Robot Hareketlerinin Topolojisi

Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK

Erkan AĞYÜZ
Eylül 2012

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Robot Hareketlerinin Topolojisi

Öğrencinin, Adı Soyadı: Erkan AĞYÜZ

Tez Savunma Tarihi: 03.09.2012

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ramazan KOÇ
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri :	İmzası
Yrd. Doç. Dr. Ali BOZKURT	…………………………
Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK	…………………………
Yrd. Doç. Dr. Mine MENEKŞE YILMAZ	…………………………

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Erkan AĞYÜZ

ÖZ

ROBOT HAREKETLERİNİN TOPOLOJİSİ

AĞYÜZ, Erkan
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü.
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Sabri Birlik
Eylül 2012
42 sayfa

Bu tezde Robotlar ve robotların tarihsel gelişim sürecinden bahsedilmiş daha sonra matematiksel kavramlar, homotopi teori ve ilk kez klasik mekanikte kullanılan bir matematiksel yapı olan konfügürasyon uzaylarının tanımı ve örnekleri verilmiştir.

Tezin son bölümünde ise hareket planlama algoritmaları, robot hareketlerinin seyir karmaşıklığını ölçen $TC(X)$ sayısal değişmezi ve $TC(X)$ ile ilgili tanımlar, örnekler ve teoremler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: robotlar; konfügürasyon uzayları; hareket planlama algoritmaları; topolojik karmaşıklık

ABSTRACT
TOPOLOGY OF ROBOT MOTİONS

AĞYÜZ, Erkan
M. Sc. in Department of Mathematics
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Sabri BİRLİK
September 2012
42 pages

In this thesis, robots and the process of historical development of robots have mentioned. The mathematical concepts, homotopy theory and configuration spaces of a system which was first introduced in classical mechanics have given with examples.

Motion planning algorithms, $TC(X)$ is a numerical invariant which measures the navigation complexity of robot motion and related definations, examples and theorems with $TC(X)$ are given in the last part of this thesis.

Key Words: robots; configuration spaces; motion planning algorithms; topological complexity

TEŞEKKÜRLER

Bu çalışma süresince ilgi ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK'e, Gaziantep Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. Sadettin KAPUCU'ya ve destekleriyle her zaman yanımda olduklarını hissettiren canım aileme çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ŞEKİLLER LİSTESİ

SEMBOLLER LİSTESİ

$C(X)$	X ‘in Konfügürasyon uzayı
$\bar{F}$	Bir kümenin kapanışı
$TC(X)$	X uzayı’nın topolojik karmaşıklığı
s	Sürekli hareket planı
$cat(X)$	X ‘in kategorisi

1.BÖLÜM

1.1 Giriş

İnsana benzeyen ama bazı yönleriyle insandan eksik olan varlıklar aslında çok eski bir düşüncedir. Bu düşünce, ortaya çıkışından itibaren insandan daha az nitelikli olan bu varlıkların insana hizmet için varsayımıyla birlikte yürümüştür. Buna benzer düşünceler hep insanoğlunun zihnini meşgul etmiştir. Bu düşünceyle ortaya çıkan robotların gelişimini inceleyen robot teknolojisi hızlı bir şekilde ilerlemesini sürdürmektedir. Bu gelişim sürecinde matematik biliminin lineer cebir, differensiyel denklemler gibi dallarının yanında son yıllarda topoloji dalınında katkısı olmuştur.

