**GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# KLASİK ÖLÇÜM, BULANIK ÖLÇÜM VE LATİS DEĞERLİ ÖLÇÜM ARASINDAKİ İLİŞKİ

**MATEMATİK BÖLÜMÜ**
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MAHİR DEMİR**
**MAYIS 2012**

# Klasik Ölçüm, Bulanık Ölçüm ve
# Latis Değerli Ölçüm Arasındaki İlişki

**Gaziantep Üniversitesi**
**Matematik Bölümü**
**Yüksek Lisans Tezi**

**Danışman**
**Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN**

**Mahir DEMİR**
**MAYIS 2012**

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Klasik Ölçüm, Bulanık Ölçüm ve Latis Değerli Ölçüm Arasındaki İlişki
Öğrencinin, Adı Soyadı: Mahir DEMİR
Tez Savunma Tarihi: 18.05.2012

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. Ramazan KOÇ
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

| Jüri Üyeleri | İmzası |
|---|---|
| Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN | ................................ |
| Yrd. Doç. Dr. Ali BOZKURT | ................................ |
| Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN | ................................ |

**İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.**

**Mahir DEMİR**

# ÖZ

## KLASİK ÖLÇÜM, BULANIK ÖLÇÜM VE LATİS DEĞERLİ ÖLÇÜM ARASINDAKİ İLİŞKİ



DEMİR, Mahir

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN



Mayıs 2012, 87 sayfa



Bu tezde, klasik ölçüm, bulanık ölçüm ve latis değerli ölçüm kavramları incelenmiş ve bu kavram arasındaki bazı ilişkiler verilmiştir. Bu kapsamda ilk olarak klasik kümeler, bulanık kümeler ve kısmi sıralı kümelerin cebirsel yapıları tanıtılmıştır. Sonra, bu kümelerin tanım, teorem ve örnekleri verilmiştir. Daha sonra klasik ölçüm, bulanık ölçüm ve latis konuları ile ilgili temel tanım ve teoremler verilerek detaylı soru çözümleri yapılmıştır.

Son olarak da klasik ölçümle bulanık ölçüm, latis değerli ölçümle klasik ölçüm ve bulanık ölçümle latis değerli ölçüm arasındaki bazı ilişkiler incelenmiştir.



**Anahtar kelimeler:** Klasik ölçüm, bulanık ölçüm, latis değerli ölçüm, bulanık küme, latisler.

## ABSTRACT

### THE RELATIONSHIP AMONG CLASSICAL MEASURE, FUZZY MEASURE AND LATTICE-VALUED MEASURE

DEMİR, Mahir

M. Sc. in Depertman of Mathematics

Supervisor: Asst Prof. Dr. Mehmet ŞAHİN

May 2012, 87 pages

In this thesis, the concepts of classical measure, fuzzy measure and lattice-valued measure were studied. and some relations related to these concepts are given. Firstly, algebraic structure of classical sets (sets), fuzzy sets and partially ordered sets is introdeced. Then these sets's definition, theorem and examples are mentioned. Then by giving the basic definition and theorems of classical measure, fuzzy measure and lattice-valued measure questions solved in detail.

Finally, we examine some relations between classical measure with lattice-valued measure, classical measure with fuzzy measure and fuzzy measure with lattice-valued measure.

**Keyword:** Classical measure, fuzzy measure, lattice-valued measure, fuzzy set, lattices.

**TEŞEKKÜRLER**

Bu çalışma süresince gösterdiği yol ve yöntemlerle desteklerini benden esirgemeyen Sayın hocalarım Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN'e, Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN'a ve benden maddi manevi hiçbir desteğini esirgemeyen değerli aileme teşekkür ederim…

# İÇİNDEKİLER

SAYFA

## SEMBOLLER LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $X$ | Evrensel küme |
| $R$ | Reel sayılar kümesi |
| $\varnothing$ | Boş küme |
| $2^{A}$ | A kümesinin kuvvet kümesi |
| L | Latis kümesi |
| $\mathcal{C}$ | Küme sınıfı |
| $A \times B$ | A ile B nin kartezyen çarpımı |
| $f$ | Klasik küme fonksiyonu |
| $f^{-1}$ | $f$ fonksiyonunun tersi |
| $D_f$ | $f$ fonksiyonunun tanım kümesi |
| $\Re_f$ | $f$ fonksiyonunun değer kümesi |
| $1_A(x)$ | İşaret fonksiyonu |
| $\mu$ | Klasik ölçüm fonksiyonu ( veya bulanık ölçüm fonksiyonu) |
| $X_E$ | Karakteristik fonksiyon |
| $\mu_A$ | A kümesinin karakteristik fonksiyonu |
| $\overline{E}$ ($E^C$) | $E$ kümesinin tümleyeni |
| $\{E_n\}$ | Kümeler dizisi |
| $\Re$ | Halka ( ya da cebir) |
| $\varphi$ | Yarı halka |
| $F$ | $\sigma$-halka |
| $M$ | Monoton sınıf |
| $\beta$ | Bağıntı |
| $\vee$ | En küçük üst sınır |
| $\wedge$ | En büyük alt sınır |

| | |
|---|---|
| $\vee$A | A kümesinin en küçük üst sınırı |
| $\wedge$A | A kümesinin en büyük alt sınırı |
| $G$ | Bulanık küme |
| $G_\alpha$ | $\alpha$ seviyeli elemanlarının kümesi |
| $U$ | Bulanık evrensel küme |
| $m_0$ | Aralıklar üzerindeki lebesque ölçümü |
| $\mu^*$ | Dış ölçüm |
| F | Ölçülebilir kümelerin sınıfı |
| $g_\lambda$ | λ-bulanık ölçümü |
| Bel | Güvenirlik ölçümü |
| PI | Makul ölçüm |
| L | Kümeler latisi |
| $\ell$ | Uzunluk fonksiyonu |
| $LV(\Re)$ | Latis değerli küme sınıfı (veya halka) |
| $LV(P(X))$ | Latis değerli kuvvet kümesi |
| $LV(\varphi)$ | Latis değerli yarı halka |
| $LV(\mathcal{T})$ | Latis değerli cebir |
| $LV\sigma(\mathcal{T})$ | Latis değerli $\sigma$-cebir |
| $L$F $(X)$ | Tüm $L$-bulanık kümelerinin ailesi |

## ŞEKİLLER LİSTESİ

SAYFA

# 1. BÖLÜM

## GİRİŞ

Ölçüm, temel olarak bir ipin uzunluğunu, bir tarlanın alanını ve bir evin haciminin hesaplanması, ihtiyacından doğmuştur ve insan yaşamında kolaylıklar getirmiştir. Bu duruma paralel olarak ölçüm kavramının hayatımıza girişi çok eskilere dayanmaktadır. Ölçüm ilk olarak, insanlar tarafından kendi sayılarını veya hayvanlarının sayılarını belirlemek için, ardından bir çubuğun veya bir ipin reel düzlemde ki uzunluğunun ölçümünün belirlenmesi için, daha sonraları tarımın gelişmesi ve yerleşik hayata geçiş ile birlikte bir tarlanın alanını hesaplanmak ve bir evin hacmini hesaplamak için basit anlamdaki ölçümleri temsil etmektedir. Ancak bu basit anlamdaki ölçümler daha kompleks ölçümler için yetersiz kalmıştır. Örneğin bir ağacın hacminin hesaplanmasında veya bir yaprağın yüzey alanının hesaplanmasında bir çok problemle karşılaşılmıştır. işte bu noktada basit anlamda ölçümün yetersizliği ortaya çıkmıştır. Buna paralel olarak daha kompleks şekil, cisim veya kümelerin ölçümü için bilimin ve özellikle de matematiğin gelişmesiyle bir çok çalışma yapılmıştır. Örneğin; A.L. Cauchy (1789-1857) integrali, bir toplamın limiti olarak tanımlayan ilk matematikçi oldu. Daha sonra Riemann (1826-1865), Cauchy'nin çalışmalarını sürdürmüştür. Ayrıca G. Cantor (1845-1918) integral ile ölçüm arasındaki ilişkiyi sezinlemiştir. Yapılan çalışmalar arasında özellikle de Fransız matematikçiler Emile Borel (1871-1956) ve Henri Lebesque (1875-1941) in yapmış olduğu çalışmalar bugünkü klasik ölçüm teorisinin temelini oluşturmaktadır. Klasik ölçüm teorisindeki toplamsallık özelliğinden dolayı bu ölçüme toplamsal ölçüm de denilmektedir.

Bilimin hızlı ilerleyişine bağlı olarak toplamsallık şartının çoğu zaman kısıtlayıcı olduğu görülmüştür. Buna bağlı olarak toplamsallık yerine monotonluk, süreklilik gibi daha esnek şartlar kullanılarak oluşturulan ölçüm kuralları oluşturulmuştur. Bu konuda özellikle Shafer$[21,22]$, Sugeno$[23,24]$ ve Zadeh $[33,34]$ tarafından önemli çalışmalar yapılmıştır. Bu ölçümler genel olarak bulanık ölçüm olarak adlandırılır.

Bulanık ölçümler, klasik ölçümlerin genelleştirilmiş halidir. Bu ölçümün temelinde 1930'ların sonlarında meşhur kuantum fizikçisi olan Max Blanck' in "çok değerli mantığı" kümelere uygulaması vardır. Bu bilimin, bulanık kümeler ve üyelik fonksiyonları ile tanışması demekti. Yaklaşık otuz sene sonra Zadeh $[33]$ tarafından

$$\mu : X \to [0,1]$$

tanımlı bir dönüşüm olmak üzere;

$$\mu = \{(x,\mu(x)) : \mu(x) \in [0,1]\}$$

bulanık kümesinin tanımının verilmesiyle matematikte yeni bir çığır açılmış oldu. Bilinen olgularla ifade edilen klasik (kesin) kümeler yerine dereceli üyelik fonksiyonuyla ifade edilen bulanık kümeler tanımlanmış oldu. Bu bulanık küme teorisiyle birlikte klasik kümelerin gerçek olaylarla daha çok örtüşen bulanık kümelere genelleştirilmesine bağlı olarak, klasik ölçümlerin de bulanık ölçümlere genelleştirilmesi önemli bir çalışma alanı olmuştur.

Klasik ölçümlerin bulanık ölçümlere genelleştirilmesine ek olarak son yıllarda klasik ölçümlerin ve bulanık ölçümlerin latis değerli ölçümlere genelleştirilmesi ile ilgili çalışmalar da yapılmaktadır. Yapılan bu çalışmalara paralel olarak bu tezde klasik ölçüm, bulanık ölçüm ve latis değerli ölçüm arasındaki ilişki ortaya konmaya çalışılmıştır.

Bu tezin ikinci bölümünde klasik kümeler, bulanık kümeler, küme sınıfları ve kısmi sıralı kümeler hakkında genel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde klasik ölçümle alakalı temel tanım ve teoremler verilerek çok sayıda örneğe yer verilmiştir. Dördüncü bölümde bulanık ölçümle ilgili temel tanım ve teoremler verilerek örnekler çözülmüştür. Beşinci bölümde latislerle alakalı temel tanım ve teoremler verilerek örnekler çözülmüştür. Son olarak altıncı bölümde ise klasik ölçümle bulanık ölçüm arasındaki ilişki, klasik ölçümle latis değerli ölçüm arasındaki ilişki ve latis değerli ölçümle bulanık ölçüm arasındaki ilişki verilmiştir.

## 2. BÖLÜM

## KÜMELER İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

Klasik ölçüm, bulanık ölçüm ve latis değerli ölçüm kavramlarını inşa ederken kullanacağımız temel tanım, teorem ve örneklerin yer aldığı bu bölümde, klasik ölçüm kuramını tanımlayacağımız küme sınıflarının ürettiği halkalar ve cebirler $[18,29]$ ile bulanık kümeler ve bulanık kümeler üzerindeki cebirsel yapılar yer almaktadır $[5,29,33,34]$. Ayrıca bu bölümde, latisleri oluştururken kullanacağımız kısmi sıralı küme ile ilgili temel tanım ve teoremlere de yer verilmiştir $[2,27]$.

### 2.1. Kümeler ve Fonksiyonlar

Tüm kümeleri kapsayan en geniş kümeye evrensel küme denir. Bu çalışmada evrensel küme $X$ ile gösterilmiştir. Hiç bir elemanı olamayan kümeye boş küme denir ve $\varnothing$ ile gösterilir. $X$ 'e ait herhangi bir $\mathrm{A}$ alt kümesinin tüm alt kümelerinin ailesine $\mathrm{A}$ nın kuvvet kümesi denir ve $P(\mathrm{A})$ veya $2^{\mathrm{A}}$ ile gösterilir. $\mathrm{A}, B \in X$ olsun.

**i)** A ile $B$ nin arakesiti: $\mathrm{A} \cap B = \{x : x \in \mathrm{A} \;\; ve \;\; x \in B\}$

**ii)** A ile $B$ nin birleşimi: $\mathrm{A} \cup B = \{x : x \in \mathrm{A} \; veya \; x \in B\}$

**iii)** A ile $B$ nin farkı: $\mathrm{A} - B = \{x : x \in \mathrm{A} \; ve \; x \notin B\}$

- $\mathrm{A} \supset B$ ise $\mathrm{A} - B$ kümesine öz küme denir.

**iv)** A nın tümleyeni: $\mathrm{A}^C = X - \mathrm{A}$ ya da $\overline{\mathrm{A}} = X - \mathrm{A}$

**v)** A ile $B$ nin simetrik farkı : $\mathrm{A} \Delta B = (\mathrm{A} - B) \cup (B - \mathrm{A})$

- $\mathrm{A} \Delta \mathrm{B} = \varnothing$ olması için $\Leftrightarrow \mathrm{A} = B$ olmasıdır.

**vi)** $\Lambda$ herhangi bir indeks kümesi olsun.

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathrm{A}_\alpha = \{x : x \in \mathrm{A}_\alpha, \forall \alpha \in \Lambda\} \quad , \quad \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathrm{A}_\alpha = \{x : x \in \mathrm{A}_\alpha, \exists \alpha \in \Lambda\}$$

olmak üzere aşağıdaki özellik De Morgan Kuralı olarak bilinir.

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)^C = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^C \quad , \quad \left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)^C = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^C$$

ya da

$$\overline{\bigcup_{t\in T} A_t} = \bigcap_{t\in T} \overline{A_t} \quad , \quad \overline{\bigcap_{t\in t} A_t} = \bigcup_{t\in T} \overline{A_t}$$

**vii)** $A \cap B = \varnothing$ ise A ile B kümelerine ayrık kümeler denir. Eğer $\alpha, \beta \in \Lambda$ olmak üzere, $\alpha \neq \beta$ iken $A_\alpha \cap B_\beta = \varnothing$ ise $\left(A_\alpha\right)_{\alpha\in\Lambda}$ küme ailesine ikişer ikişer ayrıktır denir.

**viii)** A ile B nin kartezyen çarpımı : $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$

**ix)** $A \times B$ nin herhangi bir $f : A \to B$ alt kümesi, $\forall (a,b),(a,c) \in f$ iken $b = c$ koşulunu sağlarsa, $f$ ye fonksiyon denir. $f$ nin tanım kümesi $D_f = \{a \in A : (a,b) \in f, \exists b \in B\}$ ve değer kümesi $\Re_f = \{b \in B : (a,b) \in f, \exists a \in A\}$ şeklinde tanımlanır. Herhangi bir $X \subset A$ alt kümesinin görüntüsü $f(X) = \{b \in B : b = f(a), \exists a \in X\}$ ve herhangi bir $Y \subset B$ alt kümesinin görüntüsü $f^{-1}(Y) = \{a \in A : f(a) \in Y\}$ şeklindedir.

Bir $g$ fonksiyonunun genişlemesi olan $f$ fonksiyonu, $D_f \subset D_g$ ve $D_f$ üzerinde $g = f$ olması demektir. Bir başka ifade ile, $f$, $g$ yi $D_f$ ye kısıtlıyor demektir.

**x)** Bir A kümesinin işaret fonksiyonu

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyona ait bazı özellikler aşağıdaki gibidir.

$1_{A\cap B} = 1_A \cdot 1_B$

$1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_A \cdot 1_B$

$1_{A^C} = 1 - 1_A$

**xi)** $E$ bir küme olmak üzere $\forall x \in X$ için $X_E$ karakteristik fonksiyonu

$$X_E = \begin{cases} 1 \ , & x \in E \ \ ise \\ 0 \ , & x \notin E \ \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki durumları sağlar.

- $\forall x \in X$ için $E = F \Leftrightarrow X_E(x) = X_F(x)$
- $\forall x \in X$ için $E \subset F \Leftrightarrow X_E(x) \leq X_F(x)$
- $X_x \equiv 1$ ve $X_\varnothing \equiv 0$. [18,29]

**2.2. Kümelerde Temel İşlemler**

$\mathcal{T}$, $X$ in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Yani $\{E_t : t \in T\}$, $X$ in alt kümelerinin ailesi ise $\{E_t : t \in T\} \in \mathcal{T}$ olur. $\mathcal{T}$ sınıfında ki en az bir kümeye ait olan $X$ deki tüm noktaların kümesi, $\mathcal{T}$ nin tüm kümelerinin birleşimi olarak adlandırılır

ve $$\bigcup \mathcal{T}$$

ile gösterilir. $T$ indeks kümesindeki her $t$ ye karşılık bir $E_t$ kümesi bulunur öyle ki

bu kümelerin birleşiminin sınıfı, $\{E_t : t \in T\}$ şeklindedir. Ve

$$\bigcup_{t \in T} E_t \quad \text{veya} \quad \bigcup_t E_t$$

ile gösterilir. Özel olarak $\mathcal{T} = \{E_1, E_2\}$ alınır ise

$$\bigcup \mathcal{T} = \mathrm{E}_1 \cup \mathrm{E}_2$$

ile gösterilir. Eğer $\mathcal{T} = \{\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, ..., \mathrm{E}_n\}$ $\left(\mathcal{T} = \{\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, ...\}\right)$ alınırsa

$$\bigcup \mathcal{T} = \mathrm{E}_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n$$

veya $$\left( \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right)$$

Şeklinde ifade edilir. $\mathcal{T}$ nin her bir kümesine ait olan $X$ in tüm noktalarının kümesine $\mathcal{T}$ nin kesişim kümesi denir. Ve $\bigcap \mathcal{T}$ ile gösterilir. [ 29]

**Örnek 2.2.1.** $X=\{a,b,c,d\}$ ve $\mathcal{C}=\{\{a\},\{b\},\{b,d\},\{c,d\}\}$ , $F=\{a,c\}$ alırsak

$$\mathcal{C}\cap F=\{\{a\},\{c\},\varnothing\}.$$

**Örnek.2.2.2.** $X=(-\infty,\infty)$ ve $\mathcal{C}=\{[a,b]:-\infty<a\le b<\infty\}$, $F=[0,2]$ olsun.

$$\mathcal{C}\cap F=\{[a,b]:0\le a\le b\le 2\}$$

kümesi, tüm kapalı aralıkların bir alt sınıfıdır.

**Önerme 2.2.1.** Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

**i)** $E\subset F$

**ii)** $E\cup F=F$

**iii)** $E\cap F=\mathrm{E}$. $[29]$

**Önerme 2.2.2.** $X$ evrensel küme olmak üzere kümelerde birleşim, kesişim ve tümleyen işlemleri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

**i)** Tümleme özelliği: $\bar{\bar{E}}=E$

**ii)** Değişme özelliği: $E\cup F=F\cup E$ veya $E\cap F=F\cap E$

**iii)** Birleşim özelliği: $$\bigcup_{t\in T}\left(\bigcup_{s\in S_t}E_s\right)=\bigcup_{s\in U_{t\in T}S_t}E_s$$

veya $$\bigcap_{t\in E}\left(\bigcap_{s\in S_t}E_s\right)=\bigcap_{s\in U_{t\in T}S_t}E_s$$

**iv)** Dağılma özelliği: $$F\cap\left(\bigcup_{t\in T}E_t\right)=\bigcup_{t\in T}(F\cap E_t)$$

veya $$F\cup\left(\bigcap_{t\in T}E_t\right)=\bigcap_{t\in T}(F\cup E_t)$$

**v)** İdempotentlik: $E\cup E=E$ ve $E\cap E=E$

**vi)** $E\cap\bar{E}=\varnothing$ ve $E\cup\bar{E}=X$

**vii)** $\{E_1,E_2,...\}$ ( ya da $\{E_n\}$ ) kümelerin bir dizisi olsun. $n$ nin sonsuz çoklukta değeri için $E_n$ ye ait olan $X$ in tüm noktalarının kümesine $\{E_n\}$ nin üst limiti denir ve $\lim_n Sup E_n$ veya $\overline{\lim_n} E_n$ şeklinde gösterilir. $n$ nin sonlu değeri için $E_n$ ye ait olan $X$ in tüm noktalarının kümesine $\{E_n\}$ nin alt limiti denir ve $\lim_n \inf E_n$ veya $\overline{\lim_n E_n}$ şeklinde gösterilir. [29]

**Önerme 2.2.3.** $\lim_n \sup E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i$ ve $\lim_n \inf E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} E_i$ şeklindedir. [29]

**Örnek 2.2.3.** $X = \{a,b\}$ *ve* $\{E_n\}$ kümeler dizisi olmak üzere

$$E_n = \begin{cases} \{a\} & n \text{ çift ise} \\ \{b\} & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

$\lim_n Sup E_n = X$ ve $\lim_n \inf E_n = \varnothing$ şeklindedir. Çünkü $E_1 = \{b\}$, $E_2 = \{a\}$, $E_3 = \{b\}$, $E_4 = \{a\}, \ldots$ şeklinde ifade edileceğinden $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ ve $E_1 \cup E_2 = \{a,b\}$ olmak üzere, bunu tüm kümeye genellersek

$$\lim_n \sup E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\{a,b\} \cup \{a,b\} \ldots\right) = \{a,b\} = X$$

$$\lim_n \inf E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} E_i = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\} \cap \ldots\right) = \varnothing .$$

**Önerme 2.2.4.** Her $\{E_n\}$ monoton dizisi için $\lim_n E_n$ mevcuttur ve

$$\bigcup_n E_n \quad \text{yada} \quad \bigcap_n E_n$$

dir. Bu eşitlik $\{E_n\}$ nin sırasıyla artan ya da azalan olmasına bağlıdır. Genellikle $\{E_n\}$ artan ve $\lim_n E_n = E$ ise $E_n$ artarak $E$ ye yaklaşır, eğer $\{E_n\}$ azalan ve $\lim_n E_n = E$ ise $E_n$ azalarak $E$ ye yaklaşır. Ayrıca her $n = 1,2\ldots$ için $E_n \subset E_{n+1}$ ise $\{E_n\}$ artan, $E_n \supset E_{n+1}$ ise $\{E_n\}$ ye azalan denir. Azalan ve artan dizilere monoton dizi denir. [29]

Önerme 2.2.5 ise kümelerdeki işlemler ile karakteristik fonksiyonlardaki işlemler arasındaki ilişkiyi gösterir.

**Önerme 2.2.5.**

(1) $$X_{\bigcup\limits_{t\in T} E_t} = \sup_{t\in T} X_{E_t}$$

özel olarak $$X_{E\cup F} = \max(X_E, X_F)$$

(2) $$X_{\bigcap\limits_{t\in T} E_t} = \inf_{t\in T} X_{E_t}$$

ve özel olarak $$X_{E\cap F} = \min(X_E, X_F)$$

(3) $$X_{\overline{E}} = 1 - X_E$$

(4) $$X_{E-F} = X_E - \min\left(X_E, X_F\right) = \min\left(X_E, 1 - X_F\right) = \max\left(0, X_E - X_F\right)$$

(5) $$X_{E\Delta F} = \left|X_E - X_F\right|$$

(6) $$X_{\lim Sup_n E_n} = \lim_n Sup X_{E_n}$$

(7) $$X_{\lim\inf_n E_n} = \lim_n \inf X_{E_n}$$

ve $\lim_n E_n$ mevcut ise $X_{\lim_n E_n} = \lim\limits_n X_{E_n}$ dir. [29]

**Örnek 2.2.4.** Önerme 2.2.5' te (4), (5) ve (6) eşitliklerinin nasıl gerçekleştiğini inceleyelim.

(4) $E - F = E \cap \overline{F}$ ve $X_{\overline{F}} = 1 - X_F$ eşitliklerinden

$X_{E-F} = X_{E\cap \overline{F}} = \min\left(X_E, X_{\overline{F}}\right) = \min\left(X_E, 1 - X_F\right)$ elde edilir. Ayrıca

- $F \subset E$ ise $X_{E-F} = X_E - \min\left(X_E, X_F\right) = \max\left(0, X_E - X_F\right) = X_E - X_F$
- $E \subset F$ ise $X_{E-F} = X_E - \min\left(X_E, X_F\right) = X_E - X_E = \max\left(0, X_E - X_F\right) = 0$
- $E = F$ ise $X_{E-F} = X_E - \min\left(X_E, X_F\right) = \min\left(X_E, 1 - X_F\right) = \max\left(0, X_E - X_F\right) = 0$

elde edilir.

(5) $$X_{E\Delta F} = X_{(E-F)\cup(F-E)} = \max\left(X_{E-F}, X_{F-E}\right)$$

$$=\max\left(\max\left(0, X_E - X_F\right), \max\left(0, X_F - X_E\right)\right)$$

$$=\left|X_E - X_F\right|.$$

(6) $X_{\limsup\limits_n E_n} = X_{\bigcap(\bigcup E_n)} = \inf\ X_{(\bigcup E_n)} = \inf\left(\sup X_{E_n}\right) = \limsup\limits_n X_{E_n}$ .

**Örnek 2.2.5.** $\overline{\limsup\limits_n E_n} = \liminf\limits_n \overline{E_n}$ $[29]$ olduğunu gösterelim.

$$\limsup_n E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(E_n \cup E_{n+1} \cup \ldots\right)$$

$$=\left(E_1 \cup E_2 \cup \ldots\right) \cap \left(E_2 \cup E_3 \cup \ldots\right) \cap \ldots$$

$$\overline{\limsup_n E_n} = \overline{\left(E_1 \cup E_2 \cup \ldots\right) \cap \left(E_2 \cup E_3 \cup \ldots\right) \cap \ldots}$$

$$=\overline{\left(E_1 \cup E_2 \cup \ldots\right)} \cup \overline{\left(E_2 \cup E_3 \cup \ldots\right)} \cup \ldots$$

$$=\left(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \ldots\right) \cup \left(\overline{E_2} \cap \overline{E_3} \cap \ldots\right) \cup \ldots$$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} \overline{E_i} = \liminf_n \overline{E_n}\ .$$

**Örnek 2.2.6.** $\overline{\lim\limits_n}\left(E \cup F_n\right) = E \bigcup \overline{\lim\limits_n} F_n$ $[29]$ olduğunu gösterelim.

$$\overline{\lim_n}\left(E \cup F_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}\left(E \cup F_i\right)$$

$$=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup E\right) \bigcup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup F_i\right)$$

$$= E \bigcup \overline{\lim_n} F_n\ .$$

**Örnek 2.2.7.** $E_n = \{n, n+1, \ldots\}$ olmak üzere $\{E_n\}$ kümeler dizisinin üst limitini ve alt limitini gösterelim

$E_1=\{1,2,3,...\}$, $E_2=\{2,3,4,...\}$, $E_3=\{3,4,5,...\}$ …olmak üzere

$$\lim_n \sup E_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i=E_1$$

$$\lim_n \inf E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty}E_i=\varnothing .$$

**Örnek 2.2.8.** $E_n=[a_n,b_n]$ , $a_n=\min\left(0,(-2)^n\right)$ ve $b_n=\max\left(0,(-2)^n\right)$ olmak üzere $\{E_n\}$ kümeler dizisinin üst limitini ve alt limitini gösterelim:

$E_1=[-2,0], E_2=[0,4], E_3=[-8,0], E_4=[0,16], E_5=[-32,0], E_6=[0,64],\ldots$
olmak üzere

Eğer $n$ tek ise $\left[(-2)^n,0\right]$ ve eğer $n$ çift ise $\left[0,\ 2^n\right]$ dir. o halde

$$\lim_n \sup E_n=\left[(-2)^n,2^n\right]$$

ve
$$\lim_n \inf E_n=\{0\}.$$

### 2.3. Küme Sınıfları

**Tanım 2.3.1.** $X$ in tüm alt kümelerinin sınıfına ( kümelerin kümesi ) $X$ in kuvvet kümesi denir ve $P(X)$ veya $2^X$ ile gösterilir. [29]

**Tanım 2.3.2.** Boş olmayan bir $\Re$ sınıfında her $E,F\in\Re$ için

**i)** $E\cup F\in\Re$

**ii)** $E-F\in\Re$ ise $\Re$ ye bir halka denir. Başka bir deyişle bir halka, birleşme ve fark işlemlerine göre kapalı olan boş kümeden farklı bir sınıftır. Kümedeki birleşme işleminin tekliğinden dolayı aynı zamanda sonlu birleşimler altında kapalıdır. [29]

**Önerme 2.3.1.** $\varnothing$ , her halkanın alt kümesidir. [29]

**Teorem 2.3.1.** Her halka, simetrik farklar ve arakesit işlemleri altında kapalıdır ve tersine simetrik farklar ve arakesitler altında kapalı olan boş kümeden farklı her sınıf bir halkadır.

**İspat:** $$E\Delta F=(E-F)\cup(F-E)$$

ve $$E \cap F = (E \cup F) - (E \Delta F)$$

den birinci sonuç elde edilir. Tersine

$$E \cup F = (E \Delta F) \Delta (E \cap F)$$

$$E - F = (E \Delta F) \cap E$$

den istenilen elde edilir. [29] ■

**Teorem 2.3.2.** Arakesit, simetrik ayrık birleşim işlemleri altında kapalı olan boş kümeden farklı bir sınıf, bir halkadır. [29]

**İspat:** $E \Delta F = (E - (E \cap F)) \cup (F - (E \cap F))$ olduğu göz önünde bulundurulur ve Teorem 2.3.1 uygulanırsa istenilen elde edilir. [29] ■

**Örnek 2.3.1.** $X$ in tüm sonlu alt kümelerinin sınıfı bir halkadır. [29]

**Örnek 2.3.2.** $X$ reel düzlem, yani $X = (-\infty, +\infty) = \{x : -\infty < x < +\infty\}$ olsun. Sınırlı, soldan kapalı, sağdan açık aralıkların tüm sonlu birleşimlerinin sınıfı, yani

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{x : -\infty < a_i \le x < b_i < +\infty\}$$

formunda ki tüm alt kümelerin sınıfı bir halkadır.

**Tanım 2.3.3.** Boş olmayan bir $\Re$ sınıfı için

**i)** $\forall E, F \in \Re$ için $E \cup F \in \Re$

**ii)** $\forall E \in \Re$ için $\bar{E} \in \Re$

sağlanıyorsa $\Leftrightarrow$ $\Re$ ye cebir denir. Başka bir deyişle bir cebir, birleşim ve tümleyen işlemleri altında kapalı boş olmayan bir sınıftır. Açıkça bu tanımda "$\cup$" yerine "$\cap$" de yazılabiliriz. [29]

**Teorem 2.3.3.** Bir cebir $X$ ' i içeren bir halkadır ve tersine $X$ ' i içeren bir halka bir cebirdir.

**İspat:** $\Re$ bir cebir olsun. $E - F = E \cap \bar{F} = \overline{(\bar{E} \cup F)}$ olduğundan $E \in \Re$ ise

$$X = E \cup \bar{E} \in \Re$$

olacağından teoremin birinci kısmı ispatlanmış olur.

Tersine $\Re$, $X$ 'i içeren bir halka ise $\forall E \in \Re$ için $\bar{E} = X - E \in \Re$ olduğundan ispat tamamlanır. [29] ■

**Örnek 2.3.3.** Tüm sonlu kümeler ve onların tümleyenlerinden oluşan sınıf bir cebir-dir. Bu örnekte bahsi geçen özellik, Önerme 2.3.2 ile genelleştirilebilir. [29]

**Önerme 2.3.2.** $\Re$ bir halka ise $\Re \cup \{E : \bar{E} \in \Re\}$ bir cebirdir. [29]

**Tanım 2.3.4.** Boş olmayan bir $\varphi$ sınıfı aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $\varphi$ ye bir yarı halka denir.

**i)** $\forall E, F \in \varphi$ için $E \cap F \in \varphi$

**ii)** $E \subset F$ yi sağlayan $\forall E, F \in \varphi$ için sonlu $\{C_0, C_1, ..., C_n\}; C_i \in \varphi$ sınıfı mevcut olsun öyle ki

$$E = C_0 \subset C_1 \subset ... \subset C_n = F$$

ve $$D_i = C_i - C_{i-1} \in \varphi; \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Her halka bir yarı halkadır ve boş küme her yarı halkaya aittir. [29]

**Örnek 2.3.4.** $X$ in tüm tek elemanlı kümelerini ve boş kümeyi içeren sınıf bir yarı halkadır. [29]

**Örnek 2.3.5.** $X$ reel doğru olsun. Tüm sınırlı, soldan kapalı, sağdan açık aralıkların sınıfı bir yarı halkadır. [29]

**Tanım 2.3.5.** Boş olmayan $F$ sınıfı için

**i)** $E, F \in F$ için $E - F \in F$

**ii)** $E_i \in F$, $i = 1, 2, ...$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in F$

sağlanıyorsa $F$ ye bir $\sigma$-halka denir.

Bir $\sigma$-halka, sayılabilir birleşimler altında kapalı bir halkadır. [29]

**Önerme 2.3.3.** Bir $\sigma$-halka, sayılabilir kesişimler altında kapalıdır ve dolayısıyla $F$ bir $\sigma$-halka ve $\{E_n\} \in F$ bir küme dizisi ise

$$\limsup_n E_n \in F \quad \text{ve} \quad \liminf_n E_n \in F \text{ dir. } [29]$$

**Örnek 2.3.6.** Tüm sayılabilir kümelerin sınıfı bir halkadır. [29]

**Tanım 2.3.6.** $X$ ' i içeren $\sigma$- halkaya bir $\sigma$-cebir (ya da $\sigma$-cisim) denir. [29]

**Örnek 2.3.7.** Tüm sayılabilir kümeleri ve onların terslerini birlikte içeren sınıf bir $\sigma$-cebirdir. [28]

**Önerme 2.3.4.** $F$ bir $\sigma$-halka ise $F \cup \{E : \bar{E} \in F\}$ bir $\sigma$-cebirdir. [29]

**Tanım 2.3.7.** Boş olmayan bir $M$ sınıfında, her monoton dizi $\{E_n\} \subset M$

$\lim_n E_n \in M$ ise $M$ ye bir monoton sınıf denir. [29]

**Önerme 2.3.5.** Bir $\sigma$-halka, bir monoton sınıftır. [29]

**İspat:** $F$ bir $\sigma$-halka olsun. Bu durumda

**i)** $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in F$ için $\mathrm{A} - \mathrm{B} \in F$

**ii)** $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \in F$ için $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E \in F$ olacak şekilde her $\{E_i\} \subset F$ için

$$\lim_n E_n = E \in F$$

olduğundan her $\sigma$-halka bir monoton sınıftır. ■

**Önerme 2.3.6.** Bir halka aynı zamanda bir monoton sınıf ise bir $\sigma$- halkadır. [29]

**Örnek 2.3.8.** $X$ reel doğru olsun. Tüm aralıkları sınıfı ( boş küme ve tek elemanlı kümeler aralıklar olarak ifade edilebilir) bir monoton sınıftır. [29]

## 2.4 Bağıntı, Sıralı Kümeler ve Sayılabilir Kümeler

**Tanım 2.4.1.** A ve $B$ boş olmayan kümeler olsunlar. $\mathrm{A} \times B$ kartezyen çarpımının bir $\beta$ alt kümesine A kümesinden $B$ kümesine bir bağıntı denir. Eğer $(a,b) \in \beta$ ise; "*a ve b, $\beta$ ile bağlıdır*" denir ve $a\beta b$ ile gösterilir. [27]

**Örnek 2.4.1.** $X$ boş olmayan bir küme olsun. Bir küme işlemi olan '$\subset$' işlemi $P(X)$ de bir bağıntıdır. [27]

**Tanım 2.4.2.** $\beta$, A kümesinden $B$ kümesine bir bağıntı olsun. $B$ kümesinden A kümesine $\beta^{-1}=\{(b,a):\ (a,b)\in\beta\}$ bağıntısına ters bağıntı ( $\beta$ nin tersi ) denir ve

$$a\beta b \ \Leftrightarrow\ b\beta^{-1}a$$

şeklinde gösterilir. Ayrıca $b\beta^{-1}a \Leftrightarrow a\left(\beta^{-1}\right)^{-1}b$ olduğundan $\left(\beta^{-1}\right)^{-1}=\beta$ dir. [27]

**Tanım 2.4.3.** $\beta$, A kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. $\beta$ bağıntısına $\forall a,b,c\in\beta$ için

**i)** $a\beta a$ ise yansıyan

**ii)** $a\beta b$ iken $b\beta a$ ise simetrik

**iii)** $a\beta b$ ve $b\beta c$ iken $a\beta c$ oluyor ise geçişken denir. [2, 27]

**Tanım 2.4.4.** A kümesindeki bir $\beta$ bağıntısı yansıyan, simetri ve geçişken ise $\beta$ bağıntısına denklik bağıntısı denir. [27]

**Tanım 2.4.5.** A kümesinin ikişer ikişer ayrık olan alt kümelerinin $\{A_1, A_2,..., A_n\}$ küme sınıfı $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ ise o zaman $\{A_1, A_2,..., A_n\}$ küme sınıfına A nin bir parçalanışı denir. [27]

**Tanım 2.4.6.** $\beta$, A kümesinde bir denklik bağıntısı olmak üzere $\forall x\in A$ için $\hat{x}=[x]=\{y: x\beta y\}$ sınıfına A daki bir denklik sınıfı denir. Öyle ki $\beta$ tarafından oluşturulan A daki bütün denklik sınıfları $A/\beta$ ile gösterilir ve A nın $\beta$ tarafından bölümü denir. [27]

**Önerme 2.4.1.** $\beta$, A kümesinde bir denklik bağıntısı olsun. $\forall x,y\in A$ için

$$[x]=[y]\Leftrightarrow x\beta y$$

olur ve $A/\beta$, A nın bir parçalanışıdır. [27]

**Tanım 2.4.7.** A kümesindeki bir $\beta$ bağıntısına $\forall a,b\in A$ için $a\beta b$ ve $b\beta a$ iken $a=b$ oluyor ise $\beta$ bağıntısına ters simetriktir denir. [2, 27]

**Tanım 2.4.8.** $\beta$, A kümesinde bir bağıntı olsun. Eğer $\beta$ bağıntısı yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa $\beta$ bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı denir. [2, 27]

**Örnek 2.4.2.** $(P(X),\subset)$ bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Çünkü $\forall A, B \in P(X)$ için

**i)** $\forall A \in P(X)$ için $A \subset A$

**ii)** $A \subset B$ ve $B \subset A$ iken $A = B$

**iii)** $A \subset B$ ve $B \subset C$ iken $A \subset C$. [2,27]

**Tanım 2.4.9.** $(P, \leq)$ bir kısmi sıralama bağıntısı ve $A \subset P$ olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $a \in P$ ve $x \leq a$ ise $a$ ya $A$ kümesinin üst sınırı denir. Eğer $A$ kümesinin her $b$ üst sınırı için $a \leq b$ ise $a$ ya en küçük üst sınır veya $A$ kümesinin supremumu denir. $A$ kümesinin en küçük üst sınırı $\sup A$ veya $\vee A$ ile gösterilir.

Benzer şekilde $\forall x \in A$ için $a \in P$ ve $a \leq x$ ise $a$ ya $A$ kümesinin alt sınırı denir. Eğer $A$ kümesinin her $b$ alt sınırı için $b \leq a$ ise $a$ ya en büyük alt sınır veya infumum denir. $A$ kümesinin en büyük alt sınırı, $\inf A$ veya $\wedge A$ ile gösterilir. Eğer $A$ sadece $x$ ve $y$ gibi iki elemandan oluşuyorsa $\vee\{x, y\}$ yerine $x \vee y$ ve $\wedge\{x, y\}$ yerine $x \wedge y$ kullanılır. [2]

**Önerme 2.4.2.** Eğer $A \subset P$ kümesinin bir supremumu ve infimumu varsa tektir. [2]

**Tanım 2.4.10.** $(P, \leq)$ bağıntısı kısmi sıralı olsun. $\forall x, y \in P$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ var ise $(P, \leq)$ ye tam sıralama bağıntısı denir. [2]

**Örnek 2.4.3.** Reel sayılar kümesinde '$\leq$' işlemi tam sıralama bağıntısıdır. [2]

**Tanım 2.4.11.** Herhangi bir A kümesi ile N doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi arasında birebir bir tekabül kurulabiliyor ise A ya sayılabilirdir denir. Böyle bir tekabül kurulamıyor ise kümeye sayılamaz denir. Sayılabilir kümelerin sayılabilir birleşimleri de sayılabilirdir. Dahası, Q rasyonel sayılar kümesi sayılabilirdir. Fakat R-Q sayılamazdır. Bundan dolayı R (reel sayılar kümesi) de sayılamazdır. [18]

## 2.5. Bulanık Kümeler

### 2.5.1. Bulanık Kümeler ve Özellikleri

1930' ların sonlarında meşhur kuantum fizikçisi olan Max Blanck "çok değerli mantığı" kümelere uyguladı. Bu, bilimin bulanık kümeler ve üyelik fonksiyonları ile tanışması demekti. Yaklaşık otuz sene sonra Zadeh [33] tarafından

$$\mu : X \to [0,1]$$

tanımlı bir dönüşüm olmak üzere;

$$\mu = \{(x, \mu(x)) : \mu(x) \in [0,1]\}$$

bulanık kümesinin tanımının verilmesiyle matematikte yeni bir çığır açılmış oldu. Bilinen olgularla ifade edilen klasik (kesin) kümeler yerine, dereceli üyelik fonksiyonuyla ifade edilen bulanık kümelerin tanımlanması işlemleri klasik küme kavramından oldukça farklıdır. Çünkü bulanık bir küme, değişik üyelik yani dahil olma derecelerine sahip bir küme türüdür. Böyle bir küme, elemanlarının her birine 0 ile 1 arasında üyelik değeri atayabilen bir üyelik fonksiyonu ile karakterize edilebilir. Kümeye dahil olmayan elemanların üyelik değeri 0, kümeye tam dahil olanların üyelik değerleri ise 1 olarak atanır. Kümeye dahil olup olmadığı belli olmayan elemanlara ise belirsizlik durumlarına göre 0 ile 1 arasında değerler atanır. Oysa kesin küme teorisinde belirsiz eleman diye bir şey söz konusu değildir. Bir eleman kümeye ya dahildir yada tamamı ile kümenin dışındadır. Dolayısıyla kesin kümelerde bir elemanın alabileceği üyelik değeri ya 0 dır yada 1 dir. Bu bilgileri verdikten sonra bulanık kümenin tanımı ve bulanık kümeler üzerinde tanımlanan temel işlemlere değinebiliriz.

**Tanım 2.5.1.** $X$ , klasik anlamda evrensel küme ve $\mathrm{A}$ , $X$ in bir alt kümesi olsun. $\mu_{\mathrm{A}} : X \to \{0,1\}$ tanımlı olan $\mu_{\mathrm{A}}$ karakteristik fonksiyonu

$$\mu_{\mathrm{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathrm{A} \\ 0 & x \notin \mathrm{A} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Görüldüğü üzere $\mu_{\mathrm{A}}(x) ; x \in \mathrm{A}$ iken $\mu_{\mathrm{A}}(x) = 1, x \notin \mathrm{A}$ iken $\mu_{\mathrm{A}}(x) = 0$ üyelik değerlerine sahiptir.

Eğer bu tanımda değer kümesi $[0,1]$ kapalı aralığı olarak alınırsa, $\mathrm{A}$ bir bulanık küme olarak adlandırılır. Burada $\mu_{\mathrm{A}}(x)$, $x$ in $\mathrm{A}$ da üyelik derecesidir. $\mu_{\mathrm{A}}(x)$, 1'e ne kadar çok yakın ise $x$ de $\mathrm{A}$ 'ya o kadar çok aittir. Görüldüğü gibi $X$ 'in $\mathrm{A}$ alt kümesinin kesin sınırı yoktur. Bu nedenle $\mathrm{A}$ kümesi

$$\mathrm{A} = \{(x, \mu_{\mathrm{A}}(x)) : x \in X\}$$

şeklinde karakterize edilebilir. $[5, 28, 33, 34]$

**Örnek 2.5.1.** $\mathrm{A}=\{(x_1,0.2),(x_2,0.4),(x_3,0.6),(x_4,0.8),(x_5,1)\}$ sıralı çiftlerinden oluşan bir bulanık kümedir. A nın üyelik fonksiyonu $\mu_{\mathrm{A}}(x)$, $[0,1]$ aralığında değerler alır. $\mu_{\mathrm{A}}(x_1)=0.2$ , $\mu_{\mathrm{A}}(x_2)=0.4$, $\mu_{\mathrm{A}}(x_3)=0.6$ , $\mu_{\mathrm{A}}(x_4)=0.8$ $\mu_{\mathrm{A}}(x_5)=1$ Burada $x_5$ elemanı A bulanık kümesinin üyelik derecesi tam olan bir elemanı olurken $x_4$ elemanı A bulanık kümesinin üyelik derecesi en fazla olan elemanı, $x_1$ elemanı ise A bulanık kümesinin üyelik derecesi en az olan elemanıdır. Eğer $(x_6,0)$ şeklinde bir ikili verilseydi $\mu_{\mathrm{A}}(x_6)=0$ olacaktı ve bu durumda ise, $x_6$ kümeye kesin olarak dahil olmayan eleman olarak dikkate alınacaktı.

**Tanım 2.5.2.** Her $x$ elemanı $x\in X$ olmak üzere $\mu_{\mathrm{A}}(x)=0$ ise A ya boş bulanık küme denir. $\mathrm{A}=\varnothing$ şeklinde gösterilir. [28,33]

**Tanım 2.5.3.** A , bir bulanık küme olsun. Eğer $\exists x\in X$ için $\mu_{\mathrm{A}}(x)=1$ oluyorsa A kümesine normal bulanık küme denir. Eğer A bulanık kümesi normal bulanık küme değilse normalleştirmek için $\dfrac{\mu_{\mathrm{A}}(x)}{\max\mu_{\mathrm{A}}(x)}$ işlemi uygulanır. Öyle ki burada $\max\mu_{\mathrm{A}}(x)<1$ dir. [32,34]

**Örnek 2.5.2.** $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ olmak üzere

$$\mathrm{A}=\{(x_1,0.1),(x_2,0.4),(x_3,0.9)\}$$

bulanık kümesini normalleştirelim:

$$\mathrm{A}_N=\left\{(x_1,\frac{0.1}{0.9}),(x_2,\frac{0.4}{0.9}),(x_3,\frac{0.9}{0.9})\right\}$$

$$\mathrm{A}_N=\{(x_1,0.11),(x_2,0.44),(x_3,1)\}$$

şeklide olup $i=1,2,3$ için $\exists x_i\in X$ , $\mu_{\mathrm{A}_N}(x_i)=1$ olur.

**Tanım 2.5.4.** $G$ , bir bulanık küme olsun. $\alpha\in[0,1]$ için

$$G_\alpha=\{x\in X:\mu_G(x)\geq\alpha\}$$

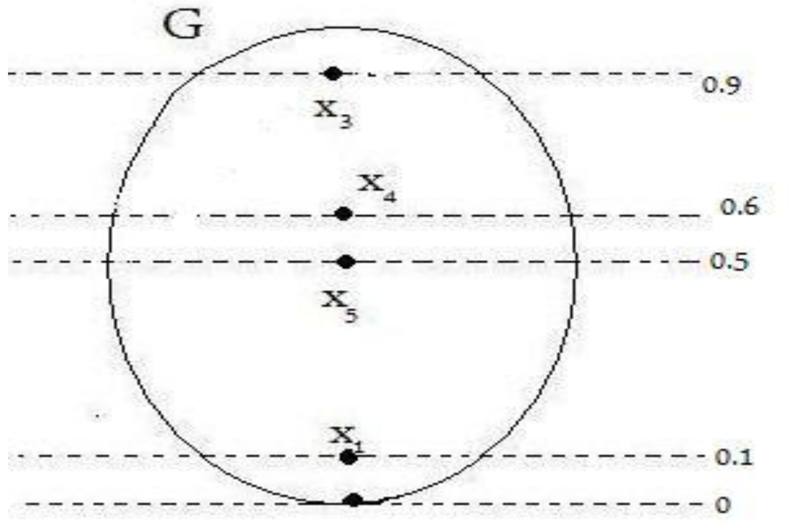
kümesine $G$ nin $\alpha$ seviyeli elemanlarının kümesi denir. $G$ nin güçlü $\alpha$ seviyeli elemanlarının kümesi ise $G_\alpha=\{x\in X:\mu_G(x)>\alpha\}$ şeklinde tanımlanır. [28]

**Örnek 2.5.3.** $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ olmak üzere

$$G=\{(x_1,0.1),(x_2,0),(x_3,0.9),(x_4,0.6),(x_5,0.5)\}$$

şeklinde bulanık kümesi tanımlansın. $\alpha=0.5$ için $G$ nin $\alpha=0.5$ seviyeli elemanlarının kümesi $[28]$

$$G_{0,5}=\{x\in X:\mu_G(x)\geq 0,5\}=\{x_3,x_4,x_5\}$$




**Şekil: 1.** Bulanık kümelerde $\alpha$ seviyeli elemanların gösterimi

### 2.6. Bulanık Kümelerinde Temel İşlemler

A ve $B$ bulanık kümeler $\mu_A$ ve $\mu_B$ sırasıyla A ve $B$ bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları olmak üzere

$$A=\{(x,\mu_A(x)):\mu_A(x)\in[0,1]\}$$

$$B=\{(x,\mu_B(x)):\mu_B(x)\in[0,1]\}$$

şeklinde tanımlanır. $[33]$

**Tanım 2.6.1.** Eğer $\forall x\in X$ için $\mu_A(x)=\mu_B(x)$ ise A ve $B$ ye eşit bulanık küme denir. $A=B$ şeklinde gösterilir. $[28,33]$

**Örnek 2.6.1.** $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ olmak üzere

$$A=\{(x_1,0.2),(x_2,0.5),(x_3,0.7)\}$$

$$B=\{(x_1,0.2),(x_2,0.5),(x_3,0.7)\}$$

şeklindeki bulanık kümeleri için

$\mu_A(x_1)=0.2$ , $\mu_B(x_1)=0.2$ , $0.2=0.2$

$\mu_A(x_2)=0.5$ , $\mu_B(x_2)=0.5$ , $0.5=0.5$

$\mu_A(x_3)=0.7$ , $\mu_B(x_3)=0.7$ , $0.7=0.7$

kümeleri $\forall x \in X$ için $\mu_A(x)=\mu_B(x)$ olduğundan A ve $B$ eşit bulanık kümelerdir ve $A=B$ şeklinde gösterilirler.

**Tanım 2.6.2.** A ve $B$, $X$ de iki bulanık küme olsun. Eğer $\forall x \in X$ için

$$\mu_A(x) \le \mu_B(x)$$

oluyor ise $B$, A yi kapsar denir ve $A \subseteq B$ şeklinde gösterilir. [28,33]

**Örnek 2.6.2.** $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ olmak üzere

$$A=\{(x_1,0.2),(x_2,0.4),(x_3,0.6),(x_4,0.8)\}$$

$$B=\{(x_1,0.2),(x_2,0.5),(x_3,0.7),(x_4,0.8)\}$$

şeklinde bulanık kümeler tanımlansın

$\mu_A(x_1)=0.2$ , $\mu_B(x_1)=0.2$ , $0.2=0.2$

$\mu_A(x_2)=0.4$ , $\mu_B(x_2)=0.5$ , $0.4<0.5$

$\mu_A(x_3)=0.6$ , $\mu_B(x_3)=0.7$ , $0.6<0.7$

$\mu_A(x_4)=0.8$ , $\mu_B(x_4)=0.8$ , $0.8=0.8$

$\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$ olduğunda A bulanık kümesi $B$ kümesinin alt kümesidir. Yani $A \subseteq B$ dır.

**Tanım 2.6.3.** A , $B$ 'nin alt kümesi ve $A \ne B$ olduğu zaman A bulanık kümesi $B$ bulanık kümesinin öz altkümesi olarak adlandırılır. $\forall x \in X$ , $\mu_A(x) < \mu_B(x)$ ise A , $B$ nin öz alt kümesidir ve $A \subset B$ şeklinde gösterilir. [33]

**Örnek 2.6.3.** $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ olmak üzere

$$A=\{(x_1,0.1),(x_2,0.3),(x_3,0.5),(x_4,0.7),(x_5,0.9)\}$$

$$B=\{(x_1,0.2),(x_2,0.4),(x_3,0.6),(x_4,0.8),(x_5,1)\}$$

şeklinde bulanık kümeler tanımlansın.

$\mu_A(x_1)=0.1$ , $\mu_B(x_1)=0.2$ , $0.1<0.2$

$\mu_{\mathrm{A}}(x_2)=0.3 \quad , \quad \mu_B(x_2)=0.4 \quad , \quad 0.3<0.4$

$\mu_{\mathrm{A}}(x_3)=0.5 \quad , \quad \mu_B(x_3)=0.6 \quad , \quad 0.5<0.6$

$\mu_{\mathrm{A}}(x_4)=0.7 \quad , \quad \mu_B(x_4)=0.8 \quad , \quad 0.7<0.8$

$\mu_{\mathrm{A}}(x_5)=0.9 \quad , \quad \mu_B(x_5)=1 \quad , \quad 0.9<1$

$\forall x \in X$ için $\mu_{\mathrm{A}}(x)<\mu_B(x)$ olduğundan $\mathrm{A}$, $B$ nin öz alt kümesidir ve $\mathrm{A} \subset B$ şeklinde ifade edilir.

**Tanım 2.6.4.** A bulanık kümesinin $\overline{\mathrm{A}}$ tümleyeni $\mu_{\overline{\mathrm{A}}}(x)=1-\mu_{\mathrm{A}}(x)$ ile tanımlanır. Ayrıca

$$\mu_{\mathrm{A}}(x)+\mu_{\overline{\mathrm{A}}}(x)=1$$

dir. Buna göre

$$\overline{\mathrm{A}}=\left\{(x,\mu_{\overline{\mathrm{A}}}(x)) : \mu_{\overline{\mathrm{A}}}(x)=1-\mu_{\mathrm{A}}(x)\right\}$$

şeklindedir. $[29,33]$

**Tanım 2.6.5.** $\mathrm{A}$ ve $B$ iki bulanık kümesi olsun. $\mathrm{A}$ ile $B$'nin kesişim kümesi $\forall x \in X$ , $\mu_{\mathrm{A}\cap B}(x)=\min(\mu_{\mathrm{A}}(x),\mu_B(x))=\mu_{\mathrm{A}}(x)\wedge\mu_B(x)$ olmak üzere

$$\mathrm{A}\cap B=\left\{(x,\mu_{\mathrm{A}\cap B}(x)) : x\in X, \mu_{\mathrm{A}\cap B}(x)\in[0,1]\right\}$$

şeklindedir. $[29,33]$

**Tanım 2.6.6.** A ve $B$ iki bulanık kümesi olsun. A ile $B$'nin birleşim kümesi

$$\forall x \in X \ , \ \mu_{\mathrm{A}\cup B}(x)=\max(\mu_{\mathrm{A}}(x),\mu_B(x))$$

olmak üzere

$$\mathrm{A}\cup B=\left\{(x,\mu_{\mathrm{A}\cup B}(x)) : x\in X, \mu_{\mathrm{A}\cup B}(x)\in[0,1]\right\}$$

şeklindedir. $[29,33]$

**Tanım 2.6.7.** A ve $B$ iki bulanık kümesi olsun. A ve $B$ bulanık kümelerinin farkının üyelik fonksiyonu

$$\forall x \in X \ , \ \mu_{\mathrm{A}-B}(x)=\mu_{\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{A}}}(x)=\min(\mu_{\mathrm{A}}(x),\mu_{\overline{B}}(x))$$

olmak üzere fark kümesi

$$\mathrm{A}-B=\left\{(x,\mu_{\mathrm{A}-B}(x)) : x\in X, \mu_{\mathrm{A}-B}(x)\in[0,1]\right\}$$

şeklinde tanımlanır. $[29,33]$

### 2.7. Bulanık Kümelerin Özellikleri

$G$, $T$ ve $K$ bulanık kümeleri, $U$ evrensel küme olmak üzere

**i)** idempotent : $G \cup G = G$ , $G \cap G = G$

**ii)** Özdeşlik : $G \cap (U \times [0,1]) = G$ , $G \cup \varnothing = G$

$G \cup (U \times [0,1]) = U \times [0,1]$ , $G \cap \varnothing = \varnothing$

**iii)** Değişme Özelliği : $G \cap T = T \cap G$ , $G \cup T = T \cup G$

**iv)** Birleşme Özelliği: $(G \cap T) \cap K = G \cap (T \cap K)$ , $(G \cup T) \cup K = G \cup (T \cup K)$

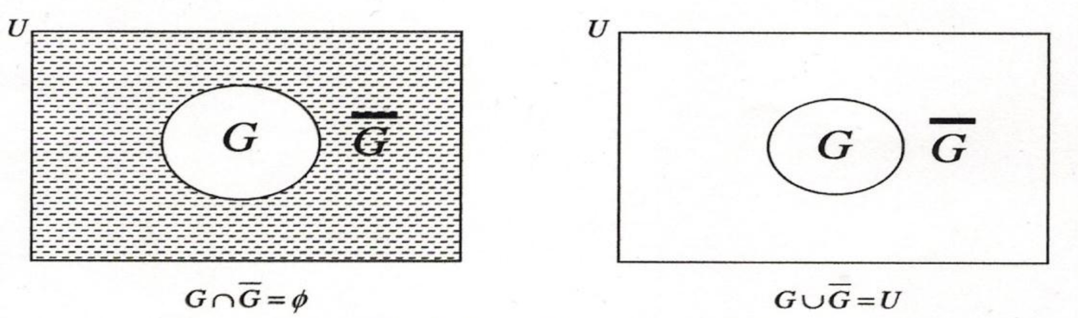
**v)** Dağılma Özelliği: $G \cap (T \cup K) = (G \cap T) \cup (G \cap K)$

$G \cup (T \cap K) = (G \cup T) \cap (G \cup K)$

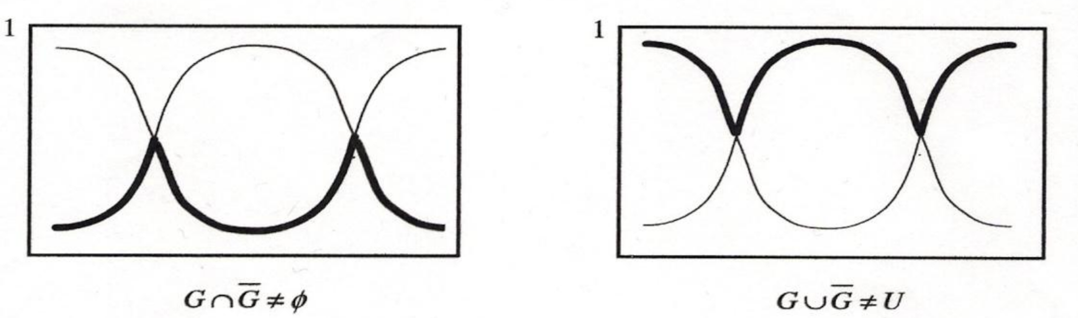
**vi)** Kuvvet Alma: $\overline{\overline{G}} = G$

**vii)** De Morgan Kuralı : $\overline{G \cap T} = \overline{G} \cup \overline{T}$ , $\overline{G \cup T} = \overline{G} \cap \overline{T}$

Burada klasik kümelerden farklı olarak bazı özelliklerde $U$ yerine $U \times [0,1]$ kullanılmıştır. (i)-(vii) özellikleri klasik kümelerde olduğu gibidir. Ancak $G \cap \overline{G} = \varnothing$ ve $G \cup \overline{G} = U$ klasik kümeler için geçerli olduğu halde bulanık kümelerde geçerli değildir. Şekil 2 ve Şekil 3'de bu özellikler şekil üzerinde açıkça görülmektedir. $[28,29,33,34]$




**Şekil: 2.** Klasik Kümelerin Gösterimi




**Şekil: 3.** Bulanık Kümelerin Gösterimi

## 3. BÖLÜM

## KLASİK ÖLÇÜM

Klasik anlamda ki ölçümler toplamsal ölçümler olarak adlandırılırlar. Bu konuda Emile Borel (1871-1956) ve Henri Lebesque (1875-1941)'nin çalışmaları temel kaynaklar olmuştur. Daha sonra Caratheodory $[3]$ bu çalışmaları cebirsel yapıda incelemiş, ölçülebilirlik ve genişleme teoremlerini yazmıştır. Klasik ölçümlerle ilgili olarak $[18]$, $[12]$ ve $[1]$ önemli kaynaklardır.

### 3.1. Klasik Ölçüm

**Tanım 3.1.1.** $\mathcal{A}$ , X kümesinin alt kümeleri üzerinde tanımlı bir cebir ve $\mu$ de $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlanan genişletilmiş reel değerli bir fonksiyon olmak üzere

**i)** $\mu(\varnothing)=0$

**ii)** $\forall A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A)\geq 0$

**iii)** $\mathcal{A}$ nın ikişer ikişer ayrık her $\{A_n\}$ dizisi için

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ olacak şekilde $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$ oluyorsa o zaman $\mu$ ye $\mathcal{A}$ üzerinde bir ölçüm (klasik ölçüm) denir.

(iii). özellik $\mu$ nün sayılabilir toplamsallığı olarak bilinir. Ayrıca $\mathcal{A}$ nın ikişer ikişer ayrık her $\{A_n\}$ dizisini $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right)=\sum_{n=1}^{k}\mu(A_n)$ şeklinde ifade edersek $\mu$ ölçümü sonlu toplamsal ölçüm olarak tanımlanır. $[1,12]$

**Örnek 3.1.1.** $\mathcal{A}=P(X)=2^X$ olsun.

$$\mu(A)=\begin{cases} A \textit{ daki nokta sayısı}, & \textit{Eğer } A \textit{ sonlu ise} \\ \infty, & \textit{Eğer } A \textit{ sonsuz ise} \end{cases}$$

tarafından tanımlanan $\mu$ bir ölçümdür. $[1]$ Gerçekten

**i)** $A \in \mathcal{A}$ olmak üzere $A = \varnothing$ ise $\mu(A) = \mu(\varnothing) = 0$ dır.

**ii)** $A \in \mathcal{A}$ olmak üzere $\mathcal{A} = 2^X$ olduğundan $A \in 2^X$ dir. O halde Eğer $A = \varnothing$ ise $A$ sayılabilir olduğundan $\mu(A) = 0$ dır. Eğer $A \neq \varnothing$ ise

$A$ sonlu ise $s(A) > 0$ olduğundan $s(A) > 0$ dır.

$A$ sonsuz ise $s(A) = \infty$ olduğundan $\mu(A) = \infty \geq 0$ dır.

**iii)** $(A_k)_{k=1}^{n} = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde ikişer ikişer ayrık olan sonlu bir dizi olsun. Bu durumda $\forall k = 1, 2, ..., n-1$ için $A_k \cap A_{k+1} = \varnothing$ dır.

$$s(A_k \cup A_{k+1}) = s(A_k) + s(A_{k+1}) - s(A_k \cap A_{k+1}) = s(A_k) + s(A_{k+1}) \text{ olur.}$$

Daha genel olarak

$$s\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} s(A_k) \text{ olmak üzere } \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \text{ dır.}$$

$(A_n)_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde ikişer ikişer ayrık olsun. $A_n \cap A_{n+1} = \varnothing$ olmak üzere $s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} s(A_n)$ olduğundan $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ olur ki bu durumda $\mu$ bir ölçümdür.

**Örnek 3.1.2.** X sayılamayan bir küme ve $\mathcal{A} = \{A \subset X : ya\ A\ yada\ X - A\ sayılabilirdir\}$ biçiminde tanımlanan bir sınıf olsun. O zaman $\mathcal{A}$ bir cebirdir. Ve ayrıca

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & , \textit{ Eğer } A \textit{ sayılabilirse} \\ 1 & , \textit{ Eğer } X - A \textit{ sayılabilirse} \end{cases}$$

tarafından tanımlanan $\mu$ bir ölçümdür. [1]

Bunun için öncelikle $\mathcal{A}$ nın bir cebir olduğunu gösterelim. $E, F \in \mathcal{A}$ olmak üzere

$E \in \mathcal{A}$ için ya $E$ yada $\overline{E} = X - E$ sayılabilirdir.

$F \in \mathcal{A}$ için ya $F$ yada $\overline{F} = X - F$ sayılabilirdir.

Eğer $E$ ve $F$ (yada $\overline{E}, \overline{F}$) sayılabilirse, sayılabilir kümelerin birleşimleri de sayılabilir olduğundan $E \cup F \in \mathcal{A}$ (yada $\overline{E} \cup \overline{F} \in \mathcal{A}$) olur.

Şimdi $\mu$ nun bir ölçüm olduğunu gösterelim

**i)** $A=\varnothing$ , $(A\in A)$ için $\mu(A)=0$ dır.

**ii)** A yada $\overline{A}=X-A$ sayılabilir olduğundan. Eğer A sayılabilirse $\mu(A)=0$ ve $\mu(X-A)=1$olur. Eğer $\overline{A}=X-A$ sayılabilirse $\mu(X-A)=0$ ve $\mu(A)=1$ olur ki her iki durumda da $\mu(A)\geq 0$ olur.

**iii)** $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, A nın ikişer ikişer ayrık bir dizisi olsun. $n=1,2,...$ olmak üzere $A_n$ ler sayılabilir olsun. Bu durumda Cantor'a göre sayılabilir kümelerin birleşimi de sayılabilir olduğundan $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=0$ dır. Öyleki $A_n$ ler sayılabilir olduğundan $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=0$ dır. Eğer $A_n$ ler sayılamaz ise bu durumda $X-A_n$ ler sayılabilirdir. $(X-A_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi $X-A_1\subset X-A_2\subset...\subset X-A_n$ için $\mu(X-A_n)=1$ olduğu açıktır.

**Örnek 3.1.3.** $X=Z^{+}$ olsun. $A=2^{X}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ pozitif reel sayıların yakınsak bir serisi olsun.

$$\mu(A)=\begin{cases}\sum_{n\in A}a_n & , \quad A\neq\varnothing \textit{ ve sonlu ise}\\ \infty & , \quad A \textit{ sonsuz ise}\\ 0 & , \quad A=\varnothing \textit{ ise}\end{cases}$$

A üzerinde tanımlanan $\mu$ bir ölçüm değildir. Fakat sonlu toplamsal bir ölçümdür. [1]

Gerçekten

**i)** $A=\varnothing$ , $(A\in A)$ için $\mu(A)=0$

**ii)** $A=\varnothing$ ise $\mu(\varnothing)=0$

$A\neq\varnothing$ ise $\mu(A)=\sum_{n\in A}a_n>0$ $\left(\sum_{n\in A}a_n \textit{ yakın sakseri old.}\right)$

$A=\infty$ ise $\mu(A)=\infty$ olur ki her üç durumda da $\mu\geq 0$ olduğundan (ii) koşulumuz sağlanmış olur.

**iii)** $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{n\}$ için $\mu(X)=\infty$ olduğu açıktır. Ancak $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ yakınsak bir seri olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\mu\{n\}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$ olduğundan $\mu$ bir ölçüm değildir. Fakat $\mu$ sonlu toplamsal bir ölçümdür. Çünkü $X=\bigcup_{n=1}^{k}\{n\}$ olacak şekilde sonlu seçersek $\mu(X)<\infty$ olacağından $\mu(X)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k}\{n\}\right)=\sum_{n=1}^{k}\mu\{n\}$ olur ki $\mu$ sonlu toplamsal bir ölçüm olur.

**Önerme 3.1.1.** $\mathcal{A}$ cebiri üzerinde bir ölçüm $\mu$ olsun. O zaman

**(a)** $A\subset B$ , $A\in\mathcal{A}$ , $B\in\mathcal{A}$ için $\mu(A)\leq\mu(B)$ dir**.**

**(b)** Eğer $A_n\in\mathcal{A}$ , $1\leq n<\infty$ ve $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$ için $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$ olur.

**İspat:**

**(a)** $B=A\cup(B-A)$ alalım. Bu durumda $A_1=A$ , $A_2=(B-A)$ ve $n>2$ için $A_n=\varnothing$ ise O zaman $\mu$ sayılabilir toplamsaldır. Bu durumda $\mu(B)=\mu(A)+\mu(B-A)$ olur ki buradan $\mu(A)\leq\mu(B)$ olur.

**(b)** $B_1=A_1$ ve $n>1$ için $B_n=A_n-\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i$ olsun. Buradan yola çıkarak $\forall n$ için $B_n\in\mathcal{A}$ $\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$ **,** $B_n\subset A_n$ ve $B_n$ ayrık kümeleri için

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).\ [1]$$

**Önerme 3.1.2.** $\mu$, $\mathcal{A}$ cebiri üzerinde bir ölçüm olsun.

**(a)** Eğer $A_n\subset A_{n+1}$ ,$1\leq n<\infty$ için $A_n\in\mathcal{A}$ ise o zaman $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$ dir.

**(b)** Eğer $A_n\supset A_{n+1}$, $1\leq n<\infty$ için $A_n\in\mathcal{A}$ , $\mu(A_1)<\infty$ ve $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$ ise o zaman

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

Üstelik $\mu$ sonlu toplamsal ölçümü (a) vasıtasıyla sayılabilir toplamsaldır.

**İspat:** Öncelikle en son iddiamızı ispatlayalım. (a) özelliği ile $\mu$ sonlu toplamsal bir ölçüm olmak üzere A nın ayrık kümelerinin bir dizisi $\left(A_n\right)_{n=1}^{\infty}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in A$ ve $B_k = \bigcup_{n=1}^{k} A_n$ olsun. O zaman $B_k \subset B_{k+1}$, $B_k \in A$ ve $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in A$ . Bu yüzden (a) özelliğinin varsayımı tarafından

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu\left(A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right) \text{ olur.}$$

Şimdi (a) ve (b) özelliklerini ispatlayalım.

**(a)** $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in A$ ve $A_n \subset A_{n+1}$ olsun. Ve ayrıca $n > 0$ için $B_1 = A_1$ , $B_n = A_n - A_{n-1}$ olsun. O zaman $B_n \cap B_m = \varnothing$ $(n \neq m)$ ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in A$ olur ki buradan da

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(B_n\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu\left(B_n\right) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(A_k\right), \quad \left(A_k = \bigcup_{n=1}^{k} B_n \ \textit{için}\right)$$

olur ki istenen sağlanmış olur.

**(b)** $A_n \supset A_{n+1}$, $\mu\left(A_1\right) < \infty$ , $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in A$ olsun. O zaman $A_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(A_1 - A_n\right)$, $A_1 - A_n \subset A_1 - A_{n+1}$ olur ki (a) dan dolayı $\mu\left(A_1\right) < \infty$ için

$$\mu\left(A_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(A_1 - A_n\right)$$

$$\mu\left(A_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(A_1\right) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

ve

$$\mu\left(A_1 - A_n\right) = \mu\left(A_1\right) - \mu\left(A_n\right) \text{ olur.}$$

Eğer $\mu\left(X\right) < \infty$ ise $X$ in alt kümelerinin oluşturduğu A cebiri üzerindeki $\mu$ ölçümü sonludur.

Eğer $\mu\left(X_n\right) < \infty$ ve $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ ile A daki kümelerin bir $\left(X_n\right)$ dizisi var ise

$\mu$ ölçümü $\sigma-$sonlu olarak adlandırılır. Önerme 3.1.1 deki (b) ifadesinden ayrık kümeler olarak $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ daima elde edilebilir. Bu sonsuzluk şartı bir ölçüm üzerinde sıkça rastlanır. Genel teoremlerin çoğu kısmı için bu duruma ihtiyaç duyulur. Bunun en önemli örneği R nin alt kümelerinin bir cebiri üzerindeki $\sigma-$sonlu ölçümüdür ki buna aralıklar üzerindeki lebesque ölçümü denir. $[1]$

**Örnek 3.1.4.** A cebiri üzerinde sonlu toplamsal bir ölçüm $\mu$ olsun. $\mathrm{A}, B \in \mathrm{A}$ için

**i)** $\mathrm{A} \subset B$ ise $\mu(\mathrm{A}) \leq \mu(B)$

**ii)** $\mu(\mathrm{A} \cup B) + \mu(\mathrm{A} \cap B) = \mu(\mathrm{A}) + \mu(B)$

**iii)** Eğer $\mathrm{A} \subset B$ ve $\mu(\mathrm{A}) < \infty$ ise $\mu(B - \mathrm{A}) = \mu(B) - \mu(\mathrm{A})$ dır. $[1]$

Gerçekten

**i)** $\mathrm{A}, B \in \mathrm{A}$ ve $\mathrm{A} \subset B$ olmak üzere $B = \mathrm{A} \cup (B - \mathrm{A})$ olarak yazabiliriz $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}$, $\mathrm{A}_2 = B - \mathrm{A}$, $n > 2$ için $\mathrm{A}_n = \varnothing$ ise o zaman $\mu$ sayılabilir toplamsal olur ki bu durumda $\mu(B) = \mu(\mathrm{A}) + \mu(B - \mathrm{A})$ ifadesinden $\mu(\mathrm{A}) \leq \mu(B)$ elde edilir.

**ii)** Ölçümün (iii). Özelliği gereğince $(\mathrm{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi ikişer ikişer ayrık olacağından toplamsal olarak yazabiliriz ki $k = 1, 2, ..., n-1$ için $\mathrm{A}_k \cap \mathrm{A}_{k+1} = \varnothing$ dır. $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}$, $\mathrm{A}_2 = B$ olmak üzere $\mu(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2) = \sum_{k=1} \mathrm{A}_k = \mu(\mathrm{A}_1) + \mu(\mathrm{A}_2)$ olur. Yani

$$\mu(\mathrm{A} \cup B) = \mu(\mathrm{A}_1) + \mu(B) \text{ dir.}$$

**iii)** $\mathrm{A} \subset B$ ise $B = \mathrm{A} \cup (B - \mathrm{A})$ ve $\mu(\mathrm{A}) < \infty$ olmak üzere $\mu(B) = \mu(\mathrm{A}) + \mu(B - \mathrm{A})$ ifadesinden $\mu(B) - \mu(\mathrm{A}) = \mu(B - \mathrm{A})$ elde edilir.

**Not 3.1.1.** Bu örneğin çözümünde genel olarak ölçümün (iii). Özelliğini kullandık.

**Örnek 3.1.5.** Sonlu toplanabilir $\mu$ ölçümü için önerme 3.1.2 nin (b) si sayılabilir bir ölçüm olmadığını gösterebiliriz ( (b): Eğer $\mathrm{A}_n \supset \mathrm{A}_{n+1}$, $1 \leq n < \infty$ için $\mathrm{A}_n \in \mathrm{A}$, $\mu(\mathrm{A}_1) < \infty$ ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n \in \mathrm{A}$ ise o zaman $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(\mathrm{A}_n)$.) $[1]$

$X = Z^+ = \{1, 2, ...\}$ ve $\mathrm{A} \subset X$ alalım. $\mathrm{A}_n = \{n, n+1, n+2, ...\}$ olmak üzere

$A_1=\{1,2,3,...\}$ , $A_2=\{2,3,4,...\}$, $A_3=\{3,4,5,...\}$ ... için $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\varnothing$ olduğundan $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)=0$ olur. Ayrıca $A_n$ kümesi sonsuz olduğundan $\mu(A_n)=\infty$ olur ki $\mu$ ölçümü Önerme 3.1.2 nin (b) si için sayılabilir ölçüm değildir.

**Örnek 3.1.6.** Bazı $n$ değerleri için $\mu(A_n)<\infty$ olmadıkça $A_n \supset A_{n+1}$, $1\le n<\infty$ için $A_n \in \mathcal{A}$ , $\mu(A_1)<\infty$ ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ ise o zaman $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$ eşitliğinin gerçekleşmeyeceğini gösterebiliriz. $[1]$

$X=R$ ve $A_n=(n,\infty)$, $\mathcal{A}=2^X$ ve $\mu$ sayılabilir bir ölçüm olsun. $n=1,2,3,...$ için, $A_1=(1,\infty)$, $A_2=(2,\infty)$, $A_3=(3,\infty)$ ... olmak üzere $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\varnothing$ olduğunda $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)=0$ olur. Ancak diğer yandan $\forall n$ için, $\mu(A_n)=\infty$ olduğundan dolayı $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)\neq\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$ olur. Bu da bize gösteriyor ki $A_n=(n,\infty)$ kümelerinden bazı $A_n$ ler için $\mu(A_1)<\infty$ olmadıkça bu eşitlik sağlanmaz.

**Örnek 3.1.7.** $\mathcal{A}$ cebiri üzerinde bir ölçüm $\mu$ ve $A\in\mathcal{A}$ , $\forall E\in\mathcal{A}$ için $\mu_A(E)=\mu(A\cap E)$ olmak üzere $\{E\in\mathcal{A} : E\subset A\}$ cebiri üzerinde $\mu_A$ bir ölçümdür. $[1]$ $\mu_A$ nın bir ölçüm olduğunu gösterelim.

**i)** $E\in\mathcal{A}$ olmak üzere $E\subset A$ olduğunu biliyoruz. O halde $E=\varnothing$ için

$$\mu_A(\varnothing)=\mu(A\cap\varnothing)=\mu(\varnothing)=0.$$

**ii)** $E\in\mathcal{A}$ ve $E\subset A$ için $A\cap E=E$ olacağından $\mu_A(E)=\mu(A\cap E)=\mu(E)\ge 0$ olur.

**iii)** $\mu$ bir ölçüm olduğundan $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$\mu_A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)=\mu\left(A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right)$$

$$\mu_A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap E_n)\right),\quad (\forall n \; i\c{c}in \; E_n\subset A \; oldu\breve{g}undan)$$

$$=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)$$

olur ki istenen sağlanmış olur. O halde $\mu_A$ bir ölçümdür.

**Örnek 3.1.8.** A **,** $\sigma-$cebiri üzerinde iki ölçüm $\mu_1$ ve $\mu_2$ ve $\forall E\in A$ için $\mu_1(E)\geq\mu_2(E)$ olsun. $E\in A$ için $\mu_1(E)=\mu_2(E)+\mu_3(E)$ olacak şekilde A üzerinde bir $\mu_3$ ölçümünün var olduğunu gösterebiliriz. $[1]$ Gerçekten $\mu_3(E)=\mu_1(E)-\mu_2(E)$ şeklinde yazılabileceği açıktır. O halde

**i)** $E=\varnothing\in A$ için $\mu_3(\varnothing)=\mu_1(\varnothing)-\mu_2(\varnothing)=0$

**ii)** $E\in A$ için $\mu_1(E)\geq 0$ ve $\mu_2(E)\geq O$ olduğunu biliyoruz ayrıca $\mu_1(E)\geq\mu_2(E)$ olmak üzere $\mu_3(E)=\mu_1(E)-\mu_2(E)\geq 0$ olur.

**iii)** $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ olmak üzere

$$\mu_1(E)=\mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_1(E_n)\quad \text{ve}\quad \mu_2(E)=\mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_2(E_n)\quad \text{için}$$

$$\mu_3\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)-\mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_1(E_n)-\sum_{n=1}^{\infty}\mu_2(E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_3(E_n)\text{ olur.}$$

**Örnek 3.1.9.** $\mu$, A cebiri üzerinde sonlu bir ölçüm olsun. $A_1,A_2,...,A_n\in A$ olmak üzere

**a)** $$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)-\sum_{i_1<i_2}\mu\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\right)+...$$

**b)** $$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)\geq\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)-\sum_{i_1<i_2}\mu\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\right)\;[1].$$

Gerçekten

**a)** Tümevarım metodunu uygularsak

$n=1$ için $\mu(\mathrm{A}_1)=\mu(\mathrm{A}_1)$

$n=2$ için $\mu(\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2)=\mu(\mathrm{A}_1)+\mu(\mathrm{A}_2)-\mu(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2)$

$\vdots$

$n=k$ için $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{k}\mathrm{A}_k\right)=\sum_{k=1}^{k}\mu(\mathrm{A}_k)-\sum_{i_1<i_2}\mu\left(\mathrm{A}_{i_1}\cap\mathrm{A}_{i_2}\right)$ olduğunu kabul edelim.

$n=k+1$ için

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{k+1}\mathrm{A}_k\right)=\mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{k}\mathrm{A}_k\right)\cup(\mathrm{A}_{k+1})\right)$$

$$=\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathrm{A}_k\right)+\mu(\mathrm{A}_{k+1})-\sum_{i_1<i_2}\mu(\mathrm{A}_k\cap\mathrm{A}_{k+1})$$

$$=\sum_{n=1}^{k}\mu(\mathrm{A}_k)+\mu(\mathrm{A}_k)-\sum_{i_1<i_2}\mu\left(\mathrm{A}_{i_1}\cap\mathrm{A}_{i_2}\right)-\sum_{i_1<i_2}\mu(\mathrm{A}_k\cap\mathrm{A}_{k+1})$$

$$=\sum_{n=1}^{k}\mu(\mathrm{A}_k)-\sum_{i_1<i_2}\mu\left(\mathrm{A}_{i_1}\cap\mathrm{A}_{i_2}\right)+\mu(\mathrm{A}_k)-\sum_{i_1<i_2}\mu(\mathrm{A}_k\cap\mathrm{A}_{k+1})$$

$$=\sum_{k=1}^{k+1}\mu(\mathrm{A}_{k+1})-\sum\mu\left(C_{i_1}\cap C_{i_2}\right)+\varepsilon \quad , \quad \varepsilon>0 \qquad (*) \quad \text{olur.}$$

**b)** $(*)$ eşitliğinde $\varepsilon$ kısmı atarsak

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{k+1}\mathrm{A}_k\right)\geq\sum_{k=1}^{k+1}\mu(\mathrm{A}_{k+1})-\sum_{i_1\prec i_2}\mu\left(C_{i_1}\cap C_{i_2}\right) \quad \text{elde edilir.}$$

### 3.2. Aralıklar Üzerindeki Lebesque Ölçümü

Ölçümün en önemli örneği $R^n$ $(n\geq1)$ üzerinde ki lebesque ölçümüdür. Tüm açık kümeleri ve diğer yarı açık ve kapalı kümeleri içeren $\sigma-$cebir lebesque ölçümünde yaygın olarak kullanılır. Bu kısımda biz yarı açık aralıkların cebiri üzerinde duracağız.

$X=R$ ve A da; $\varnothing$, $(a,\infty)$ ve $(-\infty,a]$ aralıklarını içeren soldan açık sağdan kapalı olan aralıkların tüm sonlu ayrık birleşimlerinin bir sınıfı olarak düşünülecek. Bu tip aralıkların önemsenmesinin sebebi, açık aralıkların aksine bir cebirden elde edilmeleridir. $[1]$

**Lemma 3.2.1.** A bir cebir olmak üzere, A üzerinde bir $m_0$ ölçümü tanımlamak için bazı yapılara ihtiyacımız olacak**,** $(\mathrm{I}_n)_{n=1}^{k}$ ve $(J_m)_{m=1}^{s}$ A da ayrık aralıkların sonlu iki dizisi olsun. Öyle ki $\bigcup_{n=1}^{k}\mathrm{I}_n=\bigcup_{m=1}^{s}J_m=\mathrm{A}$ dır. Bu durumda $\sum_{n=1}^{k}\ell(\mathrm{I}_n)=\sum_{m=1}^{s}\ell(J_m)$ ifadesinde $\ell$ uzunluk anlamına gelir ve $\ell((a,b])=b-a$ şeklinde ifade edilir. Ayrıca sonsuz aralıkların uzunluğu sonsuzdur. $\ell(\mathrm{I}_n)=\sum_{m=1}^{s}\ell(\mathrm{I}_n\cap J_m)$, $\ell(J_n)=\sum_{n=1}^{k}\ell(\mathrm{I}_n\cap J_m)$ eşitliklerini takip edersek $\mathrm{A}\in\mathrm{A}$ için $\mathrm{A}=\bigcup_{n=1}^{k}\mathrm{I}_n$ ise $m_0$ ölçümünü $m_0(\mathrm{A})=\sum_{n=1}^{k}\ell(\mathrm{I}_n)$ şeklinde tanımlayabiliriz. Üstelik dikkat edersek eğer $\mathrm{A}=\bigcup_{n=1}^{k}\mathrm{I}_n$, $B=\bigcup_{m=1}^{s}J_m$ ve $\mathrm{A}\subset B$ olursa o zaman $\mathrm{A},B\in\mathrm{A}$ için

**i)** $\mathrm{I}_n=\bigcup_{m=1}^{s}(\mathrm{I}_n\cap\mathrm{I}_m)$ ve $J_m\supset\bigcup_{n=1}^{k}(\mathrm{I}_n\cap J_m)$

**ii)** $\ell(\mathrm{I}_n)=\sum_{m=1}^{s}\ell(\mathrm{I}_n\cap J_m)$ ve $\ell(J_m)\geq\sum_{n=1}^{k}\ell(\mathrm{I}_n\cap J_m)$, olmak üzere $m_0(\mathrm{A})\leq m_0(B)$

olduğu kolaylıkla görülür. $[1]$

**Lemma 3.2.2.** $\mathrm{A}\in\mathrm{A}$ için eğer $\mathrm{A}=\bigcup_{n=1}^{k}\mathrm{I}_n$ ise $m_0(\mathrm{A})=\sum_{n=1}^{k}\ell(\mathrm{I}_n)$ olur. Buna bağlı olarak $B,C\in\mathrm{A}$ ve $B\subset C$ için $m_0(B)\leq m_0(C)$ olacak şekilde $m_0$ ölçümü tanımlanabilir. $[1]$

**Teorem 3.2.1.** $m_0$**,** A üzerinde bir ölçümdür. ($m_0$**,** aralıklar üzerindeki lebesque ölçümü olarak adlandırılır.) $[1]$

**Tanım 3.2.1. ( Ölçüsü Sıfır Olan Kümeler )** $A \subseteq R$ alt kümesi verilsin. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(\mathrm{I}_n) < \varepsilon$ olacak şekilde aralıkların bir $\{\mathrm{I}_n : n \geq 1\}$ dizisi bulunabiliyorsa A kümesine ölçüsü sıfır olan küme ya da kısaca sıfır kümesi denir. [18]

**Açıklama 3.2.1.** Üstteki tanımda aralıklar olarak açık, kapalı ya da yarı-açık aralılar alınabilir. Ayrıca, aralıkların ayrık olmaları gerekmez. Su halde, tanımdan bos küme-nin bir sıfır kümesi olduğu kolaylıkla görülebilir. [18]

**Örnek 3.2.1.** Tek elemanlı kümeler sıfır kümesidir. Gerçekten, $\varepsilon > 0$ verilsin. $\mathrm{I}_1 = \left( x - \frac{\varepsilon}{4}, x + \frac{\varepsilon}{4} \right)$ ve $n \geq 2$ için $\mathrm{I}_n = [0,0]$ alalım. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(\mathrm{I}_n) = \ell(\mathrm{I}_1) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ bulunur.

Daha genel olarak, herhangi bir sayılabilir $\mathrm{A} = \{x_1, x_2, ...\}$ kümesi sıfır kümesidir. Aslında, aralıkları $\mathrm{I}_n = [x_n, x_n]$ alarak bunu göstermek mümkündür. Ancak biz bunu, A kümesini örten aralıkların bir dizisi olarak aşağıdaki şekilde alalım

$$\mathrm{I}_1 = \left( x_1 - \frac{\varepsilon}{8}, x_1 + \frac{\varepsilon}{8} \right), \ \ell(\mathrm{I}_1) = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2^1}$$

$$\mathrm{I}_2 = \left( x_2 - \frac{\varepsilon}{16}, x_2 + \frac{\varepsilon}{16} \right), \ \ell(\mathrm{I}_2) = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2^2}$$

$$\mathrm{I}_3 = \left( x_3 - \frac{\varepsilon}{32}, x_3 + \frac{\varepsilon}{32} \right), \ \ell(\mathrm{I}_3) = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2^3}$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{I}_n = \left( x_n - \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^n}, x_n + \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^n} \right), \ \ell(\mathrm{I}_n) = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2^n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ olduğundan, $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(\mathrm{I}_n) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ bulunur.

Yukarıdaki örnekteki A kümesi, sayılabilir sayıda tek elemanlı bir kümenin birleşimi şeklindedir. Tek elemanlı kümeler sıfır kümeleridir ve A kümesi de sıfır kümesi olmaktadır. Bu durumu Teorem 3.2.2 ile genelleştirebiliriz. [18]

**Teorem 3.2.2.** $\{N_n\}_{n\geq 1}$ sıfır kümelerinin bir dizisi ise bunların birleşimi olan $N=\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ kümesi de sıfır kümesidir.

Sayılabilir kümeler sıfır kümeler olmakla birlikte, sayılamayan kümeler için aynı şeyi söyleyemeyiz. Buna karşın, sayılamayan sıfır kümeleri mevcuttur. Bununla ilgili Cantor kümesi olarak bilinen aşağıdaki örneği verebiliriz. [18]

**Örnek 3.2.2.** $[0,1]$ aralığını üç eşit parçaya bölelim. $\left[0,\frac{1}{3}\right],\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\left[\frac{2}{3},1\right]$ parçalardan ortadakini atarak elde ettiğimiz kümeye $C_1$ diyelim. O halde $C_1=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]$ olur. Burada $C_1$ uzunluğu $\frac{1}{3}$ olan 2 aralıktan oluşmaktadır. Daha sonra $C_1$ deki iki aralığı da üçer eşit parçaya bölüp ortadaki aralıkları atalım ve geriye kalan kümeye $C_2$ diyelim. Bu durumda $C_2=\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]$ olur ki $C_2$ uzunlukları $\frac{1}{9}$ olan 4 parçaya ayrılır. Aynı şekilde

$$C_3=\left[0,\frac{1}{27}\right]\cup\left[\frac{2}{27},\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{7}{27}\right]\cup\left[\frac{8}{27},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{19}{27}\right]\cup\left[\frac{20}{27},\frac{21}{27}\right]\cup\left[\frac{8}{9},\frac{25}{27}\right]\cup\left[\frac{26}{27},1\right]$$

şeklinde $\frac{1}{27}$ uzunluğunda sekiz parçaya ayrılır. Bu şekilde devam edersek her birinin uzunluğu $\frac{1}{3^n}$ olan $2^n$ tane ayrık kapalı aralıkların birleşimi olan $C_n$ kümesini elde ederiz.

$C_1$ in toplam uzunluğu $= 2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$C_2$ nin toplam uzunluğu $=4\cdot\frac{1}{9}=\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$C_3$ ün toplam uzunluğu $= 8 \cdot \frac{1}{27} = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

$\vdots$

$C_n$ in toplam uzunluğu $= 2^n \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ dir.

$C_n$ lerin arakesiti olan $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ kümesine Cantor kümesi denir. Cantor kümesi sayılamazdır ve sıfır kümesidir. Gerçekten, verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık yeterince büyük herhangi bir $n$ için $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon$ dur. $C \subseteq C_n$ ve $C_n$ kümeleri, toplam uzunlukları $\varepsilon$ dan küçük olan aralıkların sonlu bir dizisi olduğundan, $C$ nin sıfır kümesi olduğu görülür. [18]

**3. Dış Ölçüm ve Ölçülebilir Kümeler**

**Tanım 3.3.1.** $2^X$ de tanımlanan genişletilmiş reel değerli $\mu^*$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\mu^*$ ye $2^X$ üzerinde bir dış ölçüm denir.

**i)** $\mu^*(\varnothing) = 0$

**ii)** $A \subset B$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

**iii)** $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$. [1,12,18]

**Örnek 3.3.1.** $X$ boş kümeden farklı bir küme ve

$$\mu^*(E) = \begin{cases} 1 \;, & E \neq \varnothing \;\; ise \\ 0 \;, & E = \varnothing \;\; ise \end{cases}$$

olmak üzere; eğer $X$ en az iki noktaya sahipse o zaman $2^X$ üzerinde bir ölçüm olmayan $\mu^*$ bir dış ölçümdür. [1]

**Örnek 3.3.2.** $X$ sayılamayan bir küme olsun. $\mu^*$,

$$\mu^*(E)=\begin{cases}1\ , & E \ sayılamaz \ ise\\ 0\ , & E \ sayılabilir \ ise\end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Bu durumda $\mu^*$ bir dış ölçümdür. $[1]$

**Önerme 3.3.1.** Boş kümeyi de içeren $X$ in alt kümelerinin bir sınıfı $\mathrm{F}$ olsun. Her $\mathrm{A}\subset X$ için $\mathrm{F}$ de bir $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi vardır. Öyle ki $\mathrm{A}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ dir. $\mathrm{F}$ üzerinde genişletilmiş reel değerli bir fonksiyon $\mathrm{T}$ olsun. Öyleki $\mathrm{A}\in\mathrm{F}$ için $\mathrm{T}(\varnothing)=0$ ve $0\leq\mathrm{T}(\mathrm{A})$ dır. Bu durumda

$$\mu^*(\mathrm{A}) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{T}(B_n):\ B_n\in\mathrm{F}\ ,\ \mathrm{A}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right\}$$

tarafından $2^X$ üzerinde tanımlanan $\mu^*$ bir dış ölçümdür. $[1]$

**Örnek 3.3.3.** $X=Z^+$, $\mathrm{F}=\{\{x\}:\ x\in X\}\cup\{\varnothing\}$ için

$$\mathrm{T}(E)=\begin{cases}0\ , & E=\varnothing \ \ ise;\\ 1\ , & E\neq\varnothing \ \ ise;\end{cases}$$ olduğunu varsayalım. O zaman

$$\mu^*(\mathrm{A})=\begin{cases}\infty & , \ \ Eğer \ \mathrm{A} \ sonsuz \ \ ise\\ \mathrm{A} \ daki \ noktaların \ sayısı & , \ \ Eğer \ \mathrm{A} \ sonlu \ \ ise\end{cases} \qquad [1]$$

**Örnek 3.3.4.** $\mathrm{F}=\{X,\varnothing\}$, $\mathrm{T}(X)=1$ ve $\mathrm{T}(\varnothing)=0$ olsun. O zaman

$$\mu^*(\mathrm{A})=\begin{cases}1\ , & \mathrm{A}\neq\varnothing \ \ ise\\ 0\ , & \mathrm{A}=\varnothing \ \ ise\end{cases}$$ olur. $[1]$

**Örnek 3.3.5. (Lebesque Dış Ölçüm)** $X=R$ ve $\mathrm{F}$ de sağdan kapalı soldan açık olan tüm aralıkların kümesi olsun. $\{(\infty,a],\ (a,b]\ yada\ (a,\infty)...\ gibi\ sonlu\ yada\ sonsuz\ aralıklar\}$ ayrıca $\mathrm{F}$ boş kümeyi de içersin. Her $\mathrm{I}\in\mathrm{F}$ aralığı için $\mathrm{T}(\varnothing)=0$ ve $\mathrm{T}(\mathrm{I})=\ell(\mathrm{I})$ olsun. O zaman $2^R$ de $\mathrm{T}$ tarafından elde edilen $\mu^*$ dış ölçümü, $R$ üzerinde lebesque dış ölçümü olarak adlandırılır.

$$\mu^*(\mathrm{A})=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\ell(\mathrm{I}_n)\ :\ \ \mathrm{A}\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathrm{I}_n\ ,\ \ \mathrm{I}_n\in\mathrm{F}\right\}$$

şeklinde ifada edilir.

Bu bölümde $\forall \mathrm{I} \in \mathrm{F}$ için $\mu^*(\mathrm{I}) = \ell(\mathrm{I})$ olarak düşüneceğiz ve $R$ nin alt kümelerinin özel bir sınıfı olarak için sınırlandırılmış olan $\mu^*$, aralıklar üzerinde ki lebesque ölçümünün genişlemesi olacak şekilde $R$ üzerinde ki lebesque ölçümü olarak bilinir.

Dış ölçümün başlangıçtaki en önemli amacı bir $\sigma -$cebir üzerinde bir ölçüm oluşturmaktı. Dış ölçüm genel anlamda $2^X$ üzerinde bir ölçüm değildir. Örnek olarak Örnek 3.3.1 ve Örnek 3.3.2 gösterilebilir. Ancak $\sigma -$cebir üzerinde ki bir ölçümün alt kümelerinin uygun bir sınıfı (yani, ölçülebilir kümeler) sınırlandırıldığı zaman bir dış ölçüm ortaya çıkar. Bir Teorem 3.3.1 de ispatlayacağız fakat daha önce bize gerekli olan Tanım 3.3.2 yi vermeliyiz. ($\mu^*$ nin daima bir dış ölçüm olduğunu gösteren tanım). [1]

**Tanım 3.3.2. (Lebesque Anlamında Ölçülebilir Kümeler)** $E \subset X$ olsun. Eğer her $\mathrm{A} \subset X$ için $\mu^*(\mathrm{A}) = \mu^*(\mathrm{A} \cap E) + \mu^*(\mathrm{A} \cap E^C)$ ise $E$ kümesine ölçülebilir denir. Ve $\mathrm{E} \in M$ şeklinde yazılır. Burada $M$ ölçülebilir kümelerin bir sınıfıdır.

Herhangi A ve $E$ kümeleri için daima $\mathrm{A} = (\mathrm{A} \cap E) \cup (\mathrm{A} \cap E^C)$ dır. Şu halde dış ölçümün alt toplamsallık özelliğinden $\mu^*(\mathrm{A}) \leq \mu^*(\mathrm{A} \cap E) + \mu^*(\mathrm{A} \cap E^C)$ eşitsizliği mevcuttur. Dolayısıyla bir kümenin ölçülebilir olduğunu aşağıdaki şekilde test etmek yeterlidir.

$\mathrm{E} \in M$ olması için $\Leftrightarrow$ $\forall \mathrm{A} \subseteq X$ için $\mu^*(\mathrm{A}) \geq \mu^*(\mathrm{A} \cap E) + \mu^*(\mathrm{A} \cap E^C)$ [1,18].

**Önerme 3.3.2.** $n = 1, 2, \ldots,$ için $\mathrm{E}_n \in M$ ise $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in M$ dır. [18]

**Tanım 3.3.3.** Herhangi bir $\mathrm{E} \in M$ için $\mu^*(E)$ yerine bunun genişlemesi olan $\overline{\mu}(E)$ yazacağız ve $\overline{\mu}(E)$ ye lebesque ölçüsü diyeceğiz.

Sonuç olarak $\overline{\mu}(E) : M \to [0, \infty]$ lebesque ölçüsü, ölçülebilir $M$ , $\sigma -$cebiri üzerinde tanımlı sayılabilir toplamsal küme fonksiyonudur. ( bunu daha sonraki Önerme 3.3.3 ve Teorem 3.3.1 açık olarak göstereceğiz.) [1,18]

**Önerme 3.3.3.** $\mathrm{A},\mathrm{B}\in M$ olsun.

**i)** $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$ ise $\overline{\mu}(\mathrm{A})\leq\overline{\mu}(\mathrm{B})$

**ii)** $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$ ve $\overline{\mu}(\mathrm{A})$ sonlu ise $\overline{\mu}(\mathrm{B}-\mathrm{A})=\overline{\mu}(\mathrm{B})-\overline{\mu}(\mathrm{A})$

**iii)** $\forall t\in X$ için $\overline{\mu}(\mathrm{A}+t)=\overline{\mu}(\mathrm{A})$ dır.

Ayrıca $\varnothing\in M$ olduğundan ve Tanım 3.3.2 den $\forall i>n$ için $E_i=\varnothing$ olacağından lebesque ölçüsünün toplamsal olduğu sonucunu çıkartabiliriz. Öyleki $E_i\in M$ ler ikişer ikişer ayrık kümeler ise $\overline{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu}(E_i)$ dir. [18]

**Teorem 3.3.1.** $\mu^*$-ölçülebilir kümelerinin bir $M$ sınıfı, bir $\sigma-$cebirdir. Üstelik $\mu^*$ dan sınırlandırılan ( üretilen) $\overline{\mu}$, $M$ için bir ölçümdür. [18]

**Uyarı 3.3.1.** $\mu^*(\mathrm{A})=0$ olmak üzere $\mathrm{A}$, $\mu^*$ ölçülebilirdir. Sonuç olarak $\overline{\mu}$ ölçümü ($M$ üzerinde $\mu^*$ dan üretilen ) aşağıdaki özellikleri sağlarsa

**i)** $E\in M$ için $\overline{\mu}(E)=0$

**ii)** $F\in M$ için $F\subset E$

o zaman $\overline{\mu}$ ölçümüne tam ölçüm denir. $\sigma-$cebir üzerinde her ölçüm tam değildir. Fakat $\sigma-$cebir üzerinde her ölçüm Önerme 3.3.4 ile tamlaştırılabilir. [18]

**Önerme 3.3.4.** Bir $\mathcal{A}$ , $\sigma-$cebir üzerinde $\mu$ bir ölçüm olsun.

$$\mathcal{A}_0=\{\mathrm{A}\cup B:\ \ \mathrm{A}\in\mathcal{A},\ \ B\subset C,\ \ C\in\mathcal{A}\ ve\ \mu(C)=0\}$$

ve $\mathrm{A}\cup B\in\mathcal{A}_0$ için $\mu_0(\mathrm{A}\cup B)=\mu(\mathrm{A})$

dır. Bu durumda $\mathcal{A}_0$ bir $\sigma-$cebirdir. Öyle ki $\mu_0$, $\mathcal{A}_0$ üzerinde bir tam ölçümdür. ($\mu_0:\mu$ nin bir genişlemesidir.) [18]

**Örnek 3.3.6.** Örnek 3.3.4 deki $\mu^*$ dış ölçümünü düşünelim. Eğer X in uygun bir boş olmayan alt kümesi E ve A=X ise o zaman

$$\mu^*(\mathrm{A})=1\neq 2=\mu^*(\mathrm{A}\cap E)+\mu^*\left(\mathrm{A}\cap E^C\right)\quad \text{dir.}$$

Sonuç olarak $X$ in ölçülebilir alt kümelerinin tüm sınıfı $\{\varnothing,X\}$ dir. [18]

**Örnek 3.3.7.** Eğer $2^X$ üzerinde sayılabilir bir ölçüm $\mu^*$ ise o zaman $2^X$, tüm $\mu^*$-

ölçülebilir kümelerin bir sınıfıdır[18].

**Tanım 3.3.4.** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $\mu^*$, $2^X$ üzerinde bir dış ölçüm olsun. Öyle ki eğer $d(\mathrm{A},\mathrm{B})>0$ sağlarsa $\mu^*(\mathrm{A}\cup B)=\mu^*(\mathrm{A})+\mu^*(B)$ olur. Bu durumda $\mu^*$ bir metrik dış ölçüm olarak adlandırılır. [1]

**Tanım 3.3.5** $\mathrm{B}=\bigcap\{F:\ F, tüm\, aralıkları\ içeren\ bir\ \sigma-cebir\}$ şeklinde tanımlansın bu durumda $\sigma$-cebirlerden oluşan bir ailenin elemanlarının arakesiti de bir $\sigma$-cebir olduğundan B de bir $\sigma$-cebirdir. B ailesinin elemanlarına borel kümeleri denir. B ailesi tüm aralıkları içeren en küçük $\sigma$-cebirdir. [18]

**Teorem 3.3.2.** $(X,d)$ metrik uzayında her borel kümesi $2^X$ üzerinde ki bir dış ölçüm ile bağlantılı olarak $\mu^*-$ölçülebilirdir. $\Leftrightarrow$ $\mu^*$ bir dış metrik ölçümdür. [1]

**Teorem 3.3.3. (Carathedory Genişleme Teoremi)** $\mu$, $\mathrm{A}\subset 2^X$ cebiri üzerinde bir ölçüm olsun. $E\subset X$ için

$$\mu^*(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)\ :\ \ E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\ \ ,\ \ E_i\in \mathrm{A}\right\}$$

olsun. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır.

**i)** $\mu^*$ bir dış ölçümdür.

**ii)** $E\in\mathrm{A}$ için $\mu(E)=\mu^*(E)$ dir.

**iii)** $E\in\mathrm{A}$ için $E$ , $\mu^*$-ölçülebilirdir.

**iv)** $\mu^*$-ölçülebilir kümeleri için $\mu^*$ dan üretilen $\overline{\mu}$ ölçümü, A ya dahil olan bir $\sigma$-cebiri üzerinde ki $\mu$ nün bir genişlemesidir.

**v)** Eğer $\mu$ bir $\sigma$-sonlu ise o zaman $\overline{\mu}$ ölçümü $\mu$ nun tek genişlemesidir (A ya dahil olan en küçük $\sigma$-cebiri üzerinde). [1,3]

# 4. BÖLÜM

## BULANIK ÖLÇÜM

Bulanık ölçümlerle ilgili şimdiye kadar bir çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların ışığında bir çok tanım ve kavram geliştirilmiştir. Bulanık ölçümle ilgili ilk çalışmalar Sugeno $[23, 24]$ tarafından yapılmıştır. Sugeno aynı zamanda $\lambda$-bulanık ölçümünüde tanımlamıştır. Daha sonra Z. Wang $[30]$ tarafından benzerlik ölçümü tanımlanmıştır. Shafer $[22]$ tarafından makul ve güvenirlik ölçümleri geliştirilmiş ve Dempstar $[4]$ bu ölçümleri alt ve üst olasılıklar olarak düzenlenmiştir. Bu teorinin bulanık ölçümlere genelleştirilmesi ile ilgili daha sonra Höhle $[13]$, Dubois ve Prade $[6]$, Yen$[31]$ bir çok çalışma yapmıştır. Ayrıca Shafer $[21, 22]$ makul ve güvenirlik ölçümlerin özel bir hali olan olanak (olasılık) ve gereklilik ölçümlerini tanımlamıştır ve Zadeh $[33]$ de bulanık küme bağlamında bu ölçümü düzenlemiştir. Ayrıca bu ölçümler olanak teorisi adı altında Dubois ve Prade $[7,8,9]$ de kapsamlı olarak incelenmiştir.

### 4.1. Bulanık Ölçüm ve Yarı Sürekli Bulanık Ölçüm

$X$ , boş olmayan bir küme $\mathcal{C}$, $X$ kümesinin alt kümelerinin boş olmayan bir sınıfı; $\mu : \mathcal{C} \to [0, \infty]$, $\mathcal{C}$ ’ de tanımlı, negatif olmayan, genişletilmiş reel değerli küme fonksiyonu olsun.

**Tanım 4.1.1.** Aşağıdaki dört şartı sağlayan, ( $X$ ,$\mathcal{C}$ ) üzerindeki $\mu$ küme fonksiyonuna bulanık ölçüm denir.

**i)** $\emptyset \in \mathcal{C}$ iken $\mu(\emptyset) = 0$

**ii)** $E, F \in \mathcal{C}$ ve $E \subset F$ ise $\mu(E) \le \mu(F)$ (monotonluk)

**iii)** $\{E_n\} \subset \mathcal{C}$ , $E_1 \subset E_2 \subset ...$ ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{C}$ ise $\lim_n \mu(E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$

(alttan süreklilik)

**iv)** $\{E_n\} \subset \mathcal{C}$ , $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ , $\mu(E_1) < \infty$ ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{C}$ ise $\lim_n \mu(E_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)$ (üstten süreklilik).

(i), (ii) ve (iii) veya (i), (ii) ve (iv) özelliklerini sağlayan, ( $X$ , $\mathcal{C}$ ) üzerindeki $\mu$ küme fonksiyonuna sırasıyla, alttan yarı sürekli bulanık ölçüm veya üstten yarı sürekli bulanık ölçüm denir. Bunların her ikisine de kısaca yarı sürekli bulanık ölçüm denir. Ayrıca bir $\mu$ bulanık ölçümü veya yarı sürekli bulanık ölçümünde $X \in \mathcal{C}$ için; $\mu(X) = 1$ oluyorsa $\mu$ ye düzgün bulanık ölçüm denir.

Genellikle, $\mu$ ' nün tanımlandığı $\mathcal{C}$ sınıfları için monoton sınıf, yarı halka, halka, cebir, σ-halkası ve σ-cebiri veya kuvvet kümesi üzerinde duracağız. $\mathcal{F}$ ölçülebilir kümelerin bir sınıfı olmak üzere, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ üçlüsüne, bulanık ölçüm uzayı ( veya yarı sürekli bulanık ölçüm uzayı ) denir. Eğer $\mu$ bir bulanık ölçümse ( veya yarı sürekli bulanık ölçümse), ( $X$ , $\mathcal{F}$ ) ölçülebilir bir uzaydır. Burada $X \in \mathcal{F}$ olarak dikkate alınacaktır.

Klasik ölçümde bazı sonlu, σ-sonlu gibi adlandırmalar, bulanık ölçümler ve yarı sürekli bulanık ölçümler için de uyarlanabilir. $[23, 24, 25, 29]$

**Örnek 4.1.1.** $\mu$ , ( $X$ , $\mathcal{F}$ )' de bir Dirac Ölçümü olsun. Herhangi bir $E \in \mathcal{F}$ için

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 \ , & x_0 \in E \ ise \\ 0 \ , & x_0 \notin E \ ise \end{cases}$$

ve $x_0$, $X$ 'ten alınmış bir nokta olsun. Bu $\mu$ küme fonksiyonu düzgün bulanık ölçümdür. $[29]$ Gerçekten

**i)** $E = \varnothing$ için $x_0 \notin E$ olacağından $\mu(\varnothing) = 0$ olur.

**ii)** $E, F \in \mathcal{F}$ için $E \subset F$ olsun. $s(E) = n$, $s(F) = n+1$ ve $x_0 \in F$ iken $x_0 \notin E$ olacak şekilde en az bir $x_0$ noktası vardır. Öyle ki $\mu(E) = 0 + n$ ve $\mu(F) = 1 + n$ olacağından $\mu(E) \le \mu(F)$ dir.

**iii)** $\{E_n\} \subset \mathcal{F}$ , $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$ için $E_1 = \{x_0\}$ , $E_2 = \{x_0, x_1\}$,

$E_3 = \{x_0, x_1, x_2\}$ … olacak şekilde kümeler elde edilebilir. Öyle ki

$$\lim_n \mu(E_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = n \text{ olur.}$$

**iv)** $\{E_n\} \subset \mathrm{F}$ , $E_1 \supset E_2 \supset ...$ için en az bir $\mu(E_1) < \infty$ vardır ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathrm{F}$ olacak şekilde $E_1 = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}$ , $E_2 = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-2}\}, E_3 = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-3}\}$ ⋯ kümeleri vardır. Öyle ki $\lim_n \mu(E_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$ olur. Bu da gösteriyor ki $\mu$ küme fonksiyonu bir bulanık ölçümdür.

Ayrıca $X \in \mathrm{F}$ için $\mu(X) = 1$ olacağından $\mu$ düzenli bir bulanık ölçümdür.

Genellikle, bir yarı halkadaki herhangi bir klasik ölçüm, bulanık ölçümdür.

**Örnek 4.1.2.** $X$ ={1, 2, 3, … , n}, $\mathcal{C} = P(X)$ olsun.

$$\mu(\mathrm{E}) = \left(\frac{|E|}{n}\right)^2$$

için $|E|$, E kümesine ait noktaların sayısını gösteriyorsa, $\mu$ bir düzenli ölçümdür. Ayrıca $X$ uzayı sonluyken, süreklilik ( alttan ve üstten ), kendiliğinden sağlanır. [29] Gerçekten

**i)** $\varnothing \in \mathcal{C}$ için $\mu(\varnothing) = \left(\frac{|\varnothing|}{n}\right)^2 = 0$

**ii)** $E, F \in \mathcal{C}$ ve $E \subset F$ olmak üzere $|E| = a$, $|F| = b$ seçersek $a \le b$ olacağı açıktır. Öyle ki $\mu(E) = \left(\frac{a}{n}\right)^2 = \frac{a^2}{n^2}$ ve $\mu(F) = \left(\frac{b}{n}\right)^2 = \frac{b^2}{n^2}$ için $a^2 \le b^2$ olacağından dolayı $\mu(E) \le \mu(F)$ elde edilir.

**iii)** $\{E_n\} \subset \mathcal{C}, E_1 \subset E_2 \subset ... \subset E_n$ ve $E_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{C}$ için $|E_1| = 1, |E_2| = 2, ..., |E_n| = n$ kümeleri oluşturulabileceğinden dolayı $\lim_n \mu(E_n) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \left(\frac{n}{n}\right)^2 = 1$ dir.

**iv)** $\{E_n\} \subset \mathcal{T}$, $E_1 \supset E_2 \supset ... \supset E_n$ için en az bir $\mu(E_1) < \infty$ vardır. Öyle ki

$\lim_n \mu(E_n) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \left(\frac{\varnothing}{n}\right)^n = 0$ olduğundan $\mu$ bir bulanık ölçümdür.

Ayrıca $\mu(X) = \left(\frac{n}{n}\right)^2 = 1$ olduğundan $\mu$ düzgün bir bulanık ölçümdür.

**Örnek 4.1.3.** $X_0 = \{1, 2, \ldots\}$, $X = X_0 \text{ x } X_0$ ve $\mathcal{T} = P(X)$ olsun. Herhangi bir $E \in P(X)$ için $\mu$ (E) = |Proj E|

Proj E = {x: (x, y) ∈ E}

olarak tanımlanan $\mu$ fonksiyonu yarı sürekli (alt yarı sürekli) bulanık ölçümdür. Öyle ki $\mu$ (i), (ii) ve (iii) şartlarını sağlar. [29]

Gerçekten

**i)** $\varnothing \in \mathcal{T}$ için $\mu(\varnothing) = |proj\,\varnothing| = 0$ dır.

**ii)** $E, F \in \mathcal{T}$ ve $E \subset F$ olmak üzere

$$\mu(E) = |projE| = \left|\{x_i : (x_i, y_i) \in E\}\right| = \left|\{x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}\right| \qquad (i = 1, 2, ..., n-1)$$

$$\mu(F) = |proj\,F| = \left|\{x_i : (x_i, y_i) \in F\}\right| = \left|\{x_1, x_2, ..., x_n\}\right| \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

olacağında dolayı $\mu(E) \leq \mu(F)$ elde edilir.

**iii)** $\{E_n\} \subset \mathcal{T}$ , $E_1 \subset E_2 \subset ...$ için $E_1 = \{1 \times \{1\}\}$, $E_2 = \{1 \times \{1, 2\}\}, E_3 = \{1 \times \{1, 2, 3\}\}, ...$

kümelerini dikkate alırsak $\lim_n \mu(E_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = |projE_n| = \left|1 \times \{x_1, x_2, ..., x_n\}\right| = E_n$

elde edilir.

**iv)** $\mu$, üstten sürekli değildir. Çünkü, $E_n$ ={1 x {n, n+1, n+2, … }} için $E_1 \supset E_2 \supset ...$

ve herhangi bir $n \in N$ için μ( $E_n$ ) = 1 olacaktır. Fakat $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing$ ve $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing\right) = 0$

olacaktır. Bu yüzden μ küme fonksiyonu, alt yarı sürekli bulanık ölçümdür.

$X$ ’ in alt kümelerinde bir cebir $\Re$ ve $\mu$ , ( $X$ , $\Re$ ) üzerinde düzenli bulanık ölçüm ( veya düzenli üst yarı sürekli bulanık ölçüm veya düzenli alt yarı sürekli bulanık ölçüm) olsun. ( $X$ , $\Re$ ) üzerinde tanımlı $\nu$ küme fonksiyonu

$$\nu\ (E) = 1 - \mu\ (\bar{E})$$

olarak verilsin. $\nu$, aynı zamanda, düzenli bulanık ölçümdür (sırasıyla, düzenli alt yarı sürekli bulanık ölçüm veya düzenli üst yarı sürekli bulanık ölçüm). $\nu$ ' ye $\mu$ 'de ikili bulanık ölçüm (sırasıyla, ikili üst yarı sürekli bulanık ölçüm veya ikili alt yarı sürekli bulanık ölçüm) denir. $[29]$

**4.2. λ – Bulanık Ölçümler**

**Tanım 4.2.1. (λ –kuralı )** $\sup\mu = \sup\mu(E)$ , ( $E \in \mathcal{C}$ ) ve λ∈ $\left(-\frac{1}{\sup\mu},\infty\right)\cup\{0\}$ olmak üzere $\forall E,F \in \mathcal{C}$ , $E \cup F \in \mathcal{C}$ ve $E \cap F = \varnothing$ için

$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F) + \lambda\mu(E)\cdot\mu(F)$ eşitliğine λ–kuralı denir ve $\mu$ , $\mathcal{C}$ üzerinde λ – kuralını sağlar. $[23, 29]$

**Tanım 4.2.2. ( sonlu λ –kuralı )** λ∈ $\left(-\frac{1}{\sup\mu},\infty\right)\cup\{0\}$ olacak şekilde eğer

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\left\{\prod_{i=1}^{n}[1+\lambda.\mu(E_i)]-1\right\}, \lambda \neq 0 \\ \sum_{i=1}^{n}\mu(E_i) \quad , \qquad \lambda = 0 \end{cases}$$

ifadesinde $\mathcal{C}$ nin her sonlu ayrık küme sınıfında olan $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ küme sınıfları ve $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{C}$ için bir λ değeri varsa $\mu$ , $\mathcal{C}$ üzerinde sonlu λ – kuralını sağlar. $[23, 29]$

**Tanım 4.2.3. (σ - λ –kuralı )** λ∈ $\left(-\frac{1}{\sup\mu},\infty\right)\cup\{0\}$ olacak şekilde eğer

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\left\{\prod_{i=1}^{\infty}[1+\lambda.\mu(E_i)]-1\right\}, \lambda \neq 0 \\ \sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i), \lambda = 0 \end{cases}$$

ifadesinde $\mathcal{C}$ nin her onlu ayrık küme sınıfında olan $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ küme sınıfı için ve $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{C}$ için bir λ değeri bulunabiliyorsa $\mu$ , $\mathcal{C}$ üzerinde σ - λ –kuralını sağlar.

λ = 0 iken: λ – kuralı toplamsal, sonlu λ - kuralı sonlu toplamsal ve σ - λ - kuralı σ - toplamsaldır. $[23, 29]$

**Teorem 4.2.1.** Eğer $\mathcal{C} = \mathfrak{R}$ bir halkaysa ve $\mu$ , λ - kuralını sağlarsa, sonlu λ- kuralını da sağlar. ( Bu durum $\mathcal{C}$ yarı halka olduğu zamanda geçerlidir.) $[29]$

**Örnek 4.2.1.** $X = \{a,b\}$ ve $\mathcal{C} = P(X)$ olsun.

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & , \quad E = \varnothing \quad ise \\ 0.2 & , \quad E = \{a\} \quad ise \\ 0.4 & , \quad E = \{b\} \quad ise \\ 1 & , \quad E = X \quad ise \end{cases}$$

olduğunda λ = 5 iken $\mu$ , λ - kuralını sağlar. Ayrıca $\mathcal{C}$ sonlu halka olduğundan, $\mu$ sonlu λ - kuralını ve σ - λ - kuralını da sağlar. $[29]$ Gerçekten

$$\mu(\{a\} \cup \{b\}) = \mu(\{a\}) + \mu(\{b\}) + \lambda\mu(\{a\}) \cdot \mu(\{b\})$$

$$1 = 0.2 + 0.4 + \lambda(0.2 \times 0.4)$$

$$1 = 0.6 + \lambda \frac{8}{100}$$

eşitliğinden λ = 5 olur ki, λ - kuralı sağlanır. Ayrıca Teorem 4.2.1 gereği $\mu$ , λ - kuralını sağlıyorsa sonlu λ- kuralını da sağlar ve aynı zamanda σ – λ-kuralını da sağlar öyle ki λ = 5 ve $\mu(E_1) = 0,\ \mu(E_2) = 0.2,\ \mu(E_3) = 0.4$ için

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \frac{1}{\lambda}\left\{\prod_{i=1}^{n}\left[1 + \lambda\mu(E_i)\right] - 1\right\}$$

$$= \frac{1}{5}\left\{(1 + 5\mu(E_1)) \cdot (1 + 5\mu(E_2)) \cdot (1 + 5\mu(E_3)) - 1\right\}$$

$$=\frac{1}{5}\left[1\cdot 2\cdot 3-1\right]=1$$

olduğundan hem sonlu λ-kuralını hem de σ – λ-kuralını sağlar.

**Tanım 4.2.4.** $\mu$, σ-λ-kuralını sağlıyor ve aynı zamanda en az bir $E \in \mathcal{C}$ için μ(E) < ∞ oluyor ise $\mu$' ye λ-bulanık ölçüm denir. Genellikle λ-bulanık ölçüm $g_\lambda$ ile gösterilir. $\mathcal{C}$ bir σ-cebir ise $g_\lambda$(X) = 1 iken $g_\lambda$ λ-bulanık ölçümü, aynı zamanda Sugeno Ölçümü olarak da adlandırılır.

Örnek 4.2.1. deki küme fonksiyonu Sugeno Ölçümüdür. $\left[29\right]$

**Teorem 4.3.2.** $g_\lambda$, bir $\mathcal{C}$ sınıfı üzerinde boş kümeyi de içeren λ - bulanık ölçümse g($\varnothing$) = 0' dır ve $g_\lambda$ sonlu λ – kuralını sağlar. $\left[29\right]$

**Teorem 4.2.3.** $g_\lambda$, bir S yarı halkası üzerinde λ - bulanık ölçümse $g_\lambda$ monotondur. $\left[29\right]$

**Teorem 4.2.4.** $E_1, E_2 \in \mathcal{C}$ ve $E = E_1 \cup E_2 \in \mathcal{C}$ iken $\mu(E) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2)$ mevcutsa $\mu$, alt toplamsaldır. $E_1, E_2 \in \mathcal{C}$ ve $E = E_1 \cup E_2 \in \mathcal{C}$ iken $\mu(E) \geq \mu(E_1) + \mu(E_2)$ ise $\mu$ üst toplamsaldır denir. $\left[29\right]$

**Teorem 4.2.5.** $g_\lambda$, S yarı halkası üzerinde bir λ-bulanık ölçüm olsun. O halde

**i)** λ < 0 iken $g_\lambda$ alt toplamsal

**ii)** λ > 0 iken $g_\lambda$ üst toplamsal

**iii)** λ = 0 iken $g_\lambda$ toplamsaldır. $\left[29\right]$

**Teorem 4.2.6.** $g_\lambda$ bir $\Re$ halkası üzerinde, λ - bulanık ölçüm olsun. Her E $\in \Re$ ve F $\in \Re$ için

**i)** $g_\lambda(E - F) = \dfrac{g_\lambda(E) - g_\lambda(E \cap F)}{1 + \lambda . g_\lambda(E \cap F)}$

**ii)** $g_\lambda(E \cup F) = \dfrac{g_\lambda(E) + g_\lambda(F) + g_\lambda(E \cap F) + \lambda . g_\lambda(E)\, g_\lambda(F)}{1 + \lambda . g_\lambda(E \cap F)}$

ayrıca, eğer $\Re$ bir cebir ve $g_\lambda$ düzenliyse

**iii)** $g_\lambda(\bar{E}) = \dfrac{1 - g_\lambda(E)}{1 + \lambda . g_\lambda(E)}$ $[29]$

**Teorem 4.3.7.** Yukarıda bahsedilen şartlar altında $1 + \lambda.\mu(X) = \prod_{i=1}^{n}[1 + \lambda.\mu(\{x_i\})]$

eşitliğindeki λ parametrelerine göre aşağıdaki ifadeler geçerlidir

(1) $\lambda > 0$ iken $\sum_{i=1}^{n} \mu(\{x_i\}) < \mu(X)$

(2) $\lambda = 0$ iken $\sum_{i=1}^{n} \mu(\{x_i\}) = \mu(X)$

(3) $-\dfrac{1}{\mu(X)} < \lambda < 0$ iken $\sum_{i=1}^{n} \mu(\{x_i\}) > \mu(X)$. $[29]$

### 4.3. Benzerlik (Quasi) Ölçümü

**Tanım 4.3.1.** $a \in [0, \infty)$ olsun. Genişletilmiş bir θ:[0, $a$ ] T [0, ∞] fonksiyonu sürekli, kesin artan ve θ(0) = 0, sonlu ya da sonsuz olma durumuna göre $\theta^{-1}(\{\infty\}) = \emptyset$ ya da {∞} ise θ fonksiyonuna T-fonksiyonu denir. $[29, 30]$

**Tanım 4.3.2.**Tanım aralığı θ T-fonsiyonu ile aynı olan $\mu$ fonksiyonu için $\mathcal{C}$ üzerinde her bir E ∈ $\mathcal{C}$ için (θ o $\mu$ ) (E) = θ ( $\mu$ (E)) olacak şekilde bir θ o $\mu$ toplamsal küme fonksiyonu tanımlanabiliyorsa $\mu$ ’ ye bir quasi – toplamsal denir.

$\mathcal{C}$ üzerinde θ o $\mu$ bir klasik ölçüm olacak şekilde bir θ T-fonsiyonu varsa $\mu$ bir quasi-ölçümüdür. θ T-fonksiyonu, $\mu$ ’ nün uygun fonksiyonudur.

Düzgün bir quasi-ölçümüne quasi-olasılığı denir. Açıkçası, her bir klasik ölçüm uygun T-fonksiyonu olarak özdeşlik fonksiyonuyla bir quasi-ölçümüdür. $[28, 29]$

**Örnek 4.3.1.** Örnek 4.1.2. ile verilen bulanık ölçüm bir quasi-ölçümüdür. Uygun T-fonksiyonu ise $\theta(y) = \sqrt{y}$, y ∈ [0, 1]’ dir. $[29]$

**Teorem 4.3.1.** Bir yarı halka üzerinde ki her bir quasi-ölçümü bir quasi toplamsal bulanık ölçümdür. [29]

**Teorem 4.3.2.** $\mu$ bir klasik ölçüm ise her bir θ T-fonksiyonu dizisi $\mu$ dizisini içerir ve $\theta^{-1}$ o $\mu$, θ'nın uygun T-fonksiyonu ile quasi-ölçümüdür. [29]

**Teorem 4.3.3.** $\mu$ bir $\Re$ halkası üzerinde $\mu(\emptyset) = 0$ olacak şekilde bir quasi toplamsal olsun. $\mu$ hem $\Re$ halkası üzerinde alttan sürekli hem de ∅' de üstten sürekli ve sonlu ise; $\mu$, $\Re$ halkası üzerinde quasi-ölçümü olur. [29]

**Sonuç 4.3.1.** Bir halka üzerinde quasi toplamsal bulanık ölçüm bir quasi-ölçümüdür. [28]

**Teorem 4.3.4.** $\lambda \neq 0$ olsun. Her bir λ - bulanık ölçümü $g_\lambda$, uygun T-fonksiyonu

$$\theta_\lambda(y) = \frac{\ln(1+\lambda y)}{k.\lambda}, \quad y \in [0, \sup g_\lambda]$$

k keyfi bir sonlu pozitif gerçel sayı olmak üzere

$$\theta_\lambda^{-1}(x) = \frac{e^{k\lambda x} - 1}{k.\lambda}, \quad x \in [0, \infty]$$

ile $\theta_\lambda^{-1}$ o $\mu$ bir bulanık ölçümdür. [29]

**Örnek 4.3.2.** $X = \{a, b\}$, F $= P(X)$ olsun ve $g_\lambda$

$$g_\lambda(E) = \begin{cases} 0 & , \quad E = \emptyset \quad ise \\ 0.2 & , \quad E = \{a\} \quad ise \\ 0.4 & , \quad E = \{b\} \quad ise \\ 1 & , \quad E = X \quad ise \end{cases}$$

O halde $g_\lambda$ bir $\lambda = 5$ parametresiyle λ - bulanık ölçümdür. Eğer

$$\theta_y(y) = \frac{\ln(1+\lambda y)}{\ln(1+\lambda)} = \frac{\ln(1+5y)}{\ln 6}$$

alırsak, o zaman

$$\theta_\lambda \circ g_\lambda(E) = \begin{cases} 0 & , \quad E = \varnothing \quad ise \\ 0.387 & , \quad E = \{a\} \quad ise \\ 0.613 & , \quad E = \{b\} \quad ise \\ 1 & , \quad E = X \quad ise \end{cases}$$

olur. $\theta_\lambda$ o $g_\lambda$ bir olasılık ölçümüdür. $[29]$

**Sonuç 4 3.2.** Bir yarı halka üzerinde λ - kuralı, sonlu λ - kuralına eşittir. $[29]$

**Sonuç 4.3.3.** Bir yarı halka üzerinde her bir λ - bulanık ölçüm, süreklidir. $[29]$

**Sonuç 4.3.4.** Bir yarı halka üzerinde süreklilik ile λ - kuralı aynı zamanda σ - λ - kuralına eşittir. Böylece bir halka üzerinde λ – kuralını sağlayan bulanık ölçüm bir λ - bulanık ölçümdür. $[29]$

**Sonuç 4.3.5.** Bir $\Re$ cebiri üzerinde düzgün bir λ - bulanık ölçüm, $g_\lambda$ ise o zaman her bir E ∈ $\Re$ için μ(E) = 1 - $g_\lambda$(E), $\Re$ ' de düzgün bir λ - bulanık ölçümdür ve parametresi $\lambda' = -\frac{\lambda}{\lambda+1}$ ' e göredir. $[29]$

## 4.4. Güvenirlik Ölçümleri ve Makul Ölçümler

**Tanım 4.4.1.** $P(P(X))$, $P(X)$ 'in kuvvet kümesi olsun. Eğer *p*, $(P(X), P(P(X)))$ üzerinde bir ayrık olasılık ölçümü ve $p(\{\varnothing\}) = 0$ ise o zaman $\mu: P(X) \to [0,1]$ küme fonksiyonu, $\forall E \in P(X)$ için $\mu(E) = p(\{E\})$ olarak tanımlıdır ve $P(X)$ üzerinde bir basit olasılık ataması diye adlandırılır. $[6,13,29,31]$

**Teorem 4.4.1.** Bir küme fonksiyonu olan $\mu: P(X) \to [0,1]$ bir basit olasılık atamasıdır ancak ve ancak $\mu(\varnothing) = 0$ ve $\sum_{E \in P(X)} \mu(E) = 1$ dir. $[29]$

**Tanım 4.4.2.** Eğer $\mu$ , $P(X)$ üzerinde bir basit olasılık ataması ise o zaman

Bel: $P(X)$ → [0, 1] küme fonksiyonu kesindir, her E ⊂ $P(X)$ için

$$\text{Bel(E)} = \sum_{F \subset E} m(F)$$

ve $(X, P(X))$ üzerinde bir güvenirlik (belief) ölçümüdür. $[6,13,29,31]$

**Not 4.4.1.** Sayılabilir bir E kümesinin kardinali |E| ile gösterilir.

**Teorem 4.4.2.** Eğer Bel$\left(X, P\left(X\right)\right)$ üzerinde bir güvenirlik ölçümü ise o zaman

**i)** Bel(∅) = 0

**ii)** Bel( $X$ ) = 1

**iii)** $\left\{E_1, E_2, \ldots, E_n\right\}$, $P\left(X\right)$ ' in sonlu alt sınıfları olmak üzere

$$Bel\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \geq \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} Bel\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right)$$

**iv)** Bel, üstten süreklidir. $\left[29\right]$

**Teorem 4.4.3.** Her güvenirlik (belief) ölçümü, monotondur ve üst toplamsaldır. $\left[29\right]$

**Teorem 4.4.4.** $X$ , sınırlı olsun. Eğer $m : P\left(X\right)$ T [0, 1] küme fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa

**i)** $m$ (∅) = 1

**ii)** $m$ ( $X$ ) = 1

**iii)** $m\,(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\,) \geq \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \mu\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right)$, burada $\left\{E_1, E_2, \ldots, E_n\right\}$, $P\left(X\right)$ ' in sınırlı alt sınıflarıdır. O zaman, $\mu$ küme fonksiyonu

$$\mu\,(\mathrm{E}) = \sum_{F \subset E} (-1)^{|E-F|} m(F)\text{, (her E} \in P\left(X\right)\text{ için)}$$

için kesindir ve bir basit olasılık atamasıdır. $m$ , $\mu$ ' den çıkarılmış güvenirlik ölçümü olmak zorundadır

$$m\,(\mathrm{E}) = \mathrm{Bel(E)} = \sum_{F \subset E} \mu(F)\text{ ' dir.} \quad \left[29\right]$$

**Tanım 4.4.3.** Eğer *m*, $P\left(X\right)$ üzerinde, bir basit olasılık ataması ise o zaman PI: $P\left(X\right) \rightarrow$ [0, 1] olarak tanımlı küme fonksiyonu, her E ∈ $P\left(X\right)$ için

$$\mathrm{PI(E)} = \sum_{F \cap E \neq \emptyset} \mu(F)$$

$\left(X, P\left(X\right)\right)$üzerinde makul (plausibility) ölçüm olarak adlandırılır. $\left[6, 13, 29, 31\right]$

**Teorem 4.4.5.** Eğer Bel ve PI bazı basit olasılık atamalarında tanımlı güvenirlik ve makul ölçümleri ise o zaman

**i)** Bel(E) = 1 – PI(Ē)

**ii)** Her E $\subset X$ için Bel(E) ≤ PI(E)' dir. [29]

**Teorem 4.4.6.** Eğer PI, $\left(X, P\left(X\right)\right)$üzerinde bir makul ölçüm ise o zaman

**i)** PI(∅) = 0

**ii)** PI( $X$ ) = 1

**iii)** PI($\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ ) ≤ $\sum_{I \subset \{1,2,\ldots,n\}, I \neq \varnothing} (-1)^{|I|+1} PI\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right)$, burada $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$, $P\left(X\right)$' in sınırlı, alt sınıflarıdır.

**iv)** PI alttan süreklidir. [29]

**Teorem 4.4.7.** Her makul ölçüm monoton ve alt toplamsaldır. [29]

## 4.5. Olasılık Ölçümleri ve Gereklilik Ölçümleri

**Tanım 4.5.1.** $\mu$, $\mathcal{C}$ üzerinde bulanık toplamsaldır (veya $f$ - toplamsaldır ) ancak ve ancak T keyfi bir indeks kümesi ve { $E_t$ | t ∈ T}, $\mathcal{C}$ üzerinde bir alt sınıf olmak üzere

$$\mu\left(\bigcup_{i \in T} E_t\right) = \sup_{i \in T} \mu(E_i)\ .$$

Eğer $\mathcal{C}$ bir sonlu sınıfsa, $\mu$' nün $\mathcal{C}$ üzerindeki f - toplamsallığı, $E_1 \in \mathcal{C}$, $E_2 \in \mathcal{C}$, $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{C}$ olmak üzere aşağıdakine eşdeğerdir

$$\mu\left(E_1 \cup E_2\right) = \max\left\{\mu\left(E_1\right), \mu\left(E_2\right)\right\}\ .[29,33]$$

**Tanım 4.5.2.** $\mu$' ye $\mathcal{C}$ üzerinde genelleştirilmiş olasılık (possibility) ölçümü denir ancak ve ancak ‘‘o’’(birleşim) işlemi $\mathcal{C}$ üzerinde $f$ - toplamsaldır ve μ(E) < ∞ olacak şekilde E ∈$\mathcal{C}$ vardır.

Genellikle bir genelleştirilmiş olasılık ölçümü π olarak belirtilir. [29,33]

**Tanım 4.5.3.** Eğer π, $P(X)$ üzerinde bir genelleştirilmiş olasılık ölçümü olarak tanımlanmışsa, $f$ fonksiyonu X üzerinde her $x \in X$ için şu şekilde tanımlanır

$$f(x) = \pi(\{x\})$$

bu fonksiyonuna ise yoğunluk ( olasılık) fonksiyonu denir. [29,33]

**Teorem 4.5.1.** $\mathcal{T}$ üzerindeki herhangi bir genelleştirilmiş olasılık ölçümü olan π, $\mathcal{T}$ üzerinde bir alt yarı sürekli bulanık ölçümdür. [29,33]

**Tanım 4.5.4.** $P(X)$ üzerindeki düzgün bir genelleştirilmiş olasılık ölçümü olan π'ye olasılık ölçümü denir[29,33].

**Teorem 4.5.2.** Eğer $f$, bir olasılık ölçümü olan π' de yoğunluk fonksiyonu ise

$$\sup_{x\in X} f(x) = 1 \text{ ' dir.} \qquad (*)$$

Tersine, Eğer bir $f : X \to [0, 1]$ fonksiyonu $(*)$ ' i sağlarsa $f$, bir π olasılık ölçümü üzerinde tek olarak tanımlanabilir ve $f$, π üzerinde yoğunluk fonksiyonudur [29,33].

**Tanım 4.5.5.** Bir basit olasılık ayrışımına uyumludur denir ancak ve ancak ''o'' işlemi, bir küme üzerinde yoğunlaşır. ( Buradaki bir sınıf, tamamen kümelerin birleşim bağıntısı tarafından düzenlenmiştir.) [29,33]

**Teorem 4.5.3.** $X$, sonlu olsun. O zaman herhangi bir olasılık ölçümü bir makul ölçümdür ve yöndeş basit olasılık ayrışımı uyumludur. Diğer taraftan, makul ölçümü uyumludur ve basit olasılık ayrışımı bir olasılık ölçümüdür.

**Tanım 4.5.6.** Eğer π, $P(X)$ üzerinde bir olasılık ölçümü ise onun çift küme fonksiyonu v her E ∈ $P(X)$ için şöyle tanımlanır

$$v(E) = 1 - \pi(\bar{E})$$

ve buna $P(X)$ üzerinde gereklilik ölçümü denir. [29,33]

**Teorem 4.5.4.** Bir küme fonksiyonu olan v: $P(X) \to [0, 1]$ bir gereklilik ölçümüdür ancak ve ancak T bir indeks kümesi, $\{E_t \mid t \in T\}$ $P(X)$' in bir alt sınıfı ve v(∅) = 0 olmak üzere; $v\left(\bigcap_{t\in T} E_t\right) = \inf_{t\in T} v(E_t)$ şartı sağlanır. $[29,33]$

**Teorem 4.5.5.** Herhangi bir gereklilik ölçümü, bir üst yarı sürekli bulanık ölçümdür. Bundan başka eğer $X$ sonlu ise o zaman herhangi bir gereklilik ölçümü güvenirlik ölçümünün özel bir örneğidir ve yöndeş basit olasılık ayrışımı uyumludur. $[29,33]$

## 4.6. Sonlu Bulanık Ölçümlerin Özellikleri

Bu bölümde biz, bir $\mathcal{C}$ sınıfı olarak F , σ - halkasını alacağız.

**Teorem 4.6.1.** Eğer μ bir sonlu bulanık ölçüm ise o zaman, limiti olan herhangi bir $\{E_n\}$ dizisi ve $\{E_n\} \subset$ F için $\lim_n \mu(E_n) = \mu(\lim_n E_n)$ ’ dir. $[29]$

**Tanım 4.6.1.** $\mu$ , ayrıntılıdır ancak ve ancak F ’ deki kümelerin herhangi bir ayrık dizisi olan $\{E_n\}$ için; $\lim_n \mu(E_n) = 0$ dır. $[29]$

**Teorem 4.6.2.** Eğer $\mu$ , bir sonlu üst yarı sürekli bulanık ölçüm ise o zaman $\mu$ , ayrıntılıdır. $[29]$

**Sonuç 4.6.1.** Ölçülebilir uzay üzerindeki herhangi bir sonlu bulanık ölçüm ayrıntılıdır. $[29]$

## 5. BÖLÜM

## LATİSLER

Bu bölümde özel türde kısmi sıralama bağıntısıyla elde edilmiş olan latisler hakkında temel tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir $[2,6,11,24,25,32]$.

**Tanım 5.1.** Bir $\mathrm{L}$ kısmi sıralı kümesinde $\forall x, y \in \mathrm{L}$ için $\{x, y\}$ kümesinin eküs'ü ve ebas'ı varsa, $\mathrm{L}$ 'ye bir latis denir. Yani $(\mathrm{L}, \leq)$ kısmi sıralı kümesi verildiğinde $\forall x, y \in \mathrm{L}$ için

$$eküs\{x, y\} = \sup\{x, y\} = x \vee y \in \mathrm{L}$$

ve

$$ebas\{x, y\} = \inf\{x, y\} = x \wedge y \in \mathrm{L}$$

oluyor ise $\mathrm{L}$ 'ye latis denir.

Genellikle bir latis de $x \vee y = eküs\{x, y\}$ ve $x \wedge y = ebas\{x, y\}$ kısaltmaları kullanılır.

Bir $\mathrm{L}$ latisinde $\forall x, y, z \in \mathrm{L}$ noktaları için

**i)** $x \leq x \vee y$ , $y \leq x \vee y$

**ii)** $x \leq y$ ve $z \leq y$ ise $x \vee z \leq y$

**iii)** $x \wedge y \leq x$ , $x \wedge y \leq y$

**iv)** $x \leq y$ ve $x \leq z$ ise $x \leq y \wedge z$

özelliklerinin doğruluğu tanımdan açıktır. $[2,11,25]$

**Örnek 5.1.** $(Z, \leq)$, $\leq$ sıralama bağıntısıyla $Z$ tamsayılar kümesi bir latistir. $[2,11,25]$

**Örnek 5.2.** Bir $X \neq \varnothing$ kümesi için $(P(X), \subseteq)$ kümesi bir latistir. Gerçekten $B, C \in P(X)$ için $B \vee C = B \cup C$ ve $B \wedge C = B \cap C$ olduğu açıktır. $[2,11,25]$

**Teorem 5.1.** Bir $\mathrm{L}$ latisinde $\forall x, y, z \in \mathrm{L}$ noktaları için

**i)** $x \vee x = x$

**ii)** $x \wedge x = x$

**iii)** $x \vee y = y \vee x$

**iv)** $x \wedge y = y \wedge x$

**v)** $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

**vi)** $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

**vii)** $(x \vee y) \wedge x = x$

**viii)** $(x \wedge y) \vee x = x$ dir. $[2,11,25]$

**İspat:** Burada sadece (vi) ve (vii) nin ispatı verilecektir.

**vi)** $x \wedge (y \wedge z) \leq x$ ve $x \wedge (y \wedge z) \leq y \wedge z$ için $y \wedge z \leq y \Rightarrow x \wedge (y \wedge z) \leq y$ olduğundan dolayı

$$x \wedge (y \wedge z) \leq x \wedge y$$

elde edilir.

Benzer düşünceyle, $x \wedge (y \wedge z) \leq y \wedge z$ için $y \wedge z \leq z \Rightarrow x \wedge (y \wedge z) \leq z$ olur ki buradan da

$$x \wedge (y \wedge z) \leq (x \wedge y) \wedge z$$

elde edilir. Yine yukarıdaki yola paralel olarak $(x \wedge y) \wedge z \leq x \wedge (y \wedge z)$ olur. O halde $\leq$ nin ters simetrik oluşundan dolayı $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ eşitliği bulunur.

**vii)** $ebas(\{x \vee y, x\}) = x$ olduğunu göstermeliyiz. $x \leq x \vee y$ ve $x \leq x$ olduğundan $x$, söz konusu kümenin bir alt sınırıdır. $\{x \vee y, x\}$ kümesinin $z$ gibi herhangi bir alt sınırını alıp $z \leq x$ olduğunu göstermeye çalışalım. $z \leq x \vee y$ ve $z \leq x$ olması ile istenilenin sağlanacağı açıktır. O halde $(x \vee y) \wedge x = x$ çıkar. Diğer eşitliklerin ispatı açıktır. $[2,11,25]$ ■

**Teorem 5.2.** Bir $A \neq \varnothing$ kümesi üzerinde Teorem 5.1 deki özellikleri gerçekleştiren ve $\wedge, \vee$ ile gösterilen ikili işlemi verilmiş olsun.

Bu durumda $\forall x, y \in A$ için $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y$ olarak tanımlanan $\leq$ bağıntısı $A$ kümesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı oluşturur ve ayrıca $(A, \leq)$ bir latistir. [25]

**İspat:** öncelikle $\leq$ bağıntısının kısmen sıralama bağıntısı olduğunu gösterelim.

**i)** $\forall x \in A$ için $x \vee x = x$ olduğundan $x \leq x$ olur.
**ii)** $x \leq y$ ve $x \geq y$ olduğunu varsayalım. O halde $x \vee y = y$ ve $y \vee x = x$ yazabiliriz. Simetri özelliği gereğince $x \vee y = y \vee x$ olduğundan dolayı $x = y$ elde edilir.
**iii)** $x \leq y$ ve $y \leq z$ olduğunu varsayalım. Tanım gereği $y \vee z = z$ ve $x \vee y = y$ yazabiliriz ve böylece simetri özelliğinden

$$x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

$$= y \vee z = z$$

olduğunda $x \leq z$ elde edilir.

Şimdi bu kısmi sıralama bağıntısına göre $A$ nın bir latis olduğunu göstermek için $x \vee y = ek\ddot{u}s(\{x, y\})$, $x \wedge y = ebas(\{x, y\})$ eşitliklerini göstermeliyiz. Bunun için birinci eşitliğin gösterilmesi yeterli olacaktır. Diğeri de benzer benzer yolla gösterilebilir. $x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y$ den $x \leq x \vee y$ elde edilir. Benzer yolla da $y \leq x \vee y$ olduğu görülür.

$z$, $\{x, y\}$ kümesinin herhangi bir üst sınırı olsun. Böylece $x \leq z$, $y \leq z$ $x \vee z = z$ ve $y \vee z = z$ için $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee z = z$ olur ki $x \vee y \leq z$ olduğu görülür. O halde $x \vee y = ek\ddot{u}s(\{x, y\})$ dir. [25] ■

Teorem 5.2 bir latisin gerçekte bir cebirsel yapı olduğunu göstermektedir. Bu şekilde verilen tanımlama şekline latisin cebirsel tanımı adı verililir. [25]

**Örnek 5.3.** Bir kümenin alt kümelerinden oluşan ve $A, B \in L$ için $A \cap B \in L$ ve $A \cup B \in L$ koşullarını gerçekleyen bir $L \neq \varnothing$ küme takımına kümeler latisi adı verilir.

Bir $L$ kümeler latisinde $A, B \in L$ için $A \vee B = A \cup B$ ve $A \wedge B = A \cap B$ olarak tanımlanan $\vee, \wedge$ ikili bağıntıları Teorem 5.2 nin koşullarını sağlar. O halde $L$ üzerinde $A \leq B \Leftrightarrow A \cup B = B$ olarak tanımlanan $\leq$ bağıntısı bir kısmen sıralama bağıntısıdır ve bu işlemle birlikte $L$ küme takımı bir latis olur. Burada ki $\leq$ bağıntısının gerçekte kapsama bağıntısı olduğu açıktır. $[25]$

**Tanım 5.2.** $A$ bir latis ve $\varnothing \neq B \subseteq A$ olsun. Eğer her $x, y \in B$ için; $x \vee y \in B$ ve $x \wedge y \in B$ oluyorsa $B$ ' ye $A$ 'nın bir alt latisi denir. $[25]$

**Örnek 5.4.** $(R, \leq)$ kısmen sıralı bağıntısı bir latistir. $R$ 'nin herhangi bir $B \neq \varnothing$ alt kümesi de $R$ 'nin bir alt latisidir. $[2,11,25]$

**Örnek 5.5.** Bir $X \neq \varnothing$ kümesi için $(P(X), \subseteq)$ latisini ele alalım. Bu durumda $X$ 'in alt kümelerinden oluşan herhangi bir kümeler ailesi latisinin $P(X)$ 'in bir alt latisi olduğunu göstermemiz kolaydır. $[2,11,25]$

**Tanım 5.3.** $(L, \leq)$ bir kısmi sıralı küme olsun. $\forall A \subseteq L$ için

$$\sup A = \vee A \in L$$

ve

$$\inf A = \wedge A \in L$$

oluyorsa $L$ ye bir tam latis denir. $[2,11,25]$

**Teorem 5.3.** $(A, \leq)$ bir kısmi sıralı küme ve $B \subseteq C \subseteq A$ olsun. $B$ ve $C$ 'nin en büyük öğeleri var ve bunlar sırasıyla $b$ ve $c$ ise $b \leq c$ olur. $[2,11,25]$

**İspat:** $\forall x \in C$ için $x \leq c$ ve $b \in B \subseteq C \Rightarrow b \in C$ olduğundan $b \leq c$ çıkar.

Bu teorem en küçük öğeler için şöyle uyarlanabilir: $B \subseteq C$, $B$ 'nin en küçük öğesi $d$ ve $C$ 'nin en küçük öğesi $e$ ise $e \leq d$ olur. $[2,11,25]$ ■

**Teorem 5.4.** $(A, \leq)$ kısmi sıralı kümesinin $B \subseteq C$ olacak şekilde iki alt kümesi verilsin. $C$ 'nin her bir üst sınırı $B$ 'nin de bir üst sınırıdır. Ayrıca $ekü s(B)$ ile $ekü s(C)$ var ise $ekü s(B) \leq ekü s(C)$ dir. $[2,11,25]$

**Teorem 5.5.** Kısmi sıralı bir $\mathrm{A}$ kümesi için aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

**i)** $\mathrm{A}$ 'nın boş olmayan ve üstten sınırlı olan her $B$ alt kümesinin eküs'ü vardır.

**ii)** $\mathrm{A}$ 'nın boş olmayan ve alttan sınırlı olan her $B$ alt kümesinin ebas'ü vardır. $[25]$

**Teorem 5.6.** Bir A kısmi sıralı kümesi en küçük ve en büyük elemanlara sahip olsun. Öyle ki aşağıdaki iki koşul bir birine denktir.

**i)** $\mathrm{A}$ nın her alt kümesinin eküs'ü vardır.

**ii)** $\mathrm{A}$ nın her alt kümesinin ebas'ı vardır. $[24]$

**İspat:** (i) $\Rightarrow$ (ii) **:** (i) koşulunun doğru olduğunu varsayalım. $\mathrm{A}$ 'nın ve $\varnothing$' nin eküs'ü vardır. $ekü s(\mathrm{A}) = M$ ve $ekü s(\varnothing) = m$ olsun. $m$, $\mathrm{A}$ 'nın en küçük elemanıdır. O halde $B \subseteq \mathrm{A}$ verilsin. Eğer $B = \varnothing$ ise, $ebas(B) = M$ dir. Fakat $B \neq \varnothing$ ise, $B$ kümesi $m$ ile alttan sınırlı olduğundan Teorem 5.5 'e göre $B$ 'nin ebas'ı vardır. Böylece (ii) elde edilir. Benzer şekilde (ii) $\Rightarrow$ (i) de elde edilir. $[24]$ ■

**Örnek 5.6.** $X \neq \varnothing$ kümesi için $P(X)$ üzerinde $\subseteq$ bağıntısına göre bir latis oluşturduğumuzu Örnek 5.1 den hatırlayalım. $B$ kümesi $P(X)$ in bir alt kümesi ise bu durumda $\bigcap B \in P(X)$ elemanı $B$' nin en küçük üst sınırı olur. Dolayısıyla $(P(X), \subseteq)$ bir tam latis olmaktadır. $[24]$

**Tanım 5.4.** $(\mathrm{L}, \leq)$ bir latis olsun. $\forall x, y \in \mathrm{L}$ için

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

oluyorsa $\mathrm{L}$ ye dağılımlı latis denir. $[25]$

**Tanım 5.5.** $(\mathrm{L}, \leq)$ bir latis olsun. $\mathrm{L}$ nin bir en küçük ve bir de en büyük elemanı varsa, bu durumda $\mathrm{L}$ ye sınırlı latis denir. Bu en küçük ve en büyük elemanlar sırasıyla 0 ve I ile gösterilecektir. Bu durumda sınırlı $\mathrm{L}$ latisi $(\mathrm{L}, \leq, 0, \mathrm{I})$ ile gösterilir. $[25]$

**Tanım 5.6.** $\mathrm{L}$ bir latis ve $c: \mathrm{L} \to \mathrm{L}$ bir dönüşüm olsun. $\forall a, b \in \mathrm{L}$ için

**i)** $a^c \wedge a = 0$ ve $a^c \vee a = \mathrm{I}$

**ii)** $a \le b$ ise $a^c \ge b^c$

**iii)** $\left(a^c\right)^c = a$

koşulları sağlanıyor ise $c$ dönüşümüne $\mathrm{L}$ ' de tümleyen dönüşüm denir $[24]$.

**Tanım 5.7.** $(\mathrm{L},\le,0,\mathrm{I})$ sınırlı latis olsun. $\forall x\in\mathrm{L}$ ve $\exists y\in\mathrm{L}$ için

$$x \vee y = \mathrm{I} \quad \text{ve} \quad x \wedge y = 0$$

oluyor ise $\mathrm{L}$ 'ye tümlenebilir latis ve $x$'e de tümlenebilir eleman denir. $[25]$

**Tanım 5.8.** $\mathrm{L}$ , tümlenebilir dağılımlı bir latis ise $\mathrm{L}$ latisine Boole latisi ya da Boole Cebiri denir.

Verilen bir $\mathrm{L}$ Boole Cebirinde $0\in\mathrm{L}$ ve $\mathrm{I}\in\mathrm{L}$ elemanları tektir. Burada $y\in\mathrm{L}$ ' ye, $x$ ' in tümleyeni denilecektir $[24]$.

**Tanım 5.9.** $(\mathrm{L},\le,0,\mathrm{I})$ sınırlı latis ve $c:\mathrm{L}\to\mathrm{L}$ , $c(a)=a^c$ fonksiyonu verilsin. $\forall a,b\in\mathrm{L}$ için

$$\left(a^c\right)^c = a \quad \text{ve} \quad (a\wedge b)^c = a^c \vee b^c$$

oluyorsa $\mathrm{L}$ 'ye De Morgan Cebiri denir. $[25]$

**Tanım 5.10.** $(\mathrm{L},\subseteq)$ bir tam latis olsun. $\forall\{x_i : i\in\mathrm{I}\}\subseteq\mathrm{L}$ ve $y\in\mathrm{L}$ için

$$\bigvee_{i\in\mathrm{I}}\left(x_i \wedge y\right) = \left(\bigvee_{i\in\mathrm{I}} x_i\right)\wedge y$$

oluyorsa $\mathrm{L}$ dağılımlı tam latisine, Tam Heyiting Cebir denir $[25]$.

**Tanım 5.11.** $(\mathrm{L},\le)$ bir latis olsun. Bu durumda $\mathrm{L}$ kümesinde ki $a,b\in\mathrm{L}$ ve $a\le b$ için $\{x\in\mathrm{L} : x\le b \text{ ve } a\le x\}$ kümesine $\mathrm{L}$ de ki bir aralık denir ve $[a,b]$ şeklinde gösterilir. $[25]$

## 6.BÖLÜM

## ÖLÇÜMLER ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Bu bölümde, klasik ölçüm, bulanık ölçüm ve latis değerli ölçüm arasındaki ilişkiler incelenmiş olup yapılan çalışmalara $[10,14,16,19,20,25,26,32,33]$ ek olarak benzer yollarla klasik ölçümdeki bazı tanım ve teoremleri latis değerli ölçüm ve bulanık ölçüme taşımaya çalıştık.

### 6.1. Klasik Ölçüm ile Latis Değerli Ölçüm Arasındaki İlişki

Latis kümeler ile klasik kümeler arasındaki temel fark, latis kümelerinin supremum veya infimuma sahip olma zorunluluğunun olmasıdır. Eğer bir kısmi sıralı küme sadece supremuma sahipse üst yarı latis, sadece infimuma sahipse alt yarı latis, her ikisine birden sahipse latis adını alır. Ayrıca verilen bir latis kümesinin tüm alt kümeleri infimum ve supremumu kendisine ait ise bu latise tam latis adı verilir. Fakat klasik kümelerde bu tarz bir sınırlandırma yoktur. Bu kısımda klasik kümeler üzerindeki bazı yapıları latis kümelerini kullanılarak ifade etmeye çalıştık. Bu alanda birçok çalışma yapılmıştır. Bu tezde onlardan bazılarına da yer verilmiştir. $[14,19,20]$

#### 6.1.1. Latis Değerli Kümelerde Temel Tanım ve İşlemler

**Tanım 6.1.1.1.** $L$ ve $L^*$ latisleri için latis işlemlerini koruyan ve $L$ den $L^*$ latisine bire-bir ve örten olan bir dönüşüm varsa, buna latis izomorfizma ya da kısaca izomorfizma denir.

Eğer $L$ den $L^*$ latisine bir latis izomorfizması varsa $L$, $L^*$ latisine izomorfiktir denir ve $L \cong L^*$ ile gösterilir. $[19]$

**Tanım 6.1.1.2.** Eğer $x \wedge y = x$ veya denk olarak $x \vee y = y$ ise $x \leq y$ yazabiliriz ve bu sıralamaya göre $L$ latisinin herhangi bir A alt kümesi $\sup \mathrm{A} = \vee \mathrm{A}$ ve $\inf \mathrm{A} = \wedge \mathrm{A}$ yı içeriyorsa $L$ latisine tam latis denir. Bir tam $L$ latisi I ve $O$ ile gösterilen 1 ve 0 ile temsil edilen maksimum ve minimum elemana sahiptir. $[19]$

**Tanım 6.1.1.3.** Eğer $\ell$, $L$ latisinin bir alt latisi ise $L$'ye $\ell$'nin bir genişlemesi denir. Eğer $L$'nin bir alt latisi olan $L_1$, $L$'nin $\ell$ alt latisini ve $L$'nin $M$ alt kümesini içeren minimal alt latis ise $L_1$ latisine, $M$' yi eklemekle elde edilen ve $L_1 = \ell(M)$ ile gösterilen $\ell$'nin latis genişlemesidir. [19]

**Tanım 6.1.1.4.** $(L, \subseteq)$ bir tam latis olsun. $\forall \{x_i : i \in \mathrm{I}\} \subseteq L$ ve $y \in L$ için

$$\bigvee_{i \in \mathrm{I}} (x_i \wedge y) = \left( \bigvee_{i \in \mathrm{I}} x_i \right) \wedge y$$

oluyorsa $L$ dağılımlı tam latisine, Tam Heyiting Cebir denir [20].

**Lemma 6.1.1.1.** $L$ dağılımlı bir latis olsun ve ayrıca $\max L = 1$ ve $\min L = 0$ olmak üzere; $\max \ell = \max M = 1$ ve $\min \ell = \min M = 0$ olacak şekilde $\ell$ ve $M$, $L$' nin alt latisleri olsunlar. O zaman $\ell(M)$

$$L_0 = \left\{ \bigvee_{i=1}^{n} (a_i \wedge b_i) : a_i \in \ell,\ x_i \in M,\ N = 1, 2, ... \right\}$$

Şeklinde tanımlı olan $L_0$' a eşittir. [19]

**Lemma 6.1.1.2.** $\max L = 1$ ve $\min L = 0$ olacak şekilde $L$'nin bir tam Heyiting cebiri olduğunu varsayalım. Eğer $\ell$ ve $M$, $\max \ell = \max M = 1$ ve $\min \ell = \min M = 0$ olacak şekilde $L$'nin bir tam Heyiting alt cebiri iseler

$$\overline{\ell(M)} = \left\{ \bigvee_{i \in \mathrm{I}} (a_i, x_i) : a_i \in \ell,\ x_i \in M,\ \mathrm{I}\ indis\ kümesi \right\}$$

$\ell$ ve $M$'yi içeren $L$'nin minimal tam Heyiting alt cebiridir. [19]

**Tanım 6.1.1.5.** $L$ bir tam latis olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa

i) $\forall \mathrm{A} \in L$ için $\mathrm{A}^C \in L$

ii) $\forall \mathrm{A}_i \in L$ için $\bigvee_{i=1}^{\infty} (\mathrm{A}_i) \in L$

$L$ tam latis kümesine, latis değerli $\sigma$-cebiri denir. [14]

**Tanım 6.1.1.6.** $\mu$, $\sigma(L)$ latis değerli $\sigma$-cebiri üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda

**i)** $\mu(\varnothing)=0$

**ii)** $\forall f,g\in\sigma(L)$ için $\mu(f),\mu(g)\geq 0$ öyle ki $f\leq g\Rightarrow \mu(f)\leq\mu(g)$

**iii)** $\forall f,g\in\sigma(L)$ için $\mu(f\vee g)+\mu(f\wedge g)=\mu(f)+\mu(g)$

**iv)** Eğer $f_n\subset\sigma(L),\ n\in N$ ve $f_1\leq f_2\leq\ldots\leq f_n\leq\ldots,$ için $\mu\left(\bigvee_{n=1}^{\infty}(f_n)\right)=\lim_n \mu(f_n)$

Şartları sağlanıyorsa $\mu$ ' ye latis değerli ölçüm denir. [14]

**Önerme 6.1.1.1.** $X$ latis değerli evrensel küme olmak üzere, latis değerli kümeler de $\vee,\wedge$ ve tümleme işlemleri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

( Terslenebilirlik) : $\left(L^C\right)^C=L$

( İdempotentlik) : $L\vee L=L$ ve $L\wedge L=L$

(Yutan Eleman) : $L\vee X=X$ , $L\wedge\varnothing=\varnothing$

( Özdeşlik) : $L\wedge X=L$ , $L\vee\varnothing=L$

$L\vee X=X$ , $L\wedge\varnothing=\varnothing$

(Değişme Özelliği): $L_1\vee L_2=L_2\vee L_1$

$L_1\wedge L_2=L_2\wedge L_1$

(Birleşme Özelliği): $\bigvee_{t\in T}\left(\bigvee_{s\in S_t}(L_s)\right)=\bigvee_{s\in\bigcup_{t\in T}S_t}(L_s)$

$\bigwedge_{t\in T}\left(\bigwedge_{s\in S_t}(L_s)\right)=\bigwedge_{s\in\bigcup_{t\in T}S_t}(L_s)$

(Dağılma Özelliği): $(L_1\wedge L_3)\vee(L_2\wedge L_3)=(L_1\vee L_2)\wedge L_3$

ve daha genel olarak $\bigvee_{t\in T}(L_t\wedge L)=\left(\bigvee_{t\in T}L_t\right)\wedge L$

(De Morgan Kuralı): $\left(\underset{t\in T}{\vee}\left(L_t\right)\right)^C = \underset{t\in T}{\wedge}\left(L_t^C\right)$

$$\left(\underset{t\in T}{\wedge}\left(L_t\right)\right)^C = \underset{t\in T}{\vee}\left(L_t^C\right).$$

Burada klasik kümelerden farklı olarak $\cup$, $\cap$ yerine $\vee$, $\wedge$ işlemleri kullanılmıştır. Yukarıdaki özellikler klasik kümedekine benzer olarak ortaya konmuştur ve küme özellikleri klasik kümelerde olduğu gibidir. Ancak küme işlemlerinde en belirgin fark $L\wedge \overline{L}\neq\varnothing$ ve $L\vee\overline{L}\neq X$ dir. Bu durum latis değerli kümeler için geçerli olduğu halde klasik kümelerde geçerli değildir. [19, 20, 24, 25]

**Önerme 6.1.1.2.** $L_1$ ve $L_2$ latis değerli kümeler olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

**i)** $L_1\subset L_2$

**ii)** $L_1\vee L_2 = L_2$

**iii)** $L_1\wedge L_2 = L_1$.

**Önerme 6.1.1.3.** $L_1$ ve $L_2$ boş kümeden farklı latis değerli ayrık kümeler ise $L_1\wedge L_2\neq\varnothing$ dır. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir.

**Önerme 6.1.1.4.** $\left\{L_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ latis değerli kümelerin bir dizisi olmak üzere

$$\lim_n \sup L_n = \bigwedge_{n=1}^{\infty}\bigvee_{i=1}^{\infty}\left(L_i\right) \quad \text{ve} \quad \lim_n \inf L_n = \bigvee_{n=1}^{\infty}\bigwedge_{i=1}^{\infty}\left(L_i\right) \text{ dir.}$$

**Örnek 6.1.1.1.** $X=\left\{a,b\right\}$, $\left(a\leq b\right)$ ve $\left\{L_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ latis değerli kümelerin bir dizisi olmak üzere

$$L_n = \begin{cases} \vee\left\{a,b\right\} & ;\ n \text{ çift ise} \\ \wedge\left\{a,b\right\} & ;\ n \text{ tek ise} \end{cases}$$

$L_1 = a$, $L_2 = b$, $L_3 = a$, $L_4 = b$ ... olacağından

$$\limsup_n L_n = \bigwedge_{n=1}^{\infty}\bigvee_{i=1}^{\infty}(L_i) = \bigwedge_{n=1}^{\infty}(\{a\}\vee\{b\}\vee\{a\}\vee\{b\}\ldots) = \bigwedge_{n=1}^{\infty}\{b\} = b$$

$$\liminf_n L_n = \bigvee_{n=1}^{\infty}\bigwedge_{i=1}^{\infty}(L_i) = \bigvee_{n=1}^{\infty}(\{a\}\wedge\{b\}\wedge\{a\}\wedge\{b\}\ldots) = \bigvee_{n=1}^{\infty}\{a\} = a$$

elde edilir.

**Örnek 6.1.1.2.** $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ tam latis değerli kümelerin bir dizisi olmak üzere

$$\left(\limsup_n L_n\right)^C = \liminf_n L_n^C$$

olduğunu gösterelim.

$$\limsup_n L_n = \bigwedge_{n=1}^{\infty}\bigvee_{i=1}^{\infty}(L_i) = \bigwedge_{n=1}^{\infty}(L_n \vee L_{n+1} \vee L_{n+2} \vee \ldots)$$

$$\limsup_n L_n = (L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee \ldots)\wedge(L_2 \vee L_3 \vee L_4 \vee \ldots)\wedge\ldots$$

eşitliğinin her iki tarafının tümleyenini alırsak

$$\left(\limsup_n L_n\right)^C = \left((L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee \ldots)\wedge(L_2 \vee L_3 \vee L_4 \vee \ldots)\wedge\ldots\right)^C$$

$$\left(\limsup_n L_n\right)^C = (L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee \ldots)^C \vee (L_2 \vee L_3 \vee L_4 \vee \ldots)^C \vee \ldots$$

$$\left(\limsup_n L_n\right)^C = \left(L_1^C \wedge L_2^C \wedge L_3^C \wedge \ldots\right)\vee\left(L_2^C \wedge L_3^C \wedge L_4^C \wedge \ldots\right)\vee\ldots$$

$$\left(\limsup_n L_n\right)^C = \bigvee_{n=1}^{\infty}\bigwedge_{i=1}^{\infty}\left(L_i^C\right)$$

$$\left(\limsup_n L_n\right)^C = \liminf_n L_n^C .$$

**Örnek 6.1.1.3.** $\overline{\lim_n}\left(L \vee L_n\right) = L \vee \left(\overline{\lim_n} L_n\right)$ olduğunu gösterelim.

$$\overline{\lim_n}\left(L \vee L_n\right) = \bigwedge_{n=1}^{\infty}\bigvee_{i=1}^{\infty}\left(L \vee L_i\right)$$

$$\overline{\lim_n}\left(L \vee L_n\right) = \left(\bigwedge_{n=1}^{\infty}\bigvee_{i=1}^{\infty}\left(L\right)\right) \vee \left(\bigwedge_{n=1}^{\infty}\bigvee_{i=1}^{\infty}\left(L_i\right)\right)$$

$$\overline{\lim_n}\left(L \vee L_n\right) = L \vee \left(\overline{\lim_n} L_n\right).$$

### 6.1.2. Latis Değerli Karakteristik Fonksiyon

**Tanım 6.1.2.1.** $X$ latis değerli evrensel küme ve $L$ latis değerli bir küme olmak üzere $\forall x \in X$ için $X_L$ karakteristik fonksiyonu

$$X_L = \begin{cases} m & , \quad x \in L \ \ ise \\ 0 & , \quad x \notin L \ \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $L_I = \sup_n L_n$ ve $L_0 = \inf_n L_n = 0$ olmak üzere $m$ sayısı, $L_0 < m < L_I$ aralığındaki değerleri alabilir.

**Önerme 6.1.2.1.** Latis değerli kümeler ile onların latis değerli karakteristik fonksiyonları arasında $\forall x \in X$ için

**i)** $L_1 = L_2 \Leftrightarrow X_{L_1}\left(x\right) = X_{L_2}\left(x\right)$

**ii)** $L_1 \subset L_2 \Leftrightarrow X_{L_1}\left(x\right) \leq X_{L_2}\left(x\right)$

**iii)** $X_x \equiv L_I$ ve $X_{\varnothing} = L_0$

şeklinde bir ilişki vardır.

**Önerme 6.1.2.2.** Latis değerli kümelerdeki işlemler ile latis değerli karakteristik fonksiyonlar arasındaki ilişki, $\{t : t \in T\}$ indeks kümesi olmak üzere

**i)** $X_{L_1 \cup L_2} = L_1 \vee L_2$

$$X_{\bigcup_{t\in T} L_t} = L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee \ldots \vee L_t \ldots = \sup_{t\in T} X_{L_t}$$

**ii)** $X_{L_1 \cap L_2} = L_1 \wedge L_2$

$$X_{\bigcap_{t\in T} L_t} = L_1 \wedge L_2 \wedge L_3 \wedge \ldots \wedge L_t \ldots = \inf_{t\in T} X_{L_t}$$

**iii)** $\sup_n L_n = L_{\mathrm{I}}$ olmak üzere $X_{L^C} = L_{\mathrm{I}} - X_L = L_{\mathrm{I}} \wedge X_{L^C}$ şeklinde ifade edilir.

**iv)** $X_{L_1 - L_2} = X_{L_1 \cap L_2^C} = L_1 \wedge L_2^C$

**v)** $X_{L_1 \Delta L_2} = X_{(L_1 - L_2)\cup(L_2 - L_1)} = X_{(L_1 - L_2)} \vee X_{(L_2 - L_1)} = \left(L_1 \wedge L_2^C\right) \vee \left(L_2 \wedge L_1^C\right)$

**vi)** $X_{\limsup_n L_n} = X_{\bigcap(\bigcup L_n)} = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{i=n}^{\infty} \left( X_{L_n} \right) = \limsup_n X_{L_n}$

**vii)** $X_{\liminf_n L_n} = X_{\bigcup(\bigcap L_n)} = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{i=n}^{\infty} \left( X_{L_n} \right) = \liminf_n X_{L_n}$

ve ayrıca $\lim_n L_n$ mevcut ise $X_{\lim_n L_n} = \lim_n X_{L_n}$ dir.

### 6.1.3. Latis Değerli Küme Sınıfları

**Tanım 6.1.3.1.** $X$ 'in latis değerli tüm alt kümelerinin sınıfına, $X$ 'in latis değerli kuvvet kümesi denir ve $LV\left(P\left(X\right)\right)$ şeklinde ifade edilir.

$LV\left(\mathfrak{R}\right)$, $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri altında kapalı olan $X$ ' in latis değerli alt kümelerinin bir sınıfı olsun ve alt latis olarak da $X$ ' in $LV\left(P\left(X\right)\right) = P\left(X\right)$ kuvvet kümesini içersin. Ayrıca $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri $LV\left(\mathfrak{R}\right) \supseteq P\left(X\right)$ olduğu zaman $\cup$ ve $\cap$ işlemleriyle eşdeğer olarak dikkate alınacaktır. $[26]$

**Tanım 6.1.3.2.** $X$ 'in boş olmayan bir $LV\left(\mathfrak{R}\right)$, latis değerli kümelerinin oluşturduğu sınıfta $\forall L_1, L_2 \in LV\left(\mathfrak{R}\right)$ için

**i)** $L_1 \vee L_2 \in LV\left(\mathfrak{R}\right)$

**ii)** $L_1 - L_2 = L_1 \wedge L_2^C \in LV(\Re)$

şartları sağlanıyor ise, $LV(\Re)$' ye latis değerli halka denir.

**Teorem 6.1.3.1.** Latis değerli her halka simetrik farklar ve arakesit işlemleri altında kapalıdır ( Tersine simetrik farklar ve arakesit işlemleri altında kapalı olan boştan farklı her latis değerli sınıf, bir latis değerli halkadır.)

**İspat:** $LV(\Re)$, latis değerli bir halka ise o zaman $\forall L_1, L_2 \in LV(\Re)$ için

**i)** $L_1 \Delta L_2 = (L_1 - L_2) \vee (L_2 - L_1) = (L_1 \wedge L_2^C) \vee (L_2 \wedge L_1^C)$ eşitliğinde

$(L_1 \wedge L_2^C) \in LV(\Re)$ ve $(L_2 \wedge L_1^C) \in LV(\Re)$ olduğundan $L_1 \Delta L_2 \in LV(\Re)$ olur.

**ii)** $L_1 \wedge L_2 = (L_1 \vee L_2) - (L_1 \Delta L_2)$ eşitliğinde $L_1 \vee L_2 \in LV(\Re)$ ve $L_1 \Delta L_2 \in LV(\Re)$ olduğundan $L_1 \wedge L_2 \in LV(\Re)$ olur ki istenilen elde edilir. Tersine

**i)** $L_1 \vee L_2 = (L_1 \Delta L_2) \Delta (L_1 \wedge L_2) \in LV(\Re)$

**ii)** $L_1 - L_2 = (L_1 \Delta L_2) \wedge L_1 \in LV(\Re)$

olacağından $LV(\Re)$, latis değerli bir halka olur. ■

**Tanım 6.1.3.3.** $X$ 'in boş olmayan latis değerli kümelerinin sınıfı olan $LV\sigma(\Re)$ sınıfı için

**i)** $\forall L_1, L_2 \in LV\sigma(\Re)$ için $L_1 - L_2 = L_1 \wedge L_2^C \in LV\sigma(\Re)$

**ii)** $L_n \in LV\sigma(\Re)$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ için $\bigvee_{n=1}^{\infty} (L_n) \in LV\sigma(\Re)$

oluyor ise $LV\sigma(\Re)$ sınıfına, latis değerli $\sigma$-halka denir.

**Önerme 6.1.3.1.** Latis değerli bir $\sigma$-halka, sayılabilir kesişimler altında kapalıdır ve dolayısıyla $LV\sigma(\Re)$ latis değerli bir $\sigma$-halka ve $\{L_n\}_{n=1}^{\infty} \in LV\sigma(\Re)$ bir küme dizisi olmak üzere

$$\lim_n \sup L_n = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{i=n}^{\infty} (L_i) \in LV\sigma(\Re)$$

ve
$$\lim_n \sup L_n = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{i=n}^{\infty} (L_i) \in LV\sigma(\Re)$$
dir.

**Örnek 6.1.3.1.** $X$ 'in tüm sonlu latis değerli alt kümelerinin sınıfı, latis değerli bir halkadır. Gerçekten $LV(\Re)$, tüm sonlu latis değerli kümelerin bir sınıfı olmak üzere

$LV(\Re)=\{L_1,L_2,...,L_n\}$ ve $i,\ j=1,2,3,...,n$ için

**i)** $L_i \vee L_j \in LV(\Re)$

**ii)** $L_i - L_j = L_i \wedge L_j^C \in LV(\Re)$

olduğundan $LV(\Re)$, latis değerli bir halka ifade eder.

**Örnek 6.1.3.2.** $X=[0,\infty)$ olsun. Sınırlı soldan kapalı, sağdan açık aralıkların tüm sonlu birleşimlerinin sınıfı, yani $\underset{i=1}{\overset{\infty}{\vee}}\{x:\ 0\le a_i \le x < b_i < \infty\}$ formundaki tüm alt kümelerin sınıfı latis değerli bir halkadır. Gerçekten özel olarak $L_i=[a_i,b_i)=[0,i)$ olarak seçersek $L_1=[0,1)$ ve $L_2=[0,2)$ için

**i)** $L_1 \vee L_2 = [0,1)\vee[0,2)=[0,2)$

**ii)** $L_1 - L_2 = L_1 \wedge L_2^C = [0,1)\wedge[2,\infty)=[0,1)$ olacağı açıktır.

**Tanım 6.1.3.4.** $X$ 'in boş olmayan bir $LV(\varphi)$, latis değerli kümelerinin sınıfı için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $LV(\varphi)$ sınıfına, latis değerli yarı halka denir.

**i)** $\forall L_1,L_2 \in LV(\varphi)$ için $L_1 \wedge L_2 \in LV(\varphi)$

**ii)** $L_1 \subset L_2$' yi sağlayan $\forall L_1,L_2 \in LV(\varphi)$ için sonlu bir $\{C_0,C_1,...,C_n\}; i=0,1,...,n$, $C_i \in LV(\varphi)$ latis değerli küme sınıfı mevcut olsun öyle ki

$$L_1=C_0\subset C_1\subset...\subset C_n=L_2$$

$$D_i=C_i-C_{i-1}\in LV(\varphi)\ ;\ i=1,2,...,n.$$

**Örnek 6.1.3.3.** $X=[0,\infty)$ olsun. Tüm sınırlı soldan kapalı, sağdan açık aralıkların sınıfı latis değerli bir yarı halkadır.

**Tanım 6.1.3.5.** $X$ 'in boş olmayan bir $LV(\mathcal{T})$, latis değerli kümelerinin sınıfı için

**i)** $\forall L_1, L_2 \in LV(\mathcal{T})$ için $L_1 \vee L_2 \in LV(\mathcal{T})$ , $\left( \textit{ya da } L_1 \wedge L_2 \in LV(\mathcal{T})\right)$

**ii)** $\forall L \in LV(\mathcal{T})$ için $L^C \in LV(\mathcal{T})$

koşulları sağlanıyor ise $LV(\mathcal{T})$ sınıfına, latis değerli bir cebir denir.

**Tanım 6.1.3.6.** $X$ 'in boş olmayan bir $LV\sigma(\mathcal{T})$, latis değerli kümelerin sınıfı için

**i)** $X \in LV\sigma(\mathcal{T})$

**ii)** $\forall L \in LV\sigma(\mathcal{T})$ için $L^C \in LV\sigma(\mathcal{T})$

**iii)** $n = 1, 2, ...$ için $L_n \in LV\sigma(\mathcal{T})$ olmak üzere $L = \bigvee_{n=1}^{\infty}(L_n) \in LV\sigma(\mathcal{T})$

oluyorsa $LV\sigma(\mathcal{T})$ sınıfına latis değerli $\sigma$-cebir denir.

**Teorem 6.1.3.2.** Latis değerli bir cebir $X$ 'i içeren latis değerli bir halkadır ve tersine $X$ 'i içeren latis değerli bir halka, latis değerli bir cebirdir.

**İspat:** $LV(\Re)$, $X$ kümesi üzerinde latis değerli bir cebir olsun. Bu durumda $\forall L_1, L_2 \in LV(\Re)$ için

**i)** $L_1 - L_2 = L_1 \wedge L_2^C = \left(L_1^C \vee L_2\right)^C \in LV(\Re)$

**ii)** $\forall L \in LV(\Re)$ için $X = L \vee L^C \in LV(\Re)$ olacağından teoremin birinci kısmı tamamdır.

Tersine, $LV(\Re)$, $X$ 'i içeren bir latis değerli bir halka ise $\forall L \in LV(\Re)$ için

**i)** $X - L = X \wedge L^C = L^C \in LV(\Re)$

**ii)** $L \vee L^C = X \in LV(\Re)$

olduğundan $LV(\Re)$, latis değerli bir cebir olur. ■

**Örnek 6.1.3.4.** Tüm sayılabilir latis değerli kümelerin sınıfı, latis değerli halkadır.

**Tanım 6.1.3.7.** Latis değerli bir $\sigma$-cebir, $X$ 'i içeren latis değerli bir $\sigma$-halkadır.

**Önerme 6.1.3.2.** $LV(\Re)$ latis değerli bir $\sigma$-halka ise $LV(\Re) \cup \left\{L : L^C \in LV(\Re)\right\}$ latis değerli bir $\sigma$-cebirdir.

**Tanım 6.1.3.8.** Boş olmayan latis değerli kümelerin bir $M$ sınıfında her monoton

$\{L_n\} \subset M$ dizisi için $\lim_n L_n \in M$ ise $M$ 'ye latis değerli bir monoton sınıf denir.

**Önerme 6.1.3.3.** Latis değerli bir $\sigma$ -halka, latis değerli bir monoton sınıftır.

**Örnek 6.1.3.5.** Latis değerli bir halka aynı zamanda latis değerli bir monoton sınıf ise o zaman latis değerli bir $\sigma$ -halkadır.

**Örnek 6.1.3.6.** $X = [0, \infty)$ olsun. Tüm aralıkların sınıfı ( boş küme ve tek elemanlı kümeler aralıklar olarak ifade edilebilir: $(a,a] = \varnothing$, $[a,a] = \{a\}$ ) latis değerli bir monoton sınıftır.

**6.1.4. Latis Değerli Klasik Ölçüm**

**Tanım 6.1.4.1.** $X \neq \varnothing$ ve $L$, latis değerli bir küme olsun. $\mu : X \to L$ fonksiyonuna $X$ üzerinde latis değerli fonksiyon denir. Ayrıca $L^X = \{\mu : \ \mu : X \to L\}$, $X$ üzerindeki tüm latis değerli fonksiyonların bir sınıfıdır.

**Tanım 6.1.4.2.** $LV(\Re)$, $X$ kümesinin alt kümeleri üzerinde tanımlı latis değerli bir $\sigma$ -cebir ve $\mu$ 'de $LV(\Re)$ latis değerli $\sigma$ -cebir üzerinde tanımlanan genişletilmiş reel değerli bir fonksiyon olmak üzere

**i)** $\varnothing \in LV(\Re)$ için $\mu(\varnothing) = 0$

**ii)** Eğer $\forall L_1, L_2 \in LV(\Re)$ için $\mu(L_1) \geq 0$ ve $\mu(L_2) \geq 0$ olacak şekilde $L_1 \subset L_2$ ise $\mu(L_1) \leq \mu(L_2)$

**iii)** $LV(\Re)$ 'nin ikişer ikişer ayrık her $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\sup_n L_n = \bigvee_{n=1}^{\infty} (L_n) \in LV(\Re)$ olacak şekilde $\mu\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} (L_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(L_n)$ oluyorsa $\mu$ ' ye $LV(\Re)$ üzerinde latis değerli klasik ölçüm denir.

(iii). koşul $\mu$ 'nün sayılabilir toplamsallığı olarak bilinir. $LV(\Re)$ 'nin ayrık her $\{L_n\}$ dizisi için $\mu\left(\bigvee_{n=1}^{k} (L_n)\right) = \sum_{n=1}^{k} \mu(L_n)$ olursa $\mu$ ölçümü sonlu toplamsal latis değerli klasik ölçüm olur.

**Önerme 6.1.4.1.** $LV(\Re)$ $\sigma$-cebir üzerinde tanımlanan latis değerli bir ölçüm $\mu$ olsun. O zaman

**i)** $L_1 \subset L_2$ ve $L_1, L_2 \in LV(\Re)$ için $\mu(L_1) \le \mu(L_2)$

**ii)** Eğer $L_n \in LV(\Re), 1 \le n < \infty$ ve $\bigvee_{n=1}^{\infty}(L_n) \in LV(\Re)$ için $\mu\left(\bigvee_{n=1}^{\infty}(L_n)\right) \le \sum_{n=1}^{\infty}\mu(L_n)$

**Önerme 6.1.4.2.** $LV(\Re)$ $\sigma$-cebir üzerinde tanımlanan latis değerli bir ölçüm $\mu$ olsun. O zaman

**i)** Eğer $L_n \subset L_{n+1}$ , $1 \le n < \infty$ için $L_n \in LV(\Re)$ ise o zaman $\mu\left(\bigvee_{n=1}^{\infty}(L_n)\right) = \lim_{n\to\infty}\mu(L_n)$.

**ii)** Eğer $L_n \supset L_{n+1} \supset ...,$ için $(1 \le n < \infty)$ $L_n \in LV(\Re), \mu(L_1) < \infty$, $\bigwedge_{n=1}^{\infty}(L_n) \in LV(\Re)$ ise o zaman $\mu\left(\bigwedge_{n=1}^{\infty}(L_n)\right) = \lim_{n\to\infty}\mu(L_n)$ dır.

Üstelik $\mu$ sonlu toplamsal ölçümü (i) vasıtasıyla sayılabilir toplamsaldır.

**Örnek 6.1.4.1.** $LV(\Re)$ $\sigma$-cebir üzerinde sonlu toplamsal bir ölçüm $\mu$ ve $L_1, L_2 \in LV(\Re)$ için

**i)** $L_1 \subset L_2$ ise $\mu(L_1) \le \mu(L_2)$

**ii)** $\mu(L_1 \vee L_2) + \mu(L_1 \wedge L_2) = \mu(L_1) + \mu(L_2)$

**iii)** Eğer $L_1 \subset L_2$ ve $\mu(L_1) < \infty$ ise $\mu(L_2 - L_1) = \mu(L_2) - \mu(L_1)$ dır.

### 6.1.5. Aralıklar Üzerindeki Latis Değerli Lebesque Ölçümü

$X = R$ ve $LV(\Re)$'de reel sayılar üzerinde boş kümeyi ve soldan açık,sağdan kapalı aralıkların tüm sonlu ayrık birleşimleri içeren bir latis değerli $\sigma$-cebir olarak düşünülecektir. Bizim amacımız $LV(\Re)$ $\sigma$-cebir üzerinde latis değerli bir ölçüm elde etmektir. Bunun için önce iki tane Lemma verilecektir ve ardından da Teorem 6.1.5.1 ile $LV(\Re)$, latis değerli $\sigma$-cebir üzerinde latis değerli bir ölçümün var olduğu gösterilecektir.

**Lemma 6.1.5.1.** $LV(\Re)$, $X = R$ üzerinde latis değerli bir $\sigma$-cebir olmak üzere

$LV(\Re)$ üzerinde bir $m_0$ ölçümünü tanımlamak için ihtiyacımız olan bazı yapıları inceleyelim:

$(\mathrm{I}_n)_{n=1}^{k}$ ve $(J_m)_{m=1}^{s}$ , $LV(\Re)$'de ayrık aralıkların sonlu iki dizisi olsun. Öyle ki

$$\bigvee_{n=1}^{k}(\mathrm{I}_n) = \bigvee_{m=1}^{s}(J_m) = L \quad \text{dir.}$$

$\sum_{n=1}^{k}\ell(\mathrm{I}_n) = \sum_{m=1}^{s}\ell(J_m)$ ifadesinde $\ell$ uzunluk anlamına gelir. Öyle ki $\mathrm{I}_n$ ler reel sayılarda ki herhangi bir sınırlı aralık olmak üzere $n=1,2,...,k$ için

$$\ell(\mathrm{I}_n) = \sup(\mathrm{I}_n) - \inf(\mathrm{I}_n)$$

şeklinde ifade edilecektir. Ayrıca boş kümenin ve tek nokta kümelerinin uzunluğu sıfırdır. Öyle ki

$$\ell(\varnothing) = \ell((a,a]) = \sup((a,a]) - \inf((a,a]) = a - a = 0$$

$$\ell(\{a\}) = \ell([a,a]) = \sup([a,a]) - \inf([a,a]) = a - a = 0\,.$$

Üstelik

$$\ell(\mathrm{I}_n) = \sum_{m=1}^{s}\ell(\mathrm{I}_n \wedge J_m) \quad \text{ve} \quad \ell(J_m) = \sum_{n=1}^{k}\ell(\mathrm{I}_n \wedge J_m)$$

eşitliklerini takip edersek $LV(\Re)$ için $L = \bigvee_{n=1}^{k}(\mathrm{I}_n)$ ise o zaman $m_0(L) = \sum_{n=1}^{k}\ell(\mathrm{I}_n)$ şeklinde tanımlayabiliriz.

Ayrıca, $L_1, L_2 \in LV(\Re)$ ve $L_1 \subset L_2$ için $L_1 = \bigvee_{n=1}^{k}(\mathrm{I}_n)$ ve $L_2 = \bigvee_{m=1}^{s}(J_m)$ olursa o zaman

**i)** $\mathrm{I}_n = \bigvee_{m=1}^{s}(\mathrm{I}_n \wedge J_m)$ ve $J_m \supset \bigvee_{n=1}^{k}(\mathrm{I}_n \wedge J_m)$

**ii)** $\ell(\mathrm{I}_n)=\sum_{m=1}^{s}\ell(\mathrm{I}_n \wedge J_m)$ ve $\ell(J_m)\geq\sum_{n=1}^{k}\ell(\mathrm{I}_n \wedge J_m)$

olmak üzere $m_0(L_1)\leq m_0(L_2)$ olacağı açıktır. ■

**Lemma 6.1.5.2.** $L\in LV(\Re)$ için $L=\bigvee_{n=1}^{k}(\mathrm{I}_n)$ ise $m_0(L)=\sum_{n=1}^{k}\ell(\mathrm{I}_n)$ olur. Buna bağlı olarak $L_1, L_2\in LV(\Re)$ ve $L_1\subset L_2$ için $m_0(L_1)\leq m_0(L_2)$ olacak şekilde latis değerli $m_0$ ölçümü tanımlanabilir. ■

**Teorem 6.1.5.1.** $m_0$, $LV(\Re)$ $\sigma$-cebir üzerinde latis değerli bir ölçümdür. ($m_0$: latis değerli aralıklar üzerindeki lebesque ölçümü olarak adlandırılır.)

**İspat:** $LV(\Re)$ $\sigma$-cebirindeki kümelerin ikişer ikişer ayrık bir dizi $(L_i)_{i=1}^{\infty}$ olsun. Öyle ki $\bigvee_{i=1}^{\infty}(L_i)\in LV(\Re)$ dir. O halde $\forall i$ için $(1\leq i\leq\infty)$ $\mathrm{I}_{ij}\in LV(\Re)$ olacak şekilde ikişer ikişer ayrık aralıkların sonlu bir dizi vardır. Öyle ki $L_i=\bigvee_{j=1}^{m_i}(\mathrm{I}_{ij})$ dır. Ayrıca $\bigvee_{i=1}^{\infty}(L_i)=\bigvee_{k=1}^{n}(\mathrm{I}_k)$ olacak şekilde ikişer ikişer ayrık $\mathrm{I}_k\in LV(\Re)$ aralığı vardır.

Şimdi $\forall k$ için $\bigvee_{i=1}^{\infty}(L_i)\supset\bigvee_{i=1}^{k}(L_i)=\bigvee_{i=1}^{k}\bigvee_{j=1}^{m_i}(\mathrm{I}_{ij})$ dir. Lemma 6.1.5.2 kullanılarak

$$m_o\left(\bigvee_{i=1}^{\infty}(L_i)\right)\geq m_0\left(\bigvee_{i=1}^{k}(L_i)\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}\ell(\mathrm{I}_{ij})=\sum_{i=1}^{k}m_0(L_i)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$m_o\left(\bigvee_{i=1}^{\infty}(L_i)\right)\geq\sum_{i=1}^{\infty}m_0(L_i) \text{ olur.}$$

Bunun tersini göstermek için $\mathrm{I}_k=\bigvee_{i=1}^{\infty}\bigvee_{j=1}^{m_i}(\mathrm{I}_k\wedge\mathrm{I}_{ij})$ yapısında bazı $i, j$ ler için

$\ell\left(\mathrm{I}_k \wedge \mathrm{I}_{ij}\right)=\infty$ olur ise $m_0\left(L_i\right)=\infty$ olacağı açıktır. Bu nedenle $\forall i, j, k$ için $\ell\left(\mathrm{I}_k \wedge \mathrm{I}_{ij}\right)<\infty$ seçersek $m_0\left(\bigvee_{i=1}^{\infty}\left(L_i\right)\right)=\sum_{i=1}^{\infty} m_0\left(L_i\right)$ elde edilebilir.

$\varepsilon>0$ için $\mathrm{I}_k \wedge \mathrm{I}_{ij}=\left(a_{i,j}^k, b_{i,j}^k\right]$ ve $\mathrm{I}_k \wedge \mathrm{I}_{ij}=\left(a_{i,j}^k, b_{i,j}^k\right]$ olsun. Bu Durumda $\left[a_k, b_k\right] \subset \bigvee_{i=1}^{\infty} \bigvee_{j=1}^{m_i}\left(a_{i,j}^k, b_{i,j}^k+\frac{\varepsilon}{2^i m_i}\right)$ olur. $\left[a_k, b_k\right]$ kompaktlığı aracılığıyla pozitif bir $p$ tamsayısı vardır. Öyle ki

$$\left[a_k, b_k\right] \subset \bigvee_{i=1}^{\infty} \bigvee_{j=1}^{m_i}\left(a_{i,j}^k, b_{i,j}^k+\frac{\varepsilon}{2^i m_i}\right) \text{dir.}$$

Bu nedenle

$$b_k-a_k \leq \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_i}\left(b_{i,j}^k-a_{i,j}^k+\frac{\varepsilon}{2^i m_i}\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_i} \ell\left(\mathrm{I}_k \wedge \mathrm{I}_{i,j}\right)+\varepsilon$$

şeklinde yazabiliriz.

$\mathrm{I}_k$ 'nın herhangi bir kapalı alt aralığı $\left[a_k, b_k\right]$ ve herhangi bir $\varepsilon>0$ için

$$\ell\left(\mathrm{I}_k\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_i} \ell\left(\mathrm{I}_k \wedge \mathrm{I}_{i,j}\right)$$

olur. Sonuç olarak

$$m_0\left(\bigvee_{i=1}^{\infty}\left(L_i\right)\right)=\sum_{k=1}^{n} \ell\left(\mathrm{I}_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_i} \ell\left(\mathrm{I}_k \wedge \mathrm{I}_{i,j}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^{n} \ell\left(\mathrm{I}_k \wedge \mathrm{I}_{i,j}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_i}\ell\left(\mathrm{I}_{i,j}\right)\quad,\qquad\left(\mathrm{I}_{i,j}=\bigvee_{k=1}^{n}\left(\mathrm{I}_k\wedge\mathrm{I}_{i,j}\right)\ \text{için}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}m_0\left(L_i\right).\qquad\blacksquare$$

**Örnek 6.1.5.1.** $\mu$ , $R$ üzerinde monoton artan latis değerli bir fonksiyon olsun.

**i)** Eğer $\left(a,b\right]\subset\bigvee_{i=1}^{\infty}\left(a_i,b_i\right)$ ise

$$\mu\left(a\vee b\right)-\mu\left(a\wedge b\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(a_i\vee b_i\right)-\mu\left(a_i\wedge b_i\right)\text{ dir.}$$

**ii)** $D_\mu\left(a,b\right]=\mu\left(a\vee b\right)-\mu\left(a\wedge b\right)$ olmak üzere $D_\mu$, $LV\left(\Re\right)$ $\sigma$-cebir üzerinde latis değerli bir lebesque ölçümdür. Gerçekten $LV\left(\Re\right)$ $\sigma$-cebir üzerinde latis değerli lebesque ölçümünü $\mu\left(x\right)=x$ seçersek istenilenin elde edileceği açıktır.

**Örnek 6.1.5.2.** $m_0$, aralıklar üzerindeki latis değerli lebesque ölçümü $LV\left(\Re\right)$, latis değerli $\sigma$-cebir üzerindeki aralıklar üzerinde, değişmeyen bir dönüşümdür. Çünkü Lemma 6.1.2.5.1 den tek nokta kümelerinin ölçümümün sıfır olduğunu biliyoruz. Bundan dolayı herhangi bir $x\in R$ noktası ve $LV\left(\Re\right)$ deki $\forall\mathrm{I}$ aralığı için $m_0\left(\mathrm{I}\right)=m_0\left(\mathrm{I}+x\right)$ olacağı açıktır.

## 6.2. Klasik Ölçüm ile Bulanık Ölçüm Arasındaki İlişki

Bu kısımda klasik ölçüm ile bulanık ölçüm arasındaki ilişki üzerinde duracağız ve klasik kümelerdeki bazı yapı ve kavramların bulanık kümelerde nasıl inşa edildiğine şait olacağız. Bu alanda birçok çalışma yapılmıştır $\left[25,26,32,33\right]$. Klasik ölçümde, klasik kümeler üzerindeki cebir üzerinde, ölçüm kavramları tanımlanırken, bulanık ölçümde, bulanık kümeler üzerindeki bulanık cebir üzerinde bulanık ölçüm tanımlıdır. Klasik ölçümde $m$ üyelik fonksiyonu 0 ve 1 değerlerini alırken bulanık ölçümde $m$ üyelik fonksiyonu $\left[0,1\right]$ aralığındaki tüm değerleri alabilir.

Bulanık ölçümle klasik ölçüm arasındaki en önemli fark, bulanık ölçümde klasik kümelerdeki toplamsallığın yerine, daha esnek olan monotonluk ve süreklilik gibi kavramların geliştirilmesidir. Ayrıca klasik ölçümün, bulanık ölçüme genişlemesi tek türlü değildir. Bu kısımda bulanık ölçüm ile ilgili farklı tanımlara da yer vereceğiz.

### 6.2.1. Bulanık Küme ile İlgili Temel Tanım ve Teoremler

**Tanım 6.2.1.1.** $X$ kümesinin bulanık alt kümelerinden oluşan $\sigma \subseteq [0,1]$ bulanık sınıfı aşağıdaki şartları sağlıyorsa

**i)** $\forall a \in [0,1]$, $a$ sabit bir sayı, öyle ki $a \in \sigma$

**ii)** $\forall \mu \in \sigma$ için $1-\mu \in \sigma$

**iii)** $(\mu_n)_{n\in N} \in \sigma^N$ için $\sup\limits_n \mu_n \in \sigma$

$\sigma$ sınıfına, bulanık $\sigma$-cebiri denir. [26]

**Tanım 6.2.1.2.** $X$ kümesinin bulanık alt kümelerinden oluşan $\sigma \subseteq \mathrm{F}\,(X)$ bulanık sınıfı aşağıdaki şartları sağlıyorsa

**i)** $0_X \in \sigma\left(\forall x \in X,\, c \in [0,1]\; için\; c_X(x) = c\right)$

**ii)** $\mathrm{A} \in \sigma$ ise $\mathrm{A}^C \in \sigma$

**iii)** $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \sigma$ ise $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \in \sigma$

$\sigma$ sınıfına, bulanık cebiri denir. Burada eğer (iii). koşulumuz $\{\mathrm{A}_n\}_{n\in N} \in \sigma$ ise $\bigcup_{n\in N} \mathrm{A}_n \in \sigma$ olursa $\sigma$ sınıfına, bulanık $\sigma$-cebiri denir. [17]

**Tanım 6.2.1.3.** Eğer $m : \sigma \to R^* = R \bigcup \{\infty\}$ olmak üzere

**i)** $m(\varnothing) = m(0) = 0$

**ii)** $\forall \mu, \nu \in \sigma :\; \mu \le \nu \Rightarrow m(\mu) \le m(\nu)$

**iii)** $\mu, \nu \in \sigma : m(\mu \vee \nu) + m(\mu \vee \nu) = m(\mu) + m(\nu)$

**iv)** $(\mu_n)_{n\in N} \subset \sigma^N$ öyle ki $\mu_1 \le \mu_2 \le \ldots \le \mu_n \le \ldots$ için

$$\sup_n \mu_n = \mu \Rightarrow m\left(\sup_n \mu_n\right) = m(\mu)$$

koşulları sağlanıyorsa $m$ 'ye genelleştirilmiş bulanık ölçüm denir. $[26]$

**Tanım 6.2.1.4.** $S$ , $L^X$ de bir bulanık cebir ve $m: S \to R_+$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda

**i)** $\mathrm{A} \in S$ için $\mathrm{n}\, m(\mathrm{A}) \geq 0$ ve $m(\varnothing)=0$

**ii)** $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in S$ için $\mathrm{A} \leq \mathrm{B}$ iken $m(\mathrm{A}) \leq m(\mathrm{B})$

**iii)** $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in S$ için $m(\mathrm{A} \vee \mathrm{B})+m(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})=m(\mathrm{A})+m(\mathrm{B})$

koşulları sağlanıyorsa $m$ 'ye bulanık ölçüm, $(X, S)$ ikilisine de bulanık ölçülebilir uzay denir. $[25]$

**Tanım 6.2.1.5.** $m^*$**,** $[0,1]^X$ kümesi üzerinde tanımlanan genişletilmiş reel değerli bir fonksiyon olmak üzere

**i)** $m^*(\varnothing)=0$

**ii)** $\mu_{\mathrm{A}} \leq \mu_{\mathrm{B}}$ için $m^*(\mu_{\mathrm{A}}) \leq m^*(\mu_{\mathrm{B}})$

**iii)** $m^*\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} \mu_{\mathrm{E}_n}\right) \leq \bigvee_{n=1}^{\infty} m^*\left(\mu_{\mathrm{E}_n}\right)$

Şartlarını sağlıyorsa $m^*$ fonksiyonuna bulanık dış ölçüm denir. $[26]$

**Tanım 6.2.1.6.** $\sigma$ , $X$ üzerinde bir bulanık $\sigma$ -cebir ve $m: \sigma \to R^* = R \cup \{\infty\}$ olmak üzere

**i)** $m(\varnothing)=0$

**ii)** $\forall \mu, \nu \in \sigma$ ve $\mu \leq \nu$ için $m(\mu) \leq m(\nu)$

**iii)** $\forall \mu, \nu \in \sigma$ için $m(\mu \vee \nu)+m(\mu \vee \nu)=m(\mu)+m(\nu)$

**iv)** $\forall (\mu_n)_{n\in N} \in \sigma^N$ , $\mu \in \sigma$ için $(m(\mu_n))_{n\in N} \nearrow m(\mu)$ ise $(\mu_n)_{n\in N} \nearrow \mu$ dir.

**v)** $m(1)=1$

**vi)** $m(1)<\infty$

**vii)** $\forall a \in [0,1]$, $a$ sabit , $m(a)=a$ dır.

**viii)** $\forall (\mu_n)_{n\in N} \in \sigma^N$ , $\mu \in \sigma$ için $(m(\mu_n))_{n\in N} \searrow m(\mu)$ ise $(\mu_n)_{n\in N} \searrow \mu$ dir.

Bu tanımdaki (i), (ii) ve (iii) koşulları yerine geliyorsa $m:\sigma \to R^* = R \cup \{\infty\}$ fonksiyonuna bulanık içerik denir. Buna ilave olarak (vi) koşulunu da sağlıyorsa bu durumda $m$ ' ye sonlu bulanık içerik denir. Eğer ilk dört şart sağlanıyorsa $m$ ' ye bulanık ölçüm (vi) koşulunu da sağlıyorsa $m$ ' ye sonlu bulanık ölçüm denir. Ayrıca (i) ve (v) koşuları sağlanıyorsa $m$ 'ye bulanık olasılık ölçümü denir. [15]

**Tanım 6.2.2.7.** $X$ kümesinin bulanık alt kümelerinden oluşan $\sigma \subseteq [0,1]$ bulanık sınıfı aşağıdaki şartları sağlıyorsa

**i)** $\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \sigma$ için $\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \in \sigma$

**ii)** $\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \sigma$ için $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}^C \in \sigma$

$\sigma$, bulanık küme sınıfına bir bulanık halka denir.

**Teorem 6.2.2.1.** Her bulanık halka simetrik farklar ve arakesit işlemleri altında kapalıdır ( Tersine simetrik farklar ve arakesit işlemleri altında kapalı olan boştan farklı her bulanık sınıf, bir bulanık halkadır.)

**İspat:** $\sigma$, bir bulanık halka ise o zaman $\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \sigma$ için

**i)** $\mathrm{A} \Delta \mathrm{B} = (\mathrm{A} - \mathrm{B}) \vee (\mathrm{B} - \mathrm{A}) = (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}^C) \vee (\mathrm{B} \wedge \mathrm{A}^C)$ eşitliğinde $(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}^C) \in \sigma$ ve $(\mathrm{B} \wedge \mathrm{A}^C) \in \sigma$ olduğundan $\mathrm{A} \Delta \mathrm{B} \in \sigma$ olur.

**ii)** $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} = (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) - (\mathrm{A} \Delta \mathrm{B})$ de $\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \in \sigma$ ve $\mathrm{A} \Delta \mathrm{B} \in \sigma$ olduğundan $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \in \sigma$ olur ki istenilen elde edilir. Tersine

**i)** $\mathrm{A} \vee \mathrm{B} = (\mathrm{A} \Delta \mathrm{B}) \Delta (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \in \sigma$

**ii)** $\mathrm{A} - \mathrm{B} = (\mathrm{A} \Delta \mathrm{B}) \wedge \mathrm{A} \in \sigma$

olacağından $\sigma$, bir bulanık halka olur. ■

**Tanım 6.2.2.8.** $X$ kümesinin bulanık alt kümelerinden oluşan $\sigma \subseteq [0,1]$ bulanık sınıfı aşağıdaki şartları sağlıyorsa

**i)** $\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \sigma$ için $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}^C \in \sigma$

**ii)** $\mathrm{A}_n \in \sigma$ ; $n = 1, 2, \ldots,$ için $\bigvee_{n=1}^{\infty} (\mathrm{A}_i) \in \sigma$

oluyorsa $\sigma$ sınıfına, bulanık $\sigma$-halka denir.

**Tanım 6.2.2.9.** $X$ kümesinin bulanık alt kümelerinden oluşan $\varphi \subseteq [0,1]$ bulanık sınıfı aşağıdaki şartları sağlıyorsa

**i)** $\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \varphi$ için $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \in \varphi$

**ii)** $\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \varphi$ ve $\mathrm{A} \leq \mathrm{B}$ için $\{C_0 \leq C_1 \leq . . . \leq C_n\}$ ; $C_i \in \varphi$ mevcut olmak üzere

$$\mathrm{A} = C_0 \leq C_1 \leq ... \leq C_n = \mathrm{B} \quad \text{ve} \quad D_i = C_i - C_{i-1} \in \varphi ; i = 1, 2, . . ., n$$

şeklinde yazılabiliyorsa $\varphi$ bulanık küme sınıfına, bulanık yarı halka denir.

Her bulanık halka bir yarı bulanık halkadır ve boş küme her yarı bulanık halkaya aittir.

**Önerme 6.2.1.1.** Bir bulanık $\sigma$-halka, sayılabilir kesişimler altında kapalıdır ve dolayısıyla $\sigma$ bir bulanık $\sigma$-halka ve $\{\mathrm{A}_n\} \in \sigma$ bir bulanık küme dizisi ise

$$\lim_n \sup \mathrm{A}_n = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{i=n}^{\infty} (\mathrm{A}_n) \in \sigma$$

ve

$$\lim_n \inf \mathrm{A}_n = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{i=n}^{\infty} (\mathrm{A}_n) \in \sigma$$

dir.

**Önerme 6.2.1.2.** $\sigma$**,** bir bulanık $\sigma$-halka ise, $\sigma \cup \{\mathrm{A} : \mathrm{A}^C \in \sigma\}$ bir bulanık $\sigma$-cebirdir.

**Tanım 6.2.1.10.** $X$ 'in boş olmayan bir $M$ bulanık sınıfında, her monoton bulanık dizi $\{\mathrm{A}_n\} \subset M$ için $\lim_n \mathrm{A}_n \in M$ ise $M$ ye bulanık monoton sınıf denir.

**Önerme 6.2.1.3.** Bir bulanık $\sigma$-halka, bir bulanık monoton sınıftır.

**Önerme 6.2.1.4.** Bir bulanık halka aynı zamanda bir bulanık monoton sınıf ise bulanık $\sigma$-halkadır.

### 6.3. Bılanık Ölçüm ile Latis Değerli Ölçüm Arasındaki İlişki

Bu kısımda bulanık ölçüm ile latis değerli ölçüm arasındaki ilişkiye değineceğiz. Latis kümeleri bulanık kümelerin daha geniş bir ailesi olduğundan bu bölümde bulanık kümeler üzerinde yapılan çalışmaları, latis kümeleri yardımıyla yeniden ifade etmeye çalışacağız. Bulanık kümelerde üyelik fonksiyonumuz $[0,1]$

aralığında değerler alırken, latis kümelerin üyelik fonksiyonu $[-\infty,\infty]$ arasında değerler alabilmektedir. Daha önce $[0,1]$ aralığı üzerinde yapılan birçok çalışma artık bu kümenin daha genel halini içinde barındıran latis kümeleri üzerinde yapılmaktadır. Bu çalışmalardan bazılarına bu kısımda değineceğiz. [10,14,16,19]

### 6.3.1. Latis Değerli Bulanık Kümelerde Temel Tanım ve Teoremler

**Tanım 6.3.1.1.** $X$ boş kümeden farklı herhangi bir küme olmak üzere, $X$ 'in alt kümelerinin herhangi bir $\sigma$ sınıfı için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, $\sigma$ sınıfına latis değerli $\sigma$-cebir denir.

**i)** $\forall L \in \sigma$ için $L^C \in \sigma$

**ii)** $n = 1, 2, \ldots$ için $L_n \in \sigma$ iken $\bigvee_{n=1}^{\infty}(L_n) \in \sigma$. [14]

**Tanım 6.3.1.2.** $\sigma$ latis değerli $\sigma$-cebiri ve $m : \sigma \to R \cup \{\infty\}$ olmak üzere

**i)** $m(\varnothing) = 0$

**ii)** $\forall L_1, L_2 \in \sigma,\ m(L_1) \geq 0$ , $m(L_2) \geq 0$ için $L_1 \leq L_2 \Rightarrow m(L_1) \leq m(L_2)$

**iii)** $\forall L_1, L_2 \in \sigma$ iken $m(L_1 \vee L_2) + m(L_1 \wedge L_2) = m(L_1) + m(L_2)$

**iv)** $n = 1, 2, \ldots,\ L_n \in \sigma$ ve $L_1 \leq L_2 \leq \ldots \leq L_n \leq \ldots$ iken $m\left(\bigvee_{n=1}^{\infty}(L_n)\right) = \lim_{n}(L_n)$

koşulları sağlanıyorsa $m$ 'ye latis değerli ölçüm denir. [14]

**Tanım 6.3.1.3.** $\mu$ , F latis değerli bulanık $\sigma$ - cebiri üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere

**i)** $\mu(\varnothing) = 0_L$

**ii)** $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{F}\ , \mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Rightarrow \mu(\mathrm{A}) \leq \mu(\mathrm{B})$

**iii)** $\mathrm{A}_n, \mathrm{A} \in \mathrm{F}\ , \mathrm{A}_n \square\ \mathrm{A} \Rightarrow \lim_{n \to x} \mu(\mathrm{A}_n) = \mu(\mathrm{A})$

**iv)** $\mathrm{A}_n, \mathrm{A} \in \mathrm{F}\ ,\ \mathrm{A}_n \square\ \mathrm{A},\ \mu(\mathrm{A}_1) < 1_L \Rightarrow \lim_{n \to x} \mu(\mathrm{A}_n) = \mu(\mathrm{A})$

koşulları sağlanıyorsa $\mu$ ' ye latis değerli bulanık ölçüm denir. [16]

**Tanım 6.3.1.4.** $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri altında kapalı olan ve $G\mathrm{F}\ (X)$ ile gösterilen aile için

**i)** $G\mathrm{F}\ (X)$, $\vee$ ve $\wedge$ işlemlerine göre tam Heyting cebiri

**ii)** $G\mathrm{F}\ (X)$, $G\mathrm{F}\ (X)$' in bir alt latisi olarak $X$ 'in $P(X)$ kuvvet kümesini içerir

**iii)** $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri $P(X)$'de $\cup$ ve $\cap$ ile aynıdır

**iv)** $\forall \mathrm{A} \in G\mathrm{F}\ (X)$ için $\mathrm{A} \vee X = X$ ve $\mathrm{A} \wedge \varnothing = \varnothing$ koşulları sağlanıyorsa $G\mathrm{F}\ (X)$'e $X$ 'in genelleştirilmiş bulanık alt kümelerinin halkası denir. [19]

**Tanım 6.3.1.5.** Bir $\mathrm{A}$, $L$-bulanık kümesi, $X$ içindeki her bir $x$ öğesiyle $L_X$ içinde ki bir $\mu_{\mathrm{A}}(x)$ öğesini eşleştiren $\mu_A$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir. Tüm $L$-bulanık kümelerinin ailesini $L\mathrm{F}\ (X)$ ile gösterelim. Yani

$$L\mathrm{F}\ (X) = \left\{ \mu_{\mathrm{A}} :\ \mu \to \bigcup_{x \in X} L_X\ ,\ \forall x \in X\ \ için\ \ \mu_{\mathrm{A}}(X) \in L_X \right\}.$$

$\mu_{\mathrm{A}}, \mu_{\mathrm{B}} \in L\mathrm{F}\ (X)$ için

$$\mu_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}(x) = \mu_{\mathrm{A}}(x) \vee \mu_{\mathrm{B}}(x)$$

$$\mu_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}(x) = \mu_{\mathrm{A}}(x) \wedge \mu_{\mathrm{B}}(x)$$

dir.

Her bir $L_X$ , $L$ 'ye eşit alındığında $L$–bulanık kümeleri goguenin [10] $L$–bulanık kümelerine indirgenir. Eğer bir $L$–bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu basit fonksiyon ise, bu $L$–bulanık kümesine basit küme denilecektir. Yani; $i = 1, 2, \ldots, n$ ve $\mu_{\mathrm{A}}(x) = \mathrm{A}_i$ olacak şekilde $L$ 'nin $\{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n\}$ şeklinde bir sonlu kümesi ve $X$ 'in $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ şeklinde bir sonlu bölüntüsü varsa $L$–bulanık kümesine basittir denilecektir. $X$ deki bütün basit $L$–bulanık kümeleri $LS(X)$ ile gösterilecektir. [19]

**Teorem 6.3.1.1.** Her bir $L_x$ tam Heyting cebir ise bu durumda $L\mathrm{F}\ (X)$, $X$ 'in genelleştirilmiş bulanık alt kümelerinin bir halkasıdır.

**İspat:** $L\mathrm{F}\ (X)$'in Tanım 6.3.1.4 deki tüm şartları sağladığını göstereceğiz.

**i)** Her bir $L_x$ tam Heyting cebir olduğundan, $L\mathcal{F}\left(X\right)$, $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri altında kapalıdır. Böylece $L\mathcal{F}\left(X\right)$'in t.H.c. olduğu açıktır.

**ii)** $\forall \mathrm{A} \in P\left(X\right)$ öğesine $\chi_{\mathrm{A}}$ karakteristik fonksiyonu karşılık getirdiğimiz zaman $\chi_{\mathrm{A}} \in L\mathcal{F}\left(X\right)$ olduğundan $L\mathcal{F}\left(X\right), P\left(X\right)$'i bir alt latis olarak kapsar. Yani $P\left(X\right) \subseteq L\mathcal{F}\left(X\right)$ dir.

**iii)** $L\mathcal{F}\left(X\right)$ içindeki $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri $P\left(X\right)$ için $\cup$ ve $\cap$ işlemleri ile değiştirildiğinde $P\left(X\right)$'in bir latis olacağı açıktır. Yani $\chi_{\mathrm{A}} \vee \chi_{\mathrm{B}} = \chi_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}$ ve $\chi_{\mathrm{A}} \wedge \chi_{\mathrm{B}} = \chi_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}$ olur.

**iv)** $L\mathcal{F}\left(X\right)$ içindeki her bir A için

$$\mu_{\mathrm{A}}\left(x\right) \vee \mu_X\left(x\right) = \mu_X = 1$$

ve

$$\mu_{\mathrm{A}}\left(x\right) \wedge \mu_{\varnothing}\left(x\right) = \mu_{\varnothing} = 0$$

olması $\mathrm{A} \cup X = X$ ve $\mathrm{A} \cap \varnothing = \varnothing$ olmasını ifade eder. [19]

**Tanım 6.3.1.6.** $\mathcal{F}$ , $X$ kümesinin tüm latis değerli bulanık kümelerinin bir sınıfı olmak üzere

**i)** $\forall \mathrm{A} \in \mathcal{F}$ için $\mathrm{A}^C \in \mathcal{F}$

**ii)** $\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{F}$ için $\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \in \mathcal{F}$

oluyorsa $\mathcal{F}$ ' ye latis değerli bulanık cebir denir.

**Tanım 6.3.1.7.** $\mathcal{F}$ , $X$ kümesinin tüm latis değerli bulanık kümelerinin bir sınıfı olmak üzere

**i)** $X, \varnothing \in \mathcal{F}$

**ii)** $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$ iken $\mathrm{A}^C \in \mathcal{F}$

**iii)** $\mathrm{A}_n \in \mathcal{F}$ , $n = 1, 2, \ldots$, iken $\bigvee_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{A}_n\right) \in \mathcal{F}$

oluyorsa $\mathcal{F}$ 'ye latis değerli bulanık $\sigma$ - cebir denir.

**Tanım 6.3.1.8.** $S \subset G\mathcal{F}\left(X\right)$, genelleştirilmiş latis değerli bulanık sınıfı

**i)** $\varnothing, X \in S$

**ii)** $A \in S$ için $A \wedge A^C = L_0$ ve $A \vee A^C = L_I$ olduğu zaman $\left(A^C\right)^C = A$, $\left(A^C \in S\right)$

**iii)** $\left\{A_i\right\}_{i \in N} \subset S$ için $\bigvee_{n=1}^{\infty}\left(A_i\right) = L_I \in S$ $GF\ (X)$

koşullarını sağlıyorsa, $S$ ' ye genelleştirilmiş latis değerli bulanık $\sigma$-cebir denir. Burada $GF\ (X)$ Nakajimanın tanımladığı $X$ 'in genelleştirilmiş bulanık alt kümelerinin bir halkasıdır ve ayrıca $L = \{L_x : x \in X\}$ olarak tanımlanan $L_x$ tam Heyting cebirdir. $L_I = \sup_n A_n \in S$ ve $L_0 = \inf_n A_n \in S$ olarak alınmıştır. $A \in S \subset GF\ (X)$ ( $x \in X$ için) için A latis değerli bir bulanık kümedir. $A \wedge \varnothing = \varnothing$, $A \vee X = X$ ve $S \subset GF\ (X)$, $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri altında kapalıdır.

**Teorem 6.3.1.2.** Her genelleştirilmiş bulanık halka simetrik farklar ve arakesit işlemleri altında kapalıdır.

**İspat:** $GF\ (X)$, genelleştirilmiş bir bulanık halka ise o zaman $\forall A, B \in GF\ (X)$ için

**i)** $A \Delta B = (A - B) \vee (B - A) = \left(A \wedge B^C\right) \vee \left(B \wedge A^C\right)$ eşitliğinde $\left(A \wedge B^C\right) \in GF\ (X)$ ve $\left(B \wedge A^C\right) \in GF\ (X)$ olduğundan $A \Delta B \in GF\ (X)$ olur.

**ii)** $A \wedge B = (A \vee B) - (A \Delta B)$ de $A \vee B \in GF\ (X)$ ve $A \Delta B \in GF\ (X)$ olduğundan $A \wedge B \in GF\ (X)$ olur ki istenilen elde edilir. ■

**Tanım 6.3.1.9.** $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri altında kapalı olan ve $GF\ (X)$ ile gösterilen aile için

**i)** $GF\ (X)$ **:** $\vee$ ve $\wedge$ işlemlerine göre $\sigma$-tam Heyting cebiri

**ii)** $GF\ (X)$, $GF\ (X)$' in bir alt latisi olarak $X$ 'in $P(X)$ kuvvet kümesini içerir

**iii)** $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri $P(X)$'de $\cup$ ve $\cap$ ile aynıdır

**iv)** $\forall A \in GF\ (X)$ için $A \vee X = X$ ve $A \wedge \varnothing = \varnothing$

**v)** $\forall A_n, A, B \in GF\ (X)$ $(n = 1, 2, \ldots için)$ için $A \wedge B^C \in GF\ (X)$ ve $\bigvee_{n=1}^{\infty}\left(A_i\right) \in GF\ (X)$

koşulları sağlanıyorsa $GF\ (X)$ sınıfına $X$ 'in genelleştirilmiş bulanık kümelerinin $\sigma$-halkası denir.

**Önerme 6.3.1.1.** Genelleştirilmiş bir bulanık $\sigma$ -halka, sayılabilir kesişimler altında kapalıdır ve dolayısıyla $G\mathrm{F}\ (X)$ bir $\sigma$ -halka ve $\{\mathrm{A}_n\} \in G\mathrm{F}\ (X)$ bir bulanık küme dizisi ise

$$\lim_n \sup \mathrm{A}_n = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{i=n}^{\infty} (\mathrm{A}_n) \in G\mathrm{F}\ (X)$$

ve

$$\lim_n \inf \mathrm{A}_n = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{i=n}^{\infty} (\mathrm{A}_n) \in G\mathrm{F}\ (X) \quad \text{dir.}$$

**Tanım 6.3.1.10.** Genelleştirilmiş bir bulanık $\sigma$ -cebir , $X$ 'i içeren genelleştirilmiş bir bulanık $\sigma$ -halkadır.

**Örnek 6.3.1.1.** Tüm sayılabilir kümeleri ve onların tümleyenlerini içeren genelleştir-ilmiş bulanık sınıf, genelleştirilmiş bir bulanık $\sigma$ -cebirdir.

**Önerme 6.3.1.2.** $G\mathrm{F}\ (X)$ bir genelleştirilmiş bulanık $\sigma$ -halka ise

$$G\mathrm{F}\ (X) \cup \{\mathrm{A} : \mathrm{A}^C \in G\mathrm{F}\ (X)\}$$

bir genelleştirilmiş bulanık $\sigma$ -cebirdir.

# 7. BÖLÜM

## SONUÇLAR

Bu çalışmada, klasik ölçüm, bulanık ölçüm ve latis değerli ölçüm arasındaki ilişki ayrıntılı olarak ortaya konmuş ve klasik ölçümde yapılmış olan bir çok tanım ve teorem, bulanık kümeler ve latis kümeleri yardımıyla bulanık ölçüm ve latis-değerli ölçüm (latis ölçüm)'e taşınabilmiştir.

Ayrıca bu çalışmada latis değerli aralıklar üzerinde vermiş olduğumuz latis-değerli lebesque ölçümünün oluşturulma yöntemi ile bulanık aralıklar ve latis-değerli bulanık aralıklar yardımıyla, bulanık lebesque ölçümü ve Latis-değerli bulanık lebesque ölçümü tanımlanabilir.

Sonuç olarak klasik ölçümde yapılmış olan bir çok çalışma, bulanık kümeler ve latis kümeleri yardımıyla bulanık ölçüme ve latis-değerli ölçüme taşınabilir.

## KAYNAKLAR


[1] A. Mukherjea and K. Pathoven (1984), Real And Functional Analysis Part A Real Analysis. ( $2^{th}$ ed.). University of Florida, Florida: Plenum Press- New York and London.

[2] Birkhoff, G. (1967), Lattice Theory, 3rd ed.,(*AMS colloquim publications, providence, RI* )

[3] Caratheodory, C. ( 1963), Algebraic Theory of Measure and Integration. New York, *Chelsea Publishing*,

[4] Dempster, A.P. (1967), Upper and lower probablities induced by multi-valued mapping . *Annals of Mathematical Stasistics*, **38**, 325-339

[5] Dubois, D. and Prade, H. (1980), Groups Operating on Fuzzy Sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 120, 543-548.

[6] Dubois, D. and Prade, H. (1985), Evidence measures based on fuzzy information, *Automatica*, **21**, 547-562

[7] Dubois, D. and Prade, H.( 1988), Possibility Theory. New York *: Plenum Press*.

[8] Dubois, D. and Prade, H. (1990), Constant appraximations of belief functions. *International Journal of Approximate Reasoning*, **4**, 419-449.

[9] Dubois, D. and Prade, H. (1992), When upper probabilities are posibility measures. *Fuzzy Sets and Systems*, **49**, 65-74

[10] Goguen, J.A. (1967), $L$ - Fuzzy Sets*: J. Math. Anal. Appl*., 18, 145-174.

[11] Gratzer G. (1987), General Lattice Theory , *Academıc Press*, London.

[12] Halmos, P.R. (1967), Measure Theory. New York, Van Nostrand.

[13] Höhle, U. (1984), Fuzzy sets and Decision Analysis. In: Zimmerman, Zadeh and Gainess (Eds.). Fuzzy probably measures. New York: North Holland, 83-96.

[14] J. Tanaka (10 ocak 2008), fuzzy signed measure, *2000 Mathematics Subject Classification. Primary*: 28A12, 28E10.

[15] Klament, E.P. and Schwyhla, W. (1982) , Correspondance Between Fuzzy Measures and Classical Measures, *Fuzzy Sets and Syistem*,7,57-70.

[16] Lui, X. and Zhang (1994), G.,Lattice-valued fuzzy measure and lattice-valued fuzzy integral, *Fuzzy Sets and Systems* 62 319-332 North-Holland.

[17] Mesiar, R. and Piasecki, K., Caratheodory's measuribility of fuzzy events. http://www.univsavoie.fr/Portail/Groupes/LISTIC/busefal/Papers/56.zip/56_06.pdf.Elektronic busefal, 56.

[18] Mısırlıoğlu, T. ( 9 Ocak- 2011) , Real Analysis.

[19] Nakajima, N. (1989), Generalized Fuzzy Sets, *Fuzzy Sets and Syistem*, 32,307-314.

[20] Nakajima, N. (1989), Measurability,Measures and Probability in Fuzzy Sets Theory, *Math. Japonica* No:4, 34, 607-618.

[21] Shafer, G. (1976), A Matematical Theory of Evidence. New Jersey, Princeton: *Princeton Universty Press*.

[22] Shafer, G. (1987), Analysis of fuzzy information, 3 volumes. In: Bezdek. Belief function and possibility measues. Florida: *CRC Press*, 51-83.

[23] Sugeno, M. (1977), Fuzzy measure and fuzzy integrals: A survey. In: M.M. Gupta, G.N. Saridis, B.R. Gaines (Eds.), Fuzzy Automata and Decision Processes. North-Holland, Amsterdam and New York, 89-102.

[24] Sugeno, M. (1974), Theory of Fuzzy Integrals and its aplications. Ph. D. dissertation. Tokyo: Institute of Technology.

[25] Şahin, M. (2004), Generalized $\sigma$-algebras and generalized fuzzy measure, Ph. D. Thesis 1-76, Trabzon, Turkey.

[26] Şahin, M. (2007), On Caratheodory Extension Theorem on Fuzzy Measure Spaces, *Far East J Math Sci* 26(2) pp 311-317.

[27] Taş, K. and Çoker, D. (1989), Özer, O., Soyut Matematik, İnönü Üniversitesi Basımevi, Malatya.

[28] Uysal G., Fuzzy Cebirsel Yapıların Üyelik Fonksiyonları, Gaziosmanpaşa

Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi, (2007)

[29] Wang, Z. and Klir. G.J. (1992) ,Fuzzy measure theory. New York , *Plentum Press*.

[30] Wang, Z.(1981),Une class de measure flous-les quasi-measures.*Busefal*,**6**,28-37.

[31] Yen, J. (1990), Generalising the Dempster-Shafer theory to fuzzy sets. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetic*, **20**, 559-570.

[32] Ying-ming, L. and  Mao-Kang L. (1997), Fuzzy Topology, Sichuan Union University, Chine.

[33] Zadeh, L. A. (1965), Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-353.

[34] Zadeh, L. A. (1978), Fuzzy Sets a basis for theory of posibility. *Fuzzy sets and syistem*, **4**, 3-28.