GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$\beta\omega$ UZAYININ HOMOJENLİĞİ VE P-NOKTALARI

MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NEVİN DÜZEL
Aralık 2011

βω UZAYININ HOMOJENLİĞİ VE P-NOKTALARI

Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
M.Sc Tezi

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK

Nevin DÜZEL

Aralık 2011

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı:βω Uzayının Homojenliği ve P-noktaları

Öğrencinin, Adı Soyadı:Nevin DÜZEL

Tez Savunma Tarihi:13/12/2011

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ramazan KOÇ

FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans/Doktora tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Doç.Dr.A.İhsan HASÇELİK

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca (tarafımızca) okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans/Doktora tezi olarak oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri (Ünvanı, ADI ve SOYADI):	İmzası
Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK	....
Yrd. Doç. Dr. Ali BOZKURT	....
Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN	....

ÖZET

$\beta\omega$ UZAYININ HOMOJENLİĞİ VE P-NOKTALARI

DÜZEL Nevin

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Yard. Doç. Dr. Sabri BİRLİK

Aralık 2011, 37 sayfa

Bu çalışmada amacımız ω kümesinin alt kümelerinin oluşturduğu $\mathcal{P}(\omega)$ Boole cebirinin Stone uzayı olan $\beta\omega$'ye giriş yapmak ve özelliklerini incelemektir. $\beta\omega$ uzayı; topolojistlerin, küme teoricilerin, sonsuz kombinasyoncuların, Boole cebircilerin ve bazı sayı teoricileri ile analizcilerin buluştuğu önemli bir yere sahiptir. Şu ana kadar bu konuda birçok tartışma yapıldı. Biz burada genel olarak $\beta\omega$ ile ilgili sonuçlar üzerinde çalıştık. Bunlardan en önemlileri $\beta\omega\backslash\omega$' nin içinde bulunmayan p-noktalarının varlığı, $\beta\omega\backslash\omega$' de bulunan bazı noktaların zayıf p-nokta olabileceği ve $\beta\omega\backslash\omega$' de bulunan her noktanın c-nokta olduğudur. Biz ise Continuum Hipotezi altında $\beta\omega$ ile ilgili sorular üzerinde değil, bu hipotezin altında $\mathcal{P}(\omega)$/fin Boole cebiriyle ilgili sorular üzerinde çalışacağız. $\mathcal{P}(\omega)$/fin ile nitelendireceğimiz tamlık özelliği ile başlayacak ve tamlık özelliğini sağlayan Boole cebiriyle devam edecek $\beta\omega$'nin Continuum Hipotezini sağlamadığı taktirde karşılaşacağımız durumları çözmeye çalışacağız.

Anahtar Kelimeler: Boole cebiri, Stone uzayı, P-nokta, zayıf P-nokta, Pc-nokta, Continuum Hipotezi.

ABSTRACT

P-POİNTS and HOMOGENEITY of βω

DÜZEL Nevin

M. Sc. in Department of Mathematic

Supervisor: Ass. Prof. Sabri BİRLİK

December 2011, 37 pages

The aim of this paper is to give an introduction to the space $\beta\omega$, i.e. the Stone space of Boolean algebra $\mathcal{P}(\omega)$ of subsets of ω. The space $\beta\omega$ is an exciting place where topologists, set theorists, infinite combinatorists, Boolean algebraists and sometimes even number theorists and analysts meet. There are several arguments in favour of writing such a paper. We generally study on this important results. The most important results are it is consistent that p-points in $\beta\omega\backslash\omega$, some but not all points in $\beta\omega\backslash\omega$ are weak p-points and every point in $\beta\omega\backslash\omega$ is a Pc-point. We use the special structure of $\beta\omega$, with the exception of the completeness property of $\mathcal{P}(\omega)$/fin. We begin by identifiying the completeness property which characterizes $\mathcal{P}(\omega)$/fin and then work in Boolean algebras satisfiying this completeness property and we will discuss the properties of $\mathcal{P}(\omega)$/fin that is not under Continuum Hypothesis.

Key Words: Boolean algebra, the Stone space, P-points, weak P-points, Pc-point, Continuum Hypothesis.

TEŞEKKÜR

Bütün çalışmam boyunca bana rehber olan ve yardımlarını benden esirgemeyen çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK'e ve desteklerini esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER LİSTESİ

Simge	Açıklama
N	Doğal Sayılar
R	Reel Sayılar
I	[0,1]
ω	İlk sonsuz ordinal
$\mathcal{P}(\omega)$ Cebiri	ω kümesinin alt kümelerinin oluşturduğu Boole
$\beta\omega$	$\mathcal{P}(\omega)$' nin Boole Cebirinin Stone Uzayı
ω^*	$\beta\omega\backslash\omega$
CH	Continuum Hipotezi
–CH	Continuum Hipotezi sağlanmadığı taktirde
MA	Martin's Axiom
St($\mathfrak{B}$)	$\mathfrak{B}$ Boole Cebirinin Stone Uzayı
fin	ω' nin sonlu alt kümelerinin ideali
X*	$\beta X\backslash X$
$X\approx Y$	X ve Y uzayları homomorftur
$\times$	Dikey çarpım
$X\cup_f Y$	X\$\mathfrak{B}$ ayrışım uzayı
$\bar{F}$	F'nin kapanışı
P(ω)/ ω cebiri	A, B$\in$ P(ω) için AΔB $\in$ fin ile elde edilmiş Boole

$\|X\|$	X'in kardinalitesi
ZFC	Zermelo-Freankel küme kuramı

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı ω kümesinin alt kümelerinin oluşturduğu $\mathcal{P}(\omega)$ Boole cebirinin Stone uzayı olan $\beta\omega$'ye giriş yapmak ve sizlere tanıtmaktır.

$\beta\omega$ ile ilgili aşağıdaki sonuçların son yıllarda elde edilmiş en önemli sonuçlar olduğu açıktır.

(1) $\beta\omega\backslash\omega$'nin içinde bulunmayan P-noktaları mevcuttur. [24]
(2) $\beta\omega\backslash\omega$'de bulunan bazı noktalar zayıf P-noktalarıdır. [25]
(3) $\beta\omega\backslash\omega$'de bulunan her nokta $\mathfrak{c}$-noktadır. [26]

(1) en çok küme teoricilerinin, (2) topolojicilerin ilgisini çekecek, (3)'ün ise topoloji kadar Boole cebiriyle de alakalı önemli bir sonuç olduğunu göreceğiz. Biz bu çalışmada daha çok (2) sonucu üzerinde duracak (1) ve (3)'e pek değinmeyeceğiz.

$\beta\omega$ uzayı aslında üç başlı bir canavar gibidir. Eğer Continuum Hipotezi (kısaca CH) başlığı altında çalışmaya başlarsak canavarın ilk başını görürüz. Bu baş güler yüzlü, dost canlısıdır ve $\beta\omega$ uzayıyla çalışırken kendimizi rahat hissettirir. Bu çalışmada Continuum Hipotezi altında $\beta\omega$ ile ilgili sorular üzerinde değil, Continuum Hipotezi altında $\mathcal{P}(\omega)$/fin Boole cebiriyle ilgili sorular üzerinde çalışacağız. Bu birinci bölümün konusudur.

Continuum Hipotezi, reel sayılar kümesinin sayılamayan her alt kümesinin bütün reel sayılar kümesiyle birebir bir eşleme ile içine konulabileceğini söyler. Biz çalışmamızda genel olarak Continuum Hipotezi doğruysa yani böyle bir eşleme yapılabiliyorsa bizim için neler değişmektedir, yanlışsa hangi sonuçlar görülmektedir inceleyeceğiz.

$\beta\omega$ uzayı, Continuum Hipotezini sağlamadığı taktirde canavarın ikinci başıyla karşılaşırız. Bu baş kafamızı karıştıracak ve doğruları söyleyip söylemediğinden asla emin olamayacağız. İkinci bölümün konusu budur. Kafamız öyle karışacak ki birinci bölümde Continuum Hipotezi ile elde edilmiş hemen hemen tüm sonuçların yanlış olduğunu düşüneceğiz.

Bu çalışmayı anlayabilmek için öncelikle Boole cebiri, Stone-Čech kompaktlaması, ve kardinal sayılar ile ilgili bazı bilgilerin bilinmesi gerekmektedir.

Sabit bir E kümesinin alt kümelerinin boş olmayan bir $\mathfrak{B}$ sınıfı olsun.

i. A ve B$\in$ $\mathfrak{B}$ ise A$\cup$B$\in$ $\mathfrak{B}$, ii. A$\cap$B$\in$ $\mathfrak{B}$ ve iii. A$\in$ $\mathfrak{B}$ koşullarını gerçekleyen $\mathfrak{B}$ ailesine, kümelerin Boole cebiri denir.

Boole cebiri; 0 ve 1 ile sınırlı, homoemorfizma, gömme fonksiyonu, izomorfizma,..gibi ailelerden oluşur ve genelde $\mathfrak{B}$ ile gösterilir.

Kardinal sayılar ayrık topolojiye sahip ilk ordinallerdir. α bir ordinal ise α kümesinin düzgün topolojiyle donatılmasıyla oluşmuş $\omega(\alpha)$ bir topolojik uzay belirtir.

X, boş olmayan bir küme olsun. X kümesinin alt kümelerinin bir T sınıfının X üzerinde bir topoloji olması için gerekli ve yeter koşul,

i. X ve $\emptyset$ kümeleri T sınıfının öğesi,
ii. T kümesinin alt kümelerinin herhangi bir sınıfının birleşimi yine T kümesinde ve
iii. T kümesindeki her sonlu sınıfın kesişimi yine T kümesinde olmalıdır.

(X,T) topolojik uzay olsun. Bileşimleri A kümesini kapsayan kümelerin $\{G_i\}$ ailesine A$\subset$X kümesinin örtüsüdür denir. Bileşimleri A$\subset$X kümesini kapsayan ve $\cup_i G_i$=X olan açık kümelerin $\{G_i\}$ ailesine A$\subset$X'in açık örtüsüdür denir.Eğer bir kümenin her açık örtüsünün sonlu tane alt açık örtüsü varsa bu kümeye kompakttır denir.

(X,T), topolojik bir uzay olsun. Herhangi x, y$\in$ X ve x$\neq$y noktaları için, x$\in$U ve y$\in$V olan ve V$\cap$U=$\emptyset$ olacak şekilde U ve V gibi açık kümeler varsa, (X,T) topolojik uzayına Hausdorff uzayı denir.

X topolojik uzayı, A$\subset$X kapalı bir küme ve x$\notin$ A için f(x)= 0 ve f(A)= 1 olacak şekilde bir f: X$\rightarrow$ I fonksiyonu varsa X topolojik uzayı tamamen düzgün olarak adlandırılır.

Stone-Čech kompaktlaması ile ilgili neler bilmemiz gerekmektedir? Öncelikle βX'in X'deki ayrık sıfır kümelerinin kapanışlarının ayrık olduğu özelliğinde X(tamamen düzgün hausdorff)'in tek kompaktlaması olduğu bilinmelidir. Bu bilgilerin yanı sıra Stone-Čech kompaktlaması ile ilgili aşağıdaki tanımları verelim.

Tanım 1.1 X, topolojik uzay olsun. K kompakt uzayı için $\varphi : X \rightarrow K$ bir gömme ve $cl_K \varphi(X) = K$ oluyorsa K ya X in kompaktlaması denir ve bu kompaktlama (φ, K) çifti ile gösterilir.

Tanım 1.2 X, tamamen regüler uzay olsun

(a) Z, kompakt bir uzay

(b) $\varphi : X \rightarrow Z$ bir gömme

(c) $cl_Z \varphi(X) = Z$

(d) Y, kompakt ve $f : X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon ise $\exists\, g : Z \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonu için $g \circ \varphi = f$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[dl, dashed, "g"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Yukarıdaki koşullar sağlanıyorsa (φ, Z) ye X in Stone-Čech kompaktlaması denir.

K kompakt olduğunda fonksiyonu verildiğinde, fonksiyonunun f'den genişleyen tek fonksiyon olduğunu verir. Bu fonksiyona "f'nin Stone genişlemesi" denir. Genel olarak βω gösterimi (ω) Stone uzayı olduğundan açıktır ancak keyfi bir X için X bir Boole cebiri olmayabilir. O zaman βX yazımı açık olmaz. Bu yüzden özel olarak güçlü sıfır-boyutlu uzaylarla çalışacağız. Böyle X uzaylarında βX sıfır-boyutlu bir uzaya ya da aynı şekilde βX, X' in tüm hem açık hem kapalı altkümelerinin oluşturduğu (X) Boole cebirinin Stone uzayına denktir. Buradan (K)'yı (X) içine gömen f'nin varlığından Stone genişlemesinin varlığı da görülür.

Buradan itibaren ele alacağımız tüm topolojik uzayları tamamen düzgün ve Haussdorff olarak kabul edeceğiz. $\mathfrak{B}$ Boole cebirinin Stone uzayını st($\mathfrak{B}$) ile göstereceğiz.