Michael Farber, 2003 yılında ‘’Topological Complexity of Motion Planing’’ adlı makalesinde [1] bir robot hareket planlama problemi için $TC(X)$ olarak tanımladığı hareket planlama algoritmalarının süreksizliğinin ölçümü olan bir kavram üzerine çalıştı. Yine 2003 yılında S. Tabanchnikov ve S. Yuzvinsky ile yayınladığı ‘’Topological Robotics: Motion Planing in Projective Spaces’’ adlı makalesinde [4] projektif uzaylarda topolojik robotların temel problemlerinden bazılarına yaklaşımlarda bulundu. Bu makalesinde topolojik robotların en temel problemlerinden biri sayılan bir noktadan sabit bir doğrunun hareketleri üzerine çalışıp, uzayda bir sürekli hareket tarafından robotu A başlangıç noktasından B bitiş noktasına taşıyacak bir hareket planlama algoritması oluşturmayı amaçlamıştır. 2004 yılında yayınlanan ‘’Instabilities of Robot Motion’’ adlı makalesinde [2] robot hareketlerinde oluşan dengesizliklere topolojik yaklaşımlar getirdi.

Bu çalışmaların devamında 2006 yılında yayınladığı ‘’Topology of Robot Motion Planning’’ adlı makalesinde [6] robotlardan esinlenerek topolojik problemlerden bahsedip ayrıntılı olarak robot hareket planlama problemini çalışıp her X yol bağlantılı topolojik uzayını X uzayındaki hareket problemindeki karışıklığı ölçen bir sayısal değişmez olan $TC(X)$ ile birleştirip hareket planlama algoritmalarının yapısını nasıl belirlediğini gösterip ayrıca birden fazla örnekle $TC(X)$ değişmezini hesaplamıştır. Yeni bir çalışma alanı açan M. Farber çalışmalarına devam ederek 2008 yılında yaptığı çalışmaları ‘’Invitation to Topological Robotics’’ adlı kitabında [7] toplayıp geniş bir çalışma olarak yayınladı.

Bu Çalışma altı bölümden oluşmuştur.

Bölüm 1 giriş kısmı olarak robot bilimi ile matematiğin topoloji dalının arasındaki ilişkiye ve yapılan çalışmalara ayrılmıştır.

Bölüm 2 ve Bölüm 3'te sırasıyla önce robotlar ve onların gelişiminden daha sonra temel matematiksel kavramlardan bahsedilecektir.

Bölüm 4 ve Bölüm 5'te sırasıyla önce homotopi teoriden daha sonra topolojinin robot bilimine girişini sağlayan ilk kez klasik mekanikte kullanılan konfügürasyon uzayı ile ilgili tanımlar verilip bu uzayla ilgili temel örneklerden bahsedilecektir.

Çalışmanın son bölümü olan Bölüm 6'da ise topolojik robotlara bir giriş verilecek ve özellikle robot hareket planlama problemine bir topolojik yaklaşım ele alınacaktır.

2. BÖLÜM

Bu bölümde robotlardan, onların uygulama alanlarından ve bu alanda yapılan çalışmalardan bahsedilecektir.

2.1 Robotlar

Gelişen teknolojiyle birlikte insanlığın hayatını kolaylaştırmak, rahat ve huzurlu bir yaşam için birçok alanda çalışmalar yapılmaktadır. Bu çalışmalardan biri de robotik alanında yapılan çalışmalardır.

Bazı tarihçiler robot fikrinin antik yunan dönemine kadar uzandığını düşünmektedirler. Buna kanıt olarak M.Ö. 270 yılında Yunanlı bir mühendis olan Ctesibus'un yaptığı su saatlerini ve hareket edebilir nesneleri gösterirler. Kimi tarihçiler ise 1770'li yıllarda Pierre Jacquet Droz adlı İsviçreli mucit ve saat tamircisinin yapmış olduğu üç tane mekanik oyuncak ile başladığını düşünmektedir. Bu düşüncenin nedeni yapılan bu üç mekanik oyuncağın insan kontrolünden bağımsız farklı özelliklere sahip olmasıydı. Bu oyuncaklar ayrı ayrı müzik çalma, yazı yazma ve resim yapma yeteneğine sahiptiler [13].

Robot kelimesi ilk kez 1921 yılında Çekoslavak yazar Karel Capek'in yazdığı ‘'Rossum's Universal Robot'' adlı tiyatro oyununda kullanıldı. Robot keimesinin çek lisanındaki anlamı işçi idi. Tiyatro oyunu ‘'İnsan makinayı yapar, makina da insanı öldürür.'' teması üzerine kurulmuştu.

1941 yılında Amerikalı yazar Isaac Asimov ‘'Robot'' kelimesinden ‘'Robotik'' kelimesini türeterek ilk kez kullandı. Isaac Asimov 1942 yılında ‘'Runaround'' adlı hikayesinde günümüzde hala geçerli olan robotların 3 yasasını yazdı. Bunlar;

1- Bir robot bir insana zarar veremez veya kayıtsız kalarak bir insanın zarar görmesine neden olamaz.

2- Birinci yasa ile çatışmamak şartı ile bir robot insanlar tarafından verilen emirlere uymak zorundadır.
3- Birinci ve ikinci yasa ile çatışmamak şartı ile bir robot kendi varlığını korumalıdır.
şeklindedir.

2.2 Robotların Uygulama Alanları

Robotlar birçok endüstride vazgeçilmez bir konuma gelmiştir. Başlangıçta endüstride robot kollar kullanılmaktaydı. Gelişen teknolojiyle birlikte zaman içerisinde robotlar sadece robot kol olmaktan çıkıp etrafını algılayabilen, etrafına tepki verebilen ve bir noktadan başka bir noktaya gidebilen makineler haline geldiler. Gezer robotlar günlük hayatımızda birçok farklı uygulamada kullanılmaya başlandı.

Örneğin; bomba imha gibi tehlikeli görevlerde insanlar yerine robotlar kullanılmaktadır. Bu robotlar küçük birer zırhlı tank gibi olup etrafını algılayabilmesi için bir kameraya da sahiptirler (Şekil 2.1) [17].

Şekil 2.1 Bomba imha robotu

Yine insan sağlığını risk altına alacak kimyasal, nükleer ve çevresel kirliliklerin temizlenmesinde robotlardan faydalanılmaktadır. Çernobil santralindeki patlamadan sonra santrali incelemek ve patlamanın etkilerini anlamak için kullanılan Pioneer adlı robot buna örnektir (Şekil 2.2) [13].

Şekil 2.2 Pioneer

Kanalizasyon boruları içinde ki sorunları tespit, klimalarda ki hava kanallarında ki bakım ve onarımda yine robotlar kullanılmaktadır. Alice adlı 2x2x2 ölçülerinde en küçük robotlardan olan bu bağımsız robot aynı zamanda küçük bir kameraya sahip olup sorun tespiti, bakım ve onarım işlerinde kullanılmaktadır (Şekil 2.3) [17].

Şekil 2.3 Alice

Evler, okullar ve işyerleri gibi ortak yaşam alanlarında yaşarken dikkat etmeniz gereken olası yangın durumlarında bunun için dizayn edilmiş robotlardan faydalanılmaktadır. Bu robotlar evlerin, okulların veya işyerlerinin neresinde olursa olsun üzerindeki sensörler sayesinde yangını algılayıp hareket ederek yangını söndürmekte veya uyarı vermekte yardımcı olmaktadır.

Sağlık alanında da robot teknolojisinin hızlı gelişmesiyle yapılan tedavilerin kalitesi artıp hata payı azalmaktadır. 1992 yılında üretilen Papnet adlı robot sinir ağları arasında özellikle boyun bölgesinde kanseri teşhiste yardımcı olmaktadır. Cerrahi tedavilerde de cerrahın uzaktan kontrol ederek hasta üzerinde tedavide kullandığı robotlar bulunmaktadır.

Hastanelerde ki yoğun tempo içinde zamana karşı çalışıldığından işlerin aksamaması önemlidir. Bu konuda da yine son yıllarda yapılan çalışmalar robotların bu alanlara girmesini sağlamıştır. Örneğin, Helpmate adlı robot hastanelerde taşıma işleri için dizayn edilen bir robottur. Bu robot kendisine yüklenen hareket algoritması ile hastanede bir operatörden bağımