Banach Çekirdekleri ve İstatistiksel Yakınsaklık Üzerine

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Ana Bilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Yrd.Doç.Dr. Kuddusi KAYADUMAN

Abdullah KURUDİREK

Temmuz 2012

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Banach Çekirdekleri ve İstatistiksel Yakınsaklık Üzerine

Öğrencinin, Adı Soyadı: Abdullah KURUDİREK

Tez Savunma Tarihi: 25. 07. 2012

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ramazan KOÇ
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca (tarafımızca) okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri :	İmzası
Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ	....
Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN	....
Yrd. Doç. Dr. Ali BOZKURT	....

ÖZ

BANACH ÇEKİRDEKLERİ VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ÜZERİNE

KURUDİREK, Abdullah
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Kuddusi Kayaduman
Temmuz 2012
49 sayfa

Üç bölümden oluşan bu tez, Banach çekirdekleri ve istatistiksel yakınsaklık ile ilgilidir. Birinci bölümde; bazı temel tanım, kavram ve teoremlere yer verildikten sonra sonsuz matris yardımıyla elde edilen dönüşüm dizisi tariff edilerek regülerlik, konservatif, hemen hemen yakınsaklık ve Banach limitleri tanımı yapıldı. Ayrıca Banach limitleri ile ilgili daha once elde edilen teorem ve sonuçlar verildi.

İkinci bölümde; çekirdek kavramı üzerinde duruldu. K-çekirdek, B-çekirdek tanımları ve bunlarla ilgili elde edilmiş teoremlere yer verildi. Ayrıca bu iki çekirdek arasındaki $K-çek(Ax) \subseteq B-çek(x)$, $B-çek(Ax) \subseteq K-çek(x)$, ve $B-çek(Ax) \subseteq B-çek(x)$ kapsama bağıntıları incelendi.

Üçüncü bölümde; istatistiksel yakınsaklık kavramı ve bu yakınsaklıkla ilgili teoremler ve $A \in (st \cap l_\infty, c)_{reg}$, $A \in (c, st \cap l_\infty)_{reg}$, $A \in (st \cap l_\infty, st \cap l_\infty)_{reg}$ matris sınıfları verildi. Ayrıca istatistiksel çekirdek kavramı ele alınarak $B-çek(Ax) \subseteq st-çek(x)$ ve $st-çek(Ax) \subseteq B-çek(x)$ kapsama bağıntıları incelendi.

Anahtar Kelimeler : Banach limitleri, hemen hemen yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık, $K-çek$, $B-çek$, $st-çek$.

ABSTRACT

ON THE BANACH CORES AND STATISTICAL CONVERGENCE

KURUDIREK, Abdullah
M.Sc.in Mathematics
Supervisor: Ass. Prof. Dr. Kuddusi Kayaduman
July 2012
49 pages

This thesis which is related to Banach cores and statistical convergence, has three chapters. In the first chapter, some preliminary definitions, concepts, and theorems which will also be needed in other chapters, are given. After then, defining matrix transformations by using infinite matrices; definitions of regularity, conservative, almost convergence, and Banach limits are mentioned. In addition some theorems and results about Banach limits are given.

In the second chapter, the concept of core is briefly explained. Definitions of K-core, B-core and theorems which are derived from these mentioned cores are given. Moreover, the coverage relations between these two cores such as $K-core(Ax) \subseteq B-core(x)$, $B-core(Ax) \subseteq K-core(x)$, and $B-core(Ax) \subseteq B-core(x)$ are examined.

In the third chapter, the concept of statistical convergence, theorems which are related to this convergence and $A \in (st \cap l_\infty, c)_{reg}$, $A \in (c, st \cap l_\infty)_{reg}$, $A \in (st \cap l_\infty, st \cap l_\infty)_{reg}$ matrix classifications are given. Also, by explaining the concept of statistical core the coverage relations $B-core(Ax) \subseteq st-core(x)$ and $st-core(Ax) \subseteq B-core(x)$ are examined.

Key Words : Banach limits, almost convergence, statistical convergence, $K-core$, $B-core$, $st-core$.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, aynı zamanda kişilik olarak ta bana çok şey katan Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN'a sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:Doğal sayılar
$\mathbb{R}$	:Reel sayılar
$\mathbb{C}$	:Kompleks sayılar
l_∞	:Reel veya kompleks terimli sınırlı dizilerin uzayı
c	:Reel veya kompleks terimli yakınsak dizilerin uzayı
c_0	:Reel veya kompleks terimli sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
w	: Reel terimli bütün dizilerin uzayı
f	: Reel terimli hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı
f_0	: Reel terimli sıfıra hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı
$f-\lim x$	: x ’in hemen hemen yakınsaklığı veya $f-$toplanabilirliği
$A_n(x)$	: x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi
$C,1$	: Birinci mertebeden Césaro matrisi
E,F	: E ’den F ’ye tanımlı bütün matrislerin sınıfı
$K-çek$	:Reel terimli sınırlı bir dizinin Knopp çekirdeği
$B-çek$	:Reel terimli sınırlı bir dizinin Banach çekirdeği
$st-çek$	:Reel terimli sınırlı bir dizinin İstatistiksel çekirdeği
$st-\lim$	:İstatistiksel limit

$st-\limsup$ **:**İstatistiksel üst limit

$st-\liminf$ **:**İstatistiksel alt limit

$st(b)$ **:** Sınırlı istatistiksel yakınsak dizi uzayı

$\delta(K)$ **:** K cümlesinin doğal yoğunluğu

GİRİŞ

Yeni bir dizi uzayı inşa etmek ve bu uzayın diğer uzaylar arasındaki yerini belirleyecek şekilde kapsama bağıntılarını vermek, bu uzay üzerindeki ve bu uzay içine matris dönüşümlerini karakterize etmek ve ayrıca bir dizinin çekirdeğinin incelenmesi, nitelikli problemler arasındadır.

1911 yılında Alman Matematikçi O.Toeplitz[1] dizi uzayları üzerindeki matris dönüşümleri ile ilgili problemleri çözmek için lineer uzay teorisi metodunu ortaya attı ve $A \in (c, c; p)$ matris sınıfını karakterize etmiştir. 1948 yılında Lorentz[2], Banach limitlerinden hareketle hemen hemen yakınsaklık denilen yeni bir yakınsaklık kavramı tanımladı ve bu matris sınıfına ait matrislerin karakterizasyonunu verdi. 1946'da J.P.King[3] hemen hemen regülerlik tanımını vererek matris sınıfını karakterize etmiştir.

Dizinin çekirdeği kavramı, toplanabilme teorisinin önemli konularından birisidir.Bu alanda, çekirdek teoremleri olarak bilinen ve ilk olarak 1926 yılında K.Knopp, yakınsaklık kavramından hareketle dizinin çekirdeğini $K - çek$ tanımladı. Knopp, daha sonra dönüşüm dizisinin çekirdeğinin esas dizinin çekirdeği tarafından kapsandığını ifade eden teoremi vermiştir, Cooke[4]. 1979 yılında, Knopp Çekirdek Teoremi'ni Maddox[5] bir eşitsizlik problemi olarak görüp yeniden ele almış ve l_∞ üzerinde $L(Ax) \le L(x)$ olması için A matrisi üzerindeki gerek ve yeter şartları belirlemiştir. Burada L, l_∞ üzerinde $L(x) = \limsup x$ biçiminde tanımlanan bir altlineer fonksiyoneldir. Dolayısıyla, bu çalışmadan sonra çekirdek problemleri l_∞ üzerinde tanımlanan altlineer fonksiyoneller arasındaki eşitsizliği sağlayan matrislerin karakterizasyonu olarak görülmüştür. Daha sonra, sınırlı bir dizinin Knopp ve Banach çekirdekleri arasında $K - çek(x)$ ve $B - çek(x)$ olmak üzere,

$B-çek(Ax) \subseteq K-çek(x)$ kapsamının geçerliliği problemi $L^*(Ax) \leq L(x)$ eşitsizliğinin sağlanması problemi olarak ele alınmıştır Orhan[6].

1948 yılında Lorentz[2], Banach limitlerinden hareketle hemen hemen yakınsaklık denilen kavramı tanımladı. 1987'de Das[7], hemen hemen yakınsaklığın karakterizasyonuna dayanarak, sınırlı bir dizinin Banach çekirdeğini $B-çek$ tanımladı. Orhan[6], Knopp çekirdek $K-çek$ ve Banach çekirdek $B-çek$ arasındaki kapsama bağıntısını bir eşitsizlik problem olarak ele alıp $L(Ax) \leq L^*(x)$ ve $L^*(Ax) \leq L^*(x)$ şeklinde çözdü.

Son olarak bu çalışmamızda, 1951 yılında Fast[8] tarafından tanımlanan istatistiksel yakınsaklık kavramı verildi ve 1997'de J.Fridy & Orhan[9] sınırlı bir dizinin istatistiksel çekirdeğini $st-çek$ tanımlayıp, $K-çek$ ve $B-çek$ ile istatistiksel çekirdek arasındaki kapsama bağıntılarını inceledi. Ayrıca Coşkun ve Çakan[24], $A \in st \cap l_\infty, f_{reg}$ matris sınıfını vererek $L^*(Ax) \leq st-\limsup x$ eşitsizliğini incelemişlerdir.

BÖLÜM 1

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

1.1. Lineer Fonksiyoneller ve Lineer Dönüşüm

Tanım 1.1.1.(Lineer Uzay) X boş olmayan bir cümle ve $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi verilmiş olsun.

$$+ \quad : X \times X \to X, \quad (x,y) \to x+y$$

ve

$$\bullet \quad : \mathbb{C} \times X \to X, \quad (\lambda x) \to \lambda x$$

fonksiyonları tanımlanmış olsun. Eğer $x,y,z \in X$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için

i) $x+y=y+x$,

ii) $(x+y)+z=x+(y+z)$,

iii) $x+\theta=x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ var,

iv) Her $x \in X$ için $x+(-x)=\theta$ olacak şekilde bir $-x \in X$ var,

v) $1.x=x$,

vi) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$,

vii) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$,

viii) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$,

şartları sağlanıyorsa, X 'e $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir lineer uzay veya kompleks lineer uzay denir $[10]$, sf.69 .

X bir lineer uzay ve $Y \subset X$ ise, Y 'nin de lineer uzay olması için $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve $y_1, y_2 \in Y$ alındığında $\lambda y_1 + \mu y_2 \in Y$ sağlaması yeterlidir.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere bütün x_n dizilerinin cümlesi w ile gösterilir. w dizileri skalarla çarpma ve koordinatsal toplama işlemine göre reel sayılar cismi üzerinde bir lineer uzaydır. w 'nin herhangi bir alt uzayına dizi uzayı denir.

Tanım1.1.2.(Lineer Dönüşüm) X ve Y lineer uzaylar olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonuna, her $x, y \in X$ ve bütün λ, μ skalerleri için $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ şartı sağlanırsa f 'ye bir lineer operatör veya lineer dönüşüm denir. $Y = \mathbb{R}$ veya $Y = \mathbb{C}$ olması durumunda ise f 'ye bir lineer fonksiyonel denir [10], sf.109 .

Tanım 1.1.3.(Normlu Lineer Uzay) X bir lineer uzay ve $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $X, \|.\|$ ikilisine de normlu uzay denir [10], sf.103 .

Tanım 1.1.4. $X, \|.\|$ bir normlu uzay olsun. Eğer $\|x_m - x_n\| \to 0 \ (m, n \to \infty)$ oluyorsa $(x_n) \subset X$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [10], sf.104 .

Tanım 1.1.5. $X, \|.\|$ bir normlu uzay olsun. Eğer $\|x_n - x\| \to 0 \ (n \to \infty)$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $(x_n) \subset X$ dizisi x 'e yakınsaktır denir [10], sf.104 .

Tanım 1.1.6.(Banach Uzayı) Eğer $X,\|.\|$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise X'e tam normlu uzay veya Banach uzayı denir. Banach uzayı tam normlu bir lineer uzaydır, buradaki tamlık $x_n \in X$ için $\|x_m - x_n\| \to 0\ (m,n \to \infty)$ olduğunda bir $x \in X$ mevcuttur öyle ki, $\|x_n - x\| \to 0\ (n \to \infty)$ olur $[10]$, sf.104 .

1.2. Matris Dönüşümleri

Tanım 1.2.1. $A = (a_{nk})$ reel terimli sonsuz bir matris ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her n için,

$$A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k \tag{1.2.1}$$

serileri yakınsak ise $A_n(x)$ dizisine (x_k) dizisinin A matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi denir.

E ve F herhangi iki dizi uzayı ve A da sonsuz bir matris olsun. Eğer her $x \in E$ için $A_n(x) \in F$ ise A matrisi E'den F'ye tanımlıdır denir ve $A \in (E,F)$ şeklinde yazılır. E'den F'ye tanımlı bütün matrislerin sınıfları (E,F) ile gösterilir $[10]$. Eğer E ve F üzerinde limit veya toplam mevcut ise (E,F)'nin elemanlarının limit veya toplam koruması halinde $(E,F)_{reg}$ yazılır. Mesela; $A \in (c,c)_{reg}$ ise, her $x \in c$ için $Ax \in c$ ve $\lim x = \lim A_n(x)$'dir. Bu sınıftaki matrislere regüler matrisler denir. Bir A matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartlar Teorem 1.2.1'de verilmiştir.

Teorem 1.2.1.(Silverman-Toeplitz) Bir A matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart,

$$\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty, \tag{1.2.2}$$

$$\lim_n a_{nk} = 0 \quad \text{her } k \text{ için}, \tag{1.2.3}$$

$$\lim_n \sum_k a_{nk} = 1, \tag{1.2.4}$$

olmasıdır $[10]$, sf.221 .

Teorem 1.2.2. $A \in (l_\infty, l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (1.2.2)'nin sağlanmasıdır $\left[10\right]$, sf.222 .

Teorem 1.2.3. f_n , $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığı üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsak olan fonksiyon dizisi olsun. Bu durumda; f_n 'nin I üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart,

$$\lim_n \sup_{x\in I} \left|f_n(x) - f(x)\right| = 0$$

olmasıdır $\left[10\right]$, sf.18 .

Teorem 1.2.4.(Kojima-Schur) $A \in (c, c)$ olması için gerek ve yeter şart,

$$\left\|A\right\| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left|a_{nk}\right| < \infty , \tag{1.2.5}$$

$$\lim_n \sum_{k=p}^{\infty} a_{nk} = a_p \quad \text{mevcut, her } p \in \mathbb{N} \text{ için} \tag{1.2.6}$$

şartlarını sağlamasıdır $\left[10\right]$, sf.222 .

Ayrıca (1.2.5), (1.2.6) şartları sağlanır ve $\lim_{k\to\infty} x_k = l$ ise

$$\lim_n \sum_{k=p}^{\infty} a_{nk} x_k = l a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1})(x_k - l) \quad \text{dır.}$$

Görüldüğü gibi eğer $A \in (c, c)$ ise yani yakınsak her diziyi yakınsak diziye dönüştürüyorsa A matrisine konservatif (koruyucu) matris denir.

Teorem 1.2.5.(Schur) $A \in (l_\infty, c)$ olması için gerek ve yeter şart,

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \left|a_{nk}\right|$, n 'ye göre düzgün (her $n \in \mathbb{N}$ için)

ii) $\lim_n a_{nk}$ mevcut, (her $k \in \mathbb{N}$ için)

şartlarını sağlamasıdır $\left[10\right]$, sf.223 .

Tanım 1.2.2. $A=(a_{nk})$ $(n,k=1,2,3,...)$ reel terimli sonsuz matrisolmak üzere, $x=(x_n)$ dizisinin $A-$dönüşüm dizisi $Ax=A_n(x)$ ile gösterilir ve her $n\in\mathbb{N}$ için,

$$A_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}x_k \text{ mevcut ve } \lim_{n\to\infty}A_n(x)=a$$

ise (x_n) dizisi $a-$değerine, $A-$ toplanabilir veya $A-$limitlenebilir denir ve $A-\lim x_n=a$ şeklinde gösterilir.

Teorem 1.2.6.(Hahn-Banach Genişletme) X bir lineer uzay ve M bir alt uzay olsun. Her $\alpha\geq 0$ ve her $x,y\in X$ için $p:X\to\mathbb{R}$, X üzerinde alttoplamsal ve $p(\alpha x)=\alpha p(x)$ olsun. Eğer f, M üzerinde bir lineer fonksiyonel ve $f(x)\leq p(x)$ ise bu takdirde X'de $g(x)\leq p(x)$ olacak şekilde f'nin x'e göre bir g lineer genişletmesi vardır $[10]$, sf.133 .

Tanım 1.2.3. Birinci mertebeden Césaro matrisi denilen ve $C,1$ ile gösterilen matris,

$$c_{nk}=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1}, & 0\leq k\leq n\\ 0 \quad , & k>n\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve bu matris regüler bir matristir $[10]$, sf.216 .

Lemma 1.2.1. $B=b_{nk}(i)$ bir matris dizisi olsun. Eğer $\|B\|<\infty$ ve $\lim_n \sup_i |b_{nk}(i)|=0$ ise,

$$\lim_n\sup_i\sup\sum_k b_{nk}(i)y_k=\lim_n\sup_i\sup\sum_k|b_{nk}(i)| \tag{1.2.7}$$

ve $\|y\|\leq 1$ olacak şekilde en az bir $y\in m$ vardır $[7]$.

Teorem 1.2.7. A ve B regüler matrislerinin, l_∞ üzerinde mutlak denk olmaları için gerek ve yeter şart,

$$\lim_n \sum_k \left| a_{nk} - b_{nk} \right| = 0$$

olmasıdır $\left[4\right]$, sf.105 .

Teorem 1.2.8. $A_n(x)$ dönüşüm dizisinin çekirdeğinin, $x = (x_n)$ dizisinin çekirdeği tarafından kapsanması için gerek ve yeter şart, bütün sınırlı diziler için, a_{nk} matrisinin b_{nk} non-negatif matrisine mutlak denk olmasıdır $\left[4\right]$, sf.153 .

Teorem 1.2.9. x_n ve x'_n dizileri verilmiş olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} \left| x_n - x'_n \right| = 0$ ise o zaman x_n ve x'_n dizilerinin R ve R' çekirdekleri özdeştir (aynıdır) $\left[4\right]$, sf.144 .

1.3.Hemen Hemen Yakınsaklık ve Banach Limitleri

l_∞, $x = (x_n)$ sınırlı reel sayı dizilerinin uzayı olmak üzere, $\left\|x\right\| = \sup\left|x_n\right|$ ile tanımlanan normal bir Banach uzayıdır. c, tüm yakınsak diziler uzayı olmak üzere, c'nin sınırlı diziler uzayının kapalı bir alt uzayı olduğu bilindiğine göre; c üzerindeki sürekli lineer fonksiyonel olarak limit kabul edilirse, $\lim$'i l_∞ üzerinde tanımlı sürekli lineer fonksiyonel Lim'e her $x \in c$ için $Limx = \lim(x$ olacak şekilde genişletilebilir. Bu ancak her sınırlı dizinin limitinin $Limx$ olarak yakınsak kabul edilmesi halinde mümkündür. Ancak bazı güçlükler vardır. Hahn-Banach teoremi genişlemenin tekliğini garanti etmez. $\lim$'in özel bir genişlemesi Lim'i alsak bile keyfi bir ıraksak dizide Lim'in değerinin herhangi bir yoldan hesaplanmasını sağlayamayız. Ancak $\lim$'in genişlemesine bazı kısıtlamalar yaparak verilen bir dizinin her genişleme ile aynı değeri verdiğini söyleyebiliriz.

Tanım 1.3.1. X, $\mathbb{R}$ üzerinde bir lineer uzay olmak üzere, $f : X \to \mathbb{R}$ dönüşümüne bir reel fonksiyonel denir. Her $x, y \in X$ için,

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$

ise f 'ye alt toplamsal,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

ise f 'ye toplamsal denir $\left[10\right]$, sf.222 .

Eğer $\alpha \geq 0$ ve her $x \in X$ için $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ ise f 'ye homojendir denir. Alttoplamsal ve homojen bir fonksiyonele altlineer , toplamsal ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için homojen olan bir fonksiyonele de lineerdir denir.

Tanım 1.3.2. $L : l_{\infty} \to \mathbb{R}$ lineer olsun. Eğer, her $x, y \in l_{\infty}$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için

i) $L(ax + by) = aL(x) + bL(y)$,

ii) Her $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq 0$ ise $L(x) \geq 0$,

iii) $L(x) = L(\sigma x)$ (σ kaydırma operatörü) şöyle ki, $\sigma(x) = \sigma\ (x_n) = x_{n+1}$,

iv) $e = (1,1,...)$ için $L(e) = 1$,

şartlarını sağlıyorsa, L 'ye bir Banach limiti denir$\left[2\right]$.

Buna göre L, Banach limitinin l_{∞} üzerinde sürekli lineer fonksiyonel olduğu söylenebilir. Banach limitleri, limitin bir genişlemesidir. Banach limitlerinin varlığının ispatı$\left[17\right]$'de verilmiştir. Buna göre; x sınırlı bir dizi olsun, o zaman her L Banach limiti için $L(x) = \alpha$ ise x, α 'ya hemen hemen yakınsaktır denir. Böylece Banach limitine bağlı olarak hemen hemen yakınsaklık tanımı verilmiş olur. $x \in l_{\infty}$ için x 'in hemen hemen yakınsak, f-yakınsak veya başka bir ifade ile f-toplanabilir olması demek x 'in bütün Banach limitlerinin eşit olması anlamına gelir.

f, hemen hemen yakınsak dizilerin cümlesi olmak üzere x 'in bütün Banach limitlerinin ortak değeri l ise l 'ye x 'in genelleştirilmiş limiti ve $x \in l_{\infty}$ dizisine hemen hemen yakınsaktır denir ve

$$f - \lim x = l \quad \text{veya} \quad Lim x = l$$

ile gösterilir. Bu konuyla ilgili bilinen en genel örnek sınırlı bir ıraksak dizi olan $x=(0,1,0,1,...)$ $\frac{1}{2}$'ye hemen hemen yakınsaktır. Çok açık bir şekilde görebiliriz ki,

$$e=x+\sigma x=(0,1,0,1,...)+(1,0,1,0,...)=(1,1,1,1,...)$$

ve L Banach limiti olduğundan;

$$1=L(e)=L(x+\sigma x)=L(x)+L(\sigma x)=2L(x)$$

Buradan $L(x)=\frac{1}{2}$ elde edilir.

Genelde tanımı kullanarak hemen hemen yakınsak diziyi göstermek kolay değildir. Ayrıca, Lorentz$[2]$ hemen hemen yakınsaklık tanımını aşağıdaki şekilde vermiştir.

Tanım 1.3.3. $x\in l_\infty$ olmak üzere,

$$\lim_p \frac{1}{p}\sum_{i=n+1}^{n+p} x_i = l \ , \quad n \text{'ye göre düzgün}$$

ise x dizisi l'ye hemen hemen yakınsaktır denir. Hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı f ile gösterilir ve $f-\lim x=l$ yazılır$[2]$.

Bütün Banach limitlerinin cümlesini α ile gösterelim. Şimdi Banach limitleri ve Hemen hemen yakınsaklıkla ilgili teoremleri verelim.

Teorem 1.3.1. $L\in\alpha$ olmak üzere, her $x\in l_\infty$ için,

$$\lim_n \inf x_n \le L(x) \le \lim_n \sup x_n$$

olur $[13]$, sf.262 .

İspat: $\lim_n \inf x_n = \lim_k \inf_{n\ge k} x_n$, $\lim_n \sup x_n = \lim_k \sup_{n\ge k} x_n$ ve Banach limitleri kaydırma operatörü altında değişmeden kaldığından sadece

$$\inf x_n \le L(x) \le \sup x_n$$

olduğunu göstermek ispatı tamamlayacaktır. Bu durumda verilen $\varepsilon > 0$ için,

$$\inf x_n \leq x_{n_0} \leq \inf x_n + \varepsilon$$

olacak şekilde n_o seçebiliriz. Buradan her n için,

$x_n + \varepsilon - x_{n_0} > 0$ olur.(ii) & (iv) Banach L. şartlarından

$x_n + \varepsilon > x_{n_0}$ ve $L(x) + \varepsilon > x_{n_0} \geq \inf x_n$

yazılabilir. Böylece $L(x) \geq \inf x_n$ olur.

Benzer şekilde $\varepsilon > 0$ için,

$$\sup x_n - \varepsilon < x_{n_0} \leq \sup x_n$$

$$x_{n_0} + \varepsilon - x_n > 0$$

$$x_{n_0} > x_n - \varepsilon$$

olacak şekilde n_o seçebiliriz.

$$\sup x_n \geq x_{no} > L(x) - \varepsilon$$

$$\sup x_n \geq L(x)$$

$$\inf x_n \leq L(x) \leq \sup x_n$$

$$\liminf x_n \leq L(x) \leq \limsup x_n$$

elde edilir, ki buda ispatı tamamlar.

Teorem 1.3.2. $\alpha \neq \varnothing$ $[13]$, sf.261 .

İspat: $q : l_\infty \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$q(x) = \limsup_n \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$-q(-x) = \liminf_n \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \ell(x) \text{ dir.}$$

Eğer $x \in c$ ise, $\ell(x) = \lim_n x_n = \lim_n \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = q(x)$ olur.

Ayrıca her $\lambda \geq 0$ için,

$$q(x+y) \leq q(x)+q(y) \text{ ve } q(\lambda x)=\lambda q(x) \text{dir.}$$

Hanh-Banach teoremini uygulayarak ℓ'nin c'den l_∞'a bir L genişlemesi elde edilir. Her $x \in l_\infty$ için,

$$-q(-x) \leq L(x) \leq q(x) \text{ yazılır.}$$

$$q(x-\sigma x)=\lim_n \sup \frac{x_{n+1}-x_1}{n}=0$$

olduğundan L bir Banach limitidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 1.3.3. $p: l_\infty \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli $p(x)=\inf \lim_j \sup \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{n_{i+j}}$ şeklinde tanımlansın. Buna göre $L \in \alpha$ olmak üzere, her $x \in l_\infty$ için,

$$\lim\inf x_n \leq -p(-x) \leq L(x) \leq p(x) \leq \lim\sup x_n$$

olur $[13]$, sf.262 .

İspat: Teorem 1.3.1'den $\lim\inf x_n \leq -p(-x)$ ve $p(x) \leq \lim\sup x_n$ olduğu açıktır. Şimdi Teorem 1.3.1.'i $n_1, n_2, n_3, ..., n_k$ için, k sabit $\left|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{n_{i+j}}\right|$ dizimize uygularsak,

$$\lim_j \inf \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{n_{i+j}} \leq L\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{n_{i+j}}\right)=L(x)$$

$$\leq \lim_j \sup \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{n_{i+j}}$$

elde edilirki, buda istenendir.

Teorem 1.3.4. $p: l_\infty \to \mathbb{R}$ bir alt lineer fonksiyoneldir $[13]$, sf.263 .

İspat: $x, y \in l_\infty$ için, $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $x, y \in l_\infty$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun,

$\limsup_j \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{n_{i+j}} < p(x)+\frac{\varepsilon}{2}$ sağlayacak şekilde $k, n_1, n_2, ..., n_k$ mevcuttur ve

$\limsup_j \frac{1}{\ell}\sum_{i=1}^{k} x_{m_{i+j}} < p(y)+\frac{\varepsilon}{2}$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $\ell, m_1, m_2, ..., m_\ell$ vardır.

$k\ell$ tam sayısını göz önüne alıp $n_r + m_s$, $r = 1,2,...,k$ ve $s = 1,2,...,\ell$ için $\limsup$'un alttoplamsal özelliğini kullanarak,

$$p(x+y) \le \limsup_j \frac{1}{k\ell}\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{\ell}(x_{nr+ms+j} + y_{nr+ms+j})$$

$$\le \limsup_j \frac{1}{k\ell}\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{\ell} x_{nr+ms+j} + \limsup_j \frac{1}{k\ell}\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{\ell} y_{nr+ms+j}$$

yazılabilir. Böylece

$$\frac{1}{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\limsup_j \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k} x_{nr+ms+j} < p(y)+\frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$\limsup \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k} x_{nr+ms+j} < p(x)+\frac{\varepsilon}{2}$$

olduğundan,

$$p(x+y) \le p(x)+p(y)$$

elde edilirki bu ispatı tamamlar.

Teorem 1.3.5. $x \in l_\infty$'un bütün Banach limitlerinin aynı olması için için gerek ve yeter şart,

$$p(x) = -p(-x)$$

olmasıdır $\left[13\right]$, sf.264 .

İspat:(Gereklilik); Teorem1.3.3'den elde edilir.

(Yeterlilik); $-p(-x) < p(x)$ alalım ve $x \notin c$ olsun. Şimdi c 'den $c \cup x$ 'ye l 'nin farklı genişlemeleri vardır. Hahn-Banach teoreminin ispatından, bu genişleme x 'de

$$\left(\sup_{x\in c}\left[-p(-y-x)-l(y)\right], \inf_{x\in c}\left[p(y+x)-l(y)\right]\right)$$

aralığında herhangi bir değere sahip olabilir ve bitiş noktaları sırasıyla $-p(-x)$ ve $p(x)$ 'e gider.

Şimdi hemen hemen yakınsaklıkla ilgili matris karakterizasyonlarını ispatsız olarak verelim.

Teorem 1.3.6. Eğer $A \in (f,c)_{reg}$ ise, A 'ya kuvvetli regülerdir denir[2].

Teorem 1.3.7. Regüler bir A matrisinin kuvvetli regüler olması için gerek ve yeter şart,

$$\lim_n \sum_k \left|a_{nk} - a_{n,k+1}\right| = 0$$

olmasıdır[2].

Tanım 1.3.4. Eğer $A \in (c,f)_{reg}$ ise, A 'ya hemen hemen regülerdir denir[3].

Teorem 1.3.8. Bir A matrisinin hemen hemen regüler olması için gerek ve yeter şart (1.2.2) ile birlikte,

$$f-\lim_n a_{nk} = 0 \text{ her } k \text{ için}, \tag{1.3.1}$$

$$f-\lim_n \sum_k a_{nk} = 1, \tag{1.3.2}$$

şartlarının sağlanmasıdır[3].

Tanım 1.3.5. Eğer $A \in (f, f)_{reg}$ ise, A'ya $f-$regülerdir denir $[12]$.

Teorem 1.3.9. Bir A matrisinin $f-$regüler olması için gerek ve yeter şart (1.2.2), (1.3.1) ve (1.3.2) ile birlikte n' ye göre düzgün olarak ,

$$\lim_{p} \sum_{k} \frac{1}{p+1} \left| \sum_{i=0}^{p} a_{n+i,k} - a_{n+i,k+1} \right| = 0$$

şartının sağlanmasıdır $[12]$.

BÖLÜM 2

ÇEKİRDEK TEOREMLERİ

2.1. K-Çekirdek

‘Bir dizinin çekirdeği’ tanımı, ilk olarak K. Knopp tarafından yapılmış ve bununla ilgili daha sonraki yıllarda çokca başvurulan bir teorem verilmiştir. Bu bölümde, sınırlı bir dizinin Knopp çekirdeği $K-çek$, Banach çekirdeği $B-çek$ tanımından sonra çekirdekler arasındaki kapsama bağıntılarını gösteren teoremler verilecektir. l_∞ ,sınırlı dizilerinin uzayı üzerinde bazı altlineer fonksiyonelleri

$$l(x) = \liminf x_n \qquad L(x) = \limsup x_n$$

$$\|x\| = \sup|x_n| \qquad l^*(x) = \liminf_n \sup_i \frac{1}{n+1}\sum_{r=i}^{i+n} x_r$$

$$L^*(x) = \limsup_n \sup_i \frac{1}{n+1}\sum_{r=i}^{i+n} x_r \qquad W^*(x) = \inf_{z\in m_0} L^*(x+z)$$

$$Q_A(x) = \limsup_n \sup_i \sum_k a_{nk}(i)x_k \qquad q_A(x) = \liminf_n \sup_i \sum_k a_{nk}(i)x_k$$

biçiminde gösterelim.

Çekirdeğin tanımında kullanılan konveks cümle kavramını verelim.

Tanım 2.1.1. E, bir nokta cümlesi ve $a \geq 0,\ b \geq 0,\ a+b=1$ olsun. Eğer her $x, y \in E$ için $ax + by \in E$ oluyorsa, E ’ye konvekstir denir [10], sf.80 .

Teorem 2.1.1. Konveks cümlelerin herhangi sayıdaki kesişimleri konvekstir.

Tanım 2.1.2. $K-$*çekirdek* $(s_n) \in \mathbb{C}$ bir dizi ve R_n'de her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$ noktalarını içeren sonlu kompleks düzlemin en küçük kapalı-konveks bir bölgesi olsun. Bu durumda, $R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \ldots$ olacağı açıktır. Buna göre;

$$R = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n \text{ cümlesine } (s_n) \text{ dizisinin çekirdeği denir.}$$

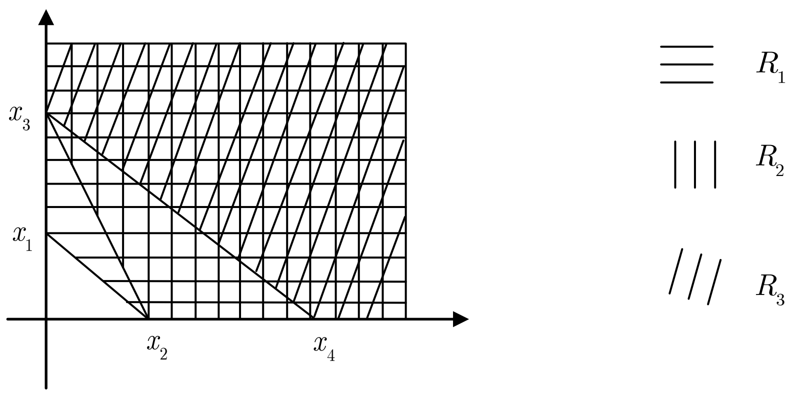
Sonsuz sayıdaki kapalı cümlelerin kesişimi kapalı olduğundan ve bir önceki teoremden (s_n)'nin R çekirdeği kapalı-konveks bir cümledir. O halde; kapalılığın tanımından (s_n) dizisinin limit noktalarının cümlesi D ise $D \subset R$ dir.

Eğer R cümlesi tek noktadan ibaret ise, (s_n) dizisi yakınsaktır (tersi de doğrudur). R boş (sonlu nokta ihtiva etmez) ise (s_n) dizisine 'belirli ıraksak' denir ve $s_n \approx \infty$ ile gösterilir.

Şimdi $K-$çekirdek ile ilgili bazı örnekler verelim.

Örnek 2.1.1. $x_n = \begin{cases} n & , \ n \text{ çift} \\ ni & , \ n \text{ tek} \end{cases}$ olarak tanımlansın. O zaman, aranan R_n kapalı-konveks cümleleri aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi orjinde dik açılı üçgensel bir bölgenin çıkarılması ile kalan kompleks düzlemin birinci bölgesinden ibarettir.

$x_1 = i$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3i$, $x_4 = 4$,...



O halde; $R = R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap ... = \varnothing$ olduğundan (x_n) dizisi belirli ıraksaktır.

Örnek 2.1.2. $x_n = (-1)^n$ dizisini alalım. Bu durumda; $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$, ... olacağından, $R = R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap ... = [-1,1]$ kapalı aralığıdır. O halde, (x_n) 'in $K-$çekirdeği $[-1,1]$ aralığıdır.

Çekirdeğin son yapılan tanımından, aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Eğer iki dizinin limit noktalarının cümlesi aynı ise, bunların çekirdekleri de aynıdır. Fakat, aynı çekirdeğe sahip dizilerin limit noktaları aynı olmak zorunda değildir. Mesela;

$$1,0,1,0,\ldots \text{ ve } \left(1,\frac{1}{2},0,1,\frac{1}{2},0,\ldots\right)$$

dizilerinin $K-$çekirdekleri aynı olduğu halde, limit noktalarının farklı olduğu görülmektedir.

Yukarıdaki örnekte de görüldüğü gibi, reel terimli ve sınırlı bir (x_n) dizisinin Knopp, kısaca $K-$çekirdeği , $L(x) = \limsup x$ ve $\ell(x) = \liminf x$ olmak üzere,

$$[\ell(x), L(x)]$$

kapalı aralığıdır $[4]$, sf.138 . Bu tanımdan sonra Knoop kendi adıyla anılan ve dönüşüm dizisinin çekirdeğinin esas dizinin çekirdeği içinde kaldığını ispatlayan aşağıdaki teoremi verdi.

Teorem 2.1.2. Eğer A matrisi regüler ve pozitif terimli ise her $x \in l_\infty$ için;

$$K-çek(Ax) \subseteq K-çek(x)$$

olur $[4]$, sf.138 .

Her $x \in l_\infty$ için, $L(Ax) \leq L(x)$ ise, $l(x) \leq l(Ax) \leq L(Ax) \leq L(x)$ eşitsizliği elde edilir. Böylece $L(Ax) \leq L(x)$ olması $K - çek(Ax) \subseteq K - çek(x)$ ile aynı anlamdadır. Buna dayanarak Maddox, 1979 yılında Knoop'un $[4]$ çekirdek teoremini bir eşitsizlik problemi olarak ele aldı ve aşağıdaki gibi ispatladı.

Teorem 2.1.3. $L(Ax) \leq L(x)$ $K - çek(Ax) \subseteq K - çek(x)$ olması için gerek ve yeter şart, A 'nın regüler ve

$$\sum_k |a_{nk}| = 1 \quad (n \to \infty) \tag{2.1.1}$$

olmasıdır. $[5]$.

İspat: (Gereklilik); Her $x \in l_\infty$ için, $L(Ax) \leq L(x)$ olsun. Bu durumda $-x \in l_\infty$ için de bu eşitsizlik sağlanacağından $L(-Ax) \leq L(-x)$ buradan $-L(-Ax) \geq -L(-x)$ elde edilir. Bu iki eşitsizlik birleştirilirse,

$-L(-x) \leq -L(-Ax) \leq L(Ax) \leq L(x)$ elde edilir. Böylece;

$l(x) \leq l(Ax) \leq L(Ax) \leq L(x)$ yazabiliriz. $x \in c$ alındığında,

$\liminf x = \limsup x = \lim x$ olacağından

$l(x) \leq l(Ax) \leq L(Ax) \leq \lim x$ yazılarak, $l(Ax) = L(Ax) = \lim x$ elde edilir ki,bu da $A \in (c,c)_{reg}$ dir. Silverman-Toeplitz teoreminin şartlarının dikkate alınmasından ve Agnew $[18]$ 'den;

$L(Ay) = \limsup_n \sum a_{nk} < \infty$ ve $\|y\| = 1$ olacak şekilde $y \in m$ mevcuttur.

Böylece, $1 \leq \liminf_n \sum |a_{nk}| \leq \limsup \sum_k |a_{nk}| \leq L(y) \leq \|y\| \leq 1$ elde edilir ki buda (2.1.1) dir.

(Yeterlilik); $x \in l_\infty$ için, A regüler ve (2.1.1) şartı sağlansın. Eğer $m > 1$ alınırsa,

$$\sum a_{nk}x_k \leq \|x\|\sum_{k<m}|a_{nk}| + \sup_{k\geq m} x_k \sum |a_{nk}| + \|x\|\sum_{k<m} |a_{nk}| - a_{nk}$$

yazılır .Hipotezler dikkate alınarak $\lim_m \sup_n$ operatörü uygulanırsa

$$L(Ax) \leq L(x)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

2.2. B-Çekirdek

Tanım 2.2.1. P ve Q sırasıyla l_∞ üzerinde altlineer ve lineer fonksiyoneller olsunlar. Eğer her $x \in l_\infty$ için $Q(x) \leq P(x)$ eşitsizliği Q'nün Banach limiti olmasını gerektiriyorsa, P'ye Banach limitlerini üretir denir. Eğer her Q Banach limiti için her $x \in l_\infty$ alındığında $Q(x) \leq P(x)$ oluyorsa P'ye Banach limitlerine baskındır denir $[7]$.

Eğer P hem Banach limitlerini üretir hem de Banach limitlerine baskın ise bir $x \in l_\infty$ dizisinin hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şart,

$$-P(-x) = P(x)$$

olmasıdır. Ayrıca; sınırlı bir x dizisinin Banach çekirdeği (kısaca $B - çek$),

$$\left[-P(-x),\ P(x)\right]$$

kapalı aralığı ile tanımlanır.

$$q(x) = \inf_{n_1, n_2, \ldots, n_p} \limsup_k \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_{k+n_i}$$

ile tanımlanan q altlineer fonksiyoneli hem Banach limitlerini üretir hem de Banach limitlerine baskındır $[2]$. Dolayısıyla sınırlı bir x dizisinin $B -$ çekirdeği,

$$\left[-q(-x),\ q(x)\right]$$

kapalı aralığı ile tanımlanır $[7]$.

Ayrıca l_∞ üzerinde,

$$L^*(x) = \lim_p \sup_n \sup \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} x_{n+i}$$

şeklinde tanımlanan altlineer fonksiyoneli de Banach limitlerine baskındır ve Banach limitlerini üretir. Bu nedenle dizinin $B-$çekirdeği aynı zamanda $\left[-L^*(-x),\ L^*(x)\right]$ şeklinde de verilir $[6]$.

$(A^i) = a_{nk}(i)$ sonsuz bir matris dizisi ve $x = (x_k)$ dizi olmak üzere,

$$A_n^i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}(i) x_k \quad (\text{her } n \text{ ve } i \geq 0) \text{ için mevcut ise,}$$

Ax dönüşüm dizisi $\left(A_n^i(x)\right)_{i,n=0}^{\infty}$ şeklinde gösterilir. Eğer $A_n^i(x) \to s$ ($n \to \infty$, i 'de düzgün) ise $x = (x_k)$ dizisi s 'değerine $\mathcal{A}$ - toplanabilir denir ve $x \to s(\mathcal{A})$ şeklinde yazılır. Buradan $\left(a_{nk}(i)\right)$ matrisi

$$a_{nk}(i) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & , \quad i \leq k \leq i+n \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde alınırsa $\mathcal{A}$ metodu, f metoda indirgenir. $(\mathcal{A})$ 'nın regüler olması için gerek ve yeter şart, $x \in l_\infty$ olmak üzere,

i) $\sup\limits_{i \geq 0, n \geq m} \sum\limits_k |a_{nk}(i)| < \infty$,

ii) $\lim\limits_n a_{nk}(i) = 0$ $\quad i$ 'de düzgün,

iii) $\lim\limits_n \sum\limits_k a_{nk}(i) = 1$ $\quad i$ 'de düzgün,

şartlarını sağlamasıdır $[6]$.

Buradan, $\|\mathcal{A}\| = \sup_{n,i} \sum_k |a_{nk}(i)| < \infty$ ve ayrıca,

$$\sum_k |a_{nk}(i)| \le M \quad \text{(her } n \text{ için, her } i \text{ için)}$$

olacak şekilde sabit bir M sayısı vardır. $x \in l_\infty$ üzerinde

$$Q_A(x) = \limsup_n \sup_i \sum_k a_{nk}(i) x_k$$

ve

$$q_A(x) = \liminf_n \sup_i \sum_k a_{nk}(i) x_k$$

altlineer fonksiyonellerdir. Şimdi bu altlineer fonksiyonellerle ilgili eşitsizlik (çekirdek) teoremlerini verelim.

Teorem 2.2.1. $\|A\| < \infty$ olsun. Her $x \in l_\infty$ için,

$$Q_A(x) \le L(x)$$

olması için gerek ve yeter şart, $(\mathcal{A})$ regüler ve

$$\sum_k |a_{nk}(i)| \to 1 \quad (n \to \infty, \ i \text{'de düzgün}) \tag{2.2.1}$$

olmasıdır$[6]$.

İspat : (Gereklilik); Her $x \in l_\infty$ için, $Q_A(x) \le L(x)$ olsun. Bu durumda x yerine $-x$ alınırsa, $l(x) \le -Q_A(-x) \le Q_A(x) \le L(x)$ elde edilir. $x \in c$ için, $l(x) = L(x) = \lim x$ olacağından $\lim x \le -Q_A(x) \le Q_A(x) \le \lim x$ yazılabilir. Buradan $Q_A(x) = q_A(x) = \lim x$ elde edilirki buda $(\mathcal{A})$'nın regülerliğini gösterir. $(\mathcal{A})$ regüler olduğundan Lemma 1.2.1. şartları sağlanmış olur. Böylece, $\|y\| < 1$ ve $Q_A(y) = \limsup_n \sup_i \sum_k |a_{nk}(i)|$ olacak şekilde bir $y \in m$ mevcuttur.

Özel olarak, $x=e=(1,1,1,...)$ dizisi alınırsa

$$1=q_A(e)\le \liminf_n \sup_i \sum_k |a_{nk}(i)|$$

$$\le \limsup_n \sup_i \sum_k |a_{nk}(i)| = Q_A(y)\le L(y)\le \|y\|\le 1$$

elde edilir ki bu da (2.2.1)'in ispatıdır.

(Yeterlilik); Herhangi bir $x\in l_\infty$ için, $\varepsilon>0$ verildiğinde ve $k>k_0$ olduğunda $x_k<L(x)+\varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0\in\mathbb{N}$ vardır. $\lambda\in\mathbb{R}$ için, $\lambda^+ := max\{\lambda, 0\}$, $\lambda^- := max\{-\lambda, 0\}$ şeklinde ve $|\lambda|=\lambda^+ + \lambda^-$, $\lambda=\lambda^+ - \lambda^-$ olmak üzere;

$$\sum_k a_{nk}(i)x_k = \sum_{k<m} a_{nk}(i)x_k + \sum_{k\ge m} a^+_{nk}(i)\, x_k - \sum_{k\ge m} a^-_{nk}(i)\, x_k$$

yazılabilir. Hipotez dikkate alınarak yukarıdaki eşitsizliğe $\lim\sup_m \sup_n$ operatörü uygulanırsa, $Q_A(x)\le L(x)+\varepsilon$ elde edilir. ε keyfi olduğundan,

$$Q_A(x)\le L(x)$$

bulunur.

Teorem 2.2.2. Her $x\in l_\infty$ için, $L(Ax)\le L^*(x)$ $\left(K-çek(Ax)\subseteq B-çek(x)\right)$ olması için gerek ve yeter şart, $A\in (f,c)_{reg}$ ve

$$\sum_k |a_{nk}| \to 1\ (n\to\infty) \tag{2.2.2}$$

şartlarının sağlanmasıdır[6].

İspat :(Gereklilik); Her $x\in l_\infty$ için, $L(Ax)\le L^*(x)$ olsun. Bu durumda x yerine $-x$ yazılırsa, $-L^*(-x)\le -L(-Ax)\le L(Ax)\le L^*(x)$ elde edilir. $x\in f$ için $-L^*(-x)=L^*(x)=f-\lim x$ olacağından $f-\lim x\le -L(-Ax)\le L(Ax)\le f-\lim x$

yazılabilir. Buradan, $f-\lim Ax=-L^{*}(-Ax)=L(Ax)$ elde edilir. Böylece $A\in \; f,c \; _{reg}$ dir. Diğer yandan, her $x\in l_{\infty}$ için $L \;\; Ax \;\; \leq L^{*} \;\; x$ olduğundan, $x\in l_{\infty}$ için $L \;\; Ax \;\; \leq L \;\; x$ sonucuna ulaşırız. Böylece (2.2.2)'nin gerekliliği Teorem 2.2.1'den elde edilir.

(Yeterlilik); A matrisinin kuvvetli regüler olması için gerek ve yeter şart, A'nın regüler ve

$$\sum_{k}\left|a_{nk}-a_{n,k+1}\right|\to 0 \; (n\to\infty)$$

sağlamasıdır. Şimdi teoremin yeterlilik kısmını ispat edelim. $\varepsilon>0$ olmak üzere her $x\in l_{\infty}$ ve her $k\geq 0$ için,

$$\frac{1}{p+1}\sum_{r=k}^{k+p}< L^{*}(x)+\varepsilon \tag{2.2.3}$$

sağlayacak şekilde pozitif bir p sayısı bulunabilir. Lorentz$\left[2\right]$ ispatındaki benzer düşünceyle,

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}x_{k}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}\frac{1}{p+1}\sum_{r=k}^{k+p}x_{r}-\sum_{k=p}^{\infty}\left(\frac{a_{nk}+...+a_{n,k-p}}{p+1}-a_{nk}\right)$$

$$+\sum_{k=0}^{p-1}a_{nk}x_{k}+\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{a_{nk}+...+a_{n,k-p+1}}{p+1}\right)x_{k} \tag{2.2.4}$$

elde edilir. $x\in l_{\infty}$ ve A'nın regülerliği dikkate alındığında (2.2.4) deki son iki toplam $n\to\infty$ için sıfıra gider. Eğer,

$$F_{np}=-\sum_{k=p}^{\infty}\left(\frac{a_{nk}+...+a_{n,k-p}}{p+1}-a_{nk}\right)x_{k}$$

yazılırsa,

$$\left|F_{np}\right| \le \frac{1}{p+1}\sum_{k=p}^{\infty}\left|a_{nk} + ... + a_{n,k-p} - (p+1)a_{nk}\right|\left|x_k\right|$$

$$\le \frac{\|x\|}{p+1}\sum_{r=0}^{p}\sum_{k=p}^{\infty}\left|a_{n,k-r} - a_{nk}\right|$$

$$\le \frac{\|x\|}{p+1}\sum_{r=0}^{p} r\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_{nk} - a_{n,k+1}\right|$$

$$\le \frac{p}{2}\|x\|\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_{nk} - a_{n,k+1}\right|$$

elde edilir. A kuvvetli regüler olduğundan, $\sum_k \left|a_{nk} - a_{n,k+1}\right| \to 0$ olacağından, yukardaki son eşitsizlik sıfır olur.

$$L(Ax) \le \limsup_n \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\left(\frac{x_k + ... + x_{k+p}}{p+1}\right)$$

$$\le \limsup_n \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}^{+}\left(\frac{x_k + ... + x_{k+p}}{p+1}\right) - \limsup_n \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}^{-}\left(\frac{x_k + ... + x_{k+p}}{p+1}\right)$$

yazılabilir. (2.2.3)'ü dikkate aldığımızda

$$L(Ax) \le \ L^*(x) + \varepsilon \ \limsup_n \sum_k \left|a_{nk}\right| + \|x\| \limsup_n \sum_k \ \left|a_{nk}\right| - a_{nk} \qquad (2.2.5)$$

olur. (2.2.5)'de A'nın regülerliği ve (2.2.2) dikkate alındığında $L(Ax) \le L^*(x) + \varepsilon$ olur. ε keyfi olduğundan,

$$L(Ax) \le L^*(x) \quad \text{yani} \quad K - çek(Ax) \subseteq B - çek(x)$$

elde edilirki bu da ispattır.

Teorem 2.2.3. Her $x \in l_\infty$ için, $L^*(Ax) \le L^*(x)$ $B-çek(Ax) \subseteq B-çek(x)$ olması için gerek ve yeter şart, A'nın $f-$regüler ve

$$\lim_n \sup_i \sum_k \left| \frac{1}{n+1} \sum_{r=i}^{i+n} a_{rk} \right| = 1 \tag{2.2.6}$$

olmasıdır[6].

İspat:(Gereklilik); Her $x \in l_\infty$ için, $L^*(Ax) \le L^*(x)$ olsun. Bu durumda Teorem (2.2.1)'in ispatındaki benzer durum ile

$$\ell^*(x) \le \ell^*(Ax) \le L^*(Ax) \le L^*(x)$$

eşitsizliği yazılabilir. $x \in f$ ise $\ell^*(x) = L^*(x) = f-\lim x$ ve $\ell^*(Ax) = L^*(Ax) = f-\lim x$ elde edilir. Buda $A \in (f, f)_{reg}$ olmasını gerektirir. Eğer her k için, $b_{nk}(i) = \frac{1}{n+1}\sum_{r=i}^{i+n} a_{rk}$ ile tanımlanırsa $B = (b_{nk}(i))$ matrisi Lemma 1.2.1'in şartlarını sağlar. Böylece hipotez dikkate alındığında

$$1 \le \lim_n \inf \sup_i \sum_k \left| \frac{1}{n+1} \sum_{r=i}^{i+n} a_{rk} \right|$$

$$\le \lim_n \sup \sup_i \sum_k \left| \frac{1}{n+1} \sum_{r=i}^{i+n} a_{rk} \right|$$

$$= \lim_n \sup \sup_i \sum_k \left(\frac{1}{n+1} \sum_{r=i}^{i+n} a_{rk} \right) y_k \le L^*(y) \le \|y\| \le 1$$

bulunur. Buradan (2.2.6)'nın gerekliliği elde edilir.

(Yeterlilik); (2.2.4)'de a_{nk} ile $b_{nk}(i)$'yi yer değiştirirsek eşitlik korunur. $x \in l_\infty$ ve A'nın regülerliği dikkate alındığında [12]'deki Teorem 4'ün corollary'sindeki a_{nk} 'lı toplamlar $b_{nk}(i)$ 'lı toplamlar ile yer değiştirip $n \to \infty$

(i'de düzgün) limit alındığında 2. ve 3. toplamlar sıfıra gider. Diğer tarafdan $\left|F_{np}\right|$, $a_{nk}(i)$'nın $b_{nk}(i)$ ile yer değiştirmesinden sonra

$$\frac{p}{2}\|x\|\sum_k\left|b_{nk}(i)-b_{n,k+1}(i)\right|=\frac{p}{2}\|x\|\sum_k\left|\frac{1}{n+1}\sum_{r=i}^{i+n} a_{rk}-a_{r,k+1}\right| \tag{2.2.7}$$

ifadesinden büyük değildir.

A matrisi $f-$regüler olduğundan (2.2.7)'deki son toplam sıfıra gider, ($n\to\infty$, i'de düzgün). Böylece (2.2.3) ile

$$L^*(Ax)\leq \lim_n\sup\sup_i\sum_k\left(\frac{1}{n+1}\sum_{r=i}^{i+n}a_{rk}\right)\left(\frac{x_k+.........+x_{k+p}}{p+1}\right)$$

yazılır. (2.2.6) ve A'nın $f-$regülerliği kullanılarak

$$L^*(Ax)\leq L^*(x)+\varepsilon$$

elde edilir. ε keyfi olduğundan

$$L^*(Ax)\leq L^*(x) \text{ yani } B-çek(Ax)\subseteq B-çek(x) \text{ dir.}$$

Teorem 2.2.4. $x\in l_\infty$ ve A kuvvetli regüler matris olsun. $K-çek(Ax)\subseteq B-çek(x)$ olması için gerek ve yeter şart, A'nın bütün sınırlı diziler için, non-negatif kuvvetli regüler B matrisine mutlak denk olmasıdır$[11]$.

İspat:(Yeterlilik); A matrisinin, non-negatif kuvvetli regüler B matrisine mutlak denk olduğundan, her $x\in l_\infty$ için

$$\lim_n \left|(Ax)_n-(Bx)_n\right|=0 \tag{2.2.8}$$

yazılır.Teorem 1.2.8'dan her $x\in l_\infty$ için

$K-çek(Ax)\subseteq K-çek(x)$, ve B matrisinin non-negatif ve kuvvetli regüler olmasından dolayı Teorem 2.2.2'den

$$K-çek(Bx)\subseteq B-çek(x), \tag{2.2.9}$$

yazılır.(2.2.8) sağladığından dolayı ve Teorem 1.2.9'dan

$$K-çek(Ax)=K-çek(Bx) \tag{2.2.10}$$

dir. Böylece (2.2.9) ve (2.2.10)'dan

$$K-çek(Ax)\subseteq B-çek(x)$$

elde edilir.

(Gereklilik); $x\in l_\infty$ ve A kuvvetli regüler matris olsun. Hipotezden

$$K-çek(Ax)\subseteq B-çek(x)\subseteq K-çek(x)$$

yazılır.Böylece, Teorem 1.2.7'den l_∞ üzerinde A ve B mutlak denk olan non-negatif regüler B matrisi mevcut olduğundan,

$$\lim_n \sum |b_{nk}-a_{nk}|=0 \tag{2.2.11}$$

dır. Burada

$$\lim_n \sum |b_{nk}-b_{n,k+1}|=0 \tag{2.2.12}$$

olduğunu gösterebilirsek ispat tamamalanmış olur. Böylece,

$$\sum_k |b_{nk}-b_{n,k+1}|\leq \sum_k |b_{nk}-a_{nk}|+\sum_k |a_{n,k+1}-b_{n,k+1}|+\sum_k |a_{nk}-a_{n,k+1}|$$

$$=c_n^1+c_n^2+c_n^3$$

eşitliğinde (2.2.11)'i kullanarak, $c_n^1\to 0$ ve A'nın kuvvetli regülerliğinden $c_n^3\to 0$ $n\to\infty$ olur. Mutlak denkliğin tanımından

$c_n^2=\sum_k |a_{n,k+1}-b_{n,k+1}|\leq \sum_k |a_{nk}-b_{nk}|\to 0$ $n\to\infty$ yazılır, böylece (2.2.12) sağlamış olur ve buda ispatımızı tamamlar.

BÖLÜM 3

İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE ÇEKİRDEK KAVRAMI

Bu bölümde; bir cümlenin doğal yoğunluğu yardımıyla tanımlanan istatistiksel yakınsaklık kavramı verilmiştir. Ayrıca bir dizinin istatistiksel üst limiti ve istatistiksel alt limiti kavramlarından sonra, bu kavramlar ile adi anlamdaki üst ve alt limitler arasında bulunan ilişki incelendikten sonra istatistiksel yakınsakla ilgili yapılan matris dönüşümleri ve bunlara bağlı olarak çözülen eşitsizlikler sıralanmıştır.

Tanım 3.1. K pozitif tamsayıların bir alt cümlesi olmak üzere $\left| k \leq n : k \in K \right|$ notasyonu K 'nın n ' den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstersin. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| k \leq n : k \in K \right|$$

mevcut ise bu limite K cümlesinin doğal yoğunluğu denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir $[19]$.

K boş veya sonlu bir cümle ise $\delta(K) = 0$ dır. Fakat tersi doğru değildir, yani $\delta(K) = 0$ olup da sonlu olmayan K cümlesi mevcuttur. $\delta(K) = 0$ olan K cümlesine sıfır yoğunluklu cümle denir. Doğal sayıların doğal yoğunluğu 1 dir. $\delta(\mathbb{N}) = 1$ olduğundan her $K \subseteq \mathbb{N}$ için $0 \leq \delta(K) \leq 1$ dir.

Örnek 3.1. $K = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ Doğal sayılar cümlesinin doğal yoğunluğunu bulalım.

$$\left.\begin{array}{l} n=1\Rightarrow \dfrac{1}{n}\left|\; k\le 1: k\in K \;\right| = \dfrac{1}{1} \\[2ex] n=2\Rightarrow \dfrac{1}{n}\left|\; k\le 2: k\in K \;\right| = \dfrac{2}{2} \\[2ex] n=3\Rightarrow \dfrac{1}{n}\left|\; k\le 3: k\in K \;\right| = \dfrac{3}{3} \\ . \\ . \\ . \\ n=n\Rightarrow \dfrac{1}{n}\left|\; k\le n: k\in K \;\right| = \dfrac{n}{n} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \delta(K)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left|\; k\le n : k\in K \;\right| \\[2ex] \delta(K)=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\left\{\dfrac{1}{1},\dfrac{2}{2},\dfrac{3}{3},\dots,\dfrac{n}{n}\right\}\right| \\[2ex] \delta(K)=1 \end{array}$$

Sıfır yoğunluklu cümle tanımından esinlenerek istatistiksel yakınsak dizi tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 3.2. $x=(x_k)$ herhangi bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için,

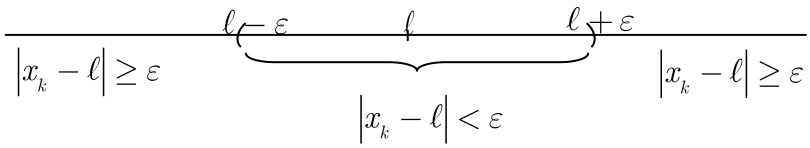
$$\delta\quad k:\left|x_k-\ell\right|\ge\varepsilon\quad =0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi ℓ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st-\lim x=\ell$ şeklinde yazılır$[8]$.

Bir başka ifadeyle $x=(x_k)$ dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon>0$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\; k\le n:\left|x_k-\ell\right|\ge\varepsilon \;\right|=0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi ℓ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st-\lim x=\ell$ ile gösterilir.



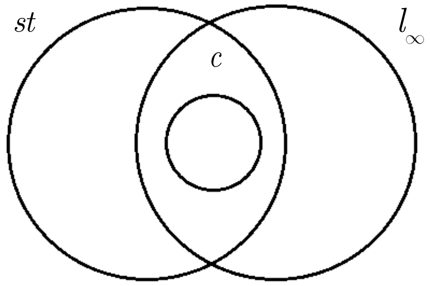
Şu halde, istatistiksel yakınsak diziler uzayı st ile gösterilirken sıfıra istatistiksel yakınsak diziler uzayı st_0 ile gösterilecektir.

$st-\lim x=\ell$ ise, dizinin ℓ'nin ε komşuluğunun dışında kalan terimlerin doğal yoğunluğu sıfırdır. Buna göre yakınsak bir dizide limit noktasının ε komşuluğunun dışında kalan terimler sonlu olduğundan, yakınsak her dizi aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır fakat tersi doğru değildir, yani istatistiksel yakınsak bir dizi yakınsak olmak zorunda değildir. Örneğin,

$$x_k=\begin{cases} k \ , & k=n^2 \\ 0 \ , & k\neq n^2 \end{cases}$$

dizisi sıfıra istatistiksel yakınsak olduğu halde kendisi yakınsak değildir. Bu dizi aynı zamanda sınırlı da değildir. Dolayısıyla sınırlı olmayan bir dizi istatistiksel yakınsak olabilir. Ayrıca sınırlı olup da istatistiksel yakınsak olmayan dizilerde mevcuttur. Örneğin, $x_n=(-1)^n$ dizisi istatistiksel yakınsak değildir ama sınırlı bir dizidir.

İstatistiksel yakınsaklık bilinen yakınsaklıktan daha genel bir kavramdır, yani $c\subset st$ dir.



Teorem 3.1.İstatistiksel yakınsak bir dizinin limiti bir tektir.

İspat : $x=(x_k)$ dizisinin L_1 ve L_2 sayılarına istatistiksel yakınsadığını kabul edelim. O halde her $\varepsilon>0$ verildiğinde en az bir $A\subset\mathbb{N}$ cümlesi ve $n_0(\varepsilon)$ sayısı bulabiliriz öyle ki $\delta(A)=1$ ve her $k>n_0(\varepsilon)$ ve $k\in A$ için $\left|x_k-L_1\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ sağlanır.

Aynı zamanda bir $B \subset \mathbb{N}$ cümlesi ve $n_1(\varepsilon)$ sayısı vardır öyle ki $\delta(B) = 1$ ve her $k > n_1(\varepsilon)$ ve $k \in B$ için $\left|x_k - L_2\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ sağlanır. $n_2(\varepsilon) = max\ \{n_0(\varepsilon), n_1(\varepsilon)\}$ alırsak $\delta\ (A \cap B)\ = 1$ olmak üzere her $k > n_2(\varepsilon)$ ve $k \in A \cap B$ için,

$$\left|L_1 - L_2\right| \leq \left|L_1 - x_k\right| + \left|L_2 - x_k\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

sağlanır. Buradan $\left|L_1 - L_2\right| = 0$ bulunur.Böylece $L_1 = L_2$ olur ki buda ispatımızı tamamlar.

Reel terimli herhangi bir $x = (x_k)$ dizisi verildiğinde;

$$B_x = \{ b \in \mathbb{R} : \delta\ (\{ k : x_k > b \})\ \neq 0 \}$$

ve

$$A_x = \{ a \in \mathbb{R} : \delta\ (\{ k : x_k < a \})\ \neq 0 \}$$

eşitsizliklerinden yararlanarak istatistiksel üst limit ve istatistiksel alt limit tanımları aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 3.3. Reel terimli herhangi bir $x = (x_k)$ dizisinin;

istatistiksel üst limiti (kısaca $st - \limsup$)

$$st - \limsup x = \begin{cases} \sup B_x & , \ B_x \neq \varnothing \\ -\infty & , \ B_x = \varnothing \end{cases}$$

ve istatistiksel alt limit (kısaca $st - \liminf$)

$$st-\liminf x=\begin{cases}\inf A_x & , \ \mathrm{A}_x\neq\varnothing\\ \infty & , \ \mathrm{A}_x=\varnothing\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır $\left[9\right]$.

Örnek3.2. $x=x_k=\begin{cases}k \ , & k \text{ tek kare ise}\\ 2 \ , & k \text{ çift kare ise}\\ 1 \ , & k \text{ tek kare değilse}\\ 0 \ , & k \text{ çift kare değilse}\end{cases}$

dizisi olarak tanımlanırsa; $B_x = -\infty, 1$ ve $A_x = 0, +\infty$ olduğundan $st-\limsup x=\sup B_x=1$ ve $st-\liminf x=\sup A_x=0$ dır.

İstatistiksel alt limit ve istatistiksel üst limitle ilgili, adi anlamdaki üst ve alt limitlere benzer olarak aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 3.2. $st-\limsup x=\beta$ (sonlu) olması için gerek ve yeter şart, her bir $\varepsilon>0$ için,

$$\delta \ k: x_k>\beta-\varepsilon \ \neq 0$$

ve

$$\delta \ k: x_k>\beta+\varepsilon \ =0$$

olmasıdır $\left[9\right]$.

Teorem 3.3. $st-\liminf x=\alpha$ (sonlu) olması için gerek ve yeter şart, her bir $\varepsilon>0$ için,

$$\delta \ k: x_k<\alpha+\varepsilon \ \neq 0$$

ve

$$\delta \ k: x_k<\alpha-\varepsilon \ =0$$

olmasıdır $\left[9\right]$.

Teorem 3.4. Her hangi bir x dizisi için,

$$st-\liminf x \leq st-\limsup x$$

dir $[9]$.

İspat:Eğer $st-\limsup x=-\infty$ durumunu göz önüne alırsak, $B_x=\varnothing$ ve $\mathbb{R}$ 'deki her b için $\delta\{k: x_k>b\}=0$ olur ki, bu da $\delta\{k: x_k\leq b\}=1$ olmasını gerektirir ve $\mathbb{R}$ 'deki her a için, $\delta\{k: x_k<a\}\neq 0$ olur. Böylece $st-\limsup x=-\infty$ olur. $st-\limsup x=+\infty$ durumunda ispata gerek yoktur. Farzedelim ki;

$$\beta=st-\limsup x \text{ (sonlu)}$$

$$\alpha=st-\liminf x \text{ olsun.}$$

$\varepsilon>0$ için, $\beta+\varepsilon\in Ax$, yani $\alpha\leq\beta+\varepsilon$ olduğunu gösterebiliriz. Teorem 3.2.'den $\beta=\operatorname{lub}B_x$ olduğundan, $\delta\left\{k: x_k>\beta+\dfrac{\varepsilon}{2}\right\}=0$ olur.

Böylece, $\delta\left\{k: x_k\leq\beta+\dfrac{\varepsilon}{2}\right\}=1$ anlamına gelir ve $\delta\{k: x_k<\beta+\varepsilon\}=1$ olur, yani $\beta+\varepsilon\in Ax$ dir.

$\alpha=\inf Ax$ tanımından $\alpha\leq\beta+\varepsilon$ elde edilir ki, ε keyfi olduğundan bu bize $\alpha\leq\beta$ eşitsizliğini verir. Teorem 3.4'den ve $st-\limsup$, $st-\liminf$ 'in tanımlarından açık bir şekilde herhangi bir x dizisi için,

$$\liminf x\leq st-\liminf x\leq st-\limsup x\leq\limsup x$$

sonucu elde edilir.

Tanım 3.4. (x_k) reel terimli herhangi bir dizi olsun. Eğer $\delta\{k: |x_k|>B\}=0$ olacak şekilde bir B sayısı varsa, x dizisine istatistiksel sınırlıdır denir $[9]$.

Tanımdan da anlaşılacağı üzere, sınırlı her dizi istatistiksel sınırlıdır, fakat bunun tersi doğru değildir. Örnek 3.2’deki dizi sınırlı olmadığı halde, $\delta\left(\{k : |x_k| > 2\}\right) = 0$ olduğundan istatistiksel sınırlıdır.

Tanım 3.5.(İstatistiksel Çekirdek) x istatistiksel sınırlı bir dizi olmak üzere bu dizinin istatistiksel çekirdeği, $st - \text{çek}(x)$ ile gösterilir ve

$$\left[st - \liminf x,\ st - \limsup x\right]$$

kapalı aralığındadır $[8]$.

x’in istatistiksel sınırlı olmadığı durumlarda ise, $st - \text{çek}(x)$ şu üç durum da karşımıza çıkar;

$$\left[st - \liminf x,\ \infty\right),\quad \left(-\infty,\ \infty\right) \text{ ya da } \left(-\infty,\ st - \limsup x\right] \text{dır.}$$

Buradan,

$$\liminf x \leq st - \liminf x \leq st - \limsup x \leq \limsup x$$

olduğundan

$$st - \text{çek}(x) \subseteq K - \text{çek}(x)$$

dır. Fridy ve Orhan $[21]$ istatistiksel sınırlı kompleks x dizisinde, istatistiksel çekirdeği;

$$st - \text{çek}(x) = \bigcap_{z \in \mathbb{C}} S_x^*(z) \quad \text{şeklinde tanımladılar,burada}$$

$S_x^*(z) = \left\{ w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq st - \limsup_k |x_k - z| \right\}$ ve $K - \text{çek}(Ax) \subseteq st - \text{çek}(x)$ olması için gerek ve yeter şartları belirlediler. Daha sonra Li ve Fridy $[22]$, $st - \text{çek}(Ax) \subseteq K - \text{çek}(x)$ olması için gerek ve yeter şartları elde ettiler.

Teorem 3.5. İstatistiksel sınırlı bir dizinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart;

$$st - \liminf x = st - \limsup x$$

olmasıdır $\left[9\right]$.

İspat: $\alpha = st - \liminf x$ ve $\beta = st - \limsup x$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için, $st - \lim x = L$ olduğunu farzedelim. İstatistiksel yakınsaklık tanımından $\delta \;\; k : \left|x_k - L\right| \geq \varepsilon \;\; = 0$ yazılır ki, bu da $\delta \;\; k : x_k > L + \varepsilon \;\; = 0$ dır. Yani $\beta \leq L$ dir.

Diğer taraftan, $\delta \;\; k : x_k < L - \varepsilon \;\; = 0$ olur ki, bu da $L \leq \alpha$ olmasını gerektirir. Böylece $\beta \leq \alpha$ eşitsizliğini elde edilir ve bu durum Teorem 3.4 ile birleştirilirse $\alpha = \beta$ olur.Tersine olarak, $\alpha = \beta$ ve $L = \alpha$ olduğunu kabul edelim. Eğer $\varepsilon > 0$ ise Teorem 3.2.ve Teorem 3.3.'den

$$\delta\left\{k : x_k > L + \frac{\varepsilon}{2}\right\} = 0 \text{ ve } \delta\left\{k : x_k < L - \frac{\varepsilon}{2}\right\} = 0$$

olur ki bu da $st - \lim x = L$ dir.

Şimdi istatistiksel yakınsak ve sınırlı dizilerin uzayı, $st \cap l_\infty$ ile ilgili bazı matris sınıf karakterizasyonuna ilişkin teoremleri verelim.

Teorem 3.6. $A \in \;\; st \cap l_\infty, c \;\;_{reg}$ olması için gerek ve yeter şart, A'nın regüler ve sıfır yoğunluklu bir $E \subseteq \mathbb{N}$ cümlesi için,

$$\lim_n \sum_{k \in E} \left|a_{nk}\right| = 0$$

olmasıdır $\left[20\right]$.

Teorem 3.7. $A \in \;\; c, st \cap l_\infty \;\;_{reg}$ olması için gerek ve yeter şart,

i) $\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$, (3.1)

ii) $st - \lim_n a_{nk} = 0$ her k için, (3.2)

iii) $st - \lim_n \sum_k a_{nk} = 1$, (3.3)

şartlarının sağlanmasıdır $[15]$.

Teorem 3.8. $A \in (st \cap l_\infty, st \cap l_\infty)_{reg}$ olması için gerek ve yeter şart, (3.1), (3.2)'nin ve sıfır yoğunluklu bir $E \subseteq \mathbb{N}$ cümlesi için,

$$st - \lim_n \sum_{k \in E} |a_{nk}| = 0$$

olmasıdır$[14]$.

Teorem 3.9. $A \in (st \cap l_\infty, f)_{reg}$ olması için gerek ve yeter şart, $A \in (c, f)_{reg}$ ve n'de düzgün olmak üzere,

$$\lim_p \sum_{k \in E} \frac{1}{p+1} \left| \sum_{i=0}^{p} a_{n+i,k} \right| = 0 \qquad (3.4)$$

sağlamasıdır. Burada $E \subseteq \mathbb{N}$ ve $\delta(E) = 0$ dır$[24]$.

İspat:(Gereklilik); $A \in (st \cap l_\infty, f)_{reg}$ olsun. Bu durumda her $x \in st \cap l_\infty$ için, $A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$ dönüşüm dizisi mevcut ve $\in f$ dir. Böylece $c \subset st \cap l_\infty$ olduğundan $A \in (c, f)_{reg}$ dir.

Diğer tarafdan $x \in l_\infty$ için, $z = (z_k)$ dizisini

$$z = \begin{cases} x_k & , \quad k \in E \\ 0 & , \quad k \notin E \end{cases}$$ şeklinde tanımlayalım.

Açık olarak $st-\lim z_k = 0$ dır.

Böylece ;

$$Az = \sum_k a_{nk} z_k = \sum_{k\in E} a_{nk} z_k + \sum_{k\notin E} a_{nk} z_k$$

$$= \sum_{k\in E} a_{nk} x_k$$

elde edilir.

Şimdi B matrisi,

$b_{nk} = \begin{cases} a_{nk} & , \quad k \in E \\ 0 & , \quad k \notin E \end{cases}$ şeklinde tanımlanırsa $B \in (l_\infty, f)$ olacağından, B matrisi $B \in (l_\infty, f)$ sınıfının şartlarını sağlar. Böylece (3.4) elde edilir.

(Yeterlilik); $A \in (c,f)_{reg}$ ve (3.4) sağlansın, $x \in st \cap l_\infty$ ve $st-\lim x = \ell$ olsun.Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için, $E = \{k : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere $\delta(E) = 0$ dır. Şimdi;

$$Ax = \sum_k a_{nk} x_k = \sum_k a_{nk} (x_k - \ell) + \ell \sum_k a_{nk}$$

eşitliğinden $f-\lim$ alınır ve $A \in (c,f)_{reg}$ sınıfının şartlarıda dikkate alınırsa;

$$f-\lim Ax = f-\lim \sum_k a_{nk} (x_k - \ell) + \ell$$

$$= \lim_p \sum_k \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} a_{n+i,k} (x_k - \ell) + \ell$$

eşitliği yazılır.

Diğer taraftan,

$$\left|\sum_{k}\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}a_{n+i,k}\ \ x_k-\ell\ \right|=\left|\sum_{k\in E}\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}a_{n+i,k}\ \ x_k-\ell\ +\sum_{k\notin E}\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}a_{n+i,k}\ \ x_k-\ell\ \right|$$

$$\leq\sum_{k\in E}\left|\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}a_{n+i,k}\right|\left|x_k-\ell\right|+\sum_{k\notin E}\left|\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}a_{n+i,k}\right|\left|x_k-\ell\right|$$

$$\leq\left\|x\right\|\sum_{k\in E}\left|\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}a_{n+i,k}\right|+\varepsilon\sum_{k\notin E}\left|\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}a_{n+i,k}\right|$$

$$\leq\left\|x\right\|\sum_{k\in E}\left|\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}a_{n+i,k}\right|+\varepsilon\left\|A\right\|$$

yazılabileceğinden (3.4) şartı da dikkate alınırsa $f-\lim Ax=\ell$ olur, yani $A\in\ st\cap l_\infty, f\ _{reg}$ dir.

Teorem 3.10. Her $x\in l_\infty$ için, $B-çek(Ax)\subseteq st-çek(x)$ olması için gerek ve yeter şart, $A\in(st\cap l_\infty, f)_{reg}$ ve

$$\lim_{p}\sum_{k}\frac{1}{p+1}\left|\sum_{i=0}^{p}a_{n+i,k}\right|=1 \quad (n\text{ 'ye göre düzgün}) \qquad (3.5)$$

olmasıdır$\left[24\right]$.

İspat:(Gereklilik); Her $x\in l_\infty$ için, $B-çek(Ax)\subseteq st-çek(x)$ yani

$L^*(Ax)\leq st-\limsup x$ olsun bu takdirde,

$-\beta(-x)\leq -L^*(-Ax)\leq L^*(Ax)\leq\beta(x)\leq L(x)$ ve

$st-\liminf x\leq -L^*(-Ax)\leq L^*(Ax)\leq st-\limsup x$ yazılır. Eğer $x\in st\cap l_\infty$ alınırsa, $st-\liminf x=st-\limsup x=st-\lim x$ olacağından,

$st-\lim x\leq -L^*(-Ax)\leq L^*(Ax)\leq st-\lim x$ elde edilir. Böylece

$st-\lim x=-L^{*}(-Ax)=L^{*}(Ax)=f-\lim Ax$ olur ki, bu da $A\in(st\cap l_{\infty},f)_{reg}$ şartını gerektirir. Ayrıca her $x\in l_{\infty}$ için, $\beta(x)\leq L(x)$ olduğundan (3.5) şartının gerekliliği $A\in(c,f)_{reg}$ ve çekirdek teoreminden elde edilir.

(Yeterlilik); $A\in(st\cap l_{\infty},f)_{reg}$ ve (1) sağlansın, $x\in l_{\infty}$ için, $\beta(x)$ sonlu ve her $\varepsilon>0$ için; $E=\{k: x_k>\beta(x)+\varepsilon\}$ denirse $\delta(E)=0$ dır.

Şimdi,

$$a(p,n,k)=\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}a_{n+i,k}$$ olarak tanımlanırsa,

$$\sum_{k}a(p,n,k)=\sum_{k\in E}a(p,n,k)x_k+\sum_{k\notin E}a^{+}(p,n,k)x_k-\sum_{k\notin E}a^{-}(p,n,k)x_k$$

$$\leq\|x\|\sum_{k\in E}\left|a(p,n,k)\right|+\left(\beta(x)+\varepsilon\right)\sum_{k\notin E}\left|a^{+}(p,n,k)\right|+\|x\|\sum_{k\notin E}a^{-}(p,n,k)$$

yazılır. Hipotez dikkate alınıp yukardaki eşitsizliğe $\lim_{p}\sup_{n}$ operatörü uygulanırsa $L^{*}(Ax)\leq\beta(x)+\varepsilon$ elde edilir. ε keyfi olduğundan $L^{*}(Ax)\leq B(x)$ yani,

$$B-\text{çek}(Ax)\leq st-\limsup x$$

elde edilir.

Teorem 3.11. $\|A\|<\infty$ olmak üzere, her $x\in l_{\infty}$ için,

$$st-\text{çek}(Ax)\subseteq B-\text{çek}(x) \tag{3.6}$$

olması için gerek ve yeter şart, $A\in\left(f,st\cap l_{\infty}\right)_{reg}$ ve (3.7)

$$st-\lim_{n}\sum_{k\in E}\left|a_{nk}\right|=1\,,\ \mathbb{N}\setminus E \text{ sonlu}, E\subseteq\mathbb{N} \text{ için} \tag{3.8}$$

şartlarının sağlanmasıdır$\left[16\right]$.

İspat:(Gereklilik); (3.6) sağlasın ve $f-\lim x=\ell$ olsun. Bu durumda

$$\ell \ = B-çek(x) \supseteq st-çek(Ax)$$

yazılır. $\|A\|<\infty$ olduğundan $Ax \in l_\infty$ ve her $x \in l_\infty$ için Ax en az bir tane yığılma noktasına (cluster point) sahiptir. Böylece istatistiksel yığılma noktası $st-çek(Ax)$ 'in içerisinde kalır $[22]$.

Şu halde; $st-çek(Ax) \neq \varnothing$ ve $st-çek(Ax)=\ \ell$ olur. Böylece $st-\lim Ax=f-\lim x=\ell$ yazılır ve $A \in \ (f,st \cap l_\infty)_{reg}$ elde edilir.

(3.8)'in ispatı için $x=(x_k) \in l_\infty$ dizisi $E \subseteq \mathbb{N}$ ve $\mathbb{N} \setminus E$ sonlu olmak üzere

$$x_k=\begin{cases}1\ , & k \in E\\ 0\ , & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa $B-çek(x)=\ 1$ olur.

$Ax \in l_\infty$ olduğundan Ax en az bir tane yığılma noktasına(cluster point) sahiptir. Bu yüzden $[22]$ önerme 4 'den faydalanarak $st-çek(Ax) \neq \varnothing$ elde edilir ki,

$st-çek(Ax) \subseteq B-çek(x)=\ 1$ olur. $st-çek(Ax)=\ 1$ ve bu da Ax'in bir tek istatistiksel yığılma noktası olduğundan

$$st-\lim Ax=1$$

olur ki,

$$st-\lim_n \sum_{k \in E}|a_{nk}|=1\ ,\ \ \mathbb{N} \setminus E \text{ sonlu}$$

elde edilir bu da (3.8) dir.

(Yeterlilik); (3.7) ve (3.8) şartları sağlansın ve $w \in st-çek(Ax)$ olsun. $z \in \mathbb{C}$ için,

$$\left|w-z\right| \le st-\limsup_n \left|z-A_n(x)\right| = st-\limsup_n \left|z-\sum_k a_{nk}x_k\right|$$

$$\le st-\limsup_n \left|\sum_k a_{nk}(z-x_k)\right| + st-\limsup_n \left|z\right|\left|1-\sum_k a_{nk}\right|$$

$$= st-\limsup_n \left|\sum_k a_{nk}(z-x_k)\right|$$

yazılır. Böylece indeks cümlesi $\mathbb{N} = \ n_i$ için $\delta(\mathbb{N}) = 1$ olur ki,

$$\left|w-z\right| \le \limsup_i \left|\sum_k a_{n_ik}(z-x_k)\right| \tag{3.9}$$

dir. Burada (3.7) kullanılarak,

$$\limsup_i \sum a_{n_ik}(z-x_k) = \limsup_i \sum a_{n_ik}(z-t_{pk}(x))$$

elde edilir. Şimdi $\varepsilon > 0$ için, $r = \limsup_p \sup_k \left|t_{pk}(x)-z\right|$ ve

$E = \ k : \left|t_{pk}(x)-z\right| > r+\varepsilon$ alalım, şu halde $\delta(E) = 0$, ve E sonludur.

Böylece,

$$\left|\sum_k a_{n_ik}(z-x_k)\right| = \left|\sum_k a_{n_ik}(z-t_{pk}(x))\right|$$

$$\le \sup_k \left|z-t_{pk}(x)\right| \left|\sum_{k\in E} a_{n_ik}\right| + (r+\varepsilon)\left|\sum_{k\notin E} a_{n_ik}\right|$$

dır.(3.7) ve (3.8)'den $\limsup_i \left|\sum_k a_{n_ik}(z-x_k)\right| \le r+\varepsilon$ ve (3.9)'dan $\left|w-z\right| \le r+\varepsilon$

eşitsizliğini elde ederiz. ε keyfi olduğundan,

$$\left|w-z\right| \le r = \limsup_p \sup_k \left|t_{pk}(x)-z\right|$$

yazılır. Buradan, $w \in B_x^*(z)$ olur ki, $w \in B-\text{çek}(x)$ elde edilir, yani;

$$st - çek(Ax) \subseteq B - çek(x)$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.12. $\|A\| < \infty$ olsun. Her $x \in l_\infty$ için,

$$\limsup Ax \leq st - \limsup x \quad K - çek(Ax) \subseteq \beta(x)$$

olması için gerek ve yeter şart,

i) $A \in \ st \cap l_\infty, c \ _{reg}$,

ii) $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} \left| a_{nk} \right| = 1,$ (3.10)

şartlarının sağlanmasıdır $\left[9 \right]$.

İspat: (Gereklilik);Her $x \in l_\infty$ için $L(Ax) \leq \beta(x)$ olsun. Bu durumda Teorem 2.2.1'deki benzer düşünce ile $-\beta(-x) \leq -\limsup(-Ax) \leq \limsup Ax \leq \beta(x)$ yazılır. Eğer $x \in st \cap l_\infty$ ise $-\beta(-x) = \beta(x) = st - \lim x$ olacağından; $\lim Ax = st - \lim x$ yazılır.Böylece $A \in \ st \cap l_\infty, c \ _{reg}$ olmasını gerektirir.

Diğer yandan, her $x \in l_\infty$ için, $\beta(x) \leq \limsup x$ olduğundan (3.10)'un gerekliliği Maddox $\left[5 \right]$'den elde edilir.

(Yeterlilik); $x \in l_\infty$ olmak üzere $A \in \ st \cap l_\infty, c \ _{reg}$ ve (3.10) sağlasın. Bu takdirde $\beta(x)$ sonlu ve her $\varepsilon > 0$ için, $E = \ k : x_k > \beta(x) + \varepsilon$ denirse $\delta(E) = 0$ dır. Herhangi z reel sayısı için, $z^+ := max \ z, 0$, $z^- := max \ -z, 0$, $\left| z \right| = z^+ + z^-$, $z = z^+ - z^-$ ve $\left| z \right| - z = 2z^-$ tanımlayalım. Böylece sabit pozitif bir m tamsayısı için,

$$(Ax)_n = \sum_{k<m} a_{nk}x_k + \sum_{k\geq m} a_{nk}x_k$$

$$= \sum_{k<m} a_{nk}x_k + \sum_{k\geq m} a_{nk}^{+}x_k - \sum_{k\geq m} a_{nk}^{-}x_k$$

$$\leq \|x\|_\infty \sum_{k<m} \left|a_{nk}\right| + \sum_{\substack{k\geq m\\ k\notin E}} a_{nk}^{+}x_k + \sum_{\substack{k\geq m\\ k\in E}} a_{nk}^{-}x_k + \|x\|_\infty \sum_{k\geq m} \left(\left|a_{nk}\right| - a_{nk}\right)$$

$$\leq \|x\|_\infty \sum_{k<m} \left|a_{nk}\right| + (\beta(x)+\varepsilon)\sum_{\substack{k\geq m\\ k\notin E}} \left|a_{nk}\right| + \|x\|_\infty \sum_{\substack{k\geq m\\ k\in E}} \left|a_{nk}\right| + \|x\|_\infty \sum_{k\geq m} \left(\left|a_{nk}\right| - a_{nk}\right)$$

yazılabilir. Hipotez dikkate alınarak yukarıdaki eşitsizliğe $\limsup_m \sup_n$ operatörü uygulanırsa

$$\limsup (Ax)_n \leq \beta(x) + \varepsilon$$

elde edilir. ε keyfi olduğundan $\limsup (Ax)_n \leq \beta(x)$

yani,

$$L(Ax) \leq \beta(x) \text{ olur.}$$

Teorem 3.13: x dizisi üstten sınırlı ve $\beta = st - \limsup x$'e C_1 toplanabilirse x dizisi β'ya istatistiksel yakınsaktır $[9]$.

İspat : Kabul edelim ki, x dizisi β'ya istatistiksel yakınsamasın, o zaman Teorem 3.5'den $st - \liminf x < \beta$ olur ve $\delta(\{k : x_k < \mu\}) \neq 0$ olacak şekilde bir $\mu < \beta$ sayısı vardır. $K' = \{k : x_k < \mu\}$ alalım, β'nın tanımından her $\varepsilon > 0$ için $\delta(\{k : x_k > \beta + \varepsilon\}) = 0$ olur.

$K'' = \{k : \mu \leq x_k \leq \beta + \varepsilon\}$ ve $K''' = \{k : x_k > \beta + \varepsilon\}$ şeklinde tanımlayalım ve $B = \sup_k x_k < \infty$ alalım. $\delta(K') \neq 0$ olduğundan,

$$\frac{1}{n}\left|K'_n\right| \geq d > 0,$$

olacak şekilde sonsuz tane n sayısı vardır. Ayrıca her bir n için,

$$C_1x \;\; n = \frac{1}{n}\sum_{k\in K'_n} x_k + \frac{1}{n}\sum_{k\in K''_n} x_k + \frac{1}{n}\sum_{k\in K'''_n} x_k$$

$$< \frac{\mu}{n}\left|K'_n\right| + \frac{\beta+\varepsilon}{n}\left|K''_n\right| + \frac{\beta}{n}\left|K'''_n\right|$$

$$= \mu\frac{\left|K'_n\right|}{n} + (\beta+\varepsilon)\left(1-\frac{\left|K'_n\right|}{n}\right) + 0(1)$$

$$\leq \beta - d \;\; \beta - \mu \;\; + \varepsilon \;\; 1 - d \;\; + 0(1)$$

yazılır. ε keyfi olduğundan, $\liminf C_1x \leq \beta - d \;\; \beta - \mu \;\; < \beta$ elde edilir. Böylece x dizisinin β'ye C_1 – toplanabilir olmadığı görülür ki, buda ispatı tamamlar.

Önerme 3.1: $T \in \;\; st(b), f; p$ olması için gerek ve yeter şart,

i) $\sup_n \sum_k \left|t_{nk}\right| < \infty,$

ii) $f - \lim t_{nk} = 0$ her k için,

iii) $f - \lim \sum_k t_{nk} = 1,$

iv) $\lim_r \sum_{k\in K}\left|\frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{r} t_{n+i,k}\right| = 0,$ (n'de düzgün) her K sıfır yoğunluğu için $[11]$.

Teorem 3.14: $T: l_\infty \to l_\infty$ ve $\beta(x) = st - \limsup x$ olmak üzere,

$$L^*(Tx) \leq \beta(x) \quad (\text{her } x \in l_\infty \text{ için}) \qquad (3.11)$$

olması için gerek ve yeter şart,

i) $T \in \ st(b), f; p$,

ii) $\lim_{r} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^{r} t_{n+i,k} \right| = 1$ n 'de düzgün,

olmasıdır 11 .

İspat : $x \in l_{\infty}$ için, (3.11) sağlasın. Bu durumda $Tx \in l_{\infty}$ olacağından

$$-\beta(-x) \leq -L^*(-Tx) \leq L^*(Tx) \leq \beta(x)$$

yazılır. Eğer $x \in st(b)$ ise, $\beta(x) = -\beta(-x)$ dir. Böylece $T \in \ st(b), f$ ve $f - \lim Tx = st - \lim x$ olur ki, (i) ispatlanmış olur. Diğer taraftan, $b_{nk}(i) = \frac{1}{n+1} \sum_{r=i}^{i+n} t_{rk}$ olarak alınırsa, $B = \ b_{nk}(i)$ matrisi Lemma 1.2.1'in şartlarını sağlar. Buradan,

$$\begin{aligned} 1 = \liminf_{n} \sup_{i} \sum_{k} b_{nk}(i) &\leq \liminf_{n} \sup_{i} \sum_{k} |b_{nk}(i)| \\ &\leq \limsup_{n} \sup_{i} \sum_{k} |b_{nk}(i)| \\ &= \limsup_{n} \sup_{i} \sum_{k} b_{nk}(i) x_k, \\ &\leq \beta(x), \\ &\leq \|x\| \leq 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Tersine olarak, (i) ve (ii) sağlansın. $x \in l_{\infty}$ ve $Tx \in l_{\infty}$ olacağından $\beta(x)$ sonludur. Her $\varepsilon > 0$ için, $E = \ k : x_k > \beta(x) + \varepsilon$ olsun. Bu durumda $k \notin E$ ve $x_k \leq \beta(x) + \varepsilon$ için $\delta(E) = 0$ dır. Her hangi z reel sayısı için;

$z^{+} := max\{z,0\}$, $z^{-} := max\{-z,0\}$ ve $|z| = z^{+} + z^{-}$, $z = z^{+} - z^{-}$, $|z| - z = 2z^{-}$ olarak tanımlayalım. Ayrıca,

$$b_{rk}(i) := \frac{1}{r+1}\sum_{n=i}^{i+r} t_{nk} \quad ,$$

$$\left(b_{rk}(i)\right)^{+} := \frac{1}{r+1}\sum_{n=i}^{i+r} t_{nk}^{+} \quad ,$$

$$\left(b_{rk}(i)\right)^{-} := \frac{1}{r+1}\sum_{n=i}^{i+r} t_{nk}^{-} \quad ,$$

olarak tanımlanırsa sabit bir pozitif m tamsayısı için,

$$\frac{1}{r+1}\sum_{n=i}^{i+r}(Tx)_{n} = \sum_{k<m} b_{rk}(i)x_k + \sum_{\substack{k\geq m\\ k\in E}}\left(b_{rk}(i)\right)^{+}x_k + \sum_{\substack{k\geq m\\ k\notin E}}\left(b_{rk}(i)\right)^{+}x_k - \sum_{k\geq m}\left(b_{rk}(i)\right)^{-}x_k$$

$$\leq \|x\|_{\infty}\sum_{k<m}|b_{rk}(i)| + \left(\beta(x)+\varepsilon\right)\sum_{k\geq m}|b_{rk}(i)| + \|x\|_{\infty}\sum_{k\geq m}|b_{rk}(i)| + \|x\|_{\infty}\sum_{k\geq m}\left(|b_{rk}(i)| - b_{rk}(i)\right)$$

yazılır. Hipotez dikkate alınıp, $\lim_{r}\sup\sup_{i}$ oparatörü uygulanır ve Önerme 3.1'de göz önüne alınırsa;

$$L^{*}(Tx) \leq \beta(x) + \varepsilon$$

elde edilir. ε keyfi olduğundan,

$$L^{*}(Tx) \leq \beta(x)$$

olur. Buda ispatı tamamlar.

KAYNAKLAR

[1] Toeplitz, O. (1911). Uber allgomeine lineare Mittelbuldingen. *Prace Matematyczno-Fizyczne*.**22** , 113-119.

[2] Lorentz, G.G. (1948). A contribution to the theory of divergent sequences.*Acta – Mathematica*.**80**, 167-190.

[3] King, J.P. (1972). Almost summable sequences.*Proceedings of the American Mathematical Society*.**26**, 75-83.

[4] Cooke, R.G. 1950. Infinite matrices and sequence spaces. London:*Macmillan Company*.

[5] Maddox, I. J. (1979). Some analogues of Knopp's core theorem. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*.**2**, 605-614.

[6] Orhan, C. (1990). Sublinear functionals and Knopp's core theorem.*International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*.**3**, 461-468.

[7] Das, G. (1987). Sublinear functionals and a class of concervative matrices. *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica*.**15**, 89-106.

[8] Fast, H. (1951).Surla convergence statistique. Colog. Math.**2**, 241-244.

[9] Fridy, J. and Orhan, C. (1997). Statistical limit superior and limit inferior. *Proc. Amer. Math. Soc.* **125**, 3625-3631.

[10] Maddox, I. J. 1970. Elements of functional analysis. Cambridge: C.University Press.

[11] Orhan, C. and Yardımcı, Ş. (2004). Banach and istatistical cores of bounded sequences. *Czechoslovak Mathematical Journal*.**54**, 65-72.

[12] Duran, J. E. (1972). Infinite matrices and almost convergence.*Mathematische Zeitschrift*.**128**, 75-83.

[13] Choudhary, B. and Nanda, S. 1989. Functional analysis with applications. New York, Chichester, Brisbone, Toronto, Singapore: John Wiley and Sons Inc.

[14] Kolk, E. (1993). Matrix summability of statistically convergent sequences. *Analysis*.**13**, 77-83.

[15] Kolk, E. (1996). Matrix maps into the space of statistically convergent bounded sequences. *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.***45**, 187-192.

[16] Mursaleen, M. and Edely, H.H.O. (2003). Statistically strongly regular matrices and some core theorems. *Int. Journal of Math.and Math.Science.***18**, 1145-1153.

[17] Banach, S. (1932).*Théorie des opérations linéaries*. Warsaw

[18] Agnew, R.P. (1949). Abel transforms and partial sums of Tauberian series. *Annals of Math.***50**, 110-117.

[19] Niven, I., Zuekerroan, H.S. and Montgororey, H. 1991. An introduction to the theory of numbers. Fifth edition, New York: John Wiley and Sons Inc.

[20] Maddox, I. J. (1974). Steinhaus type theorems for summability matrices.*Proc. Amer. Math. Soc.* **45**, 209-213.

[21] Fridy, J. and Orhan, C. (1997). Statistical core theorems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.***208**, 520-527.

[22] Li, J. and Fridy, J.(2000). Matrix transformations of statistical cores of complex sequences.*Analysis*.**20**, 15-34.

[23] Simons, S.(1969). Banach limits, infinite matrices and sublinear functionals. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.***26**, 640-655.

[24] Coşkun, H., Çakan, C. and Mursaleen (2003). On the statistical and $\sigma -$cores. *Studia Mathematica*.154(1).