$U = int_X cl_X U$ koşulunu sağlayan X'in U alt kümesinin düzgün açık olarak adlandırıldığını hatırlayalım.

$$RO(X) = \{U \subseteq X: U \text{ düzgün açık}\}$$

olsun. O zaman aşağıdaki koşullar sağlandığında RO(X) tam Boole cebiri olur.

$$U \wedge V = U \cap V$$

$$U \vee V = int_X cl_X (U \cup V)$$

$$U' = int_X (X \backslash U)$$

X uzayı kompakt ise RO(X) Stone uzayı EX ile gösterilir. RO(X) tam olduğundan EX aşırı bağlantısızdır.(=açık bir kümenin kapanışı da açıktır.)

Topolojik olarak kolayca görülebilir ki EX aşağıdaki bağıntıyı sağlar;

$\pi: EX \longrightarrow X$ indirgenemez mükemmel fonksiyonu sağlayan tek aşırı bağlantısız uzaydır.

(f: $S \longrightarrow T$ sürekli fonksiyonu her $A \subseteq S$ ve $A \ddagger S$ için $f(A) \ddagger T$ koşulunu sağlıyorsa bu fonksiyona indirgenemez fonksiyon denir.) EX uzayı X'in " izdüşümsel örtüsü" olarak adlandırılır.

X uzayı içinde aldığımız her F_σ-açık kümesinin kapanışı açık ise X uzayına "temel bağlantısızdır" denir. Açıkça görülebilir ki her aşırı bağlantısız uzay temel bağlantısızdır ancak tersi doğru değildir. Genel olarak ω'nin sonlu alt kümelerinin idealini fin ile, $\mathcal{P}(\omega)/\omega$ ile de $A, B \in \mathcal{P}(\omega)$ iken $A \Delta B \in fin$, $(A \Delta B = A \backslash B \cup B \backslash A)$ ile elde ettiğimiz $\mathcal{P}(\omega)$'nin Boole cebirini gösterelim. Burada βω, st $(\mathcal{P}(\omega))$'yi temsil etmektedir.

$n > \omega$ için n'yi $(st\mathcal{P}(\omega))$'den elde ettiğimiz $\{A \in \mathcal{P}(\omega): n \in A\}$ ile belirleyelim. $\beta\omega \backslash \omega$'deki noktalar ultrafiltre olarak adlandırılır. Açıktır ki,

$$\beta\omega \backslash \omega \approx st(\mathcal{P}(\omega)/fin) \text{ olur.}$$

Eğer $A \subseteq \omega$ ise

$$A^* = \{x \in \beta\omega\backslash\omega : A \in X\}$$

olsun. Buradan $\{A^* : A \in \mathcal{P}(\omega)\}$ kümesinin $\beta\omega\backslash\omega$ için bir taban olduğu görülür. Yine $\beta\omega\backslash\omega = \omega^*$ olduğu çıkar.

1.1.Ön Teorem [1]:

(a) $V \subseteq \omega$ sonsuz ise $\overline{V}$, $\beta\omega'$ye homeomorftur.

(b) $V, W \subseteq \omega$ sonlu ve $|V \cap W| < \infty$ ise $V^* \cap W^* = \emptyset$ dir.

X uzayından aldığımız bir x noktasının komşuluklarının sonlu kesişimi yine x'in bir komşuluğu ise x noktasına P-nokta denir.

X bir küme ve κ bir kardinal sayı olsun, sırasıyla

$$[X]^\kappa = \{A \subseteq X : |A|\} = \kappa$$

$$[X]^\kappa = \{A \subseteq X : |A|\} \leq \kappa$$

$$[X]^\kappa = \{A \subseteq X : |A|\} < \kappa$$

tanımlayalım. $\subset$ ile düzgün kapsamayı gösterelim.

X bir uzay olsun X^* ile $\beta X\backslash X$'i gösterelim ve $U \subseteq X$ için

$$E_x(U) = \beta X \backslash cl_{\beta x}(X\backslash U)$$

olur. Buradan elde ederiz ki $E_x(U)$ açıktır ve $E_x(U) \cap X = U$ olur. Kolayca

$$\{E_x(U) : U \subseteq X \text{ açıktır}\}$$

kümesinin βX üzerindeki topoloji için bir taban olacağı görülür.(X, T bir topolojik uzay olsun. X kümesinin açık alt kümelerinin bir B sınıfı her açık $G \in T$ kümesi, B kümesinin öğelerinin birleşimi ve G açık kümesine ait olan herhangi bir k noktası için $k \in K \subseteq G$ olacak şekilde bir $K \in B$ varsa B kümesi X için bir taban oluşturur.) $U \subseteq X$ açık ise,

$U' = E_X(U) \cap X^*$ olsun.

X normal ve Y, X içinde kapalı ise $cl_{\beta X} Y = \beta Y$'dir. Bu durumda $cl_{\beta X} Y \setminus Y$ ve Y^*'ı tanımlayalım. Eğer bir $\mathcal{F}$ kümeler ailesi her $\mathcal{G} \in [\mathcal{F}]^{\leq n}$ için $\cap \mathcal{G}_n \neq \emptyset$ koşulunu sağlıyorsa $\mathcal{F}$'ye $(n \leq \omega)$ "n'li kesişim özelliğini sağlıyor" denir.

f, (X,T) topolojik uzaydan (Y,T ') topolojik uzayına bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu 1-1 ve örten sürekli bir dönüşüm ve f^{-1} fonksiyonu da sürekli ise, f fonksiyonuna homeomorfizma denir. Bu halde, X ve Y uzayları homeomorf uzaylardır denir. Birebir örten homeomorfizmaya izomorfizma denir. X ve Y uzaylarının homeomorf olduklarını göstermek için de $X \approx Y$ yazımını kullanalım.

X topolojik uzay olsun. $f: X \to I$ fonksiyonu sürekli olduğunda $f^{-1}(\{0\})$ ters fonksiyonunun oluşturduğu X'in altkümesine X'in sıfır-kümesi denir. Bir sıfır-kümenin tümleyenine ise sıfır olmayan küme denir. α ve κ kardinal olsun;

$\alpha^\kappa = \sum\{\alpha$: (λ kardinaldir ve $\lambda < \kappa)\}$ olarak tanımlayalım.

BÖLÜM 2

CH ALTINDA $\beta\omega$ ve $\beta\omega\backslash\omega$ UZAYLARI

Bu bölümde Continuum Hipotezi altında $\beta\omega$ ve $\beta\omega\backslash\omega$ uzaylarının özelliklerini göreceğiz.

2.1 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$

$\mathfrak{B}$ Boole cebiri ve $F, G \subseteq \mathfrak{B}$ olsun. $F' \in [F]^{<\omega}$ ve $G' \in [G]^{<\omega}$ olacak şekilde her F' ve G' için $\vee F' < \wedge G'$ oluyrsa $F < G$' dir denir.

2.1.1 Tanım: $\mathfrak{B}$ Boole cebiri olsun. Her $F \in [\mathfrak{B}\backslash\{1\}]^{\leq\omega}$ ve $G \in [\mathfrak{B}\backslash\{0\}]^{\leq\omega}$ için $F < G$ ve $F < \{x\} < G$ olacak şekilde bir $x \in \mathfrak{B}$ elemanı bulunabiliyorsa $\mathfrak{B}$'ye H_ω koşulunu sağlıyor denir.

2.1.2 Ön Teorem:[1]: $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$ H_ω koşulunu sağlar.

İspat: Sıradaki bağıntıyı ispatlamakla başlayalım;

$A \in [\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}]^{\leq\omega}$ ve $\{0\} < A$ ise $\{0\} < \{y\} < A$ olacak şekilde bir $y \in \mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$ mevcuttur.

A kümesini $\{\alpha_n : n < \omega\}$ ile tanımlayalım ve her $n < \omega$ için α_n' lerin temsili $C_n \in [\omega]^\omega$ olsun. Tümevarımla her $n < \omega$ için

$$y_n \in \cap_{0 \leq i \leq n} C_i / \{y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\}$$

olacak şekilde y_n'ler mevcuttur.

$Y = \{y_n : n < \omega\}$ ve y , $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}'$ in bir elemanı olsun. $\{0\} < \{y\} < A$ olduğunu göstermek kolaydır.

Şimdi ön teoremin ispatına dönelim. $F, G \in [\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}]^{\leq\omega}$, $1 \notin F$, $0 \notin G$ ve $F < G$ kabul edelim.

$\vee F$ ve $\wedge G$ mevcut ise yukarıdaki bağıntıdan istenen x' i bulmak kolaydır. Bu yüzden böyle bir durumun olmadığını kabul edelim. F'yi $\{f_n : n < \omega\}$ ile G'yi de $\{g_n : n < \omega\}$

ile tanımlayalım. Genelliği bozmadan $f_0 < f_1 < \cdots$ ve $g_0 > g_1 > \ldots$ olduğunu varsayalım. Herhangi bir $n < \omega$ için f_n ve g_n in $A_n, B_n \in [\omega]^{<\omega}$ temsillerini ele alalım. Tümevarımdan, $k < \omega$ için $d_k < \omega$ alalım.

(1) $d_k \in \bigcap_{0 \le i \le n} B_i \setminus \{\bigcup_{0 \le i \le k} A_i \cup \{d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}\}\}$, $D = \{d_k : k < \omega\}$

$A' = \bigcup_{k<\omega} (A_k \cap \bigcap_{0 \le i \le k} B_i)$ alalım.

(2) $n < \omega$ ise $|A_n \setminus C| < \omega$,

(3) $m < \omega$ ise $|C \setminus B_n| < \omega$ olur.

x , $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$'in bir elemanı olsun. (2) ve (3)'ün $F < \{x\} < G$ olduğunu gösterdiği açıktır.

2.1.3 Tanım: $\mathfrak{B}$ Boole cebiri olsun. Her $F \in [\mathfrak{B}\setminus\{1\}]^{\le\omega}$, $G \in [\mathfrak{B}\setminus\{0\}]^{\le\omega}$ ve $G \in [\mathfrak{B}]^{\le\omega}$ boş olmayan kümeleri için

(1) $F < G$ ve

(2) $\forall \tilde{F} \in [F]^{<w}, \forall \tilde{G} \in [G]^{<w}, \forall H : h \nleq \vee \tilde{F}$ ve $\wedge \tilde{G} \nleq h$ için $x \in \mathfrak{B}$ vardır öyle ki

(3) $F < \{x\} < G$ ve

(4) $\forall h \in H : h \nleq x$ ve $x \nleq h$

koşulları sağlanıyorsa $\mathfrak{B}$, R_ω koşulunu sağlar denir.

2.1.4 ÖnTeorem[1]: Eğer $\mathfrak{B}$ Boole cebiri H_ω koşulunu sağlıyor ise R_ω koşulunu sağlar.

İspat: $F \in [\mathfrak{B}/\{1\}]^{\le\omega}$, $G \in [\mathfrak{B}/\{0\}]^{\le\omega}$ ve $G \in [\mathfrak{B}]^{\le\omega}$ 1.1.3 te (1) ve (2) deki gibi olsun. F'yi $\{f_n : n < \omega\}$, G'yi $\{g_n : n < \omega\}$ ve H'yi $\{h_n : n < \omega\}$ ile belirleyelim. Her bir $h \in H$ ve her sonlu $\tilde{F} \in [F]^{<\omega}$ için $(\vee \tilde{F})' \wedge h \neq 0$ elde ederiz ve H_ω koşulundan, her $n < \omega$ için , $d_n \in \mathfrak{B}\setminus\{0\}$ mevcuttur öyle ki

(1) $d_n < h_n$ ve $\forall f \in F$, $f \wedge d_n = 0$

Benzer şekilde $e_n \in \mathfrak{B}\setminus\{0\}$ mevcuttur öyle ki

(2) $\{e_n\} < G$ ve $e_n \wedge h_n = 0$ dır.

e_n ve d_n'leri özel olarak seçelim ve her $n, m < \omega$ için $e_n \wedge d_n = 0$ kabul edelim. Her $n < \omega$ için

$\widetilde{f_n} = f_n \vee e_n$, $\widetilde{g_n} = g_n \vee d'_n$ tanımlayalım. $n,m < \omega$ ise $\vee_{0 \le i \le n} \widetilde{f_i} \le \wedge_{0 \le j \le m} \widetilde{g_j}$ olduğunu hatırlayalım. H_ω'den her n, $m < \omega$ için $x \in \mathfrak{B}$ olacak şekilde bir x bulunabilir ve

$n, m < \omega$ ise $\vee_{0 \le i \le n} \widetilde{f_i} \le x \le \wedge_{0 \le j \le m} \widetilde{g_j}$ olur.

Buradan istenen x bulunur.

2.1.5 Sonuç [1]: $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$ R_ω koşulunu sağlar.

Bu bölümün esas sonucuna geldik.

2.1.6 Teorem(CH) [2]: $\mathfrak{B}$, H_ω koşulunu sağlayan en fazla $\mathfrak{c}$ kardinalitesine sahip Boole cebiri olsun. $\mathfrak{B}$, $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$'e izomorftur.

İspat: $\mathfrak{B}$ ve $\mathcal{E}$, $|\mathfrak{B}|, |\mathcal{E}| \le \mathfrak{c}$ olacak şekilde H_ω koşulunu sağlayan Boole cebiri olsun. Continuum Hipotezinden $\mathfrak{B}$'yi $\{b_\alpha : \alpha < \omega_1\}$

ile $\mathcal{E}$' yi $\{e_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ ile gösterelim.

Genelliği bozmadan $e_0 = 0$ ve $b_0 = 0$ kabul edelim. Tümevarımdan, $\alpha < \omega_1$ için $\mathfrak{B}_\alpha \subseteq \mathfrak{B}$ ve $\mathcal{E}_\alpha \subseteq \mathcal{E}$ alt cebirlerini tanımlayalım ve $\sigma_\alpha : \mathfrak{B}_\alpha \rightarrow \mathcal{E}_\alpha$ izomorfizmasını aşağıdaki gibi seçelim.

(1) $b_\alpha \in \mathfrak{B}_\alpha$ ve $e_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha$,
(2) $\beta < \alpha$ ise $\mathfrak{B}_\beta \subseteq \mathfrak{B}_\alpha$, $\mathcal{E}_\beta \subseteq \mathcal{E}_\alpha$ ve $\sigma_\alpha \upharpoonright \mathfrak{B}_\beta = \sigma_\beta$.

$\mathfrak{B}_\alpha = \{0,1\}$ ve $\mathcal{E}_\alpha = \{0,1\}$ olsun. $\sigma_0 : \mathfrak{B}_0 \rightarrow \mathcal{E}_0$ tanımlansın. $\mathfrak{B}_\beta$, $\mathcal{E}_\beta$ ve σ_β'nin her $\beta < \alpha < \omega_1$ için (1) ve (2) koşullarını sağladığını düşünelim.

$b_\alpha \in \cup_{\beta<\alpha} \mathfrak{B}_\beta$ ve $e_\alpha \in \cup_{\beta<\alpha} \mathcal{E}_\beta$ ise $\mathfrak{B}_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} \mathfrak{B}_\beta$, $\mathcal{E}_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} \mathcal{E}_\beta$ ve $\sigma_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} \sigma_\beta$ tanımlanır.

$b_\alpha \notin \cup_{\beta<\alpha} \mathfrak{B}_\beta = \mathcal{F}$ varsayalım ve $\sigma_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} \sigma_\beta$ kabul edelim.

$\mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{F} : f < b_\alpha\}$, $\mathcal{F}_1 = \{f \in \mathcal{F} : b_\alpha < f\}$ ve $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F} \backslash \{\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1\}$ diyelim.

2.1.4 Ön Teoremden $\sigma(\mathcal{F}_0) < \{e\}$, $\{e\} < \sigma(\mathcal{F}_1)$ olacak şekilde bir $e \in \mathcal{E}$ vardır ve her $\tilde{e} \in \sigma(\mathcal{F}_1)$ için $\tilde{e} \nleq e$ ve $e \nleq \tilde{e}$ dir. $\sigma(b_\alpha) = e$ ve $\sigma(b'_\alpha) = e'$ denirse o zaman σ, $\tilde{\sigma}: \ll \mathcal{F} \cup \{b_\alpha\} \gg \ \rightarrow \ \ll \sigma(\mathcal{F}) \cup \{e\} \gg$ izomorfizmasına genişler. Eğer $e_\alpha \notin \ll \sigma(\mathcal{F}) \cup \{e\} \gg$ ise aynı şeyi σ yerine σ^{-1} koyarak yapabiliriz. Bu ise bize $\mathfrak{B}_\alpha$ ve $\mathcal{E}_\alpha$'nın nasıl tanımlı olduğunu verir. $\mathfrak{B}$ ve $\mathcal{E}$'nin izomorf olduğu ön teorem 1.1.5' ten ise β ve $\mathcal{E}$' nin $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$ e izomorf olduğu bulunur.

2.1.7 Uyarı: H_ω koşulunu sağlayan herhangi bir Boole cebiri en az $\mathfrak{c}$ kardinalitesine sahiptir.

2.2.Topolojik Bakış

Bu bölümde 2.1. bölümdeki sonuçları topolojik olarak inceleyeceğiz.

X bir uzay olsun. $A \subseteq X$ alt kümesi her $f: A \rightarrow [0,1]$ fonksiyonunun $f: X \rightarrow [0,1]$ şeklinde bir genişlemesi mevcut ise A'ya X içinde $C^* -$ gömme denir.

2.1.2 Tanım: Bir X uzayı içindeki her cosıfır-kümesi X içinde $C^* -$ gömme ise X uzayına $\mathcal{F} -$ uzayıdır denir.

Aşağıdaki ön teorem $\mathcal{F}$- uzayları üzerindeki bazı bağıntıları gösteriyor.

2.2.2 Ön Teorem[1]:

(a) βX , $\mathcal{F}$ uzayı ise, X de bir $\mathcal{F}$- uzayıdır.

(b) X normal uzay ve X' in ayrık iki $\mathcal{F}_\sigma$ açık altkümelerinin X'deki kapanışları ayrık ise X , $\mathcal{F}$- uzayıdır.

(c) Her temel bağlantısız uzay $\mathcal{F}$- uzayıdır.

(d) Normal bir $\mathcal{F}$- uzayının herhangi bir kapalı alt uzayı $\mathcal{F}$- uzayıdır.

(e) X , $\mathcal{F}$ uzayı sayılabilir zincir kuralını sağlıyor ise aşırı bağlantısızdır.

İspat: βX içinde X' in C^*-gömme olduğunu kullanarak (a) nın ispatı elde edilmiş olur. (b) ve (c)'nin ispatı açıktır. (d)'nin ispatını (b)'deki gibi bir $\mathcal{F}$- uzayını kullanarak yaparız. (e)'nin ispatı için X'in ayrık açık altkümelerinin X'de açık kapanışları olduğunu göstermek yeterlidir. $U, V \subseteq X$ ayrık ve açık iki küme olsun. $U' \subseteq U$ ve $V' \subseteq V$ cosıfır-kümelerinin varlığını bulmak için X'in sayılabilir zincir kuralını sağladığını kullanalım. $f: U' \cup V' \to [0,1]$, $x \in U'$ ise $f(x) = 0$ ve $x \in V'$ ise $f(x) = 1$ ile tanımlı f fonksiyonu $\bar{f}: X \to [0,1]$'e genişletilebilir. $U \subseteq \bar{f}^{-1}(\{0\})$ ve $V \subseteq \bar{f}^{-1}(\{1\})$ olduğundan $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$ elde edilir.

Sıradaki sonuç H_ω koşulunun topoloji ile bağlantısını verir.

2.2.3 Ön Teorem[1]: X sıfır boyutlu kompakt bir uzay olsun. Aşağıdaki bağıntılar denktir.

(1) $\mathfrak{B}(x)$, H_ω koşulunu sağlar.

(2) X , $\mathcal{F}$- uzayıdır ve X'deki her G_δ boş olmayan kümesinin içi sonsuzdur.

2.2.4 Sonuç[2]: X bir uzay olsun. Aşağıdaki bağıntılar denktir.

(1)$X \simeq \omega^*$

(2) Herhangi bir G_δ boş olmayan kümesinin içi sonsuz olduğu yerde X $\mathfrak{c}$ büyüklüğünde sıfır boyutlu kompakt $\mathcal{F}$- uzayıdır.

İspat: Teorem 2.1.6 ve ön teorem 2.2.3 ten yapılır.

Herhangi bir G_δ boş olmayan sonsuz elemanlı küme içinde $\mathfrak{c}$ büyüklüğüne sahip sıfır boyutlu kompakt $\mathcal{F}$- uzayını bundan sonra Parovičenko uzayı diye adlandıracağız. Sonuç 2.2.4 , Continuum Hipotezi altında ω^*'ın tek Parovičenko uzayı olduğunu söyler.

2.2.5 Teorem[3]: X uzayı , lokal kompakt , σ-kompakt ve kompakt olmayan uzay olsun. X^*, $\mathcal{F}$- uzayıdır ve X^* içindeki her G_δ boş olmayan kümesainin içi sonsuzdur.

İspat: $F \subseteq X^*$ olsun. $f: F \to [0,1]$ ve F_σ sürekli olsun. $Y = X \cup F$ σ-kompakt olduğundan normal uzaydır ve F, Y içinde kapalı olduğundan Tietze Genişleme Teoreminden(A, X'in kapalı bir alt kümesi ve f: A→R sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer F: X→R sürekli ve F\A=f olacak şekilde X'in bir f genişlemesi var ise X normal uzaydır.) f fonksiyonunun $\bar{f}: Y \to [0,1]$ genişlemesi vardır. g: $\bar{f}\backslash X$ diyelim.

g, $\bar{g}$: $\beta X \to [0,1]$'ye genişletilebilir. $\bar{g}/F = f$ olduğundan $\tilde{f}: \bar{g}\backslash$ in f'nin istenen genişlemesi olduğu kolayca görülür.

$S \subseteq X^*$ G_δ içinde boş olmayan bir küme olsun. $\{U' : U, X \text{ içinde açık}\}$ kümesi X^* için bir taban olduğundan, her $n < \omega$ için,

$$\overline{U}_{n+1} \subseteq U_n \text{ ve } \emptyset \neq \bigcup_{n<\omega} U_n' \subseteq S$$

olacak şekilde $U_n \subseteq X$ açık kümeleri bulabiliriz. X lokal kompakt ve σ-kompakt olduğundan , K_n kompakt ise X' i $\bigcup_{n<\omega} K_n$ şeklinde yazabiliriz ve her $K \subseteq X$ kompakt kümesi K_n in içindedir. Her $n < \omega$ için $V_n \subseteq U_n$, "$\overline{V}_n$ kompakt ve K_n'i kapsamaz" koşulunu sağlayan V_n açık kümeleri seçelim.

$V = \bigcup_{n<\omega} V_n$ diyelim. $n < \omega$ ise , $V \setminus U_n$' in X içinde kompakt kapanışı var ve böylece

$$V' \subseteq \bigcap_{n<\omega} U'_n \subseteq S \text{ bulunur.}$$

V'nin X içinde kapanışı var olmadığından $V' \neq \emptyset$ dir.

Şimdi Teorem 2.1.6'nın topolojideki ilginç bir uygulamasını verelim.

2.2.6 Teorem(CH)[1]: X sıfır boyutlu, lokal kompakt, σ-kompakt, en az $\mathfrak{c}$ kardinalitesine sahip kompakt olmayan bir uzay olsun. X^* ve ω^* homeomorfiktir.

(bu teorem Paravičenko'nun ω^* gösteriminin sonucudur)

İspat: X sıfır-boyutlu Lindelöf uzayı olsun. (X'in her açık örtüsün sayılabilir alt örtüsü varsa X uzayına Lindölef uzay denir.) X güçlü sıfır-boyutlu ve $\mathfrak{c}^\omega = \mathfrak{c}$ kapalı kümelerine sahip olsun. Buradan X^*'ın en çok $\mathfrak{c}$ büyüklüğünde sıfır-boyutlu kompakt uzay olduğu bulunur. Teorem 2.2.5 ve ön teorem 2.2.3'ten $\beta(X^*)$, H_ω koşulunu sağladığını buluruz. Bu ise $\beta(X^*)$'ın ve $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$ in izomorf olduğunu gösterir ve sonuç olarak Stone Dualitesinden X^* ve ω^*'ın homeomorf oldukları çıkar.

2.3. ω^*'ın Sürekli Görüntüleri

Bu bölümde ω^*'ın sürekli görüntülerini inceleyeceğiz.

2.3.1 Teorem[2]: $\mathfrak{B}$ en çok ω_1 kardinalitesine sahip Boole cebiri olsun. O zaman $\mathfrak{B}$, $\mathcal{P}(\omega)\setminus\mathrm{fin}$ içine gömülebilir.

İspat: Teorem 2.1.6 daki ispatın benzerini kullanılarak yapılabilir.

Stone Dualitesinden, Teorem 2.3.1 "her kompakt ve sıfır-boyutlu en çok ω_1 büyüklüğündeki uzay ω^*'ın sürekli bir görüntüsüdür" ifadesine denktir.

2.3.2 Ön Teorem[1]: X, κ büyüklüğünde kompakt uzay olsun. X'e eşlenebilen κ büyüklüğünde sıfır-boyutlu kompakt bir Y uzayı mevcuttur.

İspat: $\mathfrak{B} \in [RO(X)]^\kappa$, $\mathfrak{B}$ taban olsun ve $\varepsilon = \ll \mathfrak{B} \gg \subseteq RO(X)$ diyelim $|\varepsilon| = \kappa$ olduğu elde edilir. Y, ε'nin Stone uzayı olsun.

2.3.3 Teorem[1]: En çok ω_1 büyüklüğünde her kompakt uzay, ω^*' ın sürekli bir görüntüsüdür.

İspat: X, ω_1 büyüklüğünde kompakt bir uzay olsun ve Y ön teorem 2.3.2'deki gibi olsun. Teorem 2.3.1'den $\mathfrak{B}(Y)$, $\mathcal{P}(\omega)/fin$ içine gömülebilir. Sonuç olarak Stone Dualitesinden ; ω^*, Y'ye eşlenebilir.

