'in karesi) ikinci de $dx_1, dx_2 \ldots dx_n$ ikinci dereceden denklemiyle hesaplanabilir. Örneğin, Öklidyen 3-boyutlu durumda "Pisagor durumu"[419] yani $ds^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2$ ifadesi elde edilir.[420] Bu yüzden, üçlü yer kaplayan büyüklüklerde eğrilerin uzunlukları hesaplanabilir.[421]

Temel varsayım ve işlemleri bu şekilde özetledikten sonra, *Habilitationsvortrag*'ın bu kısmının detaylarına geçebiliriz.

Doğrunun çizgisi unsurunun matematiksel ifadesi

Burada Riemann, şayet bir doğru tam diferansiyellerin kareleri toplamının karekökü olarak ifade edilebiliyorsa, bu manifoldlun "düz" olarak nitelendirildiğini belirtir. Kendi sözleriyle; "eğer doğru çizgisi unsuru, yüzeylerde olduğu gibi, ikinci dereceden bir diferansiyelinin karekökü olarak ifade edilebiliyorsa, iki kez yer kaplayan bir manifolddaki her bir noktanın iç metriksel bağıntıları eğrilik ölçümüyle tanımlanabilir".[422]

Doğru çizgisi unsuru hayati öneme sahip olduğu için onu daha derinden incelemek faydalı olacaktır. Bunun için ilk olarak Riemann'ın bazı varsayımlarını hatırlatılacaktır, sonra doğrusal unsurun matematiksel ifadesinin üretimine bakıp, son olarak da doğrusal unsurun anlamıyla ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

---

[418] Gray, J. (1989). *Ideas of space.* Oxford: Clarendon press, s.142.
[419] A.g.e., s.142.
[420] A.g.e., s.142.
[421] A.g.e., s.142.
[422] "…in every point the interior metric relations of a doubly extended manifold are characterized by the measure of curvature if the line-element can be expressed by the square root of a differential expression of the second degree, as in the case with surfaces."

Doğru çizgisi unsuru doğuran varsayımlar

a. "Metrik belirlemenin konumdan, yani birden fazla şekilde ortaya çıkabilen bir özellikten bağımsız olması."

b. Üstteki varsayımdan hareketle Riemann "doğruların, durumlarından bağımsız uzunlukları olduğu ve bu sayede her bir doğrunun diğer her bir doğruyla ölçülebileceği" varsayımına ulaşır.

c. Konum belirlenmesinin büyüklüklerin belirlenmesine atfedilebilmesi, yani, *n*-boyutlu bir manifolddaki bir nokta $x_1, x_2, x_3,$ olarak *n* adet değişken büyüklükle ifade edilebiliyorken "*x* çokluklarının tek bir değişkenin fonksiyonları olarak verilebilmesi."[423]

Böylece problemin formülasyonu, değişken çoklukların birimler cinsinden ifade edilebildiği bir matematiksel ifadeyle doğruların uzunluklarının gösterilmesi olarak ortaya konmuş oluyor. Buna rağmen, Riemann kendini "d_x – yani *x*'teki değişimin – sürekli değiştiği" doğrularla sınırlar, zira sadece bu durumda "doğruların d_x çokluklarının oranlarının sabit olduğu unsurlara bölünmesi düşünülebilir".[424] Bu tanım, yukarıdaki sorunu "her bir nokta için o noktada başlayan ve bu yüzden *x* ve d_x çokluklarını içeren bir doğru çizgisi unsurunun genel ifadesini bulma"[425] indirgemeye olanak sağlar. Riemann'ın doğruların matematiksel ifadelerini oluştururkenki bir başka varsayımı ise "ikinci dereceden çokluklar yok sayıldığında, bir doğru çizgisi unsurunun uzunluğunun, tüm noktalarının sonsuz küçüklükte konum değiştirmesiyle değişmeyeceğidir. Bu varsayımla Riemann, doğru çizgisi

---

[423] a."Determinations of measure require magnitude to be independent of location; a state of things which can occur in more than one way"
b..Based on above assumption Riemann follows the assumption that "the length of lines be independent of their situation, that therefore every line be measurable by every other"
c..Then if the fixing of the location is referred to determinations of magnitudes, that is, if the location of a point in the n-dimensional manifold be expressed by n variable quantities $x_1, x_2, x_3,$ and so on to x_n, so that " quantities x be given as functions of a single variable".

[424] "…one can think of the lines as laid off into elements within which the ratios of the quantities d_x may be regarded as constant".
[425] "…set up for every point a general expression for a line element which begins there, an expression which will therefore contain the quantities x and the quantities d_x."

unsurundaki değişikliklerin d_x çokluklarındaki değişikliklere bağlı olduğunu göstermeye çalışır. Son olarak, Riemann doğru çizgisi unsurunu "işaret değiştirdiğinde değişmeyen ve gelişigüzel (arbitrary) sabitleri x çokluklarının sürekli bir fonksiyonu olan, d_x çokluklarının tek türel (homogenous), birinci dereceden bir fonksiyonu" olarak tanıtır. Böylece doğru çizgisi unsurunun diferansiyel ifadesini elde etmiş oluruz;

$$ds^2=\sum_{ij} g_{ij}\, dx^i\, dx^j \qquad \textbf{(1)}$$

Burada g_{ij} metrik (ölçüm)fonksiyonlarını, $x^1 ... x^n$ ise manifolddaki koordinatları ifade eder. Bu ikinci dereceden ifade şu şartları sağlar;

a) Simetri, ($g_{ij}=g_{ji}$)

b) Pozitif ($1\leq i, j \leq n$) belgin matris, ki bunlar Öklidyen mekânda mesafe ölçmenin temel şartlarıdır.

Doğru çizgisi unsuruyla ilgili çalışmalarında Riemann "doğru çizgisi unsurunun dördüncü dereceden bir diferansiyel ifadenin dördüncü kökü olarak ifade edilmesi" ihtimalini de değerlendirir. Buna rağmen, bu olasılığın peşinden gitmemeyi tercih eder zira "böyle bir çalışma ikinci dereceden bir doğru çizgisi unsurunun gerektirdiklerinden başka prensipler gerektirmeyecek ve dördüncü derece çok zaman almasına rağmen mekân teorisine nispeten az katkıda bulunacaktır". Buna ilaveten, Riemann'a göre dördüncü derecenin incelenmesinin sonuçlarını geometrik bir şekilde göstermenin bir yolu yoktur. Bu yüzden Riemann kendisini "doğru unsurları ikinci dereceden bir diferansiyel ifadenin karekökü olan manifoldlarla" sınırlama kararına varır.

Doğru çizgisi unsurunun böyle bir ifadesi, bizi mekâna ve geometriye yaklaşımımızla ilgili bazı önemli noktalara götürür. Şimdi bu noktalar üzerinde duracağız.

İlk olarak, sonsuz yakınlıktaki her nokta çifti arasındaki mesafe doğrusal unsurla belirlenir. Burada *x* ve d_x çoklukları alışılagelmiş koordinat eksenlerine denk gelmek durumunda değildir. Yani, bu şekilde *x* değişkenlerinin ifadesi dik koordinat sisteminden bağımsız hale gelir.

İkinci olarak, **(1)** doğrusal unsuru Gauss'un iki boyuttaki (yüzeylerdeki) nokta çiftleri arasındaki mesafeyi ölçmeye yarayan formülünün *n*-boyuta genellenmesini gösterir. Bu da yüzeyle ilgili gelişigüzel koordinatların seçilmesi ve **(1)**'de kullanılmasıyla gerçekleştirilir. Bu nokta bir sonraki kısmın (2.2) sonunda, *n*-boyutlu manifoldluğun incelenmesi esnasında ele alınacaktır.

Üçüncü olarak, **(1)** doğrusal unsuru "bir manifoldun metriğini, manifoldun sonsuz küçüklükteki bir parçasında belirterek belirlemek gibi tamamen yeni bir fikri ortaya atar."[426] Bu fikir iki yeni husus ortaya çıkarır. Birinci husus çalışmanın metodolojisiyle ilgilidir. **(1)** diferansiyel denklemi nokta analizi mümkün kılarak karmaşık işlemleri "mekânın veya zamanın sonsuz küçüklükteki bir unsuru"[427] çerçevesinde incelememize izin verir. Denklem **(1)** tek bir noktanın komşuluğu ile bir diğeri temel alınarak oluşturulduğu için, mekânın doğasının noktadan noktaya değişebilme olasılığını beraberinde getirir.

İkinci husus V.F. Kagan tarafından şu şekilde özetlenmiştir:

> İlaveten, bu, (1) bağıntısını temel alarak sonsuz sayıda geometrik sistem oluşturmanın genel metodunu sağlar. Doğru şekilde seçildiklerinde, bu sistemler ortaya koydukları geometrik temsiller sayesinde doğal fenomenlerin incelenmesinde kullanılacak gerçek araçlar olarak kullanılabilir. Bağıntı (1), manifoldu unsurları nokta olarak adlandırılan bir "mekân"a dönüştürür. Bir başka deyişle, bir şekilde (mesela (1) aracılığıyla) bir metrik tanımlanmış n-boyutlu bir manifold (kümesi), n-boyutlu bir mekân olarak adlandırılmaya başlanmıştır. N-boyutlu mekân terimi sıklıkla unsurları klasik geometridekilere benzer bağıntılarla bağlanmış n-boyutlu unsurlar için kullanılır.[428]

---

[426] Kagan. V.F. (2005). "Riemann's Geometric Ideas", *The American Mathematical Monthly,* Vol. 112, No. 1, s.81.

[427] A.g.y. s.81.

[428] Kagan. V.F. (2005). "Riemann's Geometric Ideas", *The American Mathematical Monthly,* Vol. 112, No. 1, s.81. "For another, it provides a general method for constructing an infinite variety of geometric systems based on the relation (1). Properly chosen, these systems can serve as genuine tools for the study of natural phenomena through their geometric representations. The relation (1) transforms the manifold into a "space" whose elements are called points. In other words, a manifold

Yani, **(1)** ifadesi her biri aynı manifold üzerinde uygulanan değişik metriklerle [429] (metrik) ortaya çıkan değişik geometrik sistemler oluşturmanın mümkün olduğunu ortaya koyar. **(1)**'in ışığında, manifold, seçilen metrik sistemine göre bir 'mekân' $a^2+b^2+c^2=d^2$ olarak tanımlanır. Buna ilaveten, bu *n*-boyutlu farklı "mekânlar"daki bağıntılar, klasik geometrideki bağıntılardan farklı değildir. Örnek olarak, 2 boyutlu klasik Öklidyen sistemde $a^2+b^2=c^2$ şeklindeki Pisagor Teoremi kullanılır, 3 boyutta, *n* boyutta ise $a^2+b^2+c^2+...=z^2$ halini alır.

Burada altı çizilmesi gereken nokta, iddianın Pisagor Teoremi'nin tüm Riemann manifoldları için geçerli olduğu değil, manifold kavramı sayesinde kimi bilindik Öklidyen teoremleri *n*-boyutta da uygulanabildiğidir. Örnek olarak, Pisagor Teoremi hem R^2 hem de R^n için geçerlidir.[430]

N-boyutun manifoldunu aramak

Üstteki şarttan hareketle ("doğru çizgisi unsuru ikinci dereceden bir diferansiyelin karekökü olarak ifade edilebilir") metrik bağıntıları incelenmiştir. Burada Riemann "belli bir noktada ve belli bir yüzey-doğrultusunda düzlükten sapma (eğiklik)" üzerinde yoğunlaşır. Riemann'a göre "*N*-boyutlu bir manifoldun belli bir noktasındaki ve o noktadan geçen bir yüzey-doğrultusundaki eğiklik metriğinin anlamlı olabilmesi için, o noktada başlayan en kısa doğrunun, doğrultusu verilerek tamamen saptanabilir olması gerekir." Metrik bağıntılarını belirlemek için ½ *n* (*n*–1) (doğrusal unsurun katsayıları) yüzey doğrultusunda bütün noktalarının eğikliğinin gelişigüzel verilmiş olması kabul edilebilir ve yeterlidir." Bu husus biraz daha açıklama gerektirir. Riemann daha önce *n*-boyutlu bir manifoldun yeterli bir temsili için n adet parametre fonksiyonuna ihtiyaç olduğuna değinmişti[431] Eğer koordinat sistemi değiştirilirse, *n* parametre fonksiyonu da değişir. Buna rağmen, doğru çizgisi

---

(set) of n dimensions in which a metric has been defined in some manner (by means of (1), say) came to be called a space of n dimensions. The term n-dimensional space is frequently applied to an n-dimensional manifold whose elements are connected by relations similar to those of classical geometry."

[429] Burada metrik ile g_i ve $g_{j'}$ seçilmesini anlatmak istiyoruz.

[430] Basit bir ifadeyle R^n de Pisagor Teoremini 2 boyutta, örneğin bir kağıt üzerinde uyguluyoruz. R^2 de ise 3 boyutta, örneğin bir küpte uyguluyoruz.

[431] *N*- boyutlu bir manifoltta bir nokta n-adet değişkenle temsil edilmişti

unsurunun matematiksel ifadesi *½ n (n+1)* katsayı içerdiği için, geriye yine *½ n (n–1)* katsayı kalacaktır. Buradan hareketle Riemann "bu yüzden eğer *½ n (n–1)* yüzey-doğrultusundaki her noktanın eğikliği verilirse, sürekliliğin metrik bağıntılarının bunlar kullanılarak" bulunabileceği sonucuna varır. Burada dikkat etmek gerekir ki g_i ve g_j (manifoldu tanımlayan metrikler) koordinat sistemi tarafından değil eğiklik tarafından sağlanır. Yani manifoldu temsil etmek için belli bir koordinat sistemine ihtiyacımız yoktur, "manifoldun metrik bağıntıları tamamen eğiklik tarafından belirlenir". Bu noktada Riemann'ın Gauss'un eğiklik temel kavramını genellediği görülür.[432]

Geometrik temsil

Riemann, iç metriksel bağıntıları değişmeden bükülerek düzleme dönüştürülebildikleri için rast gele silindirik veya konik yüzeylerin düzleme denk olduğunu göstermiştir.

Genel olarak düz manifoldlar

Daha önceki incelemeler neticesinde Riemann, metriksel bağıntıları saptamak için "her bir noktada, eğiklik ölçümleri birbirinden bağımsız ½ *n* (*n*–1) yüzey-doğrultusunda eğikliğin sıfır" olmasının yeterli olduğu sonucuna varmıştır. Eğikliğin her yerde sıfır olduğu bu manifoldlar "eğikliğin her yerde sabit olduğu manifoldların bir özel durumu olarak düşünülebilir". Bu saptamayı "sabit eğikliğe sahip manifoldların ortak özelliği şöyle de özetlenebilir: onların içindeki şekiller sündürülmeden hareket ettirilebilir" diyerek örneklendirir.

Bu yüzden, bu bölümün önemi, "Öklidyen mekânın tarifi"nin, bir yüzeyin eğikliğinin saptanmasıyla elde edilebilmesidir. Yani, manifold eğriliği kavramıyla Riemann Öklidyen mekânı (sabit, sıfır eğiklik) ve şekillerin metriksel bozulmaya uğramadan hareket ettirilebildikleri mekânları tarif etmeye çalışır. Sabit eğriliğe sahip (pozitif, negatif veya sıfır eğiklik) bir manifoldda bunun mümkün olduğu söylenebilir, çünkü

---

[432] Obrecht, A.Paul (2001). "Four out of Five Mathematicians Agree: Riemann is God", s.5.

herhangi bir noktadaki tüm eğrilik ölçümleri farklı herhangi bir noktadaki ölçümlerle aynı ve onlara eşittir.

Sabit eğrilik ölçüsünün sonuçları

Bu kısım esas olarak mekânın nasıl değişik metriksel sistemlere uygun olabileceğini gösterir. Yani Riemann farklı değerdeki sabit eğiklik ihtimalinin önünü açmaktadır; pozitifken küresel bir mekân elde edilirken, negatifken bizi farklı geometrilerin varlığı ihtimaline götüren sabit negatif eğiklik elde edilir. Bu noktayı şu şekilde özetler: "Daha az pozitif eğriliğe sahip yüzeyler, daha geniş küresel yüzeylerden iki geniş çemberin yarıları kadar bir kısmın kesilmesi ve kenarlarının birleştirilmesiyle elde edilebilir. Sıfır eğriliğe sahip yüzey ekvator üzerinde duran silindirik bir yüzey olacak; negatif eğriliğe sahip yüzeyler ise bu silindire dış teğet geçecek ve eksene bakan kısmı bir halkanın yüzeyinin iç kısmı şeklinde olacaktır."

Riemann'ın adımlarını takip ederek konferansın son kısmı olan ve Riemann'ın "küçükten büyüğe, yerel özelliklerden yer kaplayan büyüklüklere ve oradan da manifoldların bahsedilen evrensel özelliklerine ve açıkça matematikten fiziğe bir geçiş olan metodunun özeti"[433]olan "Mekâna Uygulanması" kısmına geçebiliriz.

"Mekâna Uygulanması"

Geometride varsayılan mekânın ölçü bağıntılarını saptamanın gerekli ve yeterli koşulları.

Bu kısmın başında Riemann "doğruların konfigürasyondan bağımsızlığı" ve "doğru çizgisi unsurunun ikinci dereceden bir diferansiyelle ifade edilebildiği" varsayımlarıyla yaptığı metriksel bağıntıların saptanması incelemesinin sonucunda mekânın metriksel bağıntılarının saptanmasının gerekli ve yeterli koşullarının elde edilebileceği yorumunda bulunur. Üç farklı durumdan söz eder;

---

[433] Gray, J. (1989). *Ideas of space.* Oxford: Clarendon press, s.143.

1. Bu koşulların “bir üçgenin iç açıları toplamı daima iki dik açıya eşittir” durumu için incelenmesi

2. Öklidyen bir varsayımın izinden gitmek; doğruların hem varlığı hem de gövdeleri konfigürasyondan bağımsızsa “o zaman eğiklik her yerde sabittir; o zaman da bir üçgenin iç açılarının toplamı herhangi bir üçgen için saptanırsa tüm üçgenler için de saptanmış demektir”.

3. Doğruların uzunluklarını konumdan bağımsız düşünmek. Bu, “konumdaki değişiklikler ve farklar kendi bağımsız birimleriyle ifade edilebilen karmaşık çokluklardır” demektir.

Empirik saptamaların sorgulanması

“Araştırma planı” bölümünün başında Riemann mekânı incelemek için aradığı gerçekliklerin “sadece empirik kesinliğe” sahip olduğunu belirtmişti. Bu yüzden empirik sınırlar içerisindeki olasılıklarını araştırmalıyız. Bu anlayışa uygun olarak, bir sonraki kısımda Riemann “bu varsayımlar nasıl, ne seviyede ve ne kadar deneyim tarafından güvencelenmiştir”[434] sorusuna yanıt arar.

“Genişlik bağıntıları” ve “ölçüm bağıntıları” arasındaki ayrım

Yukarıdaki soru bağlamında Riemann “muhtemel durumların ayrık bir manifold oluşturduğu ve deneyimin asla emin olamadığı, fakat kesinlik konusunda eksiği olmayan” “sadece genişlik bağıntıları” ile “muhtemel durumların bir süreklilik oluşturduğu, olasılığı çok yüksek dahi olsa, deneyime bağlı hiçbir belirlemenin hiçbir zaman kesin olmadığı” “ölçüm bağıntıları”nı birbirinden ayırır. Genişlik ve ölçüm bağıntıları arasındaki bu farkın önemi, “bu empirik saptamalar, gözlemin sınırlarının ötesine, ölçülemeyecek kadar büyük ve ölçülemeyecek kadar küçük olanlara genişletildiğinde” ortaya çıkar; zira “gözlemin sınırlarının ötesinde” ölçüm bağıntılarının “kesinliği daha da azalabilir, ama bu diğeri için geçerli değildir”.

---

[434] Riemann, B. (1854). “On the Hypotheses which lie at the Bases of Geometry”, çevr. William Kingdon Clifford [Nature, Vol.VIII.Nos. 183,184, ss.14-17,36,37].

“Sınırsızlık” ve “sonsuzluk” ayrımı

İkinci kısmın konusu, “mekândaki yapılar ölçülemeyecek büyüklüklere genişletildiği”nde görünür hale gelen “sınırsızlık” ve “sonsuzluk” ayrımıdır. Bu ayrım, yukarıda incelenen “genişlik özellikleri” ve “ölçüm özellikleri” ayrımı üzerinden okunabilir. Çağdaş terminolojide “genişlik bağıntıları” “topolojik bağıntılara”, “ölçüm bağıntıları” ise “metriksel bağıntıları”na tekabül eder. Bu farkı bir kürenin yüzeyini inceleyerek görebiliriz; bu yüzey sonsuz değildir ama sınırsızdır.

Riemann'a göre “mekânın sınırsız, üçlü yer kaplayan bir manifold olduğu” varsayımı “dış dünyayla ilgili tüm kavrayışlarımızca da teyit edilir”. Buna bağlı olarak da “mekânın sınırsızlığı empirik olarak dış dünyayla ilgili tüm deneyimlerimizden daha kesindir”.

Doğayı anlamada sonsuz küçüklüğün önemi

Bu kısım, doğayı anlamada sonsuz küçüklükler üzerine yapılan çalışmaların faydası üzerinde durur; “ölçülemez büyüklükteki alanlarla ilgili sorular, doğayı açıklamak için oldukça kullanışsızdır. Ölçülemez küçüklükler içinse durum farklıdır. Fenomenlerin nedensel bağlantılarına dair bilgimiz temelde onları sonsuz küçüklüklere kadar takip ederkenki hassasiyetimize bağlıdır”. Riemann da buradan “ölçümün sonsuz küçüklüklerdeki mekânsal bağıntıları bu yüzden kullanışsız değildir” sonucuna ulaşır.

Aşağıda, “geometrinin önermelerinin geçerliliği”, sonsuz küçüklük vurgusuyla incelenmiştir:

> Sonsuz küçüklükler için geometrinin önermelerinin geçerliliği sorunu, mekânda bağıntıların kaynağı sorununun bir parçasıdır. Aslında mekân felsefesi kapsamında ele alınabilecek bu soruyla bağlantılı olarak, yukarıdaki saptama kullanılabilir. Yani ayrık manifoldlarda metriksel bağıntılar manifoldun içkin bir özelliğiyken, sürekli manifoldlarda bu özellik dışarıdan sağlanmalıdır. O zaman ya mekânı oluşturan gerçek

> unsurlar ayrık bir manifold oluşturmalı, ya da metriksel bağıntıların kökeni o gerçekliğin haricinde, onun üzerinde etki eden kuvvetlerde aranmalıdır.[435]

Sonunda Riemann, şu ana kadar takip ettiği yolu "bu yol bizi fiziğin, mevcut durumun doğasına inmemize izin vermediği dünyasına götürür" şeklinde tasvir eder.

5.2. *Habilatitionsvortag*'ta Riemann ne diyor? Tarihsel-epistemolojik bir yorum

Newton, Leibniz ve Kant'ın da dâhil olduğu mekânın doğasına ilişkin tartışmalar ve Öklidyen postülatların doğasına ilişkin tartışmalar mekân tarihinde önemli yer tutar. Riemann mekânı 'yapılandırılabilir bir noktalar kümesi' (manifold) olarak alarak tanımlar ve mekânın sonsuz küçüklüklerdeki davranışlarını inceler. Ayrıca Riemann'ın ortaya koyduğu kavramın kökenleri hem Herbart'ın felsefesinde, hem de Gauss'un eğrilik çalışmaları ve karmaşık sayıları anlatırken kullandığı geometrik dilde bulunabilir. İlkinin felsefesi Kantçı felsefeden Leibnizci felsefeye bir geçiş addedilirken, ikincisi hem Öklidyen olmayan geometrinin öncülerinden biri, hem de mekân ve geometriye Kantçı bakışın rakiplerinden biri olmuştur.[436]

Riemann'ın *Habilatitionsvortrag*'ı sunarken Lobachevski ve Bolyai'nin Öklidyen olmayan geometrilerine hiç atıfta bulunmamış olması dikkat çekicidir.[437] Bu durum,

---

[435] Riemann, Bernhard, "On the Hypotheses Which Lie at The Foundations of Geometry", çevr. Simith,D.E.(1929) in *A Source Book in Mathematics*, s.425. "The question of the validity of the postulates of geometry in the indefinitely small is involved in the question concerning the ultimate basis of relations in space. In connection with this question, which may well be assigned to the philosophy of the space, the above mark is applicable, namely that while in a discrete manifold the principle of metric relations is implicit in the notion of this manifold, and it must come from somewhere else in the case of a continuous manifold. Either then the actual things forming the groundwork of a space must constitute a discrete manifold, or else the basis of metric relations must be sought for outside that actuality, in colligating forces that operate upon it."

[436] Yani bir anlamda denebilir ki 19.yy fiziksel geometrisi bir anlamda Kant'ın kendisi tarafından başlatılmış olmasına rağmen Kant'tan kopuşu sergilemektedir. DiSalle, R.(2006) *Understanding Space-Time*, Cambridge University Press, s.25.

[437]Riemann Lobachevski ve Bolyai'den bahsetmemesine rağmen büyük ihtimalle onların çalışmalarından haberdardı. Çünkü Lobachevski'nin çalışmalarından biri 1837 yılında Crelle'nin Dergisinde yayınlanmıştı.Bakınız; Bottazzini, U. Tazzioli, R. (1995). "Naturephilosophie and Its Role in Riemann's mathematics", *Revue d'histoire des math´ematiques,* s.27.
The Journal für die reine und angewandte Mathematik [Journal for pure and applied mathematics] 1826 yılında matematiksel çalışmalara derin bir ilgi duyan, bir mühendis ve yüksek memur olan A. L. Crelle'nin kurduğu ve editörlüğünü yaptığı bir dergiydi. Ferreiros, J. (2007). *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics.* Basel, Switzerland ; Boston: Birkhauser, s.8.
Buna ek olarak Riemann'ın Lobachevski be Bolyai'nin çalışmalarından Gauss aracılığıyla haberdardı.

Riemann'ın yeni bir aksiyomatik sistem üretmek veya "bağımsızlık ve tutarlılık gibi kavramların bir incelemesi"ne girişmek gibi bir amacının olmaması göz önünde bulundurulursa anlaşılabilir. Onun esas amacı, doğayı "içyapısı"ndan yola çıkarak yorumlamaktır.[438] Bu mantığa dayanarak, kavramını sadece matematiğe atıfla ortaya koyması mümkün değildir zira bu kavramın açıklanması için "matematikte dilsel veya sembolik bir çerçeve yoktur."[439] Bu yüzden Riemann'ın öne çıkardığı kavram teknik değil "yarı-felsefi bir şekilde" tanımlanmıştır.[440] *Habilitationsvortrag*'ın özel olarak da manifold kavramının değerlendirilmesi için önce Riemann'ın metodolojisinin genel hatlarını ve manifold kavramının geometride ve diğer alanlardaki pozisyonunu inceleyeceğim. Ardından felsefi bir mesele olan Riemann'ın apriori fikrinden kaçınması üzerine görüşlerimi sunacağım.

Riemann'ın metodolojisiyle ilgili değinilmesi gereken ilk husus onun *analitik* yaklaşımıdır. Riemann, çalışmalarında *analitik* yaklaşımı benimsemiştir zira "geometrik ispatlarda, algılarımız bizi yanıltarak açıkça belirtmediğimiz varsayımlarda bulunmamıza sebep olabilir"[441] Riemann mekânı yapılandırılabilir bir noktalar kümesi (manifold) olarak tanımlamıştır ve uzaklık fonksiyonuyla (doğru çizgisi unsuru) bir metrik tanımlayabileceğimizi göstermiştir. Riemann aynı zamanda bu işlemlerin ve yapıların geçerli olup olmadığının empirik sınırlar dâhilinde "olasılıklarını araştırmak" gerektiğini de belirtir. *Habilatitionsvortrag*'da uzaklık fonksiyonunu tanımlarken Riemann'ın diferansiyel denklemler kullandığı görülür. Bunun önü Gauss ve birtakım başka matematikçiler tarafından açılmıştı.[442] Riemann da onların yolunu takip etmiş ve diferansiyel metodlar olanağını genişletmiştir. Onun analitik yaklaşımı empirist epistemoloji ışığında daha kolay anlaşılabilir. Bu iki eğilimi, yani empirisizm ve analitik yöntemi, bir araya getirerek Riemann mekânı

Bakınız; Detlef, L. (1999). *Turning points in the conception of mathematics: Bernhard Riemann 1826-1866.* Boston: Birkhauser, s.224.

438 Ehm, Werner (2010). "Broad views of the philosophy of nature: Riemann, Herbart, and the "matter of the mind"", *Philosophical Psychology,* 23: 2, s.148.

439 Scholz, E. (1999a). 'The Concept of Manifold', 1850-1950, James, I. M. (1999) *History of Topology*, içinde s.26.

440 Scholz, E. (1992). "Riemann's new vision of a vew approach to geometry". D. F. L. Boi in, *1830-1930: a century of geometry* Berlin: Springer-Verlag, içinde, s.22.

441 Kline, M. (1972) *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times,* New York: Oxford University Press, s.889.

442 Öklidyen olmayan geometrilerin metodolojilerine göre incelendiği bölüme bakınız.

diferansiyel denklemlerle inceler ve bu vesileyle mekânın yerel özellikleri anlaşılabilir hale gelir ki bu da doğayı içyapısından yola çıkarak açıklama amacıyla örtüşür.

Riemann her ne kadar Öklidyen yaklaşıma ters düştüğü için "aykırı düşünür" gibi görünse de, aslında Öklidyen geometri genellemesini doğallaştırmıştır.[443] Yaptığı şey sadece Öklidyen geometrinin ayrıcalıklı rolünü aşındırmak olmuştur.[444] Bu doğallaştırma sürecinde Riemann'ın kullandığı mantık, yöntem ve sezgilerin "ekstra matematik" addedilip addedilemeyeceği ucu açık bir sorudur. Yine de, mekân kavramı ve geometrinin evrimi konularındaki konumu epistemolojik bir kırılma noktası olarak kabul edilebilir.[445] Hem Öklidyen olmayan geometrilerin keşfi açısından, hem de geometri tarihi ve diğer alanlar açısından Riemann'ın bakış açısı birçok şeyi değiştirmiştir.

Öncelikle Öklidyen olmayan geometrileri ele alalım. Manifold kavramıyla Riemann sadece "geometrik düşünceyi Öklidyen deli gömleğinden kurtarmış"[446] değil, aynı zamanda sorunu daha genel bir bağlamda ele alıp çözmüştür. Laugwitz bu noktayı şu şekilde açıklar: "Öklidyen olmayan geometri gerçekten bir yenilik getirmiş midir? İşin aslı Öklidyen inşa yöntemlerinin tamamen dâhilinde kalmıştır, fakat Riemann bu alanı terk etmiş ve mekânı tamamen farklı bir şekilde inşa etmiştir."[447]

Riemann'ın son derece genellenebilen manifold kavramı, mekân hakkındaki fikirlerimizi ve geometrinin statüsünü oldukça değiştirmiştir. Manifoldun işin içine girmesiyle ne Öklidyen ne de başka bir geometrinin diğerlerine göre bir önceliği olmadığı görülebilmiştir.[448] Bu yeni kavram çerçevesinde geometri öylesine tekrar temellendirilmiştir ki "Riemann sonsuz boyutlu mekânları incelemeye hazırdı.

---

[443] Detlef, L. (1999). *Turning points in the conception of mathematics,Bernhard Riemann 1826-1866.* Boston: Birkhauser, s.232.
[444] Manifoldu lokal olarak Öklidyen tanımlıyoruz.
[445] Scholz, E. (1992). Riemann's new vision of a view approach to geometry. D. F. L. Boi in, *1830-1930: a century of geometry* , Berlin: Springer-Verlag, içinde s.22.
[446] A.g.e., s.24.
[447] Detlef, L. (1999). *Turning points in the conception of mathematics, Bernhard Riemann 1826-1866.* Boston: Birkhauser, s.295.
[448] Riemann'ın tanımlamış olduğu doğru çizgisi unsuru ($ds^2=\sum_{ij} g_{ij}\, dx^i\, dx^j$)unda g_i and g_j lerin her farklı seçimi bize farklı geometriler tanımlayabileceğimiz farklı metrikler sağlamaktadır.

Öklidyen mekân ise öncelikli bir role sahip değildi, hatta hiçbir role sahip değildi… Geometri artık Öklidyen geometri ile başlamıyordu."[449] Geometrinin bu durumunu biraz daha derin irdelemeye çalışalım. Gauss'un ortaya attığı içkin ölçümden yola çıkan Riemann, Gauss'un görüşünü geliştirerek sabit eğriliğe sahip manifoldların değişik değerlerinin gündeme getirdiği olasılıklardan bahseder; eğrilik pozitifken küresel bir mekân elde edilirken, sürekli negatif eğrilik farklı geometrilerin varlığı ihtimalini ortaya çıkarır. Riemann'ın *Habilatitionsvortrag*'ının "matematik tarihi üzerindeki muazzam etkisi"[450] üzerine yazarken Gray şunlardan bahseder:

> Geometrik düşüncede ilk kez Öklid'den daha temel birimlerle düşünmek mümkün olmuştur, böylece Öklid'in tasavvurundaki muğlaklıklar ve problemler çözülebilir hale gelmiştir.[451]
>
> Ayrıca, Öklidyen olmayan, Öklid'inkilerin özelliklerinin birçoğundan mahrum olan ama yeni özelliklere sahip geometriler tasarlamak mümkün olmuştur ve bu teoriler şu anda fizikte ve özellikle görelilik kuramında sıkça kullanılır hale gelmiştir.[452]
>
> İlk defa, paralellik hakkında döngüsel gerekçelendirme yapmadan değişik geometrilerden bahsetmek mümkün hale gelmiştir.[453]
>
> Riemann'ın en büyük iddiası konum kavramı ve konumun ilişkilerinin uzaklık ve yön olarak ifade edilebilmesinin geometriye temel teşkil ettiği iddiasıdır. Bu temel kavramlardan klasik geometriyi yeniden kurmak ve kendi başına ilgili çekici olan, fizikte olduğu gibi, yeni geometriler icat etmek mümkündür.[454]

Daha önce gördüğümüz gibi Riemann'ın *Habilatitionsvortrag*'ı her biri daha önce bahsedilen "sihirli üçgen"e denk gelen üç kısma ayrılmıştır; felsefi bağlamda manifold kavramının üretimi, matematiksel bağlama doğru unsuru denklemi ve fiziksel bağlamda bunların mekâna uygulanması. Manifold kavramı, Riemann'ın

---

[449] Gray, J. (2008). *Plato's Ghost: The Modernist Transformation of Mathematics*, Princeton University Press, s.52.

[450] Gray, J. (1989). *Ideas of space.* Oxford: Clarendon press, s.141.

[451] A.g.e. s.141. "For the first time it becomes possible to think geometrically in terms more basic than those of Euclid, with the result that ambiguities and difficulties in Euclid's formulation can be resolved."

[452] A.g.e. s.141. "Further, it became possible to design geometries that were highly non-Euclidean, lacking many properties of Euclid's but having new ones of their own, and these new geometries now turn up frequently in physics, notably in relativity theory."

[453] A.g.e. s.145. "For the first time we have a way of saying what the various geometries are without making any question begging assumptions about parallels."

[454] A.g.e. s.145. "The profound suggestion of Riemann is that basic to geometry is the notion of position, and the relations of position can be expressed by means of direction and distance. From these basic notions it is possible to recapture all of classical geometry and to invent new geometries which might be of independent interest, for example in physics."

doğa-felsefesinin (nature philosophy) bir örneğidir. Bu noktada manifold kavramının Riemann'ın programının bileşenleri arasında merkezi bir yere sahip olduğunu hatırlamakta fayda vardır; *Habilitationsvortrag*, bu kavramın tanımıyla başlar. Yani, manifold kavramının ortaya atılması, onun matematiksel üretiminden önce gelir.[455]

Boi, makalesinde "yeni fikirler, özellikle Riemann'ınkiler, mekânın doğası ve geometrinin statüsüyle ilgili görüşlerimizi muazzam bir şekilde değiştirmiştir"[456] dedikten sonra Riemann'ın genel olarak mekân incelemesi ve spesifik olarak manifold kavramını ortaya atışı ile ilgili konumunu şu şekilde açıklar:

> Öncelikle bu bilimin bizzat konusu artık değişmiştir; Riemann üç boyutlu Öklidyen mekânı değil matematiksel olarak çok daha genel bir kavram olan manifold (Mannigfaltigkeiten) kavramını inceler. Bu noktadan sonra Öklidyen mekân, sabit eğiklikli üç boyutlu bir manifoldun sadece herhangi bir örneğidir. İkinci olarak, geometrik mekân matematiksel olarak üç yapısal seviyede belirlenir: topolojik-biçimsiz, metriksel, türevlenebilir ve topoloji-türevlenebilir. Bu yapıların her biri tamamlayıcı özellikler ekleyerek mekân kavramının zenginliğini artırır. Üçüncü olarak, Riemann manifold kavramını sadece matematiksel açıdan değil, aynı zamanda fiziksel ve diğer doğal fenomenleri daha bilinebilir ve anlaşılabilmesi açısından Öklidyen tasavvurdan daha genel ve güçlü addeder; Riemann için matematiksel ve özellikle geometrik yapıların fiziksel öneme sahip olduğu, geometriyi fiziksel evrenin idealize edilmiş bir görüntüsü olarak gördüğü de unutulmamalıdır.[457]

İlerlemeden önce, yukarıdakilerden hareketle Riemann'ın temel kavramının bazı özelliklerini listelemek faydalı olacaktır. Manifold kavramı; 1) üretkendir; hem Öklidyen hem de diğer geometrilerin varlığına izin verir ve her iki tip geometri de

---

[455] Gray, Detlef, L. (1999). *Turning points in the conception of mathematics,Bernhard Riemann 1826-1866.* Boston: Birkhauser, içinde, s.232.

[456] Boi L, (1992). "The "revolution" in the geometrical vision of space in the nineteenth century, and the hermeneutical epistemology of mathematics", Donald G. *Revolutions in Mathematics.* Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, içinde, s.192.

[457] Boi L, (1992). "The "revolution" in the geometrical vision of space in the nineteenth century, and the hermeneutical epistemology of mathematics" , Donald G. *Revolutions in Mathematics.* Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, içinde, s.192."First, the very subject of this science is no longer the same; he considers not three-dimensional Euclidean space but the mathematically much more general concept of manifolds (Mannigfaltigkeiten). Euclidean space could thenceforth be no more than a particular sort of three- dimensional manifold of constant-curvature space. Secondly, geometrical space is mathematically determined according to different levels of structure: the topological-amorphous, metrical, differentiable, and the topological-differentiable. Each of these structures adds complementary properties of increasing richness to the concept of space. Thirdly, Riemann saw the concept of manifolds as being more general and profound than the Euclidean concept, not only from the mathematical point of view but as making the phenomena of physics, and nature in general, more knowable and more intelligible. It must not be forgotten that for Riemann, mathematical- and particularly geometrical- structures also had an essentially physical significance, and that he basically conceived of geometry as an idealized image of the physical universe."

ondan türetilebilir, 2) açıklayıcıdır; fiziksel geometride, mesela Einstein'ın görelilik kuramında ve görüntüleme bilimi bu açıklayıcılığın örnekleridir (imaging science) 3) yalınlık ilkesine uygundur; tüm diğer varsayım ve yapılar manifold kavramının etrafında şekillenir.[458]

Riemann'ın ortaya attığı kavram yeni bir aksiyomatik sistem yaratma veya mevcut bir sistemi değiştirme çabasından ziyade "matematiksel ve fiziksel teori için yeni kavramsal olanaklar yaratmak amacıyla, yeni, daha zengin ve daha geniş geometrik kuramlar geliştirerek temellerin derinleştirilmesidir".[459]

Riemann'ın manifoldu sadece geometri alanında değil başka alanlarda da üretkendir. Her şeyin geometrileştirilebileceği fikrine dayandığı için fizik gibi diğer alanlarda da bir araç olarak işlev görür. Bir örnek vermek gerekirse, "genel görelilikte uzay, metriği maddenin varlığınca belirlenen dört boyutlu bir Riemann uzayı olarak tasavvur edilir; buna bağlı olarak Einstein'ın ünlü eşdeğerlik prensibinde metrik ve yerçekimi birbirine eklemlenir. $ds^2=\sum_{ij} g_{ik}\, dx^i\, dx^j$ formülü bir Riemann manifoldunun doğrusal unsurunu tanımlar; genel görelilikte g_{ij} yerçekimi alanını tanımlamak için kullanılır."[460]

Fiziksel araştırmalara bir başka örnek olarak Scholz'un Riemann'ı alıntıladığı şu sözlerine bakılabilir: "Gauss oldukça temkinliyken, öğrencisi B. Riemann daha kesin bir önermede bulunmaya cesaret etmiştir. 1854 tarihli ünlü *Habilitationsvortrag*'ının sonunda Riemann manifold kavramının "mekân"ın, yanı

---

[458] Herbart'ın merkezi kavramlarla çalışma önerisini ve Riemann'ın bu anlayışı manifold kavramını biçimlendirmesinde nasıl etkili olduğunu hatırlayınız.

[459] Ferreiros, J. (2006). "Riemann's Habilitationsvortrag at the Crossroads of Mathematics, Physics and Philosophy". J.Gray, Ferreiros, J. (Eds.), *The Architecture of modern mathematics*, New York: Oxford University Press., içinde s.69. Ferreiros "temellerin derinleştirilmesi" (deepening of foundations) ifadesini Hilbert'in kullandığı şekline atıfta bulunarak kullanır.

[460] Boi L, The "revolution" in the geometrical vision of space in the nineteenth century, and the hermeneutical epistemology of mathematics in Donald G. (1992) *Revolutions in Mathematics.* Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, içinde s.193. "…in general relativity space is conceived as four dimensional Riemannian space whose metric is determined by the presence of matter; consequently, according to Einstein's well-known principle of equivalence, metric and gravitation are fused. The formula $ds^2=\sum_{ij} g_{ik}\, dx^i\, dx^j$ defines the linear element of a Riemannian manifold; in general relativity the functions g_{ij} are used to describe the gravitational field."

fiziksel mekânın, yapısının belirlenmesinde kullanılmasını tartışır (sect. III.3). Soruyu nasıl düşündüğünü aydınlatan küçük bir yorum yapar:”[461]

> Eğer nesnelerin mekândan bağımsız olarak var olduğunu varsayarsak, o zaman eğiklik ölçümü her yerde sabit olmalıdır ve astronomik ölçümlerden hareketle bu değer sıfırdan farklı olamaz; en azından karşılık değeri, teleskoplarımızda görebildiğimiz alanın karşısında kaybolacağı bir alan olmalıdır.[462]

Manifoldun üretkenliğine ve açıklama gücüne başka bir alandan, görüntüleme bilimi ve teknolojisinden de bir örnek verebiliriz. Riemann'ın doğrusal unsuru sonsuz küçüklüklerin araştırılmasına imkân verdiği için renk uyaranlarının incelenmesinde kullanılmaktadır: “Riemann geometrisi, Öklidyen bir mekândaki koordinat sistemine benzer bir koordinat sistemini bir renk mekânında da kurabilmek için çok güçlü araçlar sunar. Özellikle iki renk uyaranı arasındaki renk farkı ikisi arasındaki jeodezik mesafeyle ölçülebilir.”[463] Açıkça görüldüğü gibi, felsefe ve geometri arasındaki etkileşim, fizik ve geometri arasındaki etkileşime dönüşür.

SONUÇ VE DEĞERLENDİRME:

Herbart, Gauss, Riemann ve Kant

Riemann'ın genel olarak geometri üzerine ve özelde manifold kavramı üzerine çalışmalarını anlamanın bir yolu da epistemolojisi üzerine düşünmektir. Riemann'ın duruşu Kant karşıtı anlayışın izlerini taşır. Bu anlayış, Riemann'ın iki akıl hocasına bağlanabilir. Daha önce incelendiği üzere, Herbart çalışmalarına Kantçı bir anlayışla başlamış olsa da sonunda Leibnizci felsefede karar kılmıştır. Herbart'ın Kantçı

---

[461] Scholz, E. (2005). “Curved spaces: Mathematics and empirical evidence”, ca. 1830 – 1923, *Oberwolfach Reports 2* (4), 3195—3198, s.3. “While Gauss remained very cautious, his student B. Riemann dared a more definite claim. At the end of his famous Habilatitionsvortrag of 1854 Riemann discussed the application of the concept of manifold to the determination of the structure of “the space”, i.e., physical space (sect. III.3). Just in passing he made a remark which sheds light on how he thought on the question.”

[462] Riemann, Scholz, E.(2005). “Curved spaces: Mathematics and empirical evidence”, ca. 1830 – 1923, *Oberwolfach Reports* 2 (4), 3195—3198,içinde s.3. “If one assumes existence of the bodies independent on the place, then the curvature measure is constant everywhere, and it follows from astronomical measurements that it cannot be different from zero; at least its reciprocal value had to be an area against which the area accessible to our telescopes had to vanish.”

[463] Toko Kohei, Jinhui Chao, ve Reiner Lenz (2010).“On Curvature of Color Spaces and Its Implications”, published in *CGIV-Fourth European Conference on Colour in Graphics, Imaging, and MCS/10 Vision 12th International Symposium on Multispectral Colour Science*, s. 393.

felsefeyi terk etmesinin temelinde, Riemann'ın da kurtulmaya çalıştığı apriorici tutum yatar. Hem Herbart hem de Riemann için, bilginin merkezinde deneyim yatar. Öte yandan bu Riemann'ın saf bir empirist olduğu anlamına gelmez. İnsan zihni, bilimsel bilgi edinmede etkin bir rol oynar.[464] Her iki düşünür de deneyimin ve zihinsel ilişkilendirmenin (mental association) önemli olsa da, bunların bilimsel bilginin yegâne kaynakları olmadığını, gerçekliğin tutarlı bir kavrayışının *derin düşünce* (*Nachdenken*) gerektirdiğini savunmuştur.[465] Bu yüzden, bilimsel bilgi "deneyimin sunduğu gözlemler ve derin düşüncenin sağladığı varsayım veya teorilerin etkileşimi" haline gelir.[466] Scholz'un Riemann'ın geometrisinin bilgi kuramını özetlediği şu sözlerine bakalım:

> Riemann'a göre teorik bilgi, özellikle matematik teorisi, bilimsel bilgi için kavramsal bir çerçeve oluşturduğu ölçüde, empirik bilgiye göre *göreli* veya *diyalektik apriori* demeyi tercih ettiğim bir rol oynar.
>
> -Bu bilgi apriori'dir; zira tümevarım, genelleme, hatta deneyimlerin idealize edilmesiyle bile elde edilemez. Bilinçli bir kavramsal yaratının ürünüdür ve empirik araştırmalar için teorik bir referans sistemi olarak işlev görür. Bu yüzden de empirik dünyanın anlaşılmasında şekillendirici bir rol oynar.
>
> - Öte yandan bu bilgi *göreli* ve *diyalektik*tir. Yapısı biricik olarak belirlenmiş değildir, yani kavramların üretiminde teorik tercihlere yer vardır ve bu tercihler mevcut empirik kanıtların ışığında yapılır. Zaman içerisinde sabit olmadığı kadar, tarihsel bir süreç olarak bilginin rafine edilmesi vesilesi ile de değişebilir. *Rafine etmek* (Riemann'ın tabiriyle) eski yapıyı, onun geçerliliğini tamamen ortadan kaldırmadan kavramsal açıdan değiştirme anlamına gelen pragmatik bir deyiş olarak okunabilir. Bu yüzden de her ne kadar daha genel bir dil kullanılmış olsa da, diyalektik olumsuzlamanın (*Aufhebung*) karakteristik özelliklerini paylaşır.[467]

---

[464] Ferreiros, J. (2006). "Riemann's Habilitationsvortrag at the Crossroads of Mathematics, Physics and Philosophy"., J.Gray, Ferreiros, J. (Eds.), *The Architecture of modern mathematics,* New York: Oxford University Press, içinde s.74.
[465] A.g.e., s.74.
[466] A.g.e., s.74.
[467] Scholz, E. (1992)."Riemann's new vision of a vew approach to geometry". D. F. L. Boi, *1830-1930: a century of geometry,* Berlin: Springer-Verlag, içinde s.32. "Theoretical knowledge, in particular mathematical theory, insofar as it constitutes a conceptual framework for scientific knowledge, plays, according to Riemann, a role of what I want to call a *relative* or *dialectical apriori* with respect to empirical knowledge. - This knowledge *is apriori,* because it is never to be derived by induction, generalization, or even straightforward idealization from experience. It is constituted by a deliberate conceptual creation and serves as a theoretical system of reference for empirical investigations and thus plays a formative role for the cognition of the empirical world. On the other hand this knowledge is *relative* and *dialectical.* Its structure is not uniquely determined, i.e. there is place for theoretical choices in the process of generation of the concepts, and these choices are done in consideration of the available empirical evidence. Just as little is it stable in time; it is subject to changes during the historical process of refinement of knowledge. *Refinement* (Riemann's term) may

Riemann'ın apriori fikrinden kaçınması[468] sadece Herbart'ın felsefesinden kaynaklanmaz. Gauss da mekân ve geometri üzerine Kant ile tam bir uyuşma içinde değildir. Her şeyden önce, Gauss Öklidyen olmayan geometrinin öncülerinden biriydi. Kant'a göre gerçek geometri Öklidyen olmalıyken, Gauss başka geometrilerin de mümkün olduğunu göstermenin – ki bu konuda başarılı olmuş olsa da "Boethçilerin yaygarasından"[469] korktuğu için çalışmalarını yayınlamakta tereddüt etmiştir – peşindeydi.

Kant saf zihni bilginin kaynağı olarak belirlemez; bilgi, deneyin sunduğu malzemenin zihnin kategorik fonksiyonu aracılığıyla bir senteze getirilişidir. Kant'a göre bilgi deneyle başlar ama deneyden gelmez. Deney bilginin verisini sağlar. Çünkü bilgi deneyle elde edilen içeriğin zihnin düzenleyici-sentezleyici edimini şart koşar. Bu düzenleme esnasında nesne empirik gerçeklikten saf görünün formları olan zaman ve mekân içinde alınarak zihin tarafından işlenir. Bu formlar deneyden gelmez, aprioridir. Görüldüğü gibi Kant için mekân ne doğuştan gelen zihinsel bir entitedir, ne de bizim dış dünyada nesnenin kendisine iliştirilmiş olarak bulduğumuz reel bir unsurdur. Saf görü olarak mekân, mümkün deneyin, şeyleri algılayabilmemizin koşulu olarak iş görür. Apriori (saf) görü olarak mekân, tüm duyusallığı olanaklı kılan duyusallık yetisinin bir formudur.

Kant'ın temel sorusu geometrinin aksiyomlarının epistemolojik statüsünün ne olduğu ile ilgiliydi. Eğer bu aksiyomlar analitik doğrular değilse sentetik olmak

---

be read as a pragmatic expression for a type of conceptual change which overcomes the old structure without destroying completely the latter's validity. It thus shares the characteristic features of dialectical negation *(Aufhebung),* even if presented in less elaborate language."

[468] Ferreiros, J.(2005). "Dogmas and changing Images of Foundations", *Philosophia Scientiae*, Cahier special *Fonder autrement les mathématiques,* G. Heinzmann, P. Nabonnand, eds. içinde s.3.

[469] Kline, M. (1972). *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, s.871. Gauss "The clamour of Boetians" ("Boetçilerin çığlığı") tabirini dogmatic düşünce yapısına sahip bir Grek kabilesine referansla kullanır. Gauss'un bu tabiri kullanmaktaki amacı özellikle Kant felsefesini destekleyenlerin tepkilerinden ne denli çekindiğini göstermektir.

zorundaydılar. Öte yandan, sentetik önermeler zorunlu bağlantılar içermemektedir. Fakat geometrinin aksiyomları düşünüldüğünde onlarda bir çeşit zorunluluğu hepimiz görürüz; örneğin iki boyutlu bir düzlemde iki nokta arasındaki en kısa uzaklığın bir doğru olduğunun dışında durumlar hayal etmek bizim için pek mümkün değildir. O halde, aksiyomlardaki bu zorunluluk apriori bir kaynağa sahip olmak durumundadır. Bu tür önermelerin temeli Kant için saf görüdür. Kant'a göre görünün iki saf formu vardır: zaman ve mekân. Bunlar sentetik a apriori bilginin kaynağını oluştururlar. Saf mekânın görüsü geometrinin, saf zamanın görüsü de aritmetiğin sentetik apriori bir bilim olmasına olanak verir.

Öte yandan Riemann, ustaları olarak nitelediği Gauss ve Herbart'ın Kant'ın mekân ve geometriye dair görüşlerini yorumlamalarının etkisinde kalmıştır. Riemann 'ustaları' olarak nitelediği Gauss ve Herbart'tan temel olarak etkilendiği noktaları şöyle özetleyebiliriz:

Riemann'ın Herbart'tan etkilendiği ve geliştirdiği temel noktalar:

1) Kant'ın apriori görü anlayışının tamamıyla reddi, görüngünün birlikte varolmasının düzeni olarak Leibniz'ci mekân fikrine yakınlık,

2) Matematiğin ve metodunun felsefi olarak ele alınması; matematiğin tüm alanlarında çalışırken başlangıç noktası olarak genel kavramların gerekliliğine duyulan inanç.[470]

Riemann'ın Gauss'tan etkilendiği ve geliştirdiği temel noktalar:

1) Gauss'un 1831 tarihinde "örtüşmeyen eşler" uslamlamasının Kant'ı "nihai" olarak yanlışladığını düşünmesi temelinde Kant'ın kısmi olarak reddi,

[470] Ferreiros, J. (2004)."The Magic Triangle: Mathematics, Physics and Philosophy in Riemann's Geometrical Work", s.3, (http://semioweb.msh-paris.fr/f2ds/docs/geo_2004/Jose_Ferreiro_2.pdf.)

2) Karmaşık sayılar, iki boyutlu manifoldlar ve topoloji arasındaki ilişki, “manifold” kavramı,

3) Diferansiyel geometrinin geliştirilmesi, Gauss eğriliği kavramı,

4) Gauss hayatının son dönemlerinde *n* boyutlu manifoldlar ve fiziksel mekân ile ilgili bir çalışma içindeydi dolayısıyla Riemann bu çalışmalardan Gauss’un dersleri, onunla kişisel konuşmaları ya da Weber aracılığıyla haberdardı.[471]

Riemann’ın Gauss ve Herbart’tan devraldığı ve geliştirdiği bu temel noktalar arasında göze ortak nokta olarak Kant karşıtlığı çarpmaktadır. Herbart’ın Kant karşıtlığı Gauss’tan daha açık bir şekilde görülmektedir. Bu nokta Gauss’un mekânın doğasına ilişkin felsefi argümanlardan haberdar olmakla beraber daha çok bir matematikçi olarak geometri ve mekânı ele almasıyla anlaşılabilirdir. Mekânın saf görünün formu olması ve geometrinin görü temelli bir aktivite olduğu şeklindeki Kant’çı iddialar karşısında Riemann’ın pozisyonu belirsizlikler içermektedir. Riemann’ı bu belirsizlikler çerçevesinde Kant ile taban tabana zıt düşünce çizgisinde oldukları fikri uyansa da durumun böyle olduğundan emin olmak için yeterli nedenimiz yoktur. Bu nokta aşağıda daha da geliştirilecektir ancak şimdilik şunu belirtmekle yetinebiliriz; Riemann’ın felsefi dayanağı Herbart’tır. Herbart kendi mekân felsefesinde Kant yerine Leibniz felsefesine yakındır, dolayısıyla Kant’ın felsefesi Riemann’ın çalışmalarında Herbart yoluyla daha en başında dışarıda bırakılmıştır.[472] Riemann’ın manifold kavramı ile mekânı kavramada, mekânı düşünmenin olanağını genişleterek kendine özgü bir katkısı vardır. Riemann’ın bu katkısı Gauss kaynaklı matematiksel ve teknik araçlarla Herbart kaynaklı matematiksel araştırmanın yönü ile ilgili doğru bir kavrayışa ulaşmasının verimli bir sentezin sonucudur. Bu katkının daha iyi anlaşılabilmesi için *görü* ve *olanaklılık* temelinde Kant ile Riemann’ın ayırıcı çizgilerini belirlemeye çalışacağım.

---

[471] A.g.y., s.4.
[472] A.g.y., 2 numaralı dipnot, s.3 ve Ferreiros, J.(2011). Kişisel diyalog.

Bu belirleme için Riemann'ın manifold kavramını ve geometrisinin temel *hipotezlerini* açıkladığı *Habilitationsvortrag*'ını kısaca ele almalıyız. Bu derste Riemann mekândaki yapısallaştırmalardan önce mekânın yapısallaştırmasını sorgular ve mekânın topolojik özelliklerinin nasıl belirlenebileceği üzerine odaklanır. Bu amaçla *Habilitationsvortrag* düşünce yapısının üç temel ayağına göre felsefe, matematik ve fizik olarak bölümlenmiştir.

Felsefe bölümü manifold hakkındaki genel fikirler, metrik ve topolojik özellikler arasındaki ayrım, manifoldun boyutu kavramı ve *n* boyutlu manifoldun ölçeklendirilmesi gibi konulardan oluşur.

Matematik bölümü diferansiyel geometrinin manifold üzerine uygulanması, doğru çizgisi unsurunun diferansiyel formunun verilmesi, Gauss'un eğiklik kavramının genelleştirmesi, değişken eğriliğe sahip yüzeyler ve geometrik örneklerle sabit eğriliğe sahip yüzeylerin gösterimi gibi konulardan oluşur.

Fizik bölümü mekânın metriklerinin empirik olarak tayin edilebilmesi için kabuller, fiziksel mekânın çok geniş ölçekteki özellikleri ve fiziksel mekânın çok küçük ölçekteki özellikleri gibi konulardan oluşur.

Riemann'ın düşünce yapısının tüm mimarisinin ilk basamağı manifold kavramının kurulmasıdır. Bu kavram ona mekânı kavramsallaştırırken ve deneyimlerken bir özgürlük sunar. Riemann düşünce dizgesinde felsefe, matematik için manifold kavramını üretir ve bu kavram temelinde mekân fiziksel olarak sorgulamaya tabi tutulur. Bu dizge onun *Habilitationsvortrag*'ında açık bir şekilde görülür. Riemann'ın manifold kavramı, içinde felsefe ve matematiğin olduğu kritik bir kavram analizi sonucu inşa edilir. Riemann'ın manifold kavramı, dış dünyadaki belli tipte sürekliliklerden yola çıkılarak (bu noktada Herbart'ın dış dünyadaki sürekliliklerden yola çıkarak mekânı kavrama önerisi düşünülmelidir) oluşturulan ve mekân kavrayışımızı genişletecek, empirik gözleme de olanak tanıyacak şekilde tanımlanmıştır. Riemann'ın araştırma programının temel *hipotezleri* şunlardır;

1) Mekân, sürekli, ayırt edilebilir manifolddur.

2) Doğruların uzunlukları mekândaki konfigürasyonlarına bağlı değildir, dolayısıyla her bir doğru bir diğeri ile ölçülebilir.
3) Doğru çizgisi unsuru ikinci dereceden bir diferansiyelin karekökü olarak ifade edilebilir.
4) Katı cisimler metrik deformasyona uğramadan serbestçe hareket edebilirler.[473]

Bu temel *hipotezlerin* ışığında, Riemann'ın *Habilitationsvortrag* boyunca peşinde olduğu şey, aksiyomatik bir sisteme ulaşmak ya da var olan aksiyomatik sistemlerin bir hesabını vermek değildir. Onun için, bu sistemlerin aksiyomlarının ve bu aksiyomların yardımıyla ulaşılan sonuçların *zorunlu* doğrular olup olmadığı sorusu ucu açık bir sorudur. Bu sorunun yanıtı bu aksiyomlar arasında işlem yapılarak verilemez. O geometriyi üzerinde mantık aracılığıyla işlemler yapılacak bir sistem olarak görme eğiliminde değildir. Riemann empirik sorgulama ile olası doğruların ortaya konabileceği bir geometri üzerine düşünmeyi hedeflemektedir.

Bu hedef doğrultusunda Riemann onlar yardımıyla mekânın metrik ilişkilerinin kararlaştırılabileceği "en temel" gerçeklikleri bulmayı hedefler. Bu gerçeklikler tüm gerçeklikler gibi "zorunlu değil ama yalnızca empirik kesinliktedir, onlar hipotezlerdir." Burada Riemann'ın neden *aksiyom* yerine *hipotez* sözcüğünü kullanmayı tercih ettiğini anlıyoruz. Riemann için aksiyom Kant ve eski geleneğin anladığı anlamıyla doğruluğu kendisi ile verili olan önermeler anlamına gelmektedir.[474] Riemann aksiyomların bu şekilde anlaşılmasından duyduğu rahatsızlıkla düşüncenin olanaklarının genişletilmesi yolunda aksiyomların fiziğe uygulanma kısmında artık *hipotezlerle* çalışmaya başlar. Riemann'a göre mekân anlayışımızda gitgide daha sınırlayıcı olacak şekilde yeni hipotezler kurmak için *n* boyutlu manifold genel kavramıyla başlamamız gerekir, bu yolla saf bir topoloji ile başlayıp Öklidyen mekânın somutlaştırılması sonucuna ulaşırız. Böyle bir çalışmada *n* boyutlu manifold olarak mekân kavramı topolojik bir karakterdedir yani henüz

---

[473] Ferreiros, J. (2004)."The Magic Triangle: Mathematics, Physics and Philosophy in Riemann's Geometrical Work", s.6. (http://semioweb.msh-paris.fr/f2ds/docs/geo_2004/Jose_Ferreiro_2.pdf.)
[474] A.g.y., s.5.

içinde sürekliliğin tanımlandığı soyut elementlerin (mekânın noktaları) seti olarak alınır. Dolayısıyla herhangi bir mekân görüsüne dayanmaz.[475]

Mekân görüsünden bağımsız yürütülen bir çalışmanın Kant karşıtı olduğu düşünülebilir. Bu düşünceden yola çıkarak Riemann'ın *Habilitationsvortrag*'ı aracılığıyla, onun Kant'a karşı yazılmış olduğunu varsayan bir okuma yardımıyla, Kant ve Riemann'ın mekân ve geometri anlayışlarının farklarını görmek deneysel olmak dışında öğretici de olacaktır. Gregory Nowak[476] Riemann ile Kant'ı karşı karşıya getirir. Bildiğimiz gibi Kant Öklidyen geometriyi fiziksel mekânın sentetik apriori doğrular setinin bir örneği olarak görür. Burada fiziksel mekânın altını çizmek önemlidir. Kendisi aracılığıyla mekânın kavramlarını kendimize gösterdiğimiz saf görü olarak mekân vardır. Biz boş mekânı düşünebiliriz ama mekânın olmamasını düşünemeyiz dolayısıyla bu görü görüngülerin olanağının koşuludur dolayısıyla aprioridir. Bu noktada Nowak, Kant'ın *transendental idealite*'ye *empirik realite'*nin özelliklerini vererek, saf görüyü, olağan deneyimin fiziksel mekânıyla özdeşleştirdiğini iddia eder.[477] Nowak'a göre Kant'ın *mantıki olanaklılık* ile karakterize edilebilecek bir başka mekânı daha vardır. Dolayısıyla Nowak'a göre Kant için *görülenen*, *fiziksel* ve *mantıki* olanaklı mekân vardır ve Kant'ın amacı görülenebilir ve fiziksel mekânı eşleştirip mantıki olanaklı ya da aksiyomatik mekânı fiziksel mekân hakkında bir şey söylemediği ve ilk ikisi ile herhangi bir ilişkisi olmadığı için dışarıda bırakmaktır. Kant için görülenen mekânın önermeleri sentetik apriori, fiziksel mekânların önermeleri ise *aposterioridir*.

Öte yandan Nowak'a göre Riemann'ın stratejisi Kant'tan farklıdır. Ona göre Riemann'ın amacı görülenen mekânla mantıki olanaklı (aksiyomatik) mekânı eşleştirip fiziksel mekânı dışarıda bırakmaktır.[478] Fiziksel mekân mantıki olanaklı ve

[475] Ferreiros, J. (2004)."The Magic Triangle: Mathematics, Physics and Philosophy in Riemann's Geometrical Work", s.6. (http://semioweb.msh-paris.fr/f2ds/docs/geo_2004/Jose_Ferreiro_2.pdf.)
[476] Nowak, G. (1989). Riemann's Habilitationsvortrag and the synthetic apriori status of geometry, *The History of Modern Mathematics Volume: 1*, ed. David E.Rowe-John McCleary, Academic Press, içinde ss. 17-48.

[477] Nowak, G. (1989). "Riemann's Habilitationsvortrag and the synthetic apriori status of geometry", *The History of Modern Mathematics Volume: 1*, ed. David E.Rowe-John McCleary, s.20.
[478] A.g.y.

görülenebilir olanın kombinasyonu ile modellenebilir.[479] Fiziksel mekânın nasıl modellendiği *sentetik* aposteriori önermelerle, görülenen aksiyomatik mekânlar ise *analitik apriori* önermelerle belirlenir.[480] Riemann *Habilitationsvortrag*'ın başlarında öncelikle genel mekân kavramının yani "manifold"un araştırılması gerektiğine vurgu yapar. Riemann'a göre bu araştırmanın sonuçları fiziksel mekânı modellemek için kullanılmalıdır. *Habilitationsvortrag*'ın üçüncü bölümünde mekânın üç farklı durumu (sıfır, pozitif, negatif eğikliğe sahip manifoldlar) değerlendirilir. Farklı metriklerin aynı mekânda uygulanabilmesi ve çoklu uzamlı manifold bizim görümüze açıktır. Çok boyutlu yer kaplayan manifold metrik ilişkilere karar vermemizi sağlayan farklı niteliksel varsayımların kullanılmasıyla tasavvur edilebilir. Ancak fiziksel mekânın geometrisine karar veren niteliksel varsayımlar çok boyutlu yer kaplayan manifoldun zorunlu koşulu değildir; üç boyutlu manifold üzerinde farklı metrik ilişkilerin kurulabilmesine olanak vardır. Fiziksel mekânın modellendiği geometrinin niteliksel varsayımları *aposteriori* önermelerdir.[481]

Riemann niteliksel olan uzam özellikleri (topolojik özellikler) ile mesafe ile ilgili olan ölçüm özelliklerinin (metriksel bağıntılar) ayırımını yapar. Bu ayrım temelinde mekânın geometrisinin yani mekânın metriksel ilişkilerinin belirlenmesinin mekân kavramının ayrılmaz bir parçası olduğu fikrine karşı çıkar. Mekânsal nesneler manifold olarak yani henüz metrik ilişkiler dolayısıyla bir geometri kabul etmemiş haliyle alınırsa, aynı manifoldun üzerinde farklı metriksel ilişkilerin kurulabileceği dolayısıyla farklı geometriler kurulabileceği böylece fiziksel mekânın üç boyutlu manifoldların yalnızca bir örneği olduğu gösterilebilir. Bu Riemann için mekânın geometrisinin aksiyomlarının genişlik özellikleri ile belirlenemeyeceği, deneyimle belirlenebileceği anlamına gelir. Metrik belirlenimlerin aksiyom sistemleri ile belirlenmesinde ise Öklid sistemini en temelde yatan aksiyom sistemi olarak görür. Ancak fiziksel mekânın tasvirinde Öklid'in bu aksiyom sistemi de dahil olmak üzere hiçbir sistem mantıksal olarak *zorunlu* değil, empirik olarak *olumsaldır*. Yani

---

[479] A.g.y.
[480] A.g.y.
[481] A.g.y., s.24.

Riemann'ın dert edindiği mesele mekân kavramı ile fiziksel mekânın aksiyomları arasındaki ilişkinin doğasıdır:[482]

> Mekânın sınırsız üç boyutlu manifold olması dış dünyayı her kavrayışımızda kullandığımız bir *varsayımdır.* Bu varsayım sayesinde gerçek algının alanının her anı sağlanır ve peşinde olunan nesnelerin olası mekânları kurulur ve bu uygulamalarda bu varsayım sürekli olarak teyit edilir. Sonuç olarak, mekânın sınırsız oluşunun dış dünyanın herhangi bir deneyiminden daha kesin empirik bir kesinliği vardır. Ancak mekânın sonsuzluğu herhangi bir şekilde bundan çıkmaz.[483]

Riemann'ın burada mekânın algıdaki rolünden bahsetmesi Kant ile bir karşılaştırmayı gerektiriyor. Kant için mekânın sınırsız üç boyutlu manifold olması *apriori görü* iken, Riemann için bir *varsayımdır*.[484] Riemann için bu varsayım deneyimde temellenir yani *aposterioridir*. Kant için ise deneyden bağımsız yani *aprioridir*.

Mekân kavramı ile fiziksel mekânın aksiyomları arasındaki ilişkinin doğasının kavranması kısmında Riemann'ın görüden bahsettiği noktalar da vardır. Örneğin Riemann'ın şu sözlerine bakalım:

> Birkaç boyutlu manifold kavramı bizim mekân görülerimizden bağımsız olarak var olur. Mekân, düzlem ve çizgi yalnızca iki, üç ve bir boyutun manifoldunun *en görülenebilir* [*anschaulichste*] örnekleridir. Mekân görüsüne en ufak bir şekilde sahip olmaksızın biz yine de tüm geometriyi geliştirebiliriz.[485]

---

482 Nowak, G. (1989). "Riemann's Habilitationsvortrag and the synthetic apriori status of geometry", *The History of Modern Mathematics Volume: 1*, ed. David E.Rowe-John McCleary, içinde s.25.

483 Riemann, B. (1929). "On the Hypotheses Which Lie at The Foundations of Geometry", çevr. Simith,D.E in *A Source Book in Mathematics* içinde, s.423. Vurgu eklenmiştir. "That space is an unlimited, triply extended manifold is an assumption applied in every conception of the external world; by it at every moment the domain of real perceptions is supplemented and possible locations of an object that is sought for are constructed, and in these applications the assumption is continually being verified. The unlimitedness of space has therefore a greater certainty, empirically, than experience of the external. From this, however, follows in no wise its infiniteness…"

484 Nowak, G. (1989). "Riemann's Habilitationsvortrag and the synthetic apriori status of geometry", *The History of Modern Mathematics Volume: 1*, ed. David E.Rowe-John McCleary, içinde s.25.

485 Riemann, a.g.y., içinde s.31. "The concept of a manifold of several dimensions exists independently of our intuitions in space. Space, the plane, and the line are the only the clearest [*anschaulichste*] examples of a manifold of two, three, or one dimensions. Without having the least spatial intuition, we would nevertheless be able to develop all of geometry." Alıntının orijinali için bakınız; Scholz, E.(1982). "Riemanns frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie", AHES 27, s.228

Nowak bu alıntıda geçen "en görülenebilir" vurgusuyla Riemann'ın görülenebilirliği derecelendirdiğini ve görülenen mekân ile aksiyomatik mekânı eşleştirdiğini vurgular.[486] Nowak'a göre Riemann görülenebilirliği dereceleyerek mekân, düzlem ve çizgiden farklı manifoldların görülenebileceğini göstermeye çalışmaktadır. Bu sayılanlar matematikçinin görüsü ile en net şekilde kavrayabildiği manifoldlardır. Nowak Riemann'ın mekân görüsü olmaksızın geometriyi kurma fikrini fiziksel mekân ile "Raum"u, genel mekân kavramı ile de manifodları eşleştirmesi bağlamında anlaşılabileceğini iddia eder.[487] Nowak'a göre Riemann diğer manifoldların görülenemeyeceğini söylememekle, diğer manifoldların fiziksel mekânın görüsünden çıkarsadığımız yargılar olmadan görülenebileceğini söylemektedir.[488]

Yine mekân görüsü olmaksızın mekânın kavranabileceğini ve geometri yapılabileceğini Riemann şu sözleriyle vurgular:

> Düz çizgileri ilgilendiren geometrideki tüm önermeleri düz çizginin bu tanımından çıkarsayabilirim. Açıktır ki biri mekânsal görüden en ufak bir yardım almaksızın ilerleyebilir. Geometrinin bu şekilde ele alınışını ya da üç boyutlu manifoldlar teorisini kullanarak alışılageldik geometrinin mekân görüsünden alınan tüm aksiyomlar (mesela Öklid'in ilk aksiyomu olan iki nokta arasından yalnızca düz bir çizgi çizilebilir vb…) atılabilecektir.[489]

Mekân görüsünden vazgeçmeye dair bu güçlü vurgulara rağmen Riemann bu sözlerinin hemen ardından geometrinin bu şekilde ele alınışının, ilginç olsa dahi bu bakış açısının, yeni ilkeler bulunamayacağından, çok verimli olamayacağını, mekânın temsilinde basit ve açık olan şeylerin zor ve karmaşık bir hal alacağını

---

[486] A.g.y.
[487] A.g.y.
[488] A.g.y.
[489] Riemann, Nowak, G. (1989). "Riemann's Habilitationsvortrag and the synthetic apriori status of geometry", *The History of Modern Mathematics Volume: 1,* ed. David E.Rowe-John McCleary, içinde s.30. "From this definition of a straight line I would be able to derive all the propositions which occur in geometry that concern straight lines. It is clear that one can proceed in this way without the least appeal to spatial intuition. Using this treatment of geometry or the theory of manifolds of three dimensions, all axioms which in the usual treatment of geometry are borrowed from spatial intuition would be dropped, as for example, that through two points only one straight line is possible, the first axiom of Euclid, etc…". Alıntının orijinali için bakınız; Scholz, E.(1982). "Riemanns frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie", AHES 27, s.229.

dolayısıyla mekân görüsünün gerekli olduğunu belirtir[490] Bu durum görünün mekân ve geometrideki rolüne dair karışık bir tablo resmetmektedir. Dolayısıyla denebilir ki Riemann manifold kavramı temelinde yükselen bu yeni bakış açısının getirdiği yeniliklerin temelinde yatan tek bir topolojinin farklı metrikleri kabul etmeye hazır olduğu ve Gauss'çu diferansiyel geometrinin genellenebilmesi için tatmin edici bir zemin hazırladığının farkında değildi.[491]

Riemann mekân görüsü olmaksızın düşünülecek soyut bir geometrinin faydalı olamayacağını, ancak geometrik hayal gücünün çok boyutlu manifoldları anlamak için bir araç olarak kullanılabileceğini savunur:

> Hep karşı doğrultuda ilerledik, ve ne zaman matematikte, tıpkı hayali büyüklükler kuramı içerisindeki belirli integraller öğretisinde olduğu gibi, çok boyutlu manifoldlarla karşılaştıysak, uzamsal görülerimize başvurmak zorunda kaldık. Şunu biliyoruz ki, bu konu hakkında ne zaman doğru bir bakış açısına kavuşacaksak, işte o zaman en önemli noktalar aşikar olacak.[492]

Riemann'ın görünün işlevine ilişkin farklılaşan düşüncelerini Riemann'ı kendi çağı içerisinde düşünerek ve düşünce dizgesinde bir geçiş dönemi yaşadığını yadsımazsak anlamlandırabiliriz. Riemann'ın çağının merkezi eğilimi matematiksel analizde geometri ve görüye başvurmaktan kaçınmaktı. Bu genel eğilime zıt biçimde, bilinen geometrik fikirleri soyut olarak yeniden formüle etme eğiliminde olan bir gelenek daha vardı ve Riemann bu geleneğin içinde yetişmişti.[493] Dolayısıyla Riemann çalışmalarında matematiksel nesne ve ilişkileri soyut bir şekilde ifade etmekten

---

[490] Tazzioli, R. (2003). "Towards a history of the geometric foundations of mathematics Late XIXth century", *Revue de Synthese*, Volume 124, Number 1, s.16. Riemann, Ferreiros, J. (2007). *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics.* Basel, Switzerland ; Boston: Birkhauser, içinde, s.58. Scholz, E.(1982). "Riemanns frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie", AHES 27, s.229.

[491] Ferreiros, J. (2007). *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics.* Basel, Switzerland ; Boston: Birkhauser, s.58.

[492]Riemann, Ferreiros, J. (2007). *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics.* Basel, Switzerland ; Boston: Birkhauser, içinde, s.59. "One has thus always followed the opposite path, and every time that one has stumled upon manifolds of many dimensions in mathematics, as in the doctrine of definite integrals within the theory of imaginary magnitudes, one has had recourse to spatial intuition. It is well known, how one thus wins a true view of the matter, and how only in that way the essentials points become evident." Alıntının orijinali için bakınız; Scholz, E.(1982). "Riemanns frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie", AHES 27, s.229.

[493] Ferreiros, J. (2007). *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics.* Basel, Switzerland ; Boston: Birkhauser, s.58.

kaçınmıyordu. Buna ek olarak Riemann çalışmalarının felsefi temelini Herbart'a dayandırmıştı. Riemann Herbart etkisiyle mekân görüsü olmaksızın mekânı kavrayabileceğimiz ve geometri yapabileceğimiz vurgusu temelinde Kant'ı ve mekân görüsünü çalışmalarında daha en başından dışarıda bırakmıştı. Dolayısıyla burada Riemann'ın Kant'ın ve mekânın görüsünün karşısında yer aldığını iddia etmek için yeterli nedenimiz yoktur.[494] Onun kavramsal geometrisinin Kant karşıtı olduğunun ileri sürülebilmesi için daha güçlü dayanaklar gereklidir

Değerlendirme

Riemann görülenen mekânı yalnızca bir alternatif olarak ele alırken kendi döneminin geometri anlayışında mekân görüsünün doğası üzerine bir tartışma içinde olduğu düşünülebilir. Bu şekliyle ele alındığında Riemann'ın mekân meselesinde görünün doğası ve işlevi ile ilgili kendi görüşlerini sunmaktan ziyade döneminin eğilimleri ile hesaplaşıyor olduğu da ihtimal dâhilindedir.[495] Sonuç olarak Riemann çoğu alıntıda adeta Kant'ın mekân görüsüne karşı konuşuyormuş gibi görünse de burada görü ile tam olarak Kant'ın mekân görüsünü kastettiği, dolayısıyla karşısında yer aldığı görünün Kant'ın görüsü olduğu net değildir.[496] Bu anlamda Nowak'ın Riemann'ın *Habilitationsvortag*'ı Kant'a karşı mekân görüsünü eleyecek şekilde yazdığı yönündeki değerlendirmeleri eksik görünmektedir.

Riemann ile Kant'ı karşı karşıya getirdiğimizde her ikisinin de, modern terimlerle konuşmamız gerekirse, farklı paradigmalardan mekân ve geometri felsefesini ele aldıkları ortaya çıkmaktadır. Kant mekânı zaman ile beraber görünün saf formu olarak, fiziksel mekânın üç boyutlu geometrisinin önermelerini sentetik apriori olarak belirler. Öte yandan Riemann'ın derdi bir aksiyomatik sistem ortaya koymak olmadığından, o geometrinin önermelerinin doğası ile çok fazla ilgilenmemiş, görülenen mekânın yalnızca bir örnek olduğunu, fiziksel mekân görüsüne başvurmaksızın farklı boyutların geometrilerinin kurulabileceğini ve böyle bir

---

[494] Ferreiros, J. (2011), Scholz, E.(2011). Kişisel diyalog.
[495] Ferreiros, J. (2011), Scholz, E.(2011). Kişisel diyalog.
[496] Ferreiros, J. (2011), Scholz, E.(2011), Wilson, M. (University of Pittsburgh) (2011). Kişisel diyalog.

çalışmanın temel manifold kavramı temelinde yapılabileceğini göstererek mekân ve geometri öğretisine ilişkin belki de en özgün ve olanakları zengin düşünüş biçimini ortaya koymuştur.

Riemann'ın doğa felsefesinin manifold kavramı merkezli geometrisi Herbart'ın genel kavramlarla çalışma ve doğanın altında yatan gerçekliğin kavramsal olarak netleştirilmesi önerisinin ve Gauss'un eğrilik kavramı ve diferansiyel geometrisinin sonsuz boyuta taşınması sonucu ortaya çıkmıştır. Riemann'ın asıl derdi mekânı kavrama ve geometri yapma pratiğinde Kant'ın iddialarının haklı olup olmadığını tartışmak değil, eski düşünce geleneğini terk eden yepyeni bir düşünme tarzı ortaya koymaktır. Riemann kendisinden önceki geleneğin "kısıtlamacılığından" sıyrılmayı hedeflemektedir ve bu ancak bilimsel araştırmalarımıza bize tanıdığı olanaklarla birlikte gelenekten sıyrılma olanağını sunabilecek genel kavramlarla başlarsak mümkündür. *Habilitationsvortag*'ın sonundaki şu sözler Riemann'ın bakış açısını net bir şekilde göz önüne sermektedir:

> Genel kavramlardan yola çıkan bunun gibi araştırmalar ancak şunları kesin bir şekilde gösterir: bu tür çalışmalar fazla kısıtlamacı kavramlar tarafından sekteye uğratılmaz ve şeylerin arasındaki bağlantıları anlamadaki gelişmeler geleneksel önyargılar tarafından engellenemez.[497]

Riemann bu cümleleriyle yönteminin ve geometri felsefesinin mimarisini sunmaktadır. Riemann kendisine verili olmayan ama kurulmasıyla gösterilmesinin mümkün olduğu bir başlangıç noktası seçer. Manifold kavramı ile beraber mekânın kavranmasında Öklidyen geometrinin ya da üzerinde kurulması mümkün diğer geometrilerin herhangi biri ön plana çıkartılmaz. Bu şekilde Riemann bizim aletlerimizle yaptığımız ölçümlerle kıyaslandığında çok büyük ya da çok küçük mekânlarda farklı geometrilerin geçerli olabileceğini gösterir. Bu anlamda manifold kavramı ona mekânı modelleyeceğimiz geometrilerin çok fazla sayıda olabileceğini

---

[497] Riemann, B. (1929). "On the Hypotheses Which Lie at The Foundations of Geometry", çevr. Simith,D.E in *A Source Book in Mathematics* içinde, s.423. "Such investigations as start out, like this present one, fromgeneral notions, can promote only the purpose that this task shall not be hindered by too restricted conceptions, and that progress in perceiving the connection of things shall not be obstructed by the prejudices of tradition".

görmenin imkanını verir. Böylece Riemann mekânın doğasını geometrilerin çokluğuyla açıklayabilecektir; yani Riemann'ın geometri felsefesi *çoğulcudur.* Riemann'ın kaygısı doğayı içyapısından kavramaktır. Bu kavrama girişiminde kendisini mekânın gerçekliğine daha fazla yaklaştıracak bir geometri için halihazırda bulunan Öklidyen ya da Öklidyen olmayan diğer geometrileri bir tarafa bırakabilecektir.

Riemann kendi zamanına kadar uzanan geleneğin çalışma biçimini eleştirirken kullandığı apriori kavramından, kendi araştırma programının temel kavramı olan manifold kavramının çerçevesini oluştururken uzak kalmaya çalışmış ve olabildiğince gözlemin sınırlarının içinde kalarak doğayı anlamaya çalışmıştır.[498] Riemann'ın asıl sorusu Öklidyen metriğin geçerli olduğu mekânın geometrisinin kabullerinin sorgulanabilirliğidir. Bu amaçla Riemann'a göre geometrinin temelinde yatacak olan kavram, kendisinin *gerekli* ve *olanaklı* olma durumunun tayin edilebilmesine imkân tanıyacak nitelikte olmalıdır. Çünkü Riemann'a göre örneğin Öklid geometrisinde 'mekândaki inşa' işlerinde kullanılacak kavramlar aksiyomların formunda tanımsal düzeyde verilmiştir. Bu şekliyle onlar Riemann'ın arzu ettiği türde empirik bir araştırmanın konusu olamazlar.

Hâlbuki mekânı *manifold* olarak tarif etmek, Riemann'ın anladığı şekliyle kaynağı apriori olması gereken *zorunlu* olanın değil, deneyin sınırlarında *olanaklı* olanın incelenmesine imkân tanır. Yine Öklidyen geometrinin muğlâklığından arınabilmek, yani geometrik inşalarda başvurulan tanım ve postulatların apriori zorunlu olduğu fikrinden kaçınmak için geometrik aksiyomların doğasında olan *zorunluluk, olanaklı* olanla yer değiştirir. Olanaklı olma manifold kavramıyla verilir, çünkü o farklı metrik sistemler kabul edebilir; bu metriklerin geçerliliği empirik gözleme açıktır ve gözlem sonucunda açıklanamayan hususlar varsa *manifold* revize edilebilir. Geometrinin aksiyomlarındaki apriori *zorunluluk* mekândaki yapısallaştırmalardan bahsettiğimiz seviyede ortaya çıkar. Hâlbuki Riemann önce mekânı yapısallaştırmanın yolunu önererek yani onu *manifold* olarak tanımlayarak henüz bir

498 Ferreiros, J.(2005). "Dogmas and changing Images of Foundations", *Philosophia Scientiae*, Cahier special *Fonder autrement les mathématiques,* G. Heinzmann, P. Nabonnand, eds. içinde s.3.

aksiyom seti, dolayısıyla bir geometri önermez, aksine önce mekânın tanımını değiştirir. Ancak bu tanım ontolojik düzeyde kalmaz, zira mekânın yapısının ne olduğu sorusu artık bu düzeyden sonra aksiyomların doğasıyla değil, gözlemin sınırları içindeki noktasal davranışla, ölçüm için kabul ettiğimiz metriğin empirik olarak sorgulanmasıyla deneysel bir hal alır. Uzam özellikleri ile metrik ilişkilerini ayırır ve metrik ilişkileri belirlemeye izin verecek koşullar empirik olarak bulunabilir.

Riemann mekânı manifold olarak ele alınmasını önermekle mekân ve geometriye dair sorularımızın değişmesine olanak tanımıştır. Riemann mekân bilgimizin dış dünyanın bilgisi ile eşleşmesinde özellikle *fiziksel* geometrinin ne şekilde işleyebileceğini aksiyomlar üzerinden değil, merkeze revizyona açık temel bir kavram olan manifoldu alarak göstermiştir. Söz konusu kavram, mekânın doğası sorusunu değiştirerek-*mekândaki yapısallaştırmalardan önce mekânı yapısallaştırmanın yolunu önererek*- mekânın bilgi kuramsal bir hesabını da verebilmesine olanak tanımaktadır.

REFERANSLAR

- Agassi, J.(1969). “Leibniz’s Place in the History of Physics” , *Journal of the History of Ideas,* Vol. 30, No 3, ss.331-344.

- Alexandroff, P.(1932). *Elementary Concepts of Topology*, çevr. Alan R. Parley, Dover Publications, New York.

- Amit Hagar (2008). “Kant and non-Euclidean Geometry”, *Kant Studien*. 99. Jahrg., ss.80-98.

- Arthur, R. (1986). “Leibniz on Continuity”, *Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association,* Vol. 1986, Volume One, ss.107-115.

- Arthur, R. (1994). “Space and Relativity in Newton and Leibniz”, *The British Journal for the Philosophy of Science,* Vol. 45, No. 1, ss.219-240.

- Bağçe, S. (2003). “Russell’ın Kant Eleştirisi Üzerine”, *Felsefe Tartışmaları*, 30.sayı, ss.27-43.

- Bağçe, S. (2004) “Are Non-Euclidean Geometries Possible For Kant?” Muğla Üniversitesi Uluslararası Kant Sempozyumunda sunulan bildirilerinden, ss.29-37

- Bağçe, S. (2006). "Kant'ın Geometriye Dair Goruslerini Kurtarmak icin Uygun bir Yol Var mı?" *Uluğ Nutku'ya Armagan* içinde, ss.335-347.

- Banks, E, C. (2005). “Kant Herbart Riemann” , *Kant Studies,* Vol 96 Issue 2, ss. 208-234.

- Barker, Stephen F.(2003). *Matematik Felsefesi* çev. Yücel Dursun, İmge Kitabevi.

- Boi L, (1992). “The "revolution" in the geometrical vision of space in the nineteenth century, and the hermeneutical epistemology of mathematics” , Donald G. *Revolutions in Mathematics.* Oxford Science Publications, içinde, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York.

- Bonola, R. (1912). *Non-Euclidean geometry, a critical and historical study of its development.* Chicago: Open Court Publishing Co.

- Bottazzini, U., Tazzioli, R. (1995). “Naturephilosophie and Its Role in Riemann’s mathematics”, *Revue d’histoire des math´ematiques*, 1, ss3-38.

- Bottazini, U. (1994). “Geometry and “metaphysics of space” in Gauss and Riemann” *Romanticism in Science,* içinde, eds. S.Poggi, M. Rossi, Dordrecht: Kluwer, ss-15-29.

- Carnap, R. (1966). *Philosophical Foundations of Physics,* ed. Martin Gardner, Basic Books Inc.

- Coffa, J. A. (1993). *The Semantic Tradition From Kant to Carnap: To the Vienna Station*, Cambridge Press.

- Detlef, L. (1999). *Turning points in the conception of mathematics, Bernhard Riemann 1826-1866.* Boston: Birkhauser.

- DiSalle, R. (2006). *Understanding Space-Time*, Cambridge University Press.

- Dursun, Y. (2004). *Felsefe ve Matematikte Analitik/Sentetik Ayrımı*, Elips Kitap.

- Ehm, Werner (2010). “Broad Views of the philosophy of nature: Riemann, Herbart and the “matter of the mind” ”, *Philosophical Psychology,* 23:2, ss.141-162.

- Eves, H. (1990). *An Introduction to History of Mathematics,* Saunders College Publishers.

- Friedman, M. (1985). “Kant’s Theory of Geometry”, Vol. 94, No.4, *Philosophical Review,* ss.455-506.

- Friedman, M. (1992). *Kant and Exact Sciences*, Harvard University Press.

- Friedman, M. (1999). *Reconsidering Logical Positivism*. Cambridge University Press.

- Ferreiros, J. (2004).“The Magic Triangle: Mathematics, Physics and Philosophy in Riemann’s Geometrical Work”, Basılmamış bildiri, http://semioweb.msh-paris.fr/f2ds/docs/geo_2004/Jose_Ferreiro_2.pdf.

- Ferreiros, J.(2005). “Dogmas and changing Images of Foundations”, *Philosophia Scientiae*, Cahier special *Fonder autrement les mathématiques,* G. Heinzmann, P. Nabonnand, eds. içinde ss.27-42.

- Ferreiros, J. (2006). “The Rise of Pure Mathematics as Arithmetic with Gauss, *The Shaping of Arithmetic: Number theory after Carl Friedrich Gauss’s Disquisitiones Arithmeticae, ed. por C. Goldstein, N. Schappacher, J. Schwermer. Springer, Berlin,* içinde, ss.207-240.

- Ferreiros, J. (2006). “Riemann's Habilitationsvortrag at the Crossroads of Mathematics, Physics and Philosophy”, içinde J.Gray, Ferreiros, J. (Eds.), *The Architecture of modern mathematics* (ss.67-97). New York: Oxford University Press.

- Ferreiros, J. (2007). *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics.* Basel, Switzerland ; Boston: Birkhauser.

- Gözkan, B. (2006). "Kant'ın Eleştiri Öncesi Döneminden Eleştiri Dönemine Geçişteki Anahtar Yazı: Uzayda Yönler Arasındaki Farklılığın Nihai Dayanağı Hakkında"*, Felsefe Tartışmaları*, 37.sayı, ss.43-55.

- Gray, J. (1989). *Ideas of spac*e, Oxford: Clarendon press.

- Gray, J. (2007). *Worlds Out of Nothing,* Springer-Verlag, London.

- Gray, J (2008). *Plato's Ghost: the Modernist Transformation of Mathematics*, Princeton University Press.

- Greenberg, M.J. (1994). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries Development and History*, 3th edition, W.H. Freeman and Company, New York.

- Heath, T. (1956). *Euclid's Elements'*, Dover, New York.

- Heath, T. (1965). *A History of Greek Matmematics*, Volume 1,Oxford Clarendon Press.

- Helmholtz, H.V.(1977). *Epistemological Writings*, *Boston Studies in the Philosophy of Science*, ed.Robert T., S Cohen and Marx W. Wartofsky, Dordrecht Reidel Publishing, içinde, ss.39-71

- Inaltong M.C. (2000). *The Discovery of Non-Euclidean Geometries and Kant: The Possibility of Non-Euclidean Geometries in Kant's Philosophy*, basılmamış master tezi, Ortadoğu Teknik Üniversitesi.

- Jammer, M. (1993). *Concepts of Space*, Dover Publications, New York.

- Kagan. V.F.(2005). “Riemann’s Geometric Ideas”, *The American Mathematical Monthly,* Vol. 112, No. 1, ss.79-86.

- Kant, I. (1929). *Kant’s Inaugural Dissertation and Early Writings on Space*,içinde, çev. J. Handyside, Open Court Pub.

- Kant, I. (1965). *Critique of Pure Reason*, trans. by Smith, N. K., New York, St Martin’s.

- Kant, I. (1988). *Logic*, (çevr. R. Hartmann- W. Schwarez), New York: Dover.

- Kant, I. (1992). “*Inquiry concerning the Distinctness of the Principles of Natural Theology and Morality*”, *Theoretical Philosophy* 1755–1770 içinde, çev. D. Waldford ve R. Meebbote, Cambridge: Cambridge University Press.

- Kant, I. (2002). *Prolegomena*, çev. İonna Kuçuradi-Yusuf Örnek, Türkiye Felsefe Kurumu, Ankara.

- Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınevi.

- Khamara.E. J. (1993). “Leibniz’s Theory of Space: A reconstruction”, *The Philosophical Quarterly,* Vol. 43, No. 173, Special Issue: Philosophers and Philosophies, ss.472-488.

- Kline, M. (1972). *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times,* Oxford University Press.

- Kvazs, L. (2011). “Kant’s Philosophy of Geometry-On the Road to a Final Assessment”, *Philosophia Mathematica* (III) 19, ss.139-166.

- Leibniz, G.W. (1988). *Monadoloji,* (çev. Suut Kemal Yetkin) Milli Eğitim Gençlik ve Spor Bakanlığı Yayınları, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul.

- Leibniz, G. W (1951) *Selections*, Ed: Philip P. Wiener, Charles Scribner's Sons, New York.

- Lenoir, T.(2006).“Operationalizing Kant: Manifolds, Models, and Mathematics in Helmholtz's Theories of Perception”, *The Kantian Legacy in Nineteenth-Century Science*, M. Friedman, A. Nordmann (Eds.), MIT Press, ss.141-210.

- Mach, E. (1906). *Space and Geometry In The Light of Physiological, Psychological and Physical Inquiry,* trans.by Thomas J. McCormac.

- Magnani, L. (2001). *Philosophy and Geometry: Theoretical and Historical Issues*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Monastyrsky, M. (1987). *Riemann, topology, and physics.* Boston: Birkhauser.

- Northrop, F.S.C. (1946). “Leibniz's Theory of Space”, *Journal of the History of Ideas*, Vol. 7, No.4, ss.422-446.

- Nowak, G. (1989). “Riemann's Habilitationsvortrag and the synthetic apriori status of geometry”, *The History of Modern Mathematics Volume: 1,* ed. David E.Rowe-John McCleary, Academic Press içinde ss.17-48.

- Obrecht, A. Paul. (2001). “Four out of Five Mathematicians Agree: Riemann is God.”

- Plotnitsky, A. (2009). “Bernhard Riemann's Conceptual Mathematics and the Idea of Space”, *Configurations*, Vol. 17, No: 1, pp.105-130.

- Reyhani, N.(2010). “Sentetik apriori: Tarihsel Arkaplanı ve Bugün için Anlamı”, *Bilgi Felsefesi*, ed. Betül Çotuksöken-Ahu Tunçel, Heyamola Yayınları, İstanbul içinde, ss.211-251.

- Reichenbach, H. (1938). *Experience and prediction*. Chicago: The University of Chicago Press.

- Riemann, B. (1929). “On the Hypotheses Which Lie at The Foundations of Geometry”, çevr. Simith,D.E in *A Source Book in Mathematics* içinde.

- Riemann, B. (1854) “On the Hypotheses which lie at the Bases of Geometry, trans. by William Kingdon” Clifford [Nature, Vol.VIII.Nos. 183, 184, ss.14-17,36,37].

- Rosenfeld, B. (1988). *A history of Non-Euclidean geometry*. New York: Springer-Verlag.

- Rodriguez, G. (1999). “Leibniz’s argument for the Identity of Indiscernible in his correspondence with Clarke”, *Australasian Journal of Philosophy, 77 (4),* ss. 429-438.

- Russell, B.(1956) *An Essay on the Foundations of Geometry,* Dover Publications, New York.

- Scholz, E. (1982). “Herbart's influence on Bernhard Riemann”, 9, *Historia Mathematica* , ss.413-440.

- Scholz, E.(1982). “Riemanns frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie”, AHES 27, ss.213-132.

- Scholz, E. (1992). “Riemann's new vision of a vew approach to geometry”, D. F. L. Boi , *1830-1930: a century of geometry* içinde (s. 22-34). Berlin: Springer-Verlag.

- Scholz, E.(2005). “Curved spaces: Mathematics and empirical evidence, ca. 1830 – 1923”, *Oberwolfach Reports 2* (4), 3195—3198.

- Spivak, M., (1975). *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol 2, 2 .Eds.

- Stillwell, J. (2002). *Mathematics and its history*, New York, Springer.

- Sutherland, D. (2004). "The Role of Magnitude in Kant's Critical Philosophy", *Canadian Journal of Philosophy*, Volume 34, No:3, ss.411-442.

- Tazzioli, R. (2003). "Towards a history of the geometric foundations of mathematics Late XIXth century", *Revue de Synthèse*, Volume 124, Number 1,ss-11-41.

- Toko Kohei, Jinhui Chao,ve Reiner Lenz (2010). "On Curvature of Color Spaces and Its Implications" published in *CGIV-Fourth European Conference on Colour in Graphics, Imaging, and MCS/10 Vision 12th International Symposium on Multispectral Colour Science*.

- Torretti, R. (1978). *Philosophy of geometry from Riemann to Poincare*. Dordrecht: Reidel: D. Reidel Publishing Company.

- Torretti, R.(1990). *Creative understanding : Philsophical Reflections on Physics*, University of Chicago Press.

- Yalçın, Ş. (2003). "Kant'ta Matematiğin Felsefi Temelleri", *Felsefe Dünyası*, 37. Sayı, ss.128-143.

- Winterbourne, A. T. (1988). *The Ideal and the Real*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Wolfe, H.E. (1945) *Introduction to Non-Euclidean Geometry*, New York and London: Holt, Rinehart and Winston.

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : A.DİNÇER ÇEVİK

Doğum Yeri : ANTAKYA

Doğum Yılı : 19.06.1983

Medeni Hali : BEKÂR

EĞİTİM VE AKADEMİK BİLGİLER

Lise 1997-2000 : ANTAKYA KURTULUŞ LİSESİ

Lisans 2003-2008 : ODTÜ FELSEFE

Yabancı Dil : İNGİLİZCE

MESLEKİ BİLGİLER

2010 : MUĞLA ÜNİVERSİTESİ FELSEFE BÖLÜMÜ ARAŞTIRMA GÖREVLİSİ