

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK SALINIMLI İNTEGRALLER İÇİN LEVİN
TİPİ METOTLAR

MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

EMİNE TAN

TEMMUZ 2012

TEMMUZ,2012

Yüksek Lisans Tezi– Matematik Bölümü

EMİNE TAN

Yüksek Salınlı İntegraller için Levin Tipi Metotlar

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK

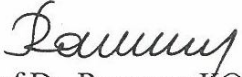
Emine TAN

Temmuz 2012

©2012 [Emine Tan].


T.C.
GAZIANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Yüksek Salınlı İntegraller için Levin Tipi Metotlar
Öğrencinin, Adı Soyadı: Emine TAN
Tez Savunma Tarihi: 09.07.2012
Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

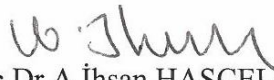

Prof. Dr. Ramazan KOÇ

FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylıyorum.


Prof. Dr. Adil KILIÇ
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımda okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.


Doç. Dr. A. İhsan HASÇELİK
Tez Danışmanı

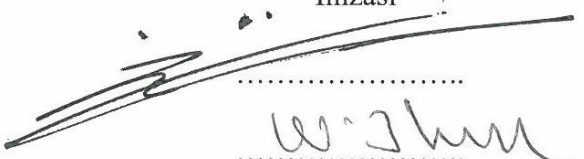
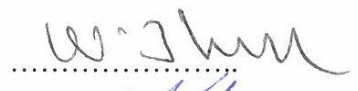

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. İbrahim GÜZELBEY

Doç. Dr. A. İhsan HASÇELİK

Yrd. Doç. Dr. Abdullah KABLAN

İmzası




İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Emine Tan

ABSTRACT

LEVİN-TYPE METHODS FOR HIGHLY OSCILLATORY INTEGRALS

TAN, Emine

M. Sc. in Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ali İhsan HASÇELİK

July 2012

41 page

The quadrature methods (Filon, Levin, Asymptotic) to compute highly oscillatory integrals of the form

$$I[f] = \int_a^b f(x)e^{i\omega g(x)} dx \quad (A)$$

are investigated, where ω is given positive number, $f(x)$ ve $g(x)$ are sufficiently smooth functions on the interval $[a, b]$. It is known that for small ω the methods based on asymptotic expansions don't converge to the integral value of the form (A). Filon or Filon-type methods, on the other hand, require the computation of moments $\mu_k = I[x^k]$ analytically, but this is not always possible. Unlike Filon-type methods, Levin or Levin-type methods do not require the computation of the moments.

In this study, having studied Levin and Levin-type methods which are applied to high oscillatory integrals, we specified why Levin and Levin-type methods are used. Among the methods applied to high oscillatory integrals, Levin-type methods is known to be more common and be applied more easily. But when this method is applied to integrals of the form (A), an algebraic linear system (e.g, $Ac = f$) occurs. The condition number of coefficient matrix of this system is sometimes too great and therefore, the solution of the system gets very difficult. For the solution of this system, truncated singular value decomposition was used and obtained results were compared.

Key Words: Levin-type methods, TSVD method.

ÖZ

YÜKSEK SALINIMLI İNTEGRALLER İÇİN LEVIN TİPİ METOTLAR

TAN, Emine
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK
Temmuz 2012
41 sayfa

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde yeterince türevlenebilir fonksiyonlar ve ω pozitif sayı olmak üzere

$$I[f] = \int_a^b f(x)e^{i\omega g(x)} dx \quad (A)$$

formundaki integralleri hesaplamak için Levin-tipi, Filon-tipi ve Asimptotik açılıma dayalı metotlar incelenmiştir. Ancak (A) tipindeki salınımlı integrallerde küçük frekans değerleri için asimptotik açılıma dayalı metotların yakınsamadığı daha önceki çalışmalarda görülmüştür. Filon metodunda da momentlerin kolayca hesaplanabiliyor olması gerekir. Ancak genel bir g fonksiyonu için bu her zaman mümkün değildir. Filon yönteminin aksine Levin-tipi metotlar moment hesabı gerektirmez.

Bu çalışmada yüksek salınımlı integrallere uygulanan Levin ve Levin-tipi metotlar incelenerek hangi amaçla kullanıldığı belirtilmiştir. Yüksek salınımlı integrallere uygulanan metodlar arasında Levin tipi metodların daha genel ve daha kolay uygulanabildiği bilinmektedir. Ancak, bu metot (A) tipindeki integrallere uygulandığında bir sistem ($Ac = f$ gibi) oluşur. Bu sistemin katsayı matrisinin kondisyon (koşul) sayısı bazen çok büyük olmakta ve dolayısıyla sistemin çözümü zorlaşmaktadır. Bu sistemin çözümü için Kesilmiş tekil değer ayrışımı (TSVD) kullanılmış ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Levin-tipi metotlar, TSVD yöntemi.

Çok kıymetli annem ve babama

İthafen ...

TEŞEKKÜR

Bu alıŐma sűresince tűm bilgilerini benimle paylaŐmaktan kaçınmayan, her tűrlű konuda desteęini benden esirgemeyen ve tezimde bűyűk emeęi olan danıŐman hocam Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK' e ve tűm aileme sonsuz minnet ve teŐekkűrlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ABSTRACT.....	v
ÖZ.....	vi
İTHAF SAYFASI	vii
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER.....	ix
TABLolar LİSTESİ	xi
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xii
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL İNTEGRASTON METOTLARI	3
2.1 Nümerik İntegrasyon.....	3
2.1.1 Mertebe	3
2.1.2 Newton-Cotes formülleri.....	4
2.1.3 Gauss İntegrasyon kuralları.....	5
3. YÜKSEK SALINIMLI İNTEGRALLER İÇİN METOTLAR	8
3.1 $g'(x) \neq 0$ Olması Durumu	8
3.1.1 Asimptotik metot.....	8
3.1.2 Filon metodu.....	9
3.1.3 Levin ve Levin-Tipi metotlar.....	11
3.1.4 Evans, Chung ve Webster Metotları.....	17
3.2 $g'(x) = 0$ Olması Durumu.....	18
4. $(Ac = f)$ ' NİN ÇÖZÜMÜ İÇİN YÖNTEMLER.....	22
4.1 Krylov Uzayları.....	22
4.1.1 Arnoldi Metodu.....	23
4.1.2 Lanczos Metodu.....	24
4.1.3 Genelleştirilmiş minimum residual (artık) metod (GMRES).....	25
4.2 Tekil değer ayrışımı (SVD).....	27
4.2.1 Bir matrisin koşul(kondisyon) sayısının hesaplanması.....	29

4.3 Kesilmiş Değer Ayrışımı (TSVD).....	29
5. UYGULAMALAR VE NÜMERİK SONUÇLAR	31
5.1 Nümerik Örnekler	31
6. SONUÇLAR.....	39
KAYNAKLAR.....	40

TABLolar LİSTESİ

SAYFA

Tablo 2.1.3. Bazı ağırlık fonksiyonları ile ilgili ortogonal polinomlar	6
Tablo 5.1.1. Bir kesme yaptığımızda kesilmiş tekil değer ayrışımı ve lineer solve'nin asimptotik hatasının karşılaştırılması	31
Tablo 5.1.2. İki kesme yaptığımızda kesilmiş tekil değer ve lineer solve'nin asimptotik hatasının karşılaştırılması.....	32
Tablo 5.2. Kesilmiş tekil değer ayrışımı ve lineer solve'nin asimptotik hatasının karşılaştırılması.....	32
Tablo 5.3. Artan ω değerleri için kondisyon (koşul) sayısı.....	34
Tablo 5.4. Artan ω değerleri kesilmiş tekil değer ayrışımı (TSVD) ve lineer solve yönteminin çözümlerinin karşılaştırılması.....	36

ŞEKİLLER LİSTESİ

SAYFA

- Şekil 2.1.** $f(x) = \exp(x) \cos(100x)$ ' in $0 \leq x \leq 1$ için şekli.....7
- Şekil 5.1.** Artan ω değerleri için kesilmiş tekil değer ayrışımı ve lineer solve' nin asimptotik hatasının şekli.....33
- Şekil 5.2.** Uçlardaki türevi artırdığımızda Levin-tipi metotlarının logaritmik hatasının şekli.....34
- Şekil 5.3.** Artan integrasyon noktalarına göre Levin-tipi metotların asimptotik hatasının şekli.....35
- Şekil 5.4a.** Levin-tipi metotla hesaplanmasıyla elde edilen asimptotik hatasının şekli.....36
- Şekil 5.4b.** Lineer solve yöntemiyle hesaplanmasıyla elde edilen asimptotik hatasının şekli.....36
- Şekil 5.4c.** Artan polinom derecesine göre logaritmik kondisyon (koşul) sayısının şekli.....37
- Şekil 5.5.** Artan türev değerleri için logaritmik asimptotik hatasının şekli.....38

BÖLÜM 1

GİRİŞ

İntegrandı $f(x) \cdot \exp(i\omega g(x))$ tipinde olan yüksek salınımlı integrallere çekirdek kimyası, elektrodinamik, akışkanlar mekaniği, fizik ve mühendislik alanlarında sıkça rastlanmaktadır. Bu alanlarda bazı özel fonksiyonlar yüksek salınımlı integrallerle gösterilir. Örneğin;

- Airy fonksiyonları

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos((t^3/3) + xt) dt$$

- Bessel ve Hankel fonksiyonları

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - x \sin t) dt$$

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x \sin t - nt) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [e^{nt} + (-1)^n e^{-nt}] e^{-x \sin t} dt$$

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x)$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x)$$

- Hata fonksiyonu (Z kompleks sayısı için)

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

şeklindedir.

$\omega \gg 1$, f ve g , $[a, b]$ integrasyon aralığı üzerinde yeterince düzgün olduğunda integralin doğru hesaplanmasında etkili integrasyon kuralları olmasına rağmen $\omega \approx 1$ ve g , $[a, b]$ üzerinde tekilliğe sahip olduğunda bu kurallar yeterince doğru sonuç vermezler [4,11,26].

Genelde integrasyon aralığı sınırlı iken, $\omega \gg 1$ büyük bir sabit olduğunda $f(x) \cdot \exp(i\omega g(x))$ formundaki yüksek salınımlı integrallerin hesabı için integrasyon metotları vardır. Bu metotlar

- Levin-tipi metotlar
- Filon-tipi metotlar
- Asimptotik metotlardır.

Üçüncü bölümde bu metotlara yer verilmiştir. Ancak bu metotlardan asimptotik metot sadece integrasyon aralığının uç noktalarında f ve g fonksiyonlarının değerlerini kullanıyor. Ayrıca $\omega \approx 1$ iken bu metotlar bahsedilen integrale yaklaşım için uygun değildir. Filon metodunda momentlerin kolayca hesaplanabiliyor olması isteniyor. Ancak genel bir g için moment hesaplanamaz. Filon metodunun dezavantajı karşımıza zor momentlerin çıkabilme ihtimalidir.

Filon yönteminin aksine Levin yöntemi genel g fonksiyonlu salınlı integralleri uygun şekilde çözebilir. Ancak, bu metot (A) tipindeki integrallere uygulandığında bir sistem ($Ac = f$ gibi) oluşur. Bu sistemin katsayı matrisinin kondisyon (koşul) sayısı bazen çok büyük olmakta ve dolayısıyla sistemin çözümü zorlaşmaktadır.

Bu lineer sistemin çözümü için bölüm 4' te bazı yöntemler tanımlanmıştır.

- Genelleştirilmiş minimum residual (artık) yöntemi (GMRES)
- Tekil değer ayrışımı (SVD)
- Kesilmiş tekil değer ayrışımı (TSVD)

Dördüncü bölümde $Ac = f$ sistemin çözümü için kesilmiş tekil değer ayrışımı yöntemi tanımlanmıştır. Kesilmiş tekil değer ayrışımı (TSVD)' de sıfıra yakın tekil değerler atılarak sistem stabilize ediliyor. Levin-tipi metotlara kesilmiş tekil değer ayrışımı uygulandığında elde edilen sonuçlar A.I.Hasçelik tarafından geliştirilen mathematica programında karşılaştırılmıştır.

Beşinci bölümde bahsedilen sistem çözümü ile ilgili nümerik sonuçlar verilmiştir. Kesilmiş tekil değer ayrışımında son tekil değer kesildiğinde sistemin kondisyon sayısının iyileştiği ve lineer solve ile karşılaştırıldığında iyi netice verdiği görülmüştür. Ancak sondan iki ya da daha fazla tekil değer kesildiğinde kondisyon sayısı iyileşmesini rağmen lineer solve ile karşılaştırıldığında sonuçların iyi olmadığı gözlenmiştir [7,8,9]. Bu durum Örnek 5.1' de verilmiştir. Ama nümerik sonuçlarda gözlenmiştir ki genelde sistemin son tekil değeri çok küçük olmakta sondan iki önceki tekil değeri yaklaşık olarak 1' den büyüktür. Sistemin kötü koşullu olmasına son tekil değer neden olmaktadır [7,8,9]. Bu durum Örnek 5.6' de verilmiştir. Bu çalışmada Kesilmiş tekil değer ayrışımı (TSVD)' de son tekil kesilerek sonuçlar lineer solve yöntemiyle karşılaştırılmıştır.

BÖLÜM 2

GENEL İNTEGRASYON KURALLARI

2.1 Nümerik İntegrasyon

Nümerik integrasyon metotları

$$I[f] = \int_a^b f(x).dx \quad (2.1)$$

şeklinde verilen integralin değerini yaklaşık ya da tam olarak hesaplamaya yarayan metotlardır.

$I_y[f]$ verilen bir integralin herhangi bir nümerik metot kullanılarak elde edilen yaklaşık değerini gösterirse bu metotla ilgili integrasyon hatası

$$E[f] = I_y[f] - I[f] = I_y[f] - \int_a^b f(x).dx \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.1 Mertebe

$I_y[f]$, verilen integralin herhangi bir metot kullanılarak elde edilen yaklaşık değerini göstermek üzere bu metot ile ilgili integrasyon hatası (2.2)' de tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.1.1: Eğer N her $P \in \pi_N$ için $E(P) = 0$ şartını sağlayan en büyük pozitif tamsayı ise I_y integrasyon metodunun polinomsal mertebesinin ya da derecesinin N ' ye eşit olduğu söylenir. Burada π_N derecesi $(N+1)$ ' den düşük tüm polinomların kümesini gösterir.

Metotların yakınsama mertebelerinin belirlenmesinde aşağıdaki tanım önemli rol oynar.

Tanım 2.1.1.2: Eğer $|x-a|$ yeteri kadar küçük olduğu zaman

$$|f(x)| \leq K |g(x)| \quad (2.3)$$

şartını sağlayan bir $0 \leq K < \infty$ sayısı varsa bu durumda

$$x \rightarrow a \text{ için } f(x) = O(g(x)) \quad (2.4)$$

dir. Bu tanım kabaca

$$x \rightarrow a \Rightarrow f(x) = O(g(x)) \Leftrightarrow \exists K < \infty \ni \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = K \quad (2.5)$$

şeklinde ifade edilir. $K = 0$ ise bu durumda $x \rightarrow a$ iken $f(x) = o(g(x))$ olduğu söylenir.

Nümerik integrasyon metotları $I[f] = \int_a^b f(x) dx$ şeklinde verilen bir integralin değerini yaklaşık yada tam olarak hesaplamaya yarayan metotlardır. Nümerik integrasyon metotları genel olarak,

$$I[f] = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^{m_i} w_{ik} f^{(k)}(x_i) = I_y[f] \quad (2.6)$$

biçiminde ifade edilir. $x_i \in \square$ sayılarına integrasyon noktaları, $w_{ik} \in \square$ sayılarına da integrasyon metotlarının ağırlıkları denir.

Tanım 2.1.1.3: (2.6) ile verilen $I_y[f]$ integrasyon metodunun integrasyon noktaları

$\{x_i \in [a, b], i = 0, 1, \dots, m\}$ ve $h = \max_i |x_{i+1} - x_i|$ olsun. Eğer her $f \in C^M[a, b]$,

$$M = \max \{m_i | 0 \leq i \leq m\}$$

için

$$E(f) = I_y(f) - I(f) = O(h^p) \quad (2.7)$$

şartını sağlayan en büyük değer p ise I_y integrasyon metodunun yakınsama mertebesi p ' dir [1].

2.1.2 Newton –Cotes Formülleri

Newton-Cotes formüllerinde $[a, b]$ aralığı n eşit parçaya bölünerek elde edilen

$$x_i = a + ih, i = 0, \dots, n, h = \frac{b-a}{n} \quad (2.8)$$

apsis değerleri kullanılarak

$$P_n(x_i) = f_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.9)$$

şartlarını sağlayan

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f_i, L_i(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \quad (2.10)$$

interpolasyon polinomunun integrali alınarak orijinal integrale yaklaşık bir değer elde edilir:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx = \sum_{i=0}^n f_i \int_a^b L_i(x)dx \quad (2.11)$$

eşitliğin sağ tarafındaki integralde

$$x = a + ht = a + \frac{b-a}{n}t$$

değişken değişikliği yapılırsa

$$L_i(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{t - k}{i - k} = \varphi_i(t) \quad (2.12)$$

ve $dx = h.dt$ olacağından (2.11) ifadesi

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n f_i \int_a^b L_i(x)dx = h \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_0^n \varphi_i(t)dt \quad (2.13)$$

biçiminde yazılabilir. Bu şekilde elde edilen

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \{ \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n) \} \quad (2.14)$$

$$\alpha_i = \int_0^n \varphi_i(t)dt = \int_0^n \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{t - k}{i - k} dt \quad (2.15)$$

integrasyon metoduna n -inci dereceden (kapalı) Newton –Cotes formülü denir.

2.1.3: Gauss İntegrasyon Kuralları

$[a, b]$ aralığında $W(x)$ negatif olmayan ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$I[f] = \int_a^b W(x)f(x)dx \quad (2.16)$$

formundaki integrali düşünelim. $[a, b]$ aralığı sonlu, yarı sonlu ya da sonsuz olabilir.

Ağırlık fonksiyonu ;

- $W(x) \geq 0$, $[a, b]$ sonlu ya da sonsuz aralıkta ölçülebilir.
- Bütün momentler $\mu_k = \int_a^b x^k W(x)dx$, $k = 0, 1, \dots$, var ve sınırlıdır.
- $[a, b]$ aralığında negatif olmayan $P(x)$ polinomları için

$$\int_a^b W(x)P(x)dx = 0 \text{ ise } P(x) \equiv 0$$

şartları sağlasın.

Tablo 2.1.3’ de pratikte çok sık kullanılan ağırlık fonksiyonları ile ilgili ortogonal polinomlar verilmiştir.

Tablo 2.1.3. Bazı Ağırlık Fonksiyonları ile İlgili Ortogonal Polinomlar

$[a, b]$	Ağırlık Fonksiyonları	Ortogonal Polinomlar
$[-1,1]$	$W(x) \equiv 1$	Legendre polinomları
$[-1,1]$	$W(x) \equiv (1-x^2)^{-1/2}$	Chebyshev polinomları
$[0, \infty]$	$W(x) \equiv e^{-x}$	Laguerre Polinomları
$[-\infty, \infty]$	$W(x) \equiv e^{-x^2}$	Hermite polinomları

n - nokta Gauss integrasyon metodu

$$Q_n^G [f] = \sum_{k=1}^n w_{nk} f(x_{nk}) \quad (2.17)$$

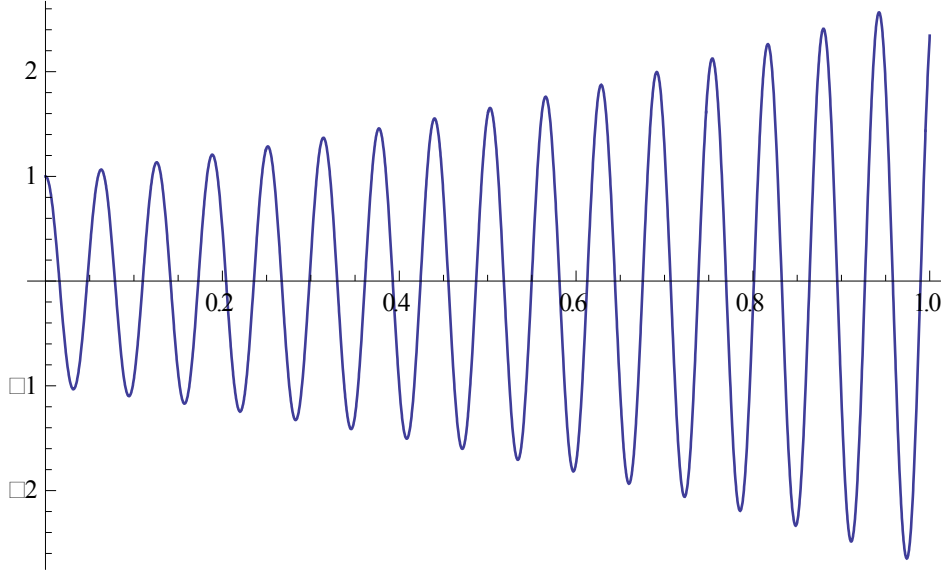
şeklinde ifade edilir. Gauss integrasyon metodunun yakınsama mertebesi $(2n-1)$ ’ dir. n -nokta gauss integrasyon metodunun kökleri x_{nk} integrasyon noktaları, π_n n – inci ortogonal polinomun kökleridir. Pratikte, özellikle büyük n değerleri için integrasyon noktaları ve w_{nk} ağırlıkları n – inci dereceden jacobı matrisi olarak bilinen

$$J_n = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha_{n-1} & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ 0 & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

üç köşegenli matrisi ile hesaplanır. Bu matrisin özdeğerleri n – nokta Gauss integrasyon metodunun noktalarıdır. $\beta_0 = \mu_0$ ve $v_{k,1}$, x_{nk} özdeğerlerine karşılık gelen normalize edilmiş özvektörlerin birinci bileşenlerini olmak üzere $w_{nk} = \beta_0(v_{k,1})^2$ ile bulunur.

α_k ve β_k yineleme katsayıları Chebyshev algoritması ile hesaplanır. Chebyshev algoritması için bakınız [1].

Ancak integrandı $f(x).exp(i\omega g(x))$ şeklinde olan integrallerin; yukarıda tanımladığımız Newton-Cotes, Gauss inegrasyon, Clenshaw-Curtis gibi geleneksel integrasyon metotları ile, kabul edilebilir sayıda nokta kullanarak, yeterli duyarlılıkta hesaplanması mümkün değildir. Bu şekildeki integrallerin hesaplanması için bazı yöntemler bölüm 3' te verilmiştir. Aşağıda bu şekildeki integrallere bir örnek verilmiştir.



Şekil 2.1. $f(x) = \exp(x) \cos(100x)$ ' in $0 \leq x \leq 1$ İçin Şekli

Bu integralinin genel integrasyon yöntemleri ile yeterli duyarlılıkta hesaplanması mümkün değildir. Bu integralin hesaplanması bölüm 5' te verilmiştir.

BÖLÜM 3

YÜKSEK SALINIMLI İNTEGRALLER İÇİN METOTLAR

Trigonometrik tipteki bir yüksek salınımlı integral $f, g \in C[a, b]$ ve $\omega \gg 1$ için

$$I[f] = \int_a^b f(x) e^{i\omega g(x)} dx \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Bu bölümde bazı temel kavramlar tanımlanarak yukarıda verilen yüksek salınımlı integrallerin hesabı için integrasyon metotları verilecektir. $a \leq x \leq b$ için $g'(x) \neq 0$ ve $g'(x) = 0$ durumları ayrı ayrı incelenecektir. Ancak bu çalışmada sadece $g'(x) \neq 0$ durumu için çalışmalar yapılmıştır.

3.1 $g'(x) \neq 0$ Olması Durumu

3.1.1 Asimptotik Metot

Asimptotik metotlarda f ve g fonksiyonlarının $[a, b]$ üzerinde yeterince türevlenebildiği düşünülecektir. Bu metotta integrasyon aralığının uç noktalarında f ve g fonksiyonlarının değerleri kullanılır.

$$I[f] = \int_a^b f(x) e^{i\omega g(x)} dx$$

integrali

$$I[f] = \int_a^b f(x) \frac{1}{i\omega g'(x)} \frac{d}{dx} (e^{i\omega g(x)}) dx$$

şeklinde yazılabilir. Kısmi integrasyonla

$$I[f] = \frac{1}{i\omega} \left[\frac{f(x)}{g'(x)} e^{i\omega g(x)} \right]_a^b - \frac{1}{i\omega} \int_a^b \frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g'(x)} \right] e^{i\omega g(x)} dx \quad (3.2)$$

elde edilir. $Q^A[f]$,

$$\frac{1}{i\omega} \left[\frac{f(x)}{g'(x)} e^{i\omega g(x)} \right]_a^b$$

şeklinde tanımlanırsa

$$I[f] = Q^A[f] - \frac{1}{i\omega} I \left[\frac{d}{dx} \frac{f}{g'} \right] \quad (3.3)$$

$I[f]$ 'ye $Q^A[f]$ ile yaklaşırsak integrale $O(\omega^{-2})$ asimptotik hata ile yaklaşmış oluruz. Bu metodun asimptotik açılımı

$$Q_s^A[f] = - \sum_{k=1}^s \frac{1}{(-i\omega)^k} \{ \sigma_k[f](b) e^{i\omega g(b)} - \sigma_k[f](a) e^{i\omega g(a)} \} \quad (3.4)$$

$$\sigma_1[f](x) = \frac{f(x)}{g'(x)}, \quad \sigma_{k+1}[f](x) = \frac{\sigma_k[f]'(x)}{g'(x)} \quad (3.5)$$

şeklinindedir. Asimptotik hata $\omega \rightarrow \infty$ için

$$I[f] - Q_s^A[f] \square O(\omega^{-s-1}) \quad (3.6)$$

olarak verilir. Asimptotik metotların hatası, $\omega \rightarrow \infty$ iken $O(\omega^{-s-1})$ olduğu için $\omega \approx 1$ iken bu metotlar bahsedilen integrale yaklaşım için uygun değildir [4,5,12]. Ayrıca asimptotik metotta araya nokta koyduğumuzda durum değişmez. Çünkü asimptotik metotta sadece uç noktalarda değerleri hesaplanıyor.

Sonuç 3.1.1.1: Verilen pozitif s tamsayıları için

$0 = f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = \dots = f^{(s-1)}(a) = f^{(s-1)}(b)$ olduğunu varsayalım. Hatta f ω 'ya bağlı alınarak $\{f, f', \dots, f^{(s+1)}\}$ kümesindeki her fonksiyonun, bazı sabit n 'ler için asimptotik hatası $O(\omega^{-n})$ olsun. O zaman $\omega \rightarrow \infty$ iken,

$$I[f] \square O(\omega^{-n-s-1})$$

olur [4,5,12].

3.1.2 Filon Metodu

Filon- tipi metotta, f fonksiyonu $P_n(x)$ interpolasyon polinomuyla (Hermite-Tipi) yer değiştirir.

$$I[f] = \int_a^b f(x) e^{i\omega g(x)} dx$$

integralinde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$ apsis noktalarına karşılık gelen f fonksiyonunun interpolasyon polinomu $P_n(x)$ olsun. Bu durumda Filon metodu,

$$I[f] = \int_a^b P_n(x) e^{i\omega g(x)} dx \quad (3.7)$$

şeklindedir.

$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ ifadesi (3.7)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} Q_n^F[f] &= \int_a^b \sum_{k=0}^n c_k x^k e^{i\omega g(x)} dx \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \underbrace{\int_a^b x^k e^{i\omega g(x)} dx}_{\mu_k(\text{momentler})} \end{aligned}$$

olur. Filon metodunda momentlerin kolayca hesaplanabiliyor olması isteniyor. Ancak bu her zaman mümkün değildir. Filon metodunun dezavantajı karşımıza zor momentlerin çıkabilme ihtimalidir. Filon metodunda asimptotik hata $\omega \rightarrow \infty$ için $O(\omega^{-s-1})$ 'dir [4,5,12,16].

Teorem 3.1.2.1: s bir pozitif tamsayı olsun, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_\eta = b$ olmak üzere $\{x_k\}_0^\eta$, integrasyon noktalarının kümesi ve $\{m_k\}_0^\eta$, $m_0, m_\eta \geq s$ iken bu integrasyon noktalarına bağlı çoklukların kümesi olsun. Her $0 \leq k \leq \eta$ tamsayısı için

$$\begin{aligned} v(x_k) &= f(x_k), \\ v'(x_k) &= f'(x_k), \\ &\vdots \\ v^{(m_k-1)}(x_k) &= f^{(m_k-1)}(x_k), \end{aligned}$$

eşitsizlik sisteminin çözümünün $n = \sum_{k=0}^{\eta} m_k - 1$ olmak üzere

$v(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ olduğunu varsayalım. O zaman $Q^F[f] \equiv I[v] = \sum_{k=0}^n c_k I[x^k]$

olduğunda

$$I[f] - Q^F[f] = O(\omega^{-s-1})$$

olur [5,12]. Bu yöntemde bazen genel bir g için moment hesaplanamaz. Bu yöntemin dezavantajı karşımıza zor momentlerin çıkmasıdır.

3.1.3 Levin Metodu

Levin tipi metotlarda f ve g fonksiyonlarının $[a, b]$ üzerinde yeterince türevlenebildiği düşünülecektir. (3.1) şeklindeki integrallerin hesaplanması için bu metotta

$$\frac{d}{dx} [F(x)e^{i\omega g(x)}] = f(x)e^{i\omega g(x)} \quad (3.8)$$

olacak şekilde bir $F(x)$ fonksiyonunun olduğunu varsayalım. Buradan

$$I[f] = [F(x)e^{i\omega g(x)}]_a^b \quad (3.9)$$

olur. Levin metodunda F' ye bazı v fonksiyonları tarafından yaklaşıyor. Böylece integrale aşağıdaki Levin metodu ile yaklaşılmış olur.

$$Q^L[f] = [v(x)e^{i\omega g(x)}]_a^b \quad (3.10)$$

(3.8) ifadesinde sol tarafın türevi alınır,

$$F'(x)e^{i\omega g(x)} + i\omega g'(x)e^{i\omega g(x)}F(x) = f(x)e^{i\omega g(x)} \quad (3.11)$$

elde edilir ve $e^{i\omega g(x)}$ 'li taraf tarafa bölünürse

$$F' + i\omega g'F = f \quad (3.12)$$

olur. Burada L ,

$$L[F] = F' + i\omega g'F \quad (3.13)$$

olarak tanımlanırsa

$$L[F](x) = f(x) \quad (3.14)$$

eşitliği elde edilir. $v(x)$; $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ noktalarında

$$L[v](x_k) = f(x_k) \text{ denklem sisteminin çözümü olan}$$

$$v(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k \quad (3.15)$$

polinom ailesi olsun. Bu durumda yönteme basit Levin yöntemi denir. Bu durumda $Q^L[f]$, $I[f]$ 'ye $O(\omega^{-2})$ asimptotik hata ile yaklaşılır.

Levin metodunda sadece f ve $L[v]$ 'nin integrasyon noktalarındaki değerleri karşılaştırılmıyor aynı zamanda f ve $L[v]$ 'nin türevlerinin değerleride karşılaştırılıyor. Bu durumda yönteme Levin-tipi yöntem denir. Levin-tipi metodunda f ve $L[v]$ 'nin değerlerinin ve ilk $s-1$ türevlerinin değerlerinin karşılaştırılmasıyla asimptotik hata $\omega \rightarrow \infty$ iken, $O(\omega^{-s-1})$ olur [5,12].

$v(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ polinom ailesinde x_k olarak Chebyshev polinomların kökleri alınabilir. Chebyshev polinomları aşağıdaki gibidir:

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x)$$

bu polinomların kökleri;

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{n}\pi\right) \quad k = 0, 1, \dots, n$$

dır.

Teorem 3.1.3.1:

$x \in [a, b]$ iken $g'(x) \neq 0$ olsun. $\{\psi_k\}_0^\eta$ ω 'dan bağımsız bir taban olsun. s verilen pozitif bir tamsayı olsun. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_\eta = b$ şeklindeki $\{x_k\}_0^\eta$ interpolasyon noktaları ile ilgili katlılıkların kümesi, $\{m_k\}_0^\eta$ olsun.

$n = \sum_{k=0}^\eta m_k - 1$ iken

$L[v] = v' + i\omega g'v$ ve $\forall 0 \leq k \leq \eta$ tamsayısı için $v = \sum_{k=0}^\eta c_k \psi_k$ ifadesi

$$L[v](x_k) = f(x_k)$$

$$\frac{d}{dx}L[v](x_k) = f'(x_k)$$

.

.

.

$$\frac{d^{(m_k-1)}}{dx}L[v](x_k) = f^{(m_k-1)}(x_k)$$

sıralı denklem sisteminin çözümüdür.

$$g_k = \left[(g' \psi_k(x_0), \dots, (g' \psi_k)^{(m_0-1)}(x_0), \dots, (g' \psi_k(x_\eta), \dots, (g' \psi_k)^{(m_\eta-1)}(x_\eta)) \right]^T$$

tanımlansın . Eğer $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$ vektörleri lineer bağımsızsa ω o zaman yeteri kadar büyük ω için sistemin bir tek çözümü var ve

$$I[f] - Q^L[f] = O(\omega^{-s-1}) \text{ 'dir.}$$

Burada

$$Q^L[f] \equiv \left[v(x) e^{i\omega g(x)} \right]_a^b = v(b) e^{i\omega g(b)} - v(a) e^{i\omega g(a)}$$

elde edilir [12].

İspat 3.1.3.1:

$$\begin{aligned} I[f] - Q^L[f] &= I[f] - I[L[v]] \\ &= I[f - L[v]] \end{aligned}$$

Teorem 3.1.2.1 ispatına benzer şekilde sonuç 3.1.1.1' i kullanırız. $L[v]$; ω 'ya bağlıdır. Bu yüzden $\{f - L[v], \dots, f^{(s+1)} - L[v]^{(s+1)}\}$ kümesindeki bütün fonksiyonların artan ω ' lar için sınırlı olduğunu göstermeliyiz. $\{f, \dots, f^{(s+1)}\}$, ω 'dan bağımsız tanımlanır. Sadece $\{L[v], \dots, L[v]^{(s+1)}\}$, nin $O(1)$ olduğunu göstermemiz gerekir. Katsayılar vektörü $c = [c_0, c_1, \dots, c_n]^T$,

$$Ac = f \tag{3.16}$$

denklemin sistemini çözer. Burada

$$A = \begin{pmatrix} L[\psi_0](x_0) & \cdot & \cdot & \cdot & L[\psi_\eta](x_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L[\psi_0]^{(m_0-1)}(x_0) & \cdot & \cdot & \cdot & L[\psi_\eta]^{(m_0-1)}(x_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L[\psi_0](x_\eta) & \cdot & \cdot & \cdot & L[\psi_\eta](x_\eta) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L[\psi_0]^{(m_\eta-1)}(x_\eta) & \cdot & \cdot & \cdot & L[\psi_\eta]^{(m_\eta-1)}(x_\eta) \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad f = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f^{(m_0-1)}(x_0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_\eta) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f^{(m_\eta-1)}(x_\eta) \end{pmatrix}$$

Eğer

$$P_k = [\psi'_k(x_0), \dots, \psi_k^{(m_0)}(x_0), \dots, \psi'_k(x_\eta), \dots, \psi_k^{m_\eta}(x_\eta)]^T$$

ise

$$A = [P_0 + i\omega g_0, \dots, P_n + i\omega g_n]$$

olur. Sonraki ispatlarda a_k ; $a_k = P_k + i\omega g_k$ olarak kullanacağız. A'nın (k+1). kolonu anlamına gelmektedir. Cramer kuralını kullanarak;

$$0 \leq k \leq n \quad \text{için} \quad c_k = \frac{\det D_k}{\det A}$$

dır.

Dikkat edilirse D_k matrisini içerenlerin hepsi, tek bir kolon dışında $O(\omega)$ derecesindedir.

Bu yüzden determinantın tanımından açıkça görürüz ki;

$\det D_k = O(\omega^n)$ ' dir. Şimdi gösterebiliriz ki,

$$\frac{1}{\det A} = O(\omega^{-n-1}) \text{ 'dir.}$$

Biliyoruz ki;

$$\det A = \det[i\omega g_0, \dots, i\omega g_n] + O(\omega^n) = (i\omega)^{n+1} \det[g_0, g_1, \dots, g_n] + O(\omega^n) \text{ 'dir. Bu}$$

hipotezle bu determinat kolonu lineer bağımsızdır. $\det A$ sıfır değildir ve ω 'nın $(n+1)$. dereceden bir polinomudur. Eğer ω yeterince büyükse, o zaman ω^{n+1} , $O(\omega^n)$ 'i kapsar ve $\det A \neq 0$ 'dır. Bu yüzden sistemin tek bir çözümü var ve $c_k = O(\omega^{-1})$ 'dir. Bu yüzden

$\forall 0 \leq j \leq s+1$ için

$$L[v]^{(j)} = v^{(j+1)} + i\omega \sum_{k=0}^j g^{(k+1)} v^{(j-k)} = O(\omega^{-1}) + O(1) = O(1)$$

□

dir.

3.1.4 Evans, Chung ve Webster Metotları

İntegrallerin hesaplanmasında ağırlıklı toplamlar olarak temsil edilen yöntemler sıklıkla tercih edilir. Filon-tipi ve Levin-tipi metodlar son derece güçlü olmasına rağmen, bu çerçeve içine düşmez. Evans ve Webster; Levin yöntemine dayalı düzensiz üstel osilatörler için böyle bir yöntem inşa ediyor. Bu yöntemde w_k ağırlıkları ve x_k integrasyon noktalarını seçeriz. Bazı uygun ϕ tabanları için

$$\int_{-1}^1 \phi_k(x) e^{i\omega g(x)} dx = \sum_{k=0}^n w_k \phi_k(x_k)$$

dır.

Gauss integrasyon yönteminin aksine; biz ϕ_k 'yi polinom olarak seçmeyiz. Bunun yerine Levin diferansiyel denkleminde göre seçeriz:

$$\phi_k = L[T_k] = T_k' + i\omega g' T_k$$

Burada T_k Chebyshev polinomlarıdır. ϕ_k 'ye göre momentler kapalı formda hesaplanabilir:

$$\int_{-1}^1 \phi_k(x) e^{i\omega g(x)} dx = T_k(1) e^{i\omega g(1)} - T_k(-1) e^{i\omega g(-1)}$$

Evans ve Webster salınımlı çekirdeğin diğer formlarını ele alır. Özellikle bessel ve trigonometrik fonksiyonların kombinasyonları ve bessel fonksiyonlarını ele alır [2].

Evans-Webster'in integrasyon kuralı aşağıdaki gibidir:

$$Lw = P_m(x)w^{(m)}(x) + P_{m-1}(x)w^{(m-1)}(x) + \dots + P_1(x)w'(x) + P_0(x)w(x) = 0 \quad (3.17)$$

m. dereceden adi lineer diferansiyel denklemi sağlayan salınımlı bir çekirdek olsun.

Burada P_j katsayıları daha önceden tanımlanır [2]. Ve (k) simgesi x' e göre k.dereceden diferansiyellenmeyi gösterir. İntegrasyon kuralı aşağıdaki gibi tasarlanmıştır.

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) + E \quad (3.18)$$

E hata; f_0, f_1, \dots, f_n fonksiyonların bir kümesi için sıfırdır. Momentler

$$\mu_k = \int_a^b w(x)x^k dx \quad k = 0, 1, \dots, n$$

dir.

$$\hat{\mu}_k = \int_a^b w(x)T_k^*(x)dx \quad k = 0, 1, \dots, n$$

değiştirilmiş momentlerdir. Burada $T_k^*(x)$; $[a, b]$ aralığı için ölçekli Chebyshev polinomlarıdır.

w ;
(3.17) diferansiyel denklemini sağlasın.

$$Mz = (-1)^{(m)}(P_m z)^{(m)} + (-1)^{(m-1)}(P_{m-1} z)^{(m-1)} + \dots - (P_1 z)' + P_0 z \quad (3.19)$$

formülünü kullanarak L' nin M adjoint operatörünü inşa ederiz. Lineer diferansiyel denklemin teorisindeki Lagrange benzerliğinden

$$zLw - wMz = (Z(w, z))' \quad (3.20)$$

sağlar. Burada $Z(w, z)$ bilinear eşlenik ve

$$Z(w, z) = \sum_{r=1}^m \sum_{j+k=r-1} (-1)^k (P_r z)^{(k)} w^{(j)} \quad (3.21)$$

eşittir. Lagrange benzerliği entegre ederek Green formülü elde edilir.

$$\int_a^b z(Lw)dx - \int_a^b w(Mz)dx = [Z(w, z)]_a^b \quad (3.22)$$

$z = v_k(x)$ alır ve $Lw = 0$ durumunu kullandığımızda aşağıdaki formülü verir:

$$\int_a^b w(x)Mv_k(x)dx = -[Z(w, v_k)]_a^b \quad (3.23)$$

Bu yüzden eğer f_k fonksiyonları Mv_k olarak alınır, seçilmiş bazı uygun v_k için integraller

$$\int_a^b w(x) f_k(x) dx \quad (3.24)$$

dir.

w ve onun türevleri; $(m-1)$. dereceye kadar integrasyon aralığının a ve b uç noktalarında hesaplanabilir. Bazı durumlarda w homojen lineer diferansiyel denklemi sağlamadığı görülebilir. Fakat bunun yerine homojen olmayan

$$Lw = g(x)$$

denklemini sağlar. Bu durumda onu kolayca gösterebiliriz. (3.23) denklemi

$$\int_a^b w(x) Mv_k(x) dx = -[Z(w, v_k)]_a^b + \int_a^b g(x) v_k(x) dx \quad (3.25)$$

olur. Sadece ilaveten $\int_a^b g(x) v_k(x) dx$ ' i hesaplamak gerekir. Her durumda v_k fonksiyonları Chebyshev polinomları T_k ve integrasyon noktaları x_j Clenshaw-Curtis noktaları $\cos(\frac{\pi j}{n})$ olarak alınır.

Bazı yaygın salımlı çekirdeklere ilişkin Lw , Mz ve $Z(w, z)$ veririz. L sadece self adjoint ya da self adjoint formuna yakın verilir. Burada q fonksiyonu;

$[a, b]$ aralığında $q'(x) \neq 0$ olduğu varsayılır [2].

1-) $q(x)$ Trigonometrik fonksiyon (kompleks form)

$$q = q(x)$$

$$w(x) = e^{iq}$$

$$Lw = w' - iqw = 0$$

$$Mz = -z' - iqz$$

$$Z(w, z) = wz$$

2-) $q(x)$ Trigonometrik fonksiyon (reel form)

$$q = q(x)$$

$$w(x) = \sin q \quad \text{yada} \quad w(x) = \cos q$$

$$Lw = \left(\frac{w'}{q'}\right)' + q'w = 0$$

$$Mz = L(z)$$

$$Z(w, z) = \frac{w'z - z'w}{q'}$$

3-) $q(x)$ Bessel fonksiyonu

$$q = q(x)$$

$$w(x) = C_v(q)$$

Burada; $C, J, Y, H^{(1)}$ ya da $H^{(2)}$ 'yi temsil eder.

$$Lw = \left(\frac{qw}{q'} \right)' + q' \left(q - \frac{v^2}{q} \right) w = 0$$

$$Mz = L(z)$$

$$Z(w, z) = \frac{q(w'z - z'w)}{q'}$$

3.2 $g'(x) = 0$ Olması Durumu

$$I[f] = \int_a^b f(x) e^{i\omega g(x)} dx \quad (3.26)$$

$[a, b]$ aralığındaki noktalardan birinde g' sıfır olduğunda $I[f]$ 'nin asimptotikleri durağan noktaların klasik metotları ile verilir. Bu durum yanlış yola sürükleyebilir.

Temelde durağan nokta metotların uygulaması iki durumdadır.

1) f ve $g, L[\square] \cap C^\infty[\square]$ 'de olmak şartıyla $[a, b]$ aralığında integral almak yerine $(-\infty, \infty)$ aralığında integral alınır [14].

2) $[a, b]$ aralığında integral alınır, fakat g fonksiyonunun durağan noktasına yeterince yakın bir yerde f fonksiyonunun kompakt desteğe sahip olması istenir.

I fonksiyonunun genelleştirilmiş momentleri

$$\mu_m(\omega; \xi) = I[x^m] = \int_a^b (x - \xi)^m e^{i\omega g(x)} dx, \quad m \geq 0 \quad (3.27)$$

şeklinde tanımlansın. Her $\xi \in [a, b]$ ve $g'(\xi) = 0, g''(\xi) \neq 0$ ve $x \in [a, b] - \{\xi\}$ için $g(x) \neq 0$ olacak şekilde yeterince düzgün her f ve g fonksiyonları için

$$\begin{aligned} I[f] &= f(\xi)I[1] + I[f - f(\xi)] \\ &= f(\xi)\mu_0(\omega, \xi) + \frac{1}{i\omega} \int_a^b \frac{f(x) - f(\xi)}{g'(x)} \frac{d}{dx} e^{i\omega g(x)} dx \end{aligned} \quad (3.28)$$

şeklindedir.

Lemma 3.2.1: g fonksiyonunun yeterince düzgün bir fonksiyon ve bazı $\xi \in [a, b]$ için $g'(\xi) = 0$, $g''(\xi) \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda yeterince düzgün her f fonksiyonu için,

$$\rho_0[f](x) = f(x) \quad (3.29)$$

$$\rho_{k+1}[f](x) = \frac{d}{dx} \frac{\rho_k[f](x) - \rho_k[f](\xi)}{g'(x)} \quad (3.30)$$

olduğunda

$$\begin{aligned} I[f] \square \mu_0(\omega; \xi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(-i\omega)^m} \rho_m[f](\xi) \\ - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(-i\omega)^m} \left(\frac{e^{i\omega g(b)}}{g'(b)} \{ \rho_{m-1}[f](b) - \rho_{m-1}[f](\xi) \} \right. \\ \left. - \frac{e^{i\omega g(a)}}{g'(a)} \{ \rho_{m-1}[f](a) - \rho_{m-1}[f](\xi) \} \right) , \quad \omega \rightarrow \infty \quad (3.31) \end{aligned}$$

olur.

İspat 3.2.1:

$$\begin{aligned} I[f] = \mu_0(\omega, \xi) \sum_{m=0}^{s-1} \frac{1}{(-i\omega)^m} \rho_m[f](\xi) \\ - \sum_{m=1}^s \frac{1}{(-i\omega)^m} \left(\frac{e^{i\omega g(b)}}{g'(b)} \{ \rho_{m-1}[f](b) - \rho_{m-1}[f](\xi) \} - \frac{e^{i\omega g(a)}}{g'(a)} \{ \rho_{m-1}[f](a) - \rho_{m-1}[f](\xi) \} \right) \\ + \frac{1}{(-i\omega)^s} I[\rho_s[f]] , \quad s \geq 0 \quad (3.32) \end{aligned}$$

şeklinindedir. Bu ifade $s = 0$ için doğrudur. Bundan başka (3.28) ile

$$I[\rho_s[f]] = \mu_0(\omega, \xi) \rho_s[f](\xi) + \frac{1}{i\omega} \int_a^b \frac{\rho_s[f](x) - \rho_s[f](\xi)}{g'(x)} \frac{d}{dx} e^{i\omega g(x)} dx$$

de kısmi integrasyon yapılarak ve (3.32)' de yerine yazılarak ispat tamamlanır [14]. $s \rightarrow \infty$ (3.31)' deki asimptotik tahmin sağlanır.

(3.31)' deki asimptotik açılım her $r \geq 1$ tamsayısı için

$$g'(\xi) = g''(\xi) = \dots = g^{(r)}(\xi) = 0 , \quad g^{(r+1)}(\xi) \neq 0$$

olacak şekilde genişletilebilir. Böylece (3.28)' den

$$I[f] = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(\xi) \mu_j(\omega; \xi) + \frac{1}{i\omega} \int_a^b \frac{1}{g'(x)} \left[f(x) - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(\xi) (x-\xi)^j \right] \frac{d}{dx} e^{i\omega g(x)} dx \quad (3.33)$$

elde edilir.

Sonuç olarak

$$\rho_0[f](x) = f(x) \quad (3.34)$$

$$\rho_{k+1}[f](x) = \frac{d}{dx} \frac{\rho_k[f](x) - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} \rho_k[f]^{(j)}(\xi) (x-\xi)^j}{g'(x)}, \quad k \geq 0 \quad (3.35)$$

olur. Yeterince düzgün her f fonksiyonu için Lemma 3.2.1' deki ispat izlenerek

$$I[f] \square \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} \mu_j(\omega; \xi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(-i\omega)^m} \rho_m^{(j)}[f](\xi) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(-i\omega)^m} \left(\frac{e^{i\omega g(b)}}{g'(b)} \{ \rho_{m-1}[f](b) - \rho_{m-1}[f](\xi) \} - \frac{e^{i\omega g(a)}}{g'(a)} \{ \rho_{m-1}[f](a) - \rho_{m-1}[f](\xi) \} \right), \quad \omega \rightarrow \infty \quad (3.36)$$

asimptotik hesabı elde edilir.

İlk önce, (a,b)' deki tek durağan nokta için (3.26)' daki asimptotik açılımı yapılır. Daha sonra her sonlu durağan nokta için yapılabilir. Böylece $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q \in (a, b)$, $g'(a)$, $g'(b) \neq 0$ iken g fonksiyonunun farklı mertebelerinin durağan noktalarıysa, bir tek durağan noktayı her bir I_j ' de yerine koyacak şekilde $[a, b]$ aralığını q ' nun I_1, I_2, \dots, I_q alt aralıklarına bölünebilir.

Teorem 3.2.2:

$g'(\xi) = g''(\xi) = \dots = g^{(r)}(\xi) = 0$, $g^{(r+1)}(\xi) \neq 0$ ve $[a, b] - \{\xi\}$ de $g' \neq 0$ olduğunu varsayalım. Daha sonra her $s \geq 0$ için

$$Q_s^A[f] = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} \mu_j(\omega; \xi) \sum_{m=0}^{s-j-1} \frac{1}{(-i\omega)^m} \rho_m^{(j)}[f](\xi) - \sum_{m=1}^{s-1} \frac{1}{(-i\omega)^m} \left(\frac{e^{i\omega g(b)}}{g'(b)} \{ \rho_{m-1}[f](b) - \rho_{m-1}[f](\xi) \} \right)$$

$$-\frac{e^{i\omega g(a)}}{g'(a)} \left\{ \rho_{m-1}[f](a) - \rho_{m-1}[f](\xi) \right\} \quad (3.37)$$

metodu her düzgün f fonksiyonu için asimptotik hatayı

$$Q_s^A[f] - I[f] = O(\omega^{-s-1/(r+1)}) \quad (3.38)$$

ifadesine verir [14].

BÖLÜM 4

$Ax = b$ 'NİN ÇÖZÜMÜ İÇİN YÖNTEMLER

4.1 Krylov Uzayları

Krylov uzayları

$$Ax = b \quad (4.1)$$

(4.1) lineer sistem çözümü için genel bir projeksiyon (iz düşüm) yöntemidir. Petrov-galerkin koşulu empoze ederek m boyutlu $x_0 + K_m$ afin altuzayına yaklaşık bir x_m çözümünü araştıran yöntemdir.

$$b - Ax_m \perp L_m ,$$

Burada L_m ; m boyutlu başka bir altuzaydır. Burada x_0 ; çözüm için keyfi bir ilk tahmini temsil eder. Altuzay K_m , krylov uzayı olduğunda bir krylov altuzayı olur.

$$K_m(A, r_0) = \text{span}\{r_0, Ar_0, A^2r_0, \dots, A^{m-1}r_0\}$$

dir.

Burada r_0 ; $r_0 = b - Ax_0$ dır. Yaklaşım teorisi açısından bakıldığında, krylov altuzay yönteminden elde edilen yaklaşımlar açıktır.

$$A^{-1}b \approx x_m = x_0 + q_{m-1}(A)r_0 , \quad (4.2)$$

q_{m-1} derecesi $m - 1$ olan bir polinomdur. En basit durumda burada $x_0 = 0$ olur. O zaman

$$A^{-1}b \approx q_{m-1}(A)b$$

dir. Diğer bir deyişle $A^{-1}b$ 'ye $q_{m-1}(A)b$ ile yaklaşılır. İlk olarak basitçe $L_m = K_m$ olarak alıp ve minimum residual (artık) değişimi $L_m = AK_m$ ' dir. A^T ile ilgili krylov altuzayı $L_m = K_m(A^T, r_0)$ dır [15].

4.1.1 Arnoldi Metodu

Arnoldi metodu genel hermition (kompleks eşlenik) olmayan matrisler için K_m üzerinde bir ortogonal iz düşümdür.

4.1.1.1 Arnoldi Algoritması

- 1) Choose a vector v_1 of norm 1
- 2) for $j = 1, 2, \dots, m$ Do
- 3) Compute $h_{ij} = \langle Av_j, v_i \rangle$ for $i = 1, 2, \dots, j$
- 4) Compute $\omega_j := Av_j - \sum_{i=1}^j h_{ij}v_i$
- 5) $h_{j+1,j} = \|\omega_j\|_2$
- 6) if $h_{j+1,j} = 0$ then stop
- 7) $v_{j+1} = \frac{\omega_j}{h_{j+1,j}}$
- 8) EndDo

Her adımda algoritma; A ile önceki arnoldi vektörü v_j 'i çarpar. Arnoldi algoritması aslında standart bir gramm-schmidt işlemidir. v_i vektörleri ortonormalleştirir. Eğer 4' de hesaplanmış vektör ω_j sıfır olursa algoritma 4 'de duracak. Bu durum kısaca incelenmiştir [15].

4.1.1.2 Tanım: v_1, v_2, \dots, v_m kolon vektörlü $n \times m$ matris v_m , arnoldi algoritması ile tanımlanan sıfır olmayan matris $h_{i,j}$ girişli $(m+1) \times m$ hessenberg matris \tilde{H}_m ve onun son satırının silinmesi ile elde edilen H_m ile gösterilir.

$$Av_m = v_m H_m + \omega_m e_m^T \quad (4.3)$$

$$= v_{m+1} \tilde{H}_m \quad (4.4)$$

$$v_m^T Av_m = H_m \quad (4.5)$$

4.1.1.3 Linear Sistemler için Arnoldi Metodu

Orijinal lineer sistem $Ax = b$ için bir ilk tahmin x_0 verilir. Bir ortogonal iz düşüm metodu düşünürüz ki ;

$$K_m(A, r_0) = \text{span}\{r_0, Ar_0, A^2 r_0, \dots, A^{m-1} r_0\} \quad (4.6)$$

$$L = K = K_m(A, r_0)$$

alır.

$$r_0 = b - Ax_0$$

Bu metod galerkin koşulu empoze ederek m boyutlu $x_0 + K_m$ afin altuzayı yaklaşık bir x_m çözümünü araştırır.

$$v_1 = \frac{r_0}{\|r_0\|_2}$$

ise arnoldi metodunda $\beta = \|r_0\|_2$ yerleştirilirse; o zaman (4.5) ile

$$\begin{aligned} v_m^T A v_m &= H_m \text{ ve} \\ v_m^T r_0 &= v_m^T (\beta v_1) = \beta e_1 \end{aligned}$$

sonuç olarak, yaklaşık çözüm

$$x_m = x_0 + v_m y_m \quad (4.7)$$

$$y_m = H_m^{-1}(\beta e_1) \quad (4.8)$$

ile verilir [15].

4.1.2 Simetrik Lanczos Metodu

Simetrik lanczos algoritması, matris simetrik olduğunda özel durumlar için arnoldi metodunun bir sadeleştirilmesi olarak görülebilir. A simetrik olduğunda, o zaman hessenberg matris H_m simetrik üç köşegenli matris olur.

Teorem 4.1.2.1:

Arnoldi metodunun reel simetrik bir A matrisi için uygulansın. Öyleyse algoritma ile oluşturulan $h_{i,j}$ katsayıları,

$$\begin{aligned} &\text{için } h_{i,j} = 0 \\ &h_{j,j+1} = h_{j+1,j} \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (4.9)$$

Diğer bir deyişle; arnoldi işleminde elde edilen matris 3 köşegenli simetrik matris olur.

İspat 4.1.2.1:

$H_m = v_m^T A v_m$ simetrik matris simetrik bir matris ayrıca hessenberg matrisidir. Açıkça görünür ki H_m ; 3 köşegenli simetrik matristir.

Lanczos algoritmasını tanımlamak için kullanılan standart notasyon $\alpha_j = h_{jj}$, $\beta_j \equiv h_{j-1,j}$ yerleştirmekle elde edilir. Eğer T_m ; H_m sonuç matrisi ile gösterilirse

$$T_m = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \beta_{m-1} \\ & & & & & \beta_{m-1} & \alpha_{m-1} & \beta_m \\ & & & & & & \beta_m & \alpha_m \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

formunu alır [15].

4.1.2.2 Lanczos Algoritması

- 1) Choose an initial vector v_1 of norm unity set $\beta_1 \equiv 0$ ve $v_0 \equiv 0$
- 2) for $j = 1, 2, \dots, m$ Do
- 3) $\omega_j := A v_j - \beta_j v_{j-1}$
- 4) $\alpha_j := \langle \omega_j, v_j \rangle$
- 5) $\omega_j := \omega_j - \alpha_j v_j$
- 6) $\beta_{j+1} := \|\omega_j\|_2$ if $\beta_{j+1} = 0$ then stop
- 7) $v_{j+1} := \frac{\omega_j}{\beta_{j+1}}$
- 8) EndDo

4.1.3 Genelleştirilmiş Minimum Residual (artık) Metodu

Genelleştirilmiş minimum residual (artık) metodu (GMRES), $K = K_m$ ve $L = AK_m$ almaya dayalı bir projeksiyon metodudur.

$$K_m; v_1 = \frac{r_0}{\|r_0\|_2}$$

ile m . krylov altuzayıdır.

Böyle bir tekniği residual (artık) norm $x_0 + K_m$ 'deki tüm vektörler üzerinde minimize eder.

Tanım 4.1.3.1:

$f \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ için krylov alt uzayı

$$K_m[M, f] = \text{span}\{f, Mf, M^2f, \dots, M^{m-1}f\}$$

f özdeş olarak sıfır olmadığını varsayın ve $K_m[M, f]$, m boyutludur. Arnoldi iterasyonu $n \times m$ matris $Q_m = (q_1, q_2, \dots, q_m)$ ve $(m+1) \times m$ Hessenberg matrisini

$$H_m = \begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & h_{1,m} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \cdot & & & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & h_{m-1,m-1} \\ & & & & h_{m-1,m-1} & h_{m,m} \\ & & & & & h_{m+1,m} \end{pmatrix}$$

aşağıdaki özelliklerle oluşturulur.

* $K_m[f]$ 'nin bir ortonormal baz formu (q_1, q_2, \dots, q_m)

* $q_1 = \frac{f}{\|f\|}$ ve $MQ_m = Q_{m+1}H_m$

Gmres; $v_m \in K_m[M, f]$ elemanını bulan bir algoritmadır. Öyle ki; $\|Mv_m - f\|$ minimaldir.

Böylece Q_m 'nin kolonlarını $\text{span}K_m[M, f]$, $v_m = Q_m d_m$ olarak yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \|Mv_m - f\| &= \|MQ_m d_m - f\| = \|Q_{m+1}(H_m d_m - \|f\|e_1)\| \\ &= \|H_m d_m - \|f\|e_1\| \end{aligned}$$

Böylece sadece $\|H_m d_m - \|f\|e_1\|$ minimize eden en küçük kareler çözümünü bulmamız gerekir [13].

4.1.3.2 Gmres Algoritması

Verilen bir $f \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vektör ve $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ operatör, v_m aşağıdaki gibi hesaplanır.

- 1) M ve f ' de arnoldi algoritmasını kullanarak Q_m ve H_m ' i hesaplamak.
- 2) $\|H_m d_m - \|f\| e_1\|$ normunu minimize eden $d_m \in \mathbb{R}^m$ bulmak için en küçük kareler yöntemini kullanmak.
- 3) $v_m = Q_m d_m$ tanımlamak [13].

4.2 Tekil Değer Ayrışımı

Tekil Değer Ayrışımı (SVD); en küçük kareler problemlerine çözüm yolu bulmaktan başka çok amaçlar için kullanılan önemli bir ayrıştırma yöntemidir.

4.2.1 Teorem:

A ; $(m \times n)$ keyfi bir matris olsun. O zaman;

- a) Bir üniter matris U ve bir üniter matris V vardır öyle ki;
 $U^H A V = \Sigma$; aşağıdaki formun $m \times n$ diagonal matrisidir.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D := \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r), \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

Burada $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$; A ' nın sıfırdan farklı tekil değerleridir. Ve A ' nın rankı r ' dir.

- b) A^H ' nın sıfırdan farklı tekil değerleri de yine

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r \text{ dir.}$$

$$A = U \Sigma V^H ; \quad A \text{ ' nın tekil değerleri olarak adlandırılır.}$$

U ' nın sütunları; AA^H ' nın öklid normuna göre birleştirilmiş öz vektörleridir.
 V ' nin sütunları; $A^H A$ ' nın öklid normuna göre birleştirilmiş öz vektörleridir.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D := \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r), \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

ise;

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D := \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r), \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

ise;

$n \times m$ diagonal matrix

$$\Sigma^+ := \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Σ^+ nin genel tersidir. Ve A^+ nin genel tersi

$$A^+ := V \Sigma^+ U^H$$

dir [1].

Teorem 4.2.2:

A ; $m \geq n$ ile $m \times n$ keyfi bir matrix olsun. O zaman A ' nin tekil değer ayrışımı $A = U \Sigma V^H$ yazabiliriz. Burada

$$U_{m \times m}, \quad U^T U = I; \quad V_{n \times n}, \quad V^T V = I,$$

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \quad \text{ve} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \text{ 'dir.}$$

U ' nun; u_1, u_2, \dots, u_n kolonları sol tekil vektörleri olarak adlandırılır.

V ' nin; v_1, v_2, \dots, v_n kolonları sağ tekil vektörleri olarak adlandırılır.

σ_i tekil değer olarak adlandırılır. (Eğer $m < n$ ise; SVD A^T göz önünde tutularak tanımlanır.)

Bu teoremin geometrik düşüncesi aşağıdaki gibidir. Verilen bir $m \times n$ matrix A ; $x \in \mathbb{R}^n$ vektörü bir $y = Ax \in \mathbb{R}^m$ vektörüne eşler. Öyleyse \mathbb{R}^n için bir ortogonal koordinat sistemi (Burada birim axes V ' nin kolonları), \mathbb{R}^m için bir koordinat sistemi (burada birim axes U ' nun kolonları) seçebiliriz. Öyleki;

bir $x = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$ vektörü $y = Ax = \sum_{i=1}^n \sigma_i \beta_i u_i$ 'e eşler [1]. Ancak tekil değer ayrışımını

$A c = f$ sistemine uyguladığımızda kondisyon (koşul) sayısının çok büyük geldiği

görülmüştür. Ve sistemin genel tersi alırken zorlandığı yapılan çalışmalarda görülmüştür.

4.2.3 Bir Matrisin Kondisyon (Koşul) Sayısı

$Ax = b$ şeklindeki sistemde A 'daki ve b 'deki çok küçük değişikliklere karşı çözüm aşırı derecede değişiyorsa o zaman sisteme kötü şartlı sistem denir. Sistemin kondisyon (koşul sayısı) aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\text{cond}(A) = \text{lub}(A) \text{lub}(A^{-1})$$

$$\text{lub}(A) = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Eğer $\text{cond}(A)$ çok büyük ise sistem kötü şartlıdır. Öklid normuna göre;

$$\text{cond}_2(A) = \text{lub}_2(A) \cdot \text{lub}_2(A^{-1})$$

$$\text{lub}_2(A) = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

dir [1].

$$\text{lub}_2(A) = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sigma_1, \quad \text{lub}_2(A^{-1}) = \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sigma_n \text{ olup}$$

$$\text{cond}_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \text{ 'dir.}$$

4.3 Kesilmiş Değer Ayrışımı (TSVD)

Kötü koşullu küçük tekil değerleri ilişkisi önceki bölümlerde anlatıldı. Bu sistemin problemini düzeltmek için operatörün küçük tekil değerlerini kesecez.

$$Ac = f \tag{4.11}$$

(4.11) sistemini çözmeye çalışıyoruz. A 'nın tekil değer ayrışımı

$$A = \sum_{i=1}^n \sigma_i u_i v_i^T$$

dir. (4.11)'de yerine yazıldığında

$$\left(\sum_{i=1}^n \sigma_i u_i v_i^T \right) c = f \tag{4.12}$$

olur. Burada $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$ tekil değerler ve sırasıyla u_i ve v_i sol ve sağ tekil vektörlerdir.

$$Ac = f$$

için çözüm

$$c = \sum_{i=1}^n \frac{u_i \cdot f \cdot v_i}{\sigma_i}$$

olarak yazılır. Kesilmiş tekil değer ayrışımı (TSVD) çözüm için $N \leq n$ en büyük tekil değerleri kullanır. Küçük tekil değerleri keseriz. TSVD çözümü;

$$f_N = \sum_{i=1}^N \frac{u_i^T \cdot f}{\sigma_i} v_i \quad (4.13)$$

olur. Terim sayısı N ; yaklaşık çözümün iyi bir doğruluğunu elde etmek için seçilmiş bir düzenleştirme parametresidir [3].

BÖLÜM 5

UYGULAMALAR VE NÜMERİK SONUÇLAR

5.1 Nümerik Örnekler

Örnek 5.1: $\int_0^{1/2} \frac{1}{t^2 + 1/10} \exp(i \frac{1}{2}(t^2 + 2t)) dt$ integralini TSVD ve lineer solve yöntemleri ile hesaplayalım.

Bu örnekte tekil değer ayrışımı kullanılmış. Son tekil değer kesildiğinde iyi netice verdiği ama sondan iki ya da daha fazla tekil değer kesildiğinde iyi neticeler vermediği gözlenmiştir.

Bu integralde katsayısı matrisinin kondisyon sayısı $3.4908 \cdot 10^{60}$ olarak bulunur. Görüldüğü gibi kondisyon sayısı çok büyüktür. Bu sistemin çözümü için tekil değer ayrışımı kullanıldığında, son tekil değer kesildiğinde aşağıdaki tablodaki sonuçlar elde edilir.

Tablo 5.1.1. Bir Kesme Yaptığımızda Kesilmiş Tekil Değer Ayrışımı ve Lineer Solve' nin Mutlak Hatasının Karşılaştırılması

ω	kondisyon sayısı	error1	error 2	kesme miktarı
0.5	$(3.51852) \cdot 10^{16}$	$0 \cdot 10^{-32}$	$0 \cdot 10^{-32}$	10^{-40}

Error1: Linear solve mutlak hatası;

Error2: TSVD mutlak hatası ;

Tabloda görüldüğü gibi TSVD yöntemi yöntemi uyguladığımızda katsayı matrisinin kondisyon sayısı $(3.51852) \cdot 10^{16}$ olarak bulunur. Mutlak hata lineer solve ile aynı sonuçları verir.

Sondan iki tekil değer kesildiğinde; katsayı matrisini kondisyon sayısı $(2.02128) \cdot 10^{12}$ olarak bulunur. Ancak (TSVD)' nin mutlak hatası aşağıdaki tablodaki gibidir.

Tablo 5.1.2. İki Kesme Yaptığımızda Kesilmiş Tekil Değer Ayrışımı ve Lineer Solve' nin Mutlak Hatasının Karşılaştırılması

ω	kondisyon sayısı	error1	error 2	kesme miktarı
0.5	$(2.02128) * 10^{12}$	$0. * 10^{-32}$	$(3.263099056826630) * 10^{-16}$	10^{-4}

yani error 2= $(3.263099056826630) * 10^{-16}$ olur.

Kesilmiş tekil değer ayrışımı (TSVD) kullanıldığında; son tekil değer kesildiğinde ilgili sistemin kondisyon iyiye gittiği ve sonucunun da iyiye gittiği görülmüştür.

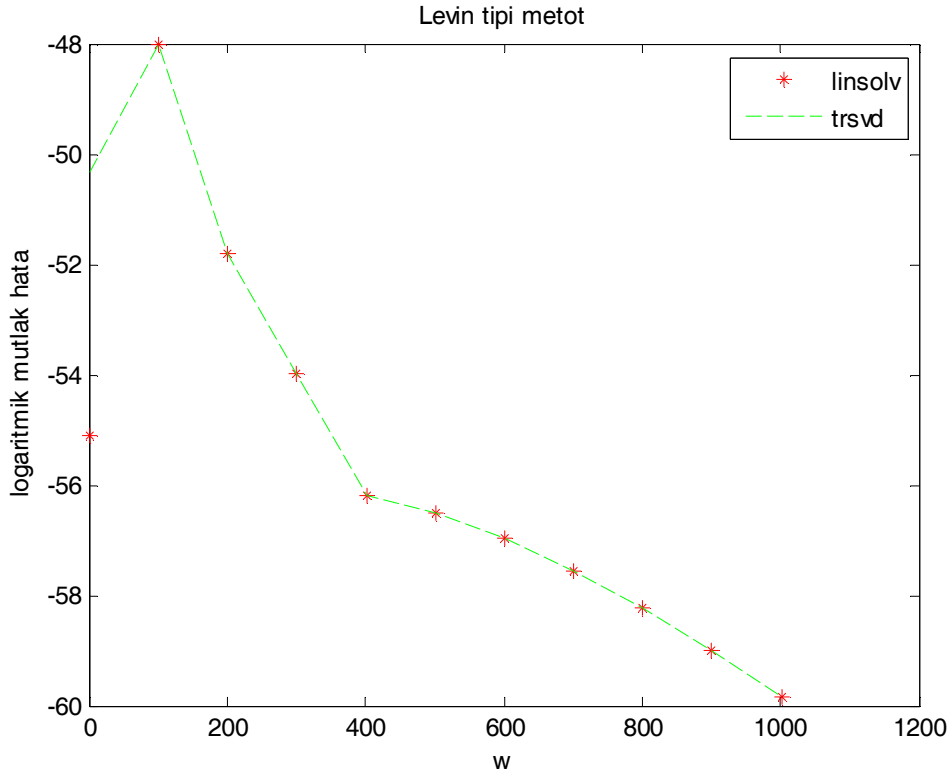
Sondan iki tekil değer kesildiğinde sistemin kondisyon sayısının iyiye gittiği ancak sonucunun giderek kötüleştiği görülmüştür.

Örnek5.2: $\int_0^1 \log(t+1) \exp(i\omega t) dt$ integralini $\omega = 1 : 100 : 1001$ değerleri için hesaplayalım.

Tablo 5.2. Kesilmiş Tekil Değer Ayrışımı ve Lineer Solve' nin Mutlak Hatasının Karşılaştırılması

ω	Condition (koşul) Sayısı	Error1	Error2
1	$(2.8238) * 10^{44}$	$(1.157612) * 10^{-24}$	$(1.39822904) * 10^{-22}$
101	$(4.0939) * 10^7$	$(1.39824976453) * 10^{-21}$	$(1.39824976453) * 10^{-21}$
201	$(2.0767) * 10^7$	$(3.1996286215) * 10^{-23}$	$(3.1996286215) * 10^{-23}$
301	$(1.7220) * 10^7$	$(3.59942243) * 10^{-24}$	$(3.59942243) * 10^{-24}$
401	$(1.5924) * 10^7$	$(3.9126024) * 10^{-25}$	$(3.9126024) * 10^{-25}$
501	$(1.5309) * 10^7$	$(2.88056996) * 10^{-25}$	$(2.88056996) * 10^{-25}$
601	$(1.4970) * 10^7$	$(1.82466626) * 10^{-25}$	$(1.82466626) * 10^{-25}$
701	$(1.4763) * 10^7$	$(1.82466626) * 10^{-25}$	$(1.82466626) * 10^{-25}$
801	$(1.4629) * 10^7$	$(5.1299677) * 10^{-26}$	$(5.1299677) * 10^{-26}$
901	$(1.4536) * 10^7$	$(2.4156366) * 10^{-26}$	$(2.4156366) * 10^{-26}$
1001	$(1.4469) * 10^7$	$(1.0186670) * 10^{-26}$	$(1.0186670) * 10^{-26}$

Tabloda görüldüğü gibi mutlak hata artan ω değerleri için giderek azalmaktadır. Kesilmiş tekil değer ayrışımı uygulandığında ve sondan bir tekil değer kesildiğinde TSVD yöntemi ile lineer solve yönteminin logaritmik mutlak hatası aşağıdaki şekilde gibidir.



Şekil 5.1. Artan ω Değerleri İçin Kesilmiş Tekil Değer Ayrışımı ve Linear Solve'nin Mutlak Hatasının Şekli

Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi kesme yapılan yerde TSVD yönteminin lineer solve' den daha iyi sonuç verir.

Örnek5.3: $\int_{-1}^1 \frac{1}{t^2+1} \exp(i\omega \sin(t+1/4)) dt$ integralinin $\omega = 1, 11, 21, 31, 41, 51$ değerleri için hesaplayalım. Bu örnekte 5 tane integrasyon noktası kullanıp ve uçlardaki türev 3 alınarak 80 rakam duyarlılıkla hesaplanmıştır.

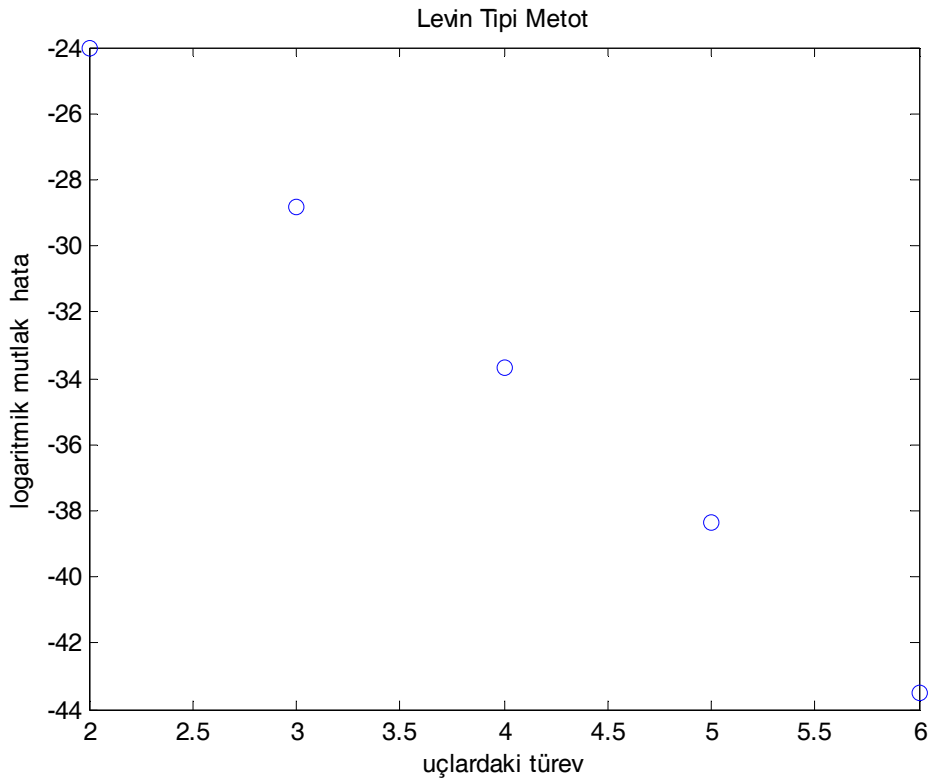
Tablo 5.3. Artan ω Değerleri İçin Kondisyon (koşul) Sayısı

ω	kondisyon (koşul) sayısı
1	$(1.9998) \cdot 10^7$
11	10927
21	4967.6
31	3851.2
41	3481.4
51	3325

Sonuçlarda görüldüğü gibi artan ω değerleri için sistemin katsayılar matrisinin kondisyon sayısı azalmaktadır. Levin yöntemi artan ω değerleri için daha iyi sonuçlar vermektedir.

Örnek 5.4 : $\int_3^{10} \exp(t) \cdot \exp(i\omega(t^2 + 2t)) dt$

integralinde $\omega = 100$ için polinomun derecesi 11 sabit tutulup uçlardaki türev sırasıyla 2,3,4,5,6 için alınarak 35 rakam duyarlılıkla hesaplanmıştır.

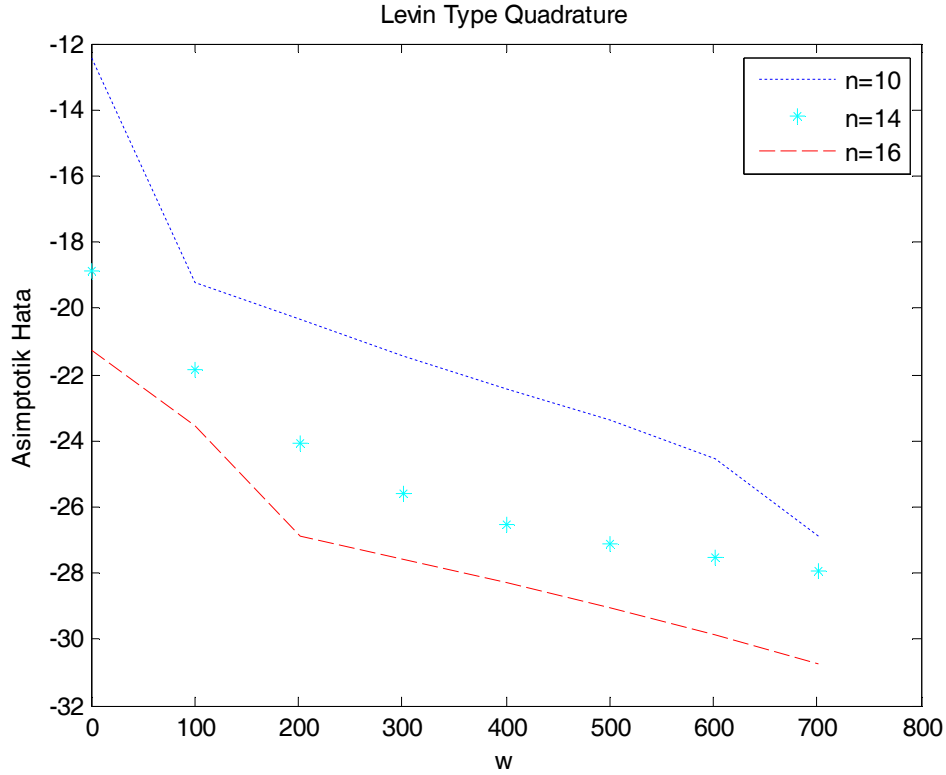


Şekil 5.2. Uçlardaki Türevi Artırdığımızda Levin-Tipi Metotlarının Logaritmik Mutlak Hatasının Şekli

Bu örnekte sabit bir ω için polinomun derecesi sabit tutulup uçlardaki türevi artırdığımızda Levin –tipi metodun daha iyi netice verdiği gözlenmiştir.

Örnek 5.5: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2 + \frac{1}{10}} \exp(i\omega(t^2 + 2t)) dt ;$

integralinde $\omega = 1, 101, 201, \dots, 701$ değerleri için uçlardaki türev 2 alınıp sırayla 10, 14, 16 integrasyon noktaları için hesaplanmıştır.



Şekil 5.3. Artan İntegrasyon Noktalarına Göre Levin-Tipi Metotların Mutlak Hatasının Şekli

Bu örnekte uçlardaki türev sabit tutulup integrasyon noktaları artırıldığında Levin tipi metotların daha iyi netice verdiği gözlenmiştir.

Örnek 5.6: $\int_0^1 \cos\left(\frac{150x^2}{2}\right) \exp(i\omega \frac{\pi}{4} x) dx$

integralinin artan ω değerleri için (TSVD) ve lineer solve yöntemiyle hesaplayalım.

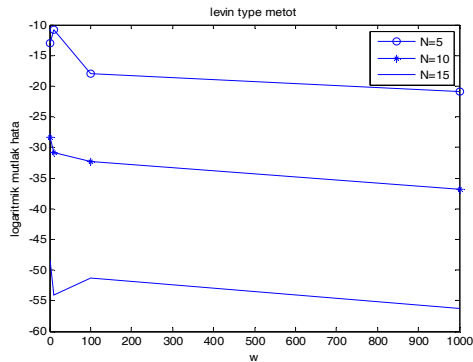
Tablo 5.4. Artan ω Değerleri için Kesilmiş Tekil Değer Ayrışımı (TSVD) ve Linear Solve Yönteminin Çözümlerinin Karşılaştırılması

ω	Kondisyon(koşul)sayısı	TSVD	Linear Solve	Kesme miktarı(10^{-8})
1	$4.21 \cdot 10^{58}$	-6.3923	-6.4040	Kesme var $6.265 \cdot 10^{-56}$
10	$6.28 \cdot 10^{26}$	-5.3104	-5.3011	Kesme var $4.199 \cdot 10^{-24}$
20	$2.26 \cdot 10^{17}$	-3.8768	-3.8703	Kesme var $1.168 \cdot 10^{-14}$
30	$1.05 \cdot 10^{12}$	-2.7056	-2.7053	Kesme var $2.513 \cdot 10^{-9}$
40	$2.84 \cdot 10^8$	-1.9029	-1.9029	Kesme yok
50	$8.64 \cdot 10^5$	-1.6218	-1.6218	Kesme yok
60	$1.55 \cdot 10^4$	-2.4972	-2.4972	Kesme yok
70	$1.47 \cdot 10^3$	-1.9909	-1.9909	Kesme yok
80	549.	-2.5865	-2.5865	Kesme yok
90	343.	-1.8089	-1.8089	Kesme yok
100	254.	-3.1027	-3.1027	Kesme yok

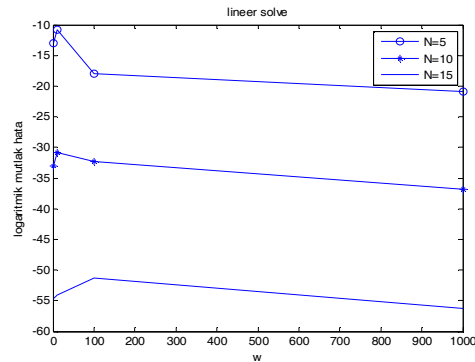
Tabloda görüldüğü gibi artan ω değerleri için kondisyon sayısı giderek azalmaktadır. Sistemin küçük ω değerleri için kötü koşullu olduğu tabloda görülmektedir. Kötü koşullu sistemin çözümü için tekil değer ayrışımı uygulanmıştır. $\omega = 1, 10, 20, 30$ için TSVD uygulandığında sondan bir tekil değer kestiğimizde sistemin iyileştiği görülmektedir.

Örnek 5.7: $\int_0^1 \exp(x) \exp(i\omega x) dx$

integralinin $\omega = 1, 10, 100, 1000$ değerleri için artan polinomun derecesini göre Levin-tipi metotlar ve linear solve yöntemiyle hesaplayalım.

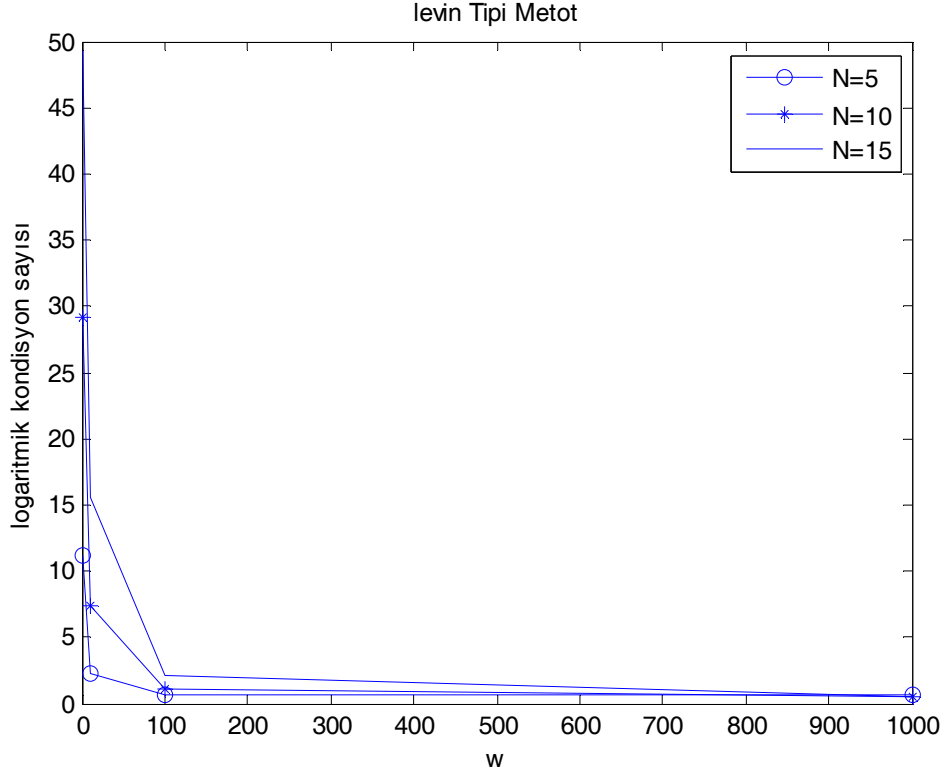


Şekil 5.4a.



Şekil 5.4b.

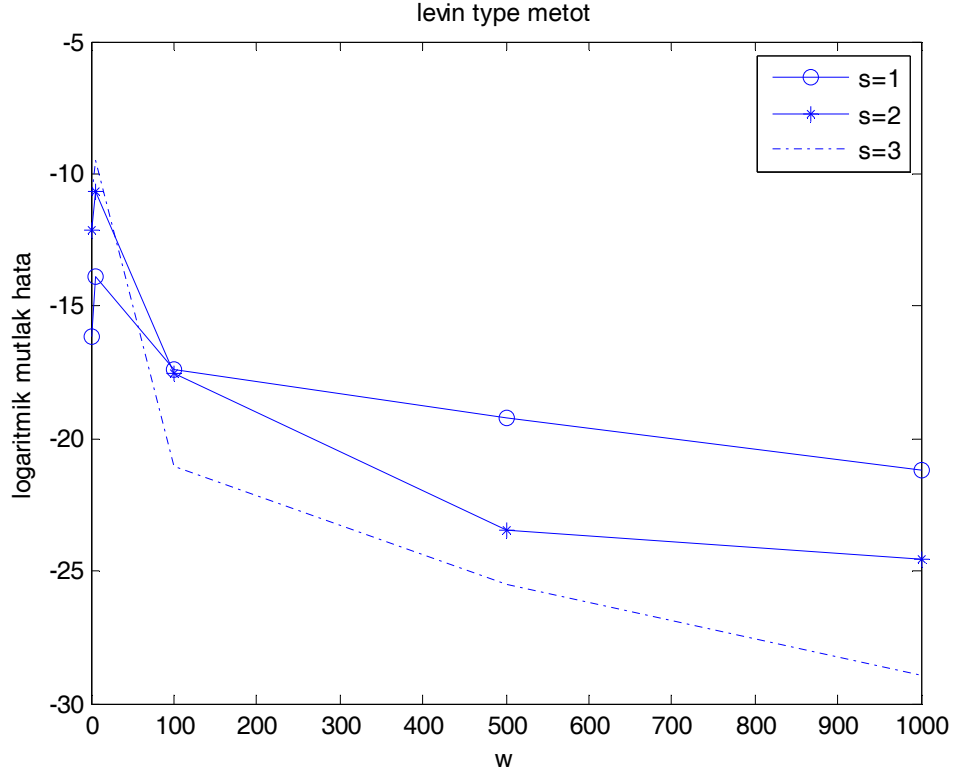
İntegralini Levin tipi metoları uyguladığımızda $\omega = 1$ için kondisyonun sayısı çok büyük olduğu TSVD uygulandığında sistemin stabilleştiği şekilde görülmektedir. İntegralinin artan polinom derecesini göre Levin tipi metotların daha iyi sonuçlar verdiği şekilde görülmektedir. Ancak artan polinom derecesini göre kondisyon (koşul) sayısı artmaktadır.



Şekil 5.4c. Artan Polinom Derecesine Göre Logaritmik Kondisyon Sayısının Şekli

Örnek 5.8: $\int_0^1 \cos(x^2) \exp(i\omega x) dx$

integralinin $\omega = 1, 5, 100, 500, 1000$ değerleri için polinomun derecesini 6 olarak sabit tutup uçlardaki türevi artırdığımızda Levin-tipi metotların daha iyi netice verdiği aşağıdaki şekilde gözlenmiştir.



Şekil 5.5. Artan Türev Değerleri için Logaritmik Mutlak Hatasının Şekli

BÖLÜM 6

SONUÇLAR

(3.1) formundaki yüksek salımlı integrallere klasik integrasyon kurallarıyla yüksek doğrulukta yaklaşmak zordur.

Bu çalışmada bahsedilen formundaki yüksek salımlı integralleri hesaplamak için Levin-tipi yöntemler uygulandı. Ancak, bu metot (A) tipindeki integrallere uygulandığında bir sistem ($Ac = f$ gibi) oluşur. Bu sistemin katsayı matrisinin kondisyon (koşul) sayısı bazen çok büyük olduğunu ve dolayısıyla ilgili sistemin çözümünün zorlaştığını gördük. Sistemi iyileştirmek için kesilmiş tekil değer ayrışımını kullandık. Kesilmiş tekil değer ayrışımında son tekil değer kesildiğinde sistemin kondisyon sayısının iyileştiği ve lineer solve ile karşılaştırıldığında iyi netice verdiği görülmüştür. Ancak sondan iki ya da daha fazla tekil değer kesildiğinde kondisyon sayısı iyileşmesini rağmen lineer solve ile karşılaştırıldığında sonuçların iyi olmadığı görülmüştür. [7,8,9]. Bu durum Örnek 5.1’de gösterildi. Ama nümerik sonuçlarda gözlenmiştir ki genelde sistemin son tekil değeri çok küçük olmakta sondan iki önceki tekil değeri yaklaşık olarak 1’den büyüktür. Sistemin kötü koşullu olmasına son tekil değer neden olmaktadır. Bu durum Örnek 5.6’da gösterildi. Ayrıca Levin tipi metotlarda araya nokta koyduğumuzda diğer metotlardan daha iyi neticeler vermediği görülmüştür. Aynı zamanda Levin tipi metotlarda polinomun derecesini artırdığımızda ve uçlardaki türevi artırdığımızda daha iyi neticeler verdiği nümerik örneklerde görülmüştür.

İleride Levin-tipi metotlarının (A) tipindeki integrale uygulandığında oluşan ($Ac = f$) sistemini çözümü için Genelleştirilmiş minimum residual (artık) metodu (GMRES) uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Bulirsh, R. and Stoer, J. 1991. Introduction to Numerical Analysis. 2nd edition. New York : Springer Verlag.
- [2] Chung, K.C., Evans, G.A., and J.R., Webster (2000). A method to generate generalize quadrature rules for oscillatory integrals. *Applied Numerical Mathematics*. **34**, 85-93.
- [3] Hansen, P. C. (1986). The truncated svd as a method for regularization. *Numerical Analysis Project*. 86-36.
- [4] Hascelik, A. Ihsan. (2009). Suitable gauss and filon-type methods for oscillatory integrals with an algebraic singularity. *Applied Numerical Mathematics*. **59**, 101-118.
- [5] Iserles, A., and Norsett, S. P. (2005). Efficient quadrature of highly oscillatory integrals using derivate. *Proceedings of The Royal Society A*. **461**, 1383-1399.
- [6] Iserles, A. and Nørsett, S. P. (2004). On quadrature methods for highly oscillatory integrals and their implementation. *BIT*. **44**, 755–772.
- [7] Jianbing ,Li ., Wang , T., Wang, X., Xiao, S. (2010). An improved Levin quadrature method for highly oscillatory integrals. *Applied Numerical Mathematics*. **60**, 833-842.
- [8] Jianbing, Li., Wang, X., Wang, T., Shen, C. (2009). Delaminating quadrature method for multi-dimensional highly oscillatory integrals. *Applied Mathematics and Computation*. **209**, 327–338.
- [9] JianBing, Li., Wang, T., and Wang, X., (2008). A universal solution to one dimension oscillatory integrals. *Science in China Press*. **51**, 1614-1622.
- [10] Levin, D. (1982) . Procedure for computing one- and two-dimensional integrals of functions with rapid irregular oscillations. *Mathematics of Computation*. **38**, 531-538.

[11] Levin, D. (1997) . Analysis of a collocation method for integrating rapidly oscillatory functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. **78**, 131-138.

[12] Olver, S. (2006). Moment-free numerical integration of highly oscillatory Functions. *Journal of Numerical Analysis*. **26**, 213-227.

[13] Olver, S. (2010). Fast, numerically stable computation of oscillatory integrals with stationary points. *BIT Numerical Mathematics*. **50**, 149–171.

[14] Olver, F.W.J. 1974. Asimptotics and special functions. Newyork: Macmillan

[15] Saad, Y. 2003. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. 2nd edition. The Society for Industrial and Applied Mathematics.

[16] Xiang, S. (2007). On the filon and levin methods for highly oscillatory

integral $\int_a^b f(x)e^{iog(x)} dx$ *Journal Computation Applied Mathematics*. **208**, 434-4