2.3.4 Sonuç[1]: En çok $\mathfrak{c}$ büyüklüğündeki her kompakt uzay ω^*'ın sürekli bir görüntüsüdür.

2.4 $\beta\omega$'nin Kapalı Altuzayları

Bu bölümde $\beta\omega$'nin alt uzaylarını topolojik olarak inceleyeceğiz. X, $\beta\omega$' nin kapalı bir altuzayı ise X'in en çok $\mathfrak{c}$ büyüklüğünde olacağı açıktır ve X ön teorem 2.2.2 (d)'den sıfır-boyutlu kompakt $\mathcal{F}$- uzayı olmalıdır. Continuum Hipotezi altında bu koşulların gerek ve yeter olduğu aşikardır.

X, bir uzay olsun. X'in bir $B \subseteq X$ alt kümesi için B'nin komşuluklarının sayılabilir kesişimi yine B'nin bir komşuluğu oluyorsa, B altkümesine P – kümesi denir.

X ve Y kompakt uzaylar olsun. A, X'in kapalı bir altkümesi ve $f: A \to Y$ sürekli bir dönüşüm olsun. Kolayca görülebilir ki ;

$$\mathfrak{B} = \{f^{-1}(y): y \in Y\} \cup \{\{x\}: x \in X \backslash A\}$$

birleşimi X'in üst yarı sürekli ayrışımı dır ve $X \backslash \mathfrak{B}$ ayrışım uzayını $X \cup_f Y$ ile göstereceğiz. $\pi: X \to X \cup_f Y$ ayrışım fonksiyonu ise Y ve $\pi(A)$'yı tanımlayalım.

2.4.1 Ön Teorem[1]: X ve Y kompakt $\mathcal{F}$- uzayları, $A \subseteq X$ kapalı $p-$kümesi ve $f: A \to Y$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $X \cup_f Y$ $\mathcal{F}$- uzayıdır.

İspat: U ve V, $X \cup_f Y$'nin ayrık açık F_σ-altkümeleri olsun. Y, $\mathcal{F}$- uzayı olduğundan, $(U \cap Y)^- \cap (V \cap Y)^- = \emptyset$ dir. E ve F, $E \cap F = \emptyset$ olacak şekilde $(U \cap Y)^-$ ve $(V \cap Y)^-$ kesişimlerin kapalı G_δ' komşulukları olsun. $U\backslash E$ ve $U\backslash F$, X'in F_σ-açık ayrık altkümeleridir. X'in $\mathcal{F}$- uzay ve A'nın $P-$kümesi olmasından dolayı,

(1) $(U\backslash E)^- \cap (V\backslash F)^- = \emptyset$,

(2) $((U\backslash E)^- \cap (V\backslash F)^-) \cap A = \emptyset$ olur.

Bu ise $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ olduğunu verir ve ön teorem 1.2.2 (b)'den $X \cup_f Y$'nin $\mathcal{F}$- uzayı olduğu elde edilir.

2.4.2 Ön Teorem[1]: X uzayı, her G_δ boş olmayan kümesinin içinin sonsuz olduğu özelliğine sahip kompakt uzay olsun. $A \subseteq X$ kapalı ve hiçbir yerde yoğun olmasın ve $f: A \to Y$ sürekli bir dönüşüm olsun. O zaman $X \cup_f Y$ uzayı boş olmayan her G_δ kümesinin içinin sonsuz olduğu özelliğine sahiptir.

2.4.3 Ön Teorem(CH)[1] : ω^* hiçbir yerde yoğun olmayan kapalı bir A P-kümesi içerir öyle ki A, ω^*'a izomorftur.

İspat: Teorem 2.2.6 dan ω^*'ı

$$Z = (\omega \times W(\omega_1 + 1))^*$$

ile temsil edebiliriz.

$A = (\omega \times \{\omega_1\})^*$ olsun. $A \approx \omega^*$ ve ω_1 in $W(\omega_1 + 1)$ içinde $P-$noktası olmasından dolayı A' nın $P-$kümesi olduğu görülür. A hiçbir yerde yoğun değildir.

Şimdi bu bölümün asıl teoremine gelelim.

2.4.4 Teorem(CH)[16]: X bir uzay olsun. Aşağıdaki bağıntılar denktir.

(1)X, en çok $\mathfrak{c}$ büyüklüğünde kompakt sıfır-boyutlu $\mathcal{F}$-uzayıdır.

(2)X, $\beta\omega$ içine kapalı bir alt uzay gibi gömülebilir.

(3)X, ω^* içine hiçbir yerde yoğun olmayan herhangi kapalı bir $P -$ kümesi gibi gömülebilir.

İspat: (2)⇒(1) ve (3)⇒(2) açıktır. (1)⇒(3) olduğunu ispatlamak yeterlidir. X, en çok $\mathfrak{c}$ büyüklüğünde kompakt, sıfır boyutlu $\mathcal{F}$-uzayı olsun. Sonuç 2.4.3 ten ω^*'ın hiçbir yerde yoğun olmayan $A \approx \omega^*$ koşulunu sağlayan kapalı bir A $P -$ kümesi bulunabilir. Aynı zamanda ön teorem 2.3.4' ten $f: A \to X$ sürekli fonksiyonu mevcuttur. $Z = \omega * \cup_f X$ diyelim.

(a) Z ,sıfır-boyutludur.
(b) Z, $\mathfrak{c}$-büyüklüğündedir.
(c) X, Z' nin hiçbir yerde yoğun olmayan kapalı $P -$ kümesidir.

2.4.1 ön teorem ve 2.4.2 ön teoremden Z'nin boş olmayan her G_δ altkümesinin içi sonsuz olan küme içinde kompakt bir $\mathcal{F}$-uzayı olduğunu buluruz. Sonuç olarak sonuç 2.2.4'ten $Z \approx \omega^*$ olur.

$\mathfrak{B}$ Boole cebiri olsun. Eğer $\mathfrak{B}$ nin Stone uzayı $\mathcal{F}$-uzayı ise $\mathfrak{B}$ ye "zayıf sayılabilir tamdır" denir. Boole cebirinde $\mathfrak{B}$, Boole cebiri ve

Her $B, C \in [\mathfrak{B}]^{\leq\omega}$ öyle ki her $b \in B$ ve her $c \in C$: $b \wedge c = 0$ ve her $b \in B$, $c \in C$ için $b \leq a \leq c'$ olacak şekilde, $a \in \mathfrak{B}$ bulunabiliyorsa "$\mathfrak{B}$, zayıf sayılabilir tamdır" denir.

2.4.5 Teorem(CH) [1]: $\mathfrak{B}$ Boole cebiri olsun. Aşağıdaki bağıntılar denktir.

(1) $\mathfrak{B}$, zayıf sayılabilir tamdır ve $|\mathfrak{B}| \leq \mathfrak{c}$
(2) $\mathfrak{B}$, $\mathcal{P}(\omega)'$ nin homeomorfik görüntüsüdür.

2.4.6 Sonuç(CH)[15]: Maksimum $\mathfrak{c}$ kardinalitesine sahip her zayıf sayılabilir tam Boole cebiri tam bir Boole cebirinin homeomorfik görüntüsüdür.

2.4.6 Teorem[15] :X maksimum $\mathfrak{c}$ büyüklüğünde aşırı bağlantısız uzay olsun. X, $\beta\omega$ içine gömülebilir.

İspat : $I = [0,1]$ aralığı için $X \subseteq I^c$ olsun. I^c ayrılabilir olduğundan $f: \beta w \to I^c$ olacak şekilde sürekli bir dönüşüm vardır. $g: f \restriction f^{-1}(X)$ ve $Z \subseteq f^{-1}(X)$ kapalı, $g \restriction Z: Z \to X$ (indirgemez) olacak şekilde Z kümesi alalım. Zorn Lemmasından(Eğer Z, her zincirinin bir üst sınırı olan kısmi sıralı bir küme ise bu halde P kümesinin en büyük öğesi vardır.) Z'nin varlığı kolayca anlaşılır. $h = g \upharpoonright Z$ nin homeomorfizma olduğu elde edilir. Bunun için h'nin birebir olduğunu göstermek yeterlidir. Sonuç için x ve $y \in Z$ noktalarını alalım. Sırasıyla x' in ve y' nin Z içinde ayrık kapalı U ve V komşuluklarını alalım. h indirgenemez olduğundan;

$h(x) \in \overline{\operatorname{int} h(u)}$, $h(y) \in \overline{\operatorname{int} h(V)}$ ve $\operatorname{int} h(U) \cap \operatorname{int} h(V) = \emptyset$.

X aşırı bağlantısız olduğundan,

$\overline{\operatorname{int} h(u)} \cap \overline{\operatorname{int} h(V)} = \emptyset$ ve böylece $h(x) \neq h(y)$ dir. Bu da istenendir.

2.5 $\beta\omega$'nin C^*-gömme Alt uzayları

Bu bölümde $\beta\omega$ içine C^*- gömme $\beta\omega$'nin alt uzaylarını inceleyeceğiz. $\beta\omega$ içinde C^*-gömmenin topolojik bir özellik olması ve bunun $\beta\omega$ içinde özel bir küme olarak düşünülmesi gerekmemektedir.

2.5.1 Tanım: X' in herhangi bir açık $\mathcal{U}$ örtüsü için $(\cup \varepsilon)^- = X$ olacak şekilde bir $\varepsilon \subseteq \mathcal{U}$ sayılabilir alt ailesi mevcut ise X uzayı "zayıf Lindölöf uzayı" olarak adlandırılır.

Görülebilir ki sayılabilir zincir kuralını sağlayan her uzay zayıf Lindölöf uzayıdır.

Sıradaki önemli sonuç $\beta\omega$ ni birçok C^*-gömme altuzayları olduğunu gösterir.

2.5.2 Teorem[12]: $X \subseteq \beta\omega$ zayıf Lindölöf uzayı olsun. O zaman X, $\beta\omega$ içinde C^*-gömmedir.

İspat: X in içindeki ayrık sıfır kümelerinin $\beta\omega$ içinde ayrık kapanışları olduğunu göstermemiz yeterlidir. Bunu ispatlamak için; $Z_0, Z_1 \subseteq X$ kümeleri X içinde ayrık sıfır-kümeler olsun. Z_0 ve Z_1'in $cl_X U \cap cl_X V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V ayrık açık komşulukları mevcuttur. Her $x \in X$ için $C_x \subseteq \beta\omega$, x in $\beta\omega$ içinde aşağıdaki koşulları sağlayan kapalı bir komşuluğu olsun.

(1) $x \in cl_X U$ ise $C_x \cap cl_X V = \emptyset$,

(2) $x \in cl_X V$ ise $C_x \cap cl_X U = \emptyset$

(3) $x \notin (cl_X U \cup cl_X V)$ ise $C_x \cap (cl_X U \cup cl_X V) = \emptyset$ dir.

X zayıf Lindölöf uzay olduğundan X içinde, öyle bir x_n (n<ω) dizisi vardır öyle ki

$\bigcup_{n<\omega}(C_{x_n} \cap X)$, X içinde yoğundur. Her $n < \omega$ için,

$E_n = C_{x_n} \setminus \bigcup C_{x_i}$ (i<n) diyelim.

$\{E_n : n < \omega\}$ ailesi $\beta\omega$'nin ayrık kapalı altkümelerinin ailesidir öyle ki;

(1) $\bigcup_{n<\omega} (E_n \cap X)$, X içinde yoğundur.

(2) Her E_n, $cl_X U$ ya da $cl_X V$'den birinin içindedir.

$E = \bigcup \{E_n : n < \omega \;\&\; E_n \cap U \neq \emptyset\}$ ve $F = \bigcup \{E_n : n < \omega \;\&\; E_n \cap V \neq \emptyset\}$.

Buradan $E \cap F = \emptyset$ ve $\beta\omega$'nin $\mathcal{F}$-uzayı olmasından dolayı $\overline{E} \cap \overline{F} \neq \emptyset$ dir.

$U \subseteq \overline{E}$ ve $V \subseteq \overline{F}$ olduğundan, $\beta\omega$ içinde Z_0 ve $Z_1{}'$ in ayrık kapanışları olduğunu elde ederiz.

2.5.3.Teorem[19]: $X \subseteq \beta\omega$ olsun. Aşağıdaki bağıntılar denktir:

(1) X, zayıf Lindölöftür.

(2) X, $\beta\omega$ içinde C^*-gömmedir.

(3) $|C^*(X)| = \mathfrak{c}$.

İspat[5]: (1)⇒(2) teorem 2.5.2' de gösterildi. (2)⇒(3), $|C^*(\beta\omega)| = \mathfrak{c}$ olduğundan açıktır. (1)' in (3)'e denk olduğunu göstermek yeterlidir.

X Lindelöf ise Continuum Hipotezinden $\beta\omega$'nin aşağıdaki koşulları sağlayan $\{C_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ kapalı altkümelerinin ailesi mevcuttur.

(1) $X \subseteq \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$,

(2) Her $\alpha < \omega_1$ için $(X \setminus C_\beta \cap X)^- = \emptyset$ dir.

Böylece $\kappa_\alpha < \omega_1$ $(\alpha < \omega_1)$ ordinallerinin düzgün artan dizisi ve her $\alpha < \omega_1$ için $D_\alpha \subseteq C_{\kappa_\alpha}$ kapalı kümesi bulunabilir öyle ki;

(3) $D_\alpha \cap X \neq \emptyset$

(4) $D_\alpha \cap \left(\bigcup_{\beta<\alpha}(C_\beta \cap X) \cup \bigcup_{\beta<\alpha}\left(D_{\kappa_\beta} \cap X\right)\right)^- = \emptyset$.

Her $\alpha < \omega_1$, $\widetilde{C_\alpha} = C_\alpha \cap \overline{X}$ ve $D = \bigcup_{\alpha<\omega_1} D_\alpha \cap \overline{X}$ olsun.

Not: D, $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \widetilde{C_\alpha}$ içine C*-gömmedir.

f: D → [0,1] verilsin. Her $\alpha < \omega_1$ için

$f_\alpha = f \restriction D \cap \bigcup_{\beta<\alpha} \widetilde{C_\beta}$ olsun.

(4)Her $\alpha < \omega_1$ için $\mathrm{dom}(f_\alpha)$ nın $\overline{X}$in bir açık $\mathcal{F}_\sigma$-altkümesi olduğunu verir. Her $\alpha < \omega_1$ için f_α nın g_α: $\bigcup_{\beta<\alpha} \widetilde{C_\beta} \to I$ genişlemesini her $\beta < \alpha$ için $g_\beta \subseteq g_\alpha$ olacak şekilde belirleyelim. Bunun her $\beta < \alpha$ için sağlandığını varsayalım.

$\bigcup_{\beta<\alpha} g_\beta \cup f_\alpha$ fonksiyonu , $\bigcup_{\beta<\alpha} \widetilde{C_\beta} \cup (D \cap \widetilde{C_\alpha})$ üzerinde süreklidir ve bu küme $\overline{X}$ in açık bir $\mathcal{F}_\sigma$-altkümesidir.

Böylece $\overline{X}$, $\mathcal{F}$-uzayı olduğundan (ön teorem 2.2.2 (d)) bu fonksiyon istenen g_a'ya genişletilebilir.

Son olarak $g = \bigcup_{\alpha<\omega_1} g_\alpha$ istenendir. D boş olmayan kapalı ayrık kümelerin ω_1 ayrışımı olduğundan,

$|C^*(D)| \leq 2^{\omega_1}$'dir ve sonuç olarak $\left|C^*(\bigcup_{\alpha<\omega_1} \widetilde{C_\alpha})\right| \geq 2^{\omega_1}$.

X, $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \widetilde{C_\alpha}$ içinde yoğun olduğundan , $|C^*(X)| \geq 2^{\omega_1} > \mathfrak{c}$ olur. Bu ise çelişkidir.

2.5.4.Sonuç (CH)[1]: $x \in \omega *$ ise $\omega * \backslash \{x\}$, $\omega *$ içinde C^*-gömme değildir.

İspat: Eğer $\omega * \backslash \{x\}$, $\omega *$ içinde C^*-gömme ise, $\omega *$'ın $\beta\omega$ içinde C^*-gömme olmasından dolayı $\omega * \backslash \{x\}$ $\beta\omega$'de C^*-gömmedir.

2.6. $\omega *$'ın Autohomeomorfizmaları

Bu bölümde $\omega *$'ın autohomeomorfizmaları üzerinde duracağız.

$\pi: \omega \to \omega^-$ bir permütasyon ise $\beta\pi \restriction \omega *$, $\omega *$'ın bir auotohomeomorfizmasıdır.

π_0 ve π_1, ω'nin iki permütasyonu olsun. Eğer $\beta\pi_0 \restriction \omega * = \beta\pi_1 \restriction \omega *$ olduğunu elde ederiz ve

$$|\{n < \omega : \pi_0(n) \neq \pi_1(n)| < \omega \text{ olur.}$$

Eğer eşit değilse $\pi_0(E) \cap \pi_1(E) = \emptyset$ olacak şekilde sonsuz bir $E \subseteq \omega$ kümesi bulunabilir. $E \in X$ olacak şekilde $X \in \omega*$ alalım. $i < 2$ için $\pi_i(E) \in \beta\pi_i(x)$ olduğundan,

$\beta\pi_0(x) \neq \beta\pi_1(x)$ olur ki bu da varsayımımızla bir çelişki oluşturur. Her $\eta<\xi<c$ için ω' nin $\{\pi_\xi : \xi < c\}$ permütasyon ailesini bulabileceğimizden $\{n : \pi_\eta(n) \neq \pi_\xi(n)\}$ sonsuzdur. Bu ise ω^*'ın en az c tane autohomeomorfizmasının var olduğunu verir.

2.6.1.Ön Teorem(CH)[18] : $\omega*$'ın 2^c tane autohomeomorfizması vardır.

İspat: Teorem 2.2.6 dan $\omega * \approx (\omega \times 2^c)^*$ (burada 2^c contor küpün kardinalitesidir.) ve $\omega*$'ın c büyüklüğünde olmasından dolayı 2^c den fazla autohomeomorfizması olamaz.

Şimdi Teorem 2.6.4 ün önemli iki adımı olan sonuçları görelim.

2.6.2.Ön Teorem[14]: U ve V, $\omega*$'ın kompakt olmayan açık $\mathcal{F}_\sigma$-altkümeleri olsun. $h(U) = V$ olacak şekilde $h: \omega * \rightarrow \omega *$ autohomeomorfizması mevcuttur.

İspat: ω' nin $\{A_n : n < \omega\}$ ve $\{B_n : n < \omega\}$ olacak şekilde iki sonsuz kümesini alalım.

$$U = \bigcup_{n<\omega} A_n^* \text{ ve } V = \bigcup_{n<\omega} B_n^* \text{ olsun.}$$

Her $n < \omega$ için $\pi:\omega \rightarrow \omega$, $\pi(A_n) = B_n$ olacak şekilde $\pi=\omega\rightarrow\omega$ bir permütasyonu olsun. O zaman $h = \beta\pi \restriction \omega *$ istenendir.

2.6.3. Sonuç(CH)[1]: S ve T. $S\approx T\approx \omega *$ olacak şekilde $\omega *$ içinde hiçbir yerde yoğun olmayan P –kümeler olsun. O zaman,

$$h: \omega * \rightarrow \omega *, \; h(S) = T$$

olacak şekilde bir autohomeomorfizması mevcuttur.

İspat: X, $\omega \times \omega*$'ın bir homeomorfizması olsun. Teorem 2.2.6'dan $X^* \approx \omega * \approx S$ olduğundan X^* ve S'yi tanımlayabiliriz. Diğer bir deyişle $\beta X \cap \omega^* = S$ varsayalım. Yine $Z_0 = \omega * \cup X$ olsun.

$$U \cap \beta X, \; \beta X \text{ içinde açık ve}$$

$$U \cap \omega *, \; \omega * \text{ içinde açık ise}$$

$U \subseteq Z_0$ açıktır.

Benzer şekilde ön teorem 2.4.1 ve ön teorem 2.4.2 nin ispatından Z_0'ın Paravičenko uzayı olduğunu bulabiliriz ve sonuç olarak $Z_0 \approx \omega *$ elde edilmiş olur. Benzer şekilde $\beta Y \cap \omega^* = T$ olacak şekilde $\omega \times \omega *$' ın Y homeomorfizmasını alalım ve Paravičenko uzayından $Z_1 = \omega * \cup Y$ dir. Ön teorem 2.6.2'den $\bar{h}: (x) = Y$ ile tanımlı $\bar{h}: Z_0 \to Z_1$ homeomorfizması mevcuttur. Bu durumda $h = \bar{h} \restriction \omega *$ istenendir.

2.6.4.Teorem(CH)[1]: $S,T \subseteq \omega^*$, $S \approx T \approx \omega^*$ olacak şekilde hiçbir yerde yoğun olmayan P-kümeleri ve $h:T \to S$ homeomorfizma olsun. O zaman h , $\bar{h}:\omega^* \to \omega^*$ homeomorfizmasına genişletilebilir.

İspat: $f:\omega^* \to \omega^*$, $f(S) \cap T = \emptyset$ olacak şekilde bir homeomorfizma olsun. Öyle bir homeomorfizmanın varlığından ω^*'ın tüm kapalı altkümeleri ω^*'a homeomorftur ve $S \cup T$ hiçbir yerde yoğun değildir. $Z = f(S) \cup T$ diyelim ve $\varphi:Z \to Z$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\begin{cases} \varphi(t) = f(h(t)), & t \in T \text{ ise} \\ \varphi(t) = h^{-1}(f^{-1}(t)), & t \in f(S) \text{ise} \end{cases}$$

Eğer $\varphi:Z \to Z$ fonksiyonu $\bar{\varphi}:\omega^* \to \omega^*$ homoemorfizmasına genişletilebilirse $\bar{h} = f^{-1} \circ \bar{\varphi}$, ω^*'ın h'ye genişleyen bir homeomorfizmasıdır. $Z \approx \omega^*$ olduğundan, ön teorem 2.6.3'ten sıradaki bağıntıyı ispatlamak yeterlidir.

NOT: Hiçbir yerde yoğun olmayan $A \subseteq \omega^*$ P-kümesi vardır öyle ki $A \approx \omega^*$ ve A'nın her autohomeomorfizması ω^*'ın bir autohomeomorfizmasına genişletilebilir.

$X = \omega \times W(\omega_1 + 1) \times \omega^*$ ve $Y = \omega \times \{\omega_1\} \times \omega^*$ diyelim. $Y^* \subseteq X^*$ ın hiçbiryerde yoğun olmayan P-kümesi olduğunu görmek kolaydır. $\pi:Y \to \omega^*$ dönüşümü $\beta\pi:\beta Y \to \omega^*$ fonksiyonuna genişler. $f:\beta\pi \restriction Y^*$ ve $B = X^* \cup_f Y^*$ olsun. Ön teorem 2.4.1 ve 2.4.2 den B, Paravičenko uzayıdır. $A = \omega^*$, B'nin içinde hiçbir yerde yoğun olmayan P-küme olduğu açıktır. $h:A \to A$ herhangi bir homeomorfizma olsun. X' in $\bar{h} = id \times id \times h$ homeomorfizması , $\beta\bar{h}:\beta X \to \beta X$ homeomorfizmasına genişler. $\bar{h} \to \beta \to \beta$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{cases} \bar{h}(x) = h(x), & x \in A \, ise \\ \bar{h}(x) = \beta\bar{h}(x), & x \notin A \, ise \end{cases}$$

Burada yapılacak küçük bir değişiklik $\bar{h}$'ın B'nin bir autohomeomorfizması olduğunu gösterir. B≈ω* (Ön teorem 2.2.4) olduğundan istenilen elde edilmiş olur.

Aşağıdaki teorem genişletilmiş homeomorfizmalarla ilgilidir.

2.6.5.Teorem(CH)[18]: p,q ∈ ω* P-noktaları olsun. h(p)=q ile tanımlı h:ω*→ω* autohomeomorfizması vardır.

2.7. ω *'ın P-noktaları ve Homojen Olmayışı

ω homojen olduğundan, ω*'ın homojen olduğu düşünülebilir ancak bu düşünce doğru değildir. Biz CH altında ve ZFC altında ω*'ın homojen olup olmadığını inceleyeceğiz. Teorem 2.2.4. CH altında ω*'ın P-noktaları içerdiğini göstermektedir. ω*'ın içindeki her nokta P-nokta ise, ω* kompakt olduğundan ω*'ın sonlu olduğu çıkar ki bu ise yanlıştır. Böylece ω*'ın hem P-nokta hem de P-nokta olmayan noktalar içerdiğini buluruz ve ω*'ın homojen olmadığı sonucuna ulaşırız. Burada bahsettiğimiz ω*'ın içindeki P-noktalarının varlığını daha basit bir ispatla verelim.

2.7.1. Ön Teorem[1]: ω* hiçbir yerde yoğun olmayan ω_1 kümeleriyle örtülemez.

İspat: $\{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, ω*'ın hiçbir yerde yoğun olmayan ω_1 kümelerinin bir ailesi olsun.Ön teorem 2.2.2 veya Teorem 1.2.5'ten, ω*'ın boş olmayan hem açık hem kapalı $\{C_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ ailesini bulabiliriz öyle ki,

(1) $C_\alpha \cap D_\alpha = \emptyset$

(2) $\beta < \alpha$ ise $C_\alpha \subseteq C_\beta$ dir.

Sonuç olarak $\bigcap_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$'nın bir noktası $\bigcup_{\alpha<\omega_1} D_\alpha$ tarafından kapsanmaz.

2.7.2. Sonuç (CH) [18]: ω* P-noktaları içerir.

İspat: $\mathcal{A}$= $\{\bar{U}\setminus U$: U⊆ω* açık F_σ kümesi$\}$ olsun. CH'den $|\mathcal{A}| \leq \omega_1$ dir. Ön teorem 1.7.1.'den, ω* $\setminus \bigcup\mathcal{A} \neq \emptyset$ ve bu kümenin her noktası P-noktadır.

Teorem 2.6.5.'ten herhengi iki x, y∈ ω* P-noktaları için, CH altında h(x)= y ile tanımlı h:ω*→ω* autohomeomorfizması mevcuttur. Buradan akla, ω*'ın içindeki noktaların sadece P-nokta ya da P-nokta olmayan noktalardan oluşup oluşmadığı sorusu gelmektedir. Bunun doğru olmadığını aşağıdaki teoremden görebiliriz.

X'in bir x noktası, her sayılabilir $F \subseteq X \setminus \{x\}$ için $x \notin \overline{F}$ koşulunu sağlıyorsa x noktasına zayıf P-nokta denir.

2.7.3. Teorem(CH) [8]: (1) ω^*'ın içinde P-nokta olmayan zayıf P-noktalar mevcuttur.(2) $x \in \omega^*$ noktası vardır öyle ki,

(a) Bazı sayılabilir $F \subseteq \omega^* \setminus \{x\}$ için $x \notin \overline{F}$

(b) Her sayılabilir ayrık $D \subseteq \omega^* \setminus \{x\}$ için $x \notin \overline{D}$ vardır.

BÖLÜM 3

–CH ALTINDA βω ve βω\ω UZAYLARI

Bu bölümde Continuum Hipotezi sağlanmadığı durumda βω ile ω*'ın özelliklerini göreceğiz 2. bölümde elde edilmiş hemen hemen tüm Continuum Hipotezi sonuçlarının burada doğru olmayacağını göreceğiz.

3.1. $\mathcal{P}(\omega)$ /fin II Gösterimi;

2.1. bölümünde elde edilmiş teorem 2.1.6 –CH altında sağlanamaz; yani teorem 2.1.6 Continuum Hipotezine denktir.

3.1.1. Teorem[20]: Continuum Hipotezi, H_{ω} koşulunu sağlayan tüm c-boyutlu Boole cebirlerinin izomorf oldukları ifadesine denktir.

İspat: İspatı topolojik olarak vermek en uygundur. Boole cebirine rahatlıkla uyarlanabilir.

–CH altında homeomorfik olmayan iki Paravičenko uzayı tanımlayalım.

Örnek 1. X(p,X) = ω_1 olacak şekilde bir p-noktasına sahip bir S Paravičeko uzayı alalım.

Ön teorem 2.2.3 ten β<φ<ω_1 için $C_\alpha \subset C_\beta$ olacak şekilde ω* içinde kapalı kümelerin $\langle C_\alpha$: α < $\omega_1\rangle$ ω_1 dizisi mevcuttur.

$p = \bigcap_{\alpha<\omega_1} C_\infty$ ve S=X/P→Xin bölüm uzayı olsun. Paravivičenko uzayı tanımında istenilen özellikteki S uzayı elde edilmiş oldu.

2.4.1. ön teoremden S, $\mathcal{F}$ uzayıdır ve p={P} dersek

X(p,S)= ω_1 olacağı açıktır.

Örnek 2. Her x∈T için π(x,T) olacak şekilde bir T Paravičenko uzayı tanımlayalım.

T=$(\omega x2^c)^*$ diyelim. $\omega x2^c$ sıfır boyutlu Lindelöf uzayı olduğundan T sıfır boyutludur ve c büyüklüğündedir. Sonuç olarak Teorem 2.2.5 T'nin Paravičenko uzayı olduğunu verir.

α<c için π_a ile $2^c \rightarrow 2$ dönüşümünü gösterelim ve α<c ve i<2 için

K(α,i)=$T_n(\omega x\pi_a^{-1}$ ({i})$^-$

tanımlayalım.

K(α,i)' nin T' nin boş olmayan kapalı alt kümesi olduğunu ve α=α′ i=i′ için K(α,i)= K(α′, i′) olduğunu hatırlayalım.

$\mathcal{K}$= {K(α,i):α<c, i<2}

tanımlayalım.

NOT: $\mathcal{K}$'nin ω_1 ayrık kümelerinin kesişimi boştur.

Simetri özelliğinden I=$\bigcap_{\alpha<\omega_1}$ K$(\alpha,0)$'ın içinin boş olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun doğru olmadığını varsayalım. O zaman $\emptyset \neq U \cap T \subseteq$I olacak şekilde $U \subseteq$ $\beta(\omega\times2^c)$ kapalı kümesi vardır.

Her α< ω_1 için U\\($\omega\times\pi_a$({0}) kümesi $\omega\times2^c$'nin kompakt alt kümesidir ve U∩($\omega\times2^c$) kompakt olmadığından,

$\emptyset = U \cap(\omega\times2^c) \subseteq\{n_a\}\times \pi_a^{-1}(\{0\})$ kosulunu sağlayan n_a doğal sayısı ile

A= {α $<w_1$: n_a< c}koşulunu uygun n doğal sayısı mevcuttur. O zaman içi boş olmayan{n}$\bigcap_{a\in A} \pi_a^{-1}(\{0\})$, {n}×$2^c$'nin bir alt kümesidir.

Keyfi bir x∊T alalım ve $\mathcal{U}$, x için π-tabanı olsun. $\mathcal{F}$={K∈$\mathcal{K}$: x∈K} ailesi c kardinaltesine sahiptir. Her K∈$\mathcal{F}$ için U(K)⊆$\mathcal{K}$ olacak şekilde U(K)∈ $\mathcal{U}$ mevcuttur ve bu yüzden varsayımımızda her U∈$\mathcal{U}$ için { K∈$\mathcal{K}$:U(K)=U}≤ω olduğudundan

$|\mathcal{U}| \geq |\mathcal{F}|$=c dir. Buradan T2nin en fazla c büyüklüğünde olduğunu bildiğimizden π(x,T)=c olur.

3.2. Topolojik Bakış II

Bölüm 2.1. sonuç 2.2.1'in Continuum Hipotezine denk olduğunu göstermektedir. Teorem 2.1.1'in ispatında $(\omega \times 2^{c})^*$'ın içi boş olan kapalı ω_1 kümelerinin boş kesişimlerini içerdiğini gösterdik.

Halbuki MA+¬CH, ω^*'ın ω_1 kapalı altkümelerinin boş olmayan tüm kesişimlerinin içinin boş olmadığını gösterir. Sonuç olarak MA+¬CH, $(\omega \times 2^{c})^*$'ın ω^*'a homeomorf olmadığını vermektedir. Bu ise MA+¬CH, X lokal kompakt, σ-kompakt, kompakt olmayan sayılabilir π-büyüklüğünde uzay ise X^*'ın $\mathfrak{c}$ den büyük olmayan açık altkümelerinin boş olmayan kesişimlerinin içinin boş olmadığını ifade ettiği için $(\omega \times 2^{\omega})^*$ gibi bir uzayın ω^*'a homeomorf olduğunu göstermede kullanılamaz.

3.2.1. Teorem[20]: ω^* ve $(\omega \times \omega(\omega+1)^*$'ın homeomorf değillerdir.

İspat: $h:\omega^* \to \omega^*$ autohomeomorfizmalarının hepsi için $h=\beta\pi \restriction \omega^*$ olacak şekilde $\pi: \omega \to \omega$ permütasyonunun varlığı gösterilmişti. Biz ise ω'nin herhangi bir π permütasyonu için $\beta\pi$'nin sabit noktalarının kümesinin $\beta\omega$'nin kapalı bir alt kümesi olduğunu ve sonuç olarak $\beta\pi \restriction \omega^*$'nin sabit noktalarının kümesinin ω^*'ın kapalı bir alt kümesi olduğunu göreceğiz.

$\pi:\omega \to \omega$ bir permütasyon ve $p \in \omega^*$, $\beta\pi'$ nin sabit bir noktası olsun. $E=\{n<\omega: \pi(n)= n\}$ olsun. $E \in p$ ise; p, $\beta\pi'$ nın sabit noktalarını barındıran kapalı bir komşuluğa sahiptir ve bu komşuluğa E'nin $\beta\omega$ içindeki kapanışı denir. $E \notin p$ olduğunu varsayalım. $F= \omega \setminus E$ ile tanımlayalım. Her $n \in F$ için $\pi(n) \neq n$ olduğundan F'nin $\pi(F_0) \cap F_0 = \emptyset$ ve $\pi(F_1) \cap F_1 = \emptyset$ olacak şekilde F_1, F_0 kümelerine ayırabiliriz. Genelliği bozmadan $F_0 \in p'$ dir ve $\pi(F_0) \in \beta\pi(p)$ ve böylece $p \neq \beta\pi(p)$ olur. Bu ise çelişkidir. $\beta\pi$'nin sabit noktalarının kümesinin açık olduğu sonucuna ulaşırız. Bunun Shelah'ın modeliye ispatlarsak ω^* ve $(\omega \times W(\omega+1))^*$ homeomorf değildir. $(\omega \times W(\omega+1)^*$'ın bir h autohomeomorfizmasını h'ın sabit noktalarının Fix(h) kümesi kapalı olmayacak şekilde seçelim.

Sonuca ulaşmak içinse E, $F \leq \omega$ sonsuz kümeler ve $\pi:\omega \to \omega$ $\pi(E)=F$ ($\pi(F)=E$ olan) permütasyonu alalım.

$f:\omega \times W(\omega+1) \to \omega \times W(\omega+1)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\begin{cases} f(n,m) = < n, \pi(m) >, (m \in \omega), \\ f(< n, \omega >) = (n, \omega) \end{cases}$$

h=βf↾ (ω×W(ω+1)* diyelim. Buradan

Fix(h)=(ω×{ω})* olduğunu görmek kolaydır.

Bu ise Fix(h)'ın kapalı olmadığını verir.

3.3 ω*' ın Sürekli Görüntüleri

3.3.1. Teorem(MA)[21]: Büyüklüğü c'den az her kompakt uzay ω*'ın sürekli bir görüntüsüdür.

İspat: κ<c olmak üzere Y, κ büyüklüğünde kompakt bir uzay olsun. Y, $[0,1]^{\kappa}$'nın hiçbir yerde yoğun olmayan ayrılabilirdir ve böylece $[0,1]^{\kappa}$ nın sayılabilir yoğun bir D kümesi bulunabilir.

$\mathcal{A}$={E∩D: E∈ε, E∩Y≠ ∅}

$\mathcal{B}$={E∩D E∈ ε ve Y⊆E} tanımlayalım.

$\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$'nin S(c) hipotezini sağlayacağını görmek kolaydır sonuç olarak aşağıdaki koşullara uygun J⊆D kümesi bulunabilir.

(1) Her A∈$\mathcal{A}$ için $|A \cap J|$=ω

(2) Her B∈$\mathcal{B}$ için |J\B| <ω

Z=YUJ olsun. Z kompakt ve J, Z'nin izole noktalarının kümesi olsun. Bu koşul sağlanırsa Z, ω'nin bir kompaktlanması olur ve bu ise bize Y'nin ω*'ın sürekli görüntüsü olduğunu gösterir.

E∈ ε ve E∩Y=∅ ise E∩D ∈ $\mathcal{A}$'dır ve buradan E∩J'nin sonsuz olduğu görülür. Sonuçta J, Z içinde yoğundur. x , J'nin limit noktası olsun ve x∉Y olsun. ε, sonlu kesişim altında kapalı olduğundan ve Y'nin kompakt olmasından Y⊆E ve x∈E_1 olacak şekilde E_0, E_1 ∈ ε mevcuttur. Buradan E_0 ∩ D ∈ $\mathcal{B}$ ve (2)'den J\E_0 sonludur.

Fakat E_1, J'nin sonsuz noktasını içeriyordu. Bu çelişkiden Z'nin kompakt ve J'nin bağlantılı ayrık uzay olduğu çıkar.

κ ve λ sonsuz kardinaller olsun ve aşağıdaki sağlasın.

G(λ,κ) aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde ω*'ın kapalı kümelerinin (U_ε , $\varepsilon<\kappa$) κ-dizileri ve (U_ε , $\varepsilon<\lambda$) λ-dizileri mevcuttur.

(1) $U_\xi \subset U_\eta$, $\xi<\eta<\kappa$ ise

(2) $V_\xi \subset V_\eta$, $\xi<\eta<\lambda$ ise

(3) $(\cup_{\xi<\kappa} U_\xi) \cap (U_{\xi<\lambda} V_\xi) = \emptyset$ fakat

(4) $(\cup_{\xi<\kappa} \lambda V_\xi)^- \cap (U_{\xi<\lambda} V_\xi)^- \neq \emptyset$

3.3.2. Teorem[21]: X kompakt uzayı ve f: X→ω* sürekli dönüşüm vardır öyle ki MA+ ¬CH+¬G(c,c) altında X, c büyüklüğündedir, f indirgenemezdir ve ω*'den X üzerine bir dönüşüm tanımlanamaz.

Y= ω*, $G_{<c}$ topolojisi ile tanımlı olsun ve , $G_{<c}$ c'den küçük ω*'ın kapalı alt kümelerinin kesişimlerinin Y için açık taban oluşturduğu bir topoloji olsun.

ε, w(Y) kardilesine sahip Y'nin bir tabanı olsun. Tümevarımdan her α<c için $\varepsilon_\alpha \subseteq \mathfrak{B}(Y)$ alt cebirlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

(1) $\varepsilon_0 = \ll \varepsilon \gg$,

(2) $|\varepsilon_\alpha| \leq |\cup_{\beta<\alpha} \varepsilon_\beta|$,

(3) β<α< c ve $\mathcal{F} \in [\varepsilon_\beta]^{<c}$ ise $\cup\mathcal{F} \in \varepsilon_\alpha$..

Y'nin c'den küçük hem açık hem kapalı alt kümelerinin birleşimi yine hem açık hem kapalı olacağından bu cebirleri tanımlayabiliriz. $\beta=\cup_{\alpha<c}\varepsilon_\alpha$ diyelim ve c düzgün ise β, β(Y) nin <c-kapalı altbecerileri olur. X= st(β) olsun.

Buradan X'in istenen özellikte olduğunu elde ederiz.

Kolayca görülebilir ki;

$\{f(x)\}=\cap\{\overline{B}:B\in x\}$

şeklinde tanımlı f: x→ω* sürekli bir dönüşümdür. Bundan sonra, MA+¬CH+¬G(c,c) olduğunu kabul edeceğiz. Aynı zamanda Y'yi ve X'in $\mathfrak{B}$

üzerindeki sabit ultrafitleri içererek altuzayı tanımlayacağız. Her $\omega \leq \kappa < \mathfrak{c}$ için $2^{\kappa} = \mathfrak{c}$ olacağından (2), X'in $\mathfrak{c}$ büyüklüğünde olduğunu verir. İlk önce f'nin indirgenemez olduğunu elde ederiz. $A \subseteq X$ kapalı alt küme olsun. Y, X' in içinde yoğun olduğundan $y \in Y \setminus A$ noktası mevcuttur. $\bar{E} \cap A = \emptyset$ ve $y \in \bar{E}$ olacak şekilde $E \in \varepsilon$ alalım. E, ω^*'ın hem açık hem kapalı altkümelerinin $\mathfrak{c}$'den küçük kesişimi olduğundan, P($\mathfrak{c}$)'den, $C \subseteq E$ olacak şekilde boş olmayan $C \subseteq \omega^*$ hem açık hem kapalı kümesi bulabiliriz. Kolayca görülebilir ki $C \cap f(A) = \emptyset$

Şimdi ise ω^*'ın X ile eşlenemeyeceğini gösterelim. $y \in Y$ koyalım. Aşağıdaki koşulları sağlayan X'in kapalı altkümelerinin $\{E(y,\alpha): \alpha < +\}$ ve $\{E(y,\alpha): \alpha < \mathfrak{c}\}$ ailelerini tanıyalım.

(4) $\alpha < \beta < \mathfrak{c} \rightarrow B(y,\alpha) \subset B(y,\beta) \subset X \setminus \{y\}$,

(5) $\alpha < \beta < \mathfrak{c} \rightarrow E(y,\alpha) \subset E(y,\beta) \subset X \setminus \{y\}$,

(6) $\alpha < \beta < \mathfrak{c} \rightarrow B(y,\alpha) \cap E(y,\beta) = \emptyset$,

(7) $(\cup\{B(y,\alpha): \alpha < \mathfrak{c}\})^{-} \cap (\cup\{E(y,\alpha): \alpha < \mathfrak{c}\})^{-} = \{y\}$,

(8) $(\cup\{B(y,\alpha): \alpha < \mathfrak{c}\}) \cup \{\cup E(y,\alpha): \alpha < \mathfrak{c}\} = X \setminus \{y\}$.

$\{Z_a: \alpha < \mathfrak{c}\}$, X'in y'yi ihtiva eden tüm hem açık hem kapalı altkümelerinin ailesi olsun.

(7) ve (8)'i elde etmek için istenen hem açık hem kapalı küme ailelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

(9) $Z_a \cap B(y,\alpha) \neq \emptyset$, $Z_a \cap E(y,\alpha) \neq \emptyset$, ve $X / Z_a \subseteq B(y,\alpha) \cup E(y,\alpha)$

Tümevarım için (4), (5), (6) ve (9) doğrudur. Varsayalım ki; her $\alpha < \beta < \mathfrak{c}$ için hipotezimiz doğru olsun.

$B = \cup_{\alpha<\beta} B(y,\alpha)$ ve $E = \cup_{\alpha<\beta} E(y,\alpha)$ elde edilir. Bu durumda (6)'da tanımlandığı gibi $\mathfrak{B}$'nin $<\mathfrak{c}$-kapalı olduğundan $\bar{B}$ ve $\bar{E}$ kümelerinin her ikisi de açıktır ve $\bar{B} \cap \bar{E} = \emptyset$ dir. Y, X' in Pc-noktası olduğundan y'nin komşuluklarını $\mathfrak{c}$'den küçük kesişimlerini yine y'nin bir komşuluğudur, $y \notin \bar{B} \cup \bar{E}$ dir. $F \subseteq Z_a$, $\bar{B} \cup \bar{E}$ tarafından kapsanmayan y' nin hem açık hem kapalı bir komşuluğu olsun. F'nin iki boş olmayan ayrık hem açık hem kapalı G,H altkümeleri y'yi içermesin.

B(y,α)=$\bar{B}$∪G∪(X\(E∪Z_a) ve E(y,α)= $\bar{E}$∪H tanımlayalım. Tümevarım hipotezimizin sağlanacağı açıktır. Şimdi g:ω*→X sürekli dönüşümünün var olduğunu kabul edelim.

B_y= (∪{g^{-1} (B(y,α): α<c})$^-$ ve E_y=(∪{g^{-1}E(y,α): α<c})$^-$ olsun.

B_y − G(c,c) ve $B_y \cap E_y=\emptyset$. y∈Y'nin $B_y$ve E_y'nin ihtiva ettiği tek nokta olduğu görülür.

Y_0 ={y∈Y: $B_y \cup E_y$ = ω*} olsun. O zaman B_y ve E_y'nin her ikisi de hem açık hem

kapalıdır ve y_0, y_1 ∈Y ayrıktır. $B_{y_0} \neq B_{y_1}$ ve $|Y_0| \leq$c dir.

Y_1 ={y∈Y: $B_y \cup E_y \neq$ ω*} olsun. y ∈ Y_1 ise g^{-1} 'nin ω*'da içi boş değildir. Bu ise $|Y_1|$< c olduğunu verir.

(c)'den $|Y|=2^c$ ve Y=$Y_0 \cup Y_1$ elde ederiz ve ispat tamamlanır.

2.3.3 UYARI: 3.2.3 Teoremin ispatında aşağıdaki hipotezlere ihtiyaç duyduğumuzu görürüz.

(a) 2^κ= c, ω≤κ≤c ise

(b) − G(c,c) dir.

2.3.4 UYARI: 𝔅, 3.2.2 Teoremdeki uzayın hem açık hem kapalı alt kümelerinin Boole cebiri ise 𝒫(ω)/fin 𝔅 içine gömülebilir. 𝒫(ω)/fin ve 𝔅'nin izomorf tamlamaları vardır. Fakat |𝔅|=c dir ve 𝔅, 𝒫(ω)/fin içine gömülemez.

Not: X, Teorem 3.3.2 deki uzayı olsun.

Z=(ω×X)*, ω*' ın sürekli görüntüsü olmayan Paravičenko uzayı olduğu görülür. Z, X ile eşlenebilir.

Teorem 3.3.6 [22] :

(A) MA+→CH ile G(ω_1,c) ve G(c,c)'nin her ikisi de yanlıştır.

(B) MA+→CH ile G(ω_1,c) ve G(c,c)'nin her ikisi de doğrudur.

X uzayı teorem 2.7.3 ün ispatındaki gibi tanımlanan X'in ω*'ın sürekli görüntüsü olup olmadığı belli değildir.

Son olarak, [28]'in her normal kompakt uzayı ω*'ın sürekli bir görüntüsü olduğunu gösterdiğini hatırlayalım. Burada akla gelen soru ise her birinci sayılabilir kompaktlamanın ω*' ın sürekli görüntüsü olup olmayacağıdır.

3.4. βω'nin Kapalı Alt Uzayları II

Bölüm 2.4'de her kompakt sıfır-boyutlu ϲ büyüklüğündeki $\mathcal{F}$-uzayının Continuum Hipotezi altında βω içine gömülmeyeceğini gösterdik. Bu aşağıdaki bağıntıyı düşünmeye neden olur.

FE: Her sıfır boyutlu kampakt $\mathcal{F}$-uzayı aşırı bağlantısız bir uzay içine gömülebilir.

Boole cebirinde FE zayıf sayılabilir Boole cebirinin bazı tam Boole cebirlerinin homeomorfik görüntüleri olduğu anlamına gelmektedir.

FB ve BE'yi aşağıdaki gibi tanımladığımız durumda FE'yi FB+BE olarak gösterebiliriz.

FB: Her sıfır boyutlu kompakt $\mathcal{F}$- uzayı temel bağlantısız uzay içine gömülebilir.

BE: Her temel bağlantısız uzay aşırı bağlantısız bir uzay içine görülebilir.

FB ve BE'nin her ikisinin de Boole cebirinde bir açıklaması vardır.

3.5. βω'nin C* Gömme Altuzayları II

Teorem 2.5.3. ün doğru olması gerekmediğini görmek kolaydır. 2^{ω_1}=ϲ ise Teorem 2.4.7'den $\beta\omega_1$, ω* içine gömülebilir. $h(\omega_1)$' in βω içinde bir C*-gömme fakat $h(\omega_1)$ 'in zayıf Lindelöf olmadığı açıktır.

3.5.1. Ön Teorem[23]: [∀K<ϲ, →G(K,ω)+→G(ϲ,G] A⊆ω* kapalı Pc-kümesi ise ω*\A, ω* içine C*-gömmedir.

İspat: $Z_0 \cap Z_1 \neq \emptyset$ olacak şekilde ω*\A nın ayrık boş olmayan kapalı G_δ altkümelirini alalım $\alpha \in \overline{Z_0} \cap \overline{Z_1}$ ve $\{C_\alpha$: α<∈} ω*'ın α'yı içeren tüm hem açık hem kapalı altkümelerinin ailesi olsun. Tümevarımdan α<c iken, ω*'ın aşağıdaki koşullar sağlayacak şekilde G_i (i<2) kapalı altkümelerini tanımlayalım.

(1) $G_\alpha{}^i \subseteq Z_i$ ve $G_\alpha{}^i \cap C_\alpha \neq \emptyset$

(2) β<α ise $G_\beta{}^i \subset G_\alpha{}^i$olur.

Tümevarıma devam edersek ¬G(c,c) elde ederiz. Her β<α, i<2 için G_β kümelerinin tanımlandığını varsayalım. A, Pc-küme olduğundan

$\bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta^0 \cup \bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta^1 \subseteq$C olacak şekilde hem açık hem kapalı C⊆ω*\A kümesi

mevcuttur.

¬G(α,ω)'den, $\bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta^i \subseteq C_i$

olacak şekilde C: ⊆ C∩ Z_i hem açık hem kapalı kümeleri bulunabilir.

$C_\alpha{}'$=C_α ∩ (ω*\C) diyelim. $x_i \in Z_i \cap C_\alpha{}'$ alalım. E_i ⊆ω* A'da bulunmayan

x_i kapalı komşulukları olsun. Teorem 2.2.5'ten $E_i \cap Z_i$ içi boş olmayan hem açık hem kapalı bir küme içerir buna F_i diyelim. $G_\alpha{}^i$=$C_i \cup F_i$ dir. Bu ise bir çelişkidir.

3.5.2. Sonuç[23]: [∀K<c, ¬G(K,W)+ ¬G(c,c)]

A={x,ϵω*: ∃ B⊆ω* x i içeren hiçbir yerde yoğun olmayan Pc- küme}. XϵA ise ω*\{x} ω* içinde C* gömmedir.

İspat: Ön Teorem 3.5.1'den X∈A ve 𝔅, x'i içeren hiçbir yerde yoğun olmayan kapalı Pc-kümesi ise β(ω*\𝔅)=ω* bu ise bize β(ω*\{x})=ω* olduğunu gösterir.

Tabi ki akla Ön Teorem 3.5.2'nin ispatındaki istediği gibi elde edilen hipotezlerin durumunda A'nın boş olmamasının mümkün olup olmadığı sorusu gelmektedir. Bu sorunun cevabı evettir. Teorem 3.3.6 dan MA¬CH+¬G(c,c) durumunda A boş değildir. MA'nın Pc-noktalarının varlığını ve her κ<c için ¬G(ω,κ) olduğunu ima ettiğini göstermek kolaydır.

Sonuçta istenilen elde edilmiş olur.

3.5.3 Sonuç[1]: Bazı xϵω* için β(ω*\{x})= ω olur.

Ön teorem 3.5.3'teki x noktası Pc-nokta olduğundan "gerçekten" var olduğu belirsizdir. Biz ω* içindeki tümleyenlerin ω* içinde C*-gömme olan birçok noktanın "gerçekten" var olduğunu göstermez.

3.5.4. Teorem[23]: [∀ K<c,→G(K,ω)+→G(c,c)] x∈ω* P-nokta değilse ω*\{x}, ω* içinde bir C*gömmedir.

İspat: X∈ ω* p-nokta olmasın ve U⊆ω* , X∈ $\bar{U}\setminus U$ olacak şekilde açık F_σ kümesi olsun. f: ω*\{x}→[0,1] sürekli olsun.

$f_0=f\upharpoonright\bar{U}\setminus\{x\}$ ve $f_1=f\upharpoonright\omega^*\setminus\bar{U}$ olsun. ∀κ<c , −G(K,ω) olduğunda U' nun ω* içinde Pc-kümesi olduğunu görürüz. Sonuç olarak ön teorem 3.5.1'den f_1'i $g_1: \omega*\setminus\bar{U} \to [0,1]$ fonksiyonuna genişletebiliriz. Teorem 2.2.5'ten $\overline{\omega*\setminus\bar{U}}=(\omega*\setminus\bar{U}) \cup (\bar{U}\setminus U)$. Bu ise her i∈ $(U \cup \bar{U}\setminus\{x\}$ için $g_1(t) = f(t)$ olduğunu verir. Teorem 2.5.2'den U, $\bar{U}$ içinde C*-gömmedir ve sonuç olarak $\bar{U}\setminus\{x\}$, $\bar{U}$ içinde C*-gömmedir. Böylece f_0 'ı $g_0 : \bar{U} \to [0,1]$ fonksiyonuna genişletebiliriz. $g_0\upharpoonright\bar{U}\setminus (U \cup\{x\})= g_1\upharpoonright\bar{U}\setminus(U \cup\{x\})$ olduğundan $g_0\upharpoonright\bar{U}\setminus U=g_1\upharpoonright\bar{U}\setminus U$ olur. (x izole değildir; Teorem 2.2.5)

g:ω*→[0,1] aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{cases} g(t) = g_0(t), t \in \bar{U} \text{ise} \\ g(t) = g_1(t), t \notin \bar{U} \text{ise} \end{cases}$$

Kolayca görülebilir ki g sürekli ve g, f'ye genişler. ω* içinde P-noktaları bulunmadığından aşağıdaki ifadeleri doğrudur.

(1) ∀κ<c, →G(κ,ω),

(2) →G(c,c),

(3) P-noktaları yoktur.

Bu yüzden her x∈ω* için β(ω*\{x})= ω* şeklinde bir model bulunmalıdır. ω^ω üzerinde <* sıralamasını,

$f<^*g$, $|\{n < \omega: f(n) \geq g(n)\}|<\omega$ şeklinde tanımlayalım.

A⊆ω^ω kümesi her f∈ ω^ω için $f<^*g$ olacak şekilde g∈A varsa A'ya "egemendir" denir.

3.5.5 Ön Teorem[24]: ω^{ω}'ın kardinalitesi $\mathfrak{c}$'den az hiçbir altkümesinin var olmadığını varsayalım. Bu durumda ω^{ω} bir P-nokta içerir.

İspat: $\{f_{\alpha}:\alpha<\mathfrak{c}\}$ ω^{ω} olsun. Tümevarımdan $\alpha<\mathfrak{c}$ üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde bir $F \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ filtresi tanımlayabiliriz.

(1) $\mathcal{F}_{\alpha}$'nın elemanlarının sonlu kesişimleri sonsuzdur.

(2) Her $n<\omega$ için $|f_{\alpha}^{-1}(n) \cap F| <\omega$ yada belirli $n< \omega$ için $F\subset f_{\alpha}^{-1}$ $(\{0,1,\ldots,n\})$

olan $F\in \mathcal{F}_{\alpha}$ mevcuttur.

(3) $\kappa<\alpha$ ise $F_{\kappa}\subseteq \mathcal{F}_{\alpha}$ ve $|\mathcal{F}_{\alpha}| \leq |\alpha|\,.\,\omega$' dir. Her $\kappa<\alpha$ için(1), (2) ve (3) doğru olsun ve $F=\bigcup_{\kappa<\alpha} \mathcal{F}_{\kappa}$ tanımlayalım. $|\mathcal{F}| \leq |\alpha|.\,\omega < \mathfrak{c}$ olur. Her $F\in \mathcal{F}$ için,

$g(F)$: $\omega\to\omega$ fonksiyonunu

$$g(F)(n) \begin{cases} \min\left(F \cap f_{\alpha}^{-1}(n)\right), & F \cap f_{\alpha}^{-1}(n) \neq \emptyset \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $|\mathcal{F}| < \mathfrak{c}$ olduğunda her $F\in \mathcal{F}$ için $f \nleq^{*} g(F)$ olacak şekilde $f \in \omega^{\omega}$ fonksiyonu bulabiliriz.

$$X=\bigcup_{\alpha<\omega} F_{\alpha}^{-1}(n) \cap \{j<\omega: j\leq f(n)\}$$

ve $\mathcal{F}_{\alpha}$'yı her $F\epsilon\mathcal{F}$ için $|F \cap X| = \omega$ ise $\mathcal{F} \cup \{x\}$ ile üretilmiş filtre, diğer durumda $\mathcal{F}_{\alpha} =$ F olacak şekilde tanımlayalım. $\bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} \mathcal{F}_{\alpha}$ ya genişleyen herhangi bir ultrafiltrenin P-nokta olacağı açıktır.

Yukarıdaki yardımcı teoremden sıradakini ispatlamak yeterlidir.

3.5.6.Sonuç[1]: ($\forall K<\mathfrak{c},\to G(K,\omega) \to (\omega^{\omega}$' nin kardinalitesi $\mathfrak{c}$'den küçük olmayan hiçbir küresi egemen değildir.)

İspat: $\kappa= \min\{\lambda:\exists\mathcal{F}\subseteq\omega^{\omega}$ öyle ki $\mathcal{F}$ egemendir ve $|\mathcal{F}|=\lambda\}$ olsun. $\mathcal{F}$'nin egemen olduğu κ kardinalitesini sahip $\mathcal{F}\subseteq\omega^{*}$ seçelim. $\alpha<\beta$ için $f_{\alpha} < {}^{*}f_{\beta}$ anlamına gelen $F=\{f_{\alpha}$: $\alpha<\lambda\}$ varsayalım. Her $\alpha<\kappa$ için

$S_{\alpha} =\{<m,n>: n<f(m)\}$ olsun.

Her $n<\omega$ için $T_n=\{(\omega\backslash\{0,1\ldots,n)\}$ ise, $\{S_{\alpha}:\alpha<K)$ ve $\{T_n$: $h<\omega\}$ aileleri (κ,ω) aralığı ($\omega\times\omega$ üzerinde tanımlı) belirtir.

3.6. ω*'ın Autohomomorfizmaları II

Bölüm 3.2'de gösterildiği gibi ω*'ın tüm homeomorfizmalarının ω'nin bir permütasyonu olabilir. Sonuç olarak ω*'ın bu modelide tane homeomorfizma vardır. Teorem 2.6.4'ün ZFC'nin (Zermelo-Freankel küme kuramı: her sayı temelde bir kümedir. Eğer sıfır boşküme olarak tanımlanırsa ve her *n* sayının ardılı, n^{+}, $n \cup \{n\}$ olarak verilirse, doğal sayılar inşa edilmiş olur.) bir sonucu olup olmadığını bilmiyoruz. Bunun nedeni ZFC' nin ω* içinde ω*'a homeomorfik olan hiçbir yerde yoğun olmayan bir P-kümesi olup olmadığını bilmemizdir. Teorem 2.6.5. MA+ CH altında bu aksiyom ω* içinde Pc-noktalarının ve Pc-noktaları olmayan P-noktalarının varlığını gösterdiğinde yanlıştır."

3.7. ω*'ın P-noktaları ve Homojen Olmayışı II

ω* içinde P-noktalarının küme teorileri hipotezleri olmadan inşa edilip edilmeyeceği sorusu yıllardır tartışılmaktadır. Sonuç olarak [29] ω* içinde bu şekildeki noktaların var olmadığını gösterdi. Bu yüzden sonuç 2.7.2 ZFC içinde uygulanamaz.

BÖLÜM 4

SONUÇ ve TARTIŞMA

Bu çalışmamızda ω kümesinin alt kümelerinin oluşturduğu $\mathcal{P}(\omega)$ Boole cebirinin Stone uzayı olan $\beta\omega$ uzayını inceledik ve $\beta\omega$ uzayıyla ilgili Continuum Hipotezinin doğruluğu ve yanlış olduğu durumlarında çok farklı sonuçlar elde edildiğini göstermiş olduk. Burada elde edilmiş ilginç sonuçlar farklı soruların doğmasına neden olmakta ve merak uyandırmaktadır.

Bu çalışma Stone-Čech kompaktlaması ile Continuum Hipotezi ve ZFC altında yapılacak çalışmalar için yardımcı bir kaynak olarak kullanılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Van Mill J., (1984), *An İntroduction to $\beta\omega$,* Vrije Universiteit Amsterdam, Amsterdam , The Netherlands .

[2] Paravičenko I.I, (1963), A Universal Bicompact of Weight ℵ, *Soviet Math. Dokl.*, 4, 592-595.

[3]Gillman.L. and M. Jerison,(1960), *Rings of Continuous Functions* ,(Von Nostrand, Princeton NJ).

[4] Gillman. L., (1966), The Space βN and The Continuum Hypothesis, *Proc. Second Prague Top. Symp.*, 144-146

[5] Fine N.J. and L.Gillman, (1960), Extension of Continuous Functions in βN, *Bull. Amer. Math. Soc.,* 66,376-381.

[6] Frolik, Z., (1967), *Homogeneity Problems for Extremally Disconnected Spaces,* Comm. Math. Univ. Carolinae, 757-763.

[7] Frolik, Z., (1967), Sums of Ultrafilters, *Bull Amer.Math.Soc.,*87-91.

[8] Kunen K., (1976), Some Points in βN, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 385-398.

[9] Kunen. K., J. Van Mill and C.F. Mills, (1980), On Nowhere Dense Closed P-sets, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 119-122.

[10] Louveau, A., (1973), Carácterisation Des Sous-Espaces Compacts de βN, *Bull. Sci. Math.,* 97,259-263.

[11] Van Mill J., (1979), Extenders From βX-X to βX, *Bull. L'Acad, Pol. Sci.*, 117-121.

[12] Comfort W.W, N.Hindman and S. Negrepontis, (1969), *F'*-Spaces and Their ProductsWith P-Spaces, *Pacific J.Math.,* 28, 489-502.

[13] Comfort W.W and S. Negrepontis,(1974),*The Theory of Ultrafilters*, Springer, Berlin, New York.

[14] Van Douwen, E.K and J.Van Mill, (1981), *The Homeormorphism Extension Theorem for $\beta\omega$-ω*, to appear.

[15] Efimow B.A., (1970), Extremally Disconnected Compact Spaces and Absolutes Trans., *Moscow. Math. Soc.* 23, 243-285.

[16] Balcar. B., R. Frankiewicz and C.F. Mills, (1980), More on Nowhere Dense Closed P-sets, *Bull. L'Acad. Pol. Sci* .,28,295-299.

[17] Negrepontis. S., (1967), Absolute Baire Sets Proc., *Amer. Math. Soc.*, 18, 691-694.

[18] Rudin.W., (1956), *Homogeneity Problems in the Theory of Cečh Compactifications*, Duke Math. J., 23, 409-419.

[19] Woods R.G,(1976),Characterizations of Some C*-embedded Subspaces of βN, *Pacific J.Math.*,65,573-579.

[20] Van Douwen E.K. and J. Van Mill, (1978), Paravičenkos Characterization of βω-ω implies CH, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 72,539-541.

[21] Van Douwen E.K. and T.C. Przymusinski, (1980), Seperable Extensions of First Countable Spaces, *Fund.Math.*, 99, 147-158.

[22] Kunen K.,(1980) , *(κ,λ*)-gaps Under MA,* (preminary title of m.s), to appear.

[23] Ketonen J.A., (1976), *On The Existance of Points in the Stone Cečh Compactification of İntegers*, Fund.Math., 97 , 91-94.

[24] Van Douwen E.K. and J.Van Mill, (1981), *There Can be C*-embedded Dense Proper Subspaces in βω-ω,* to appear.

[25] Wimmers E., (1978), *The Shelah P-point Independence Theorem,* İsrael J. Math. ,to appear.

[26] Kunen K., (1978), *Weak P-points in N*,* Coll. Math.Soc.Jănos Bolyai .23.Topology, Budapest (Hungary), 741-749.

[27] Balcar B. and P.Vojtăĵ, (1981), Refinement Properties and Extensions of Filters in Boolen Algebras , *Trans.Amer.Math.Soc.*, 265-283.

[28] Kunen K., (1976), Some Points in βN, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 80, 385-398.

[29] Mills C.F., [1978], An Easier Proof of Shelah P-points Independence Theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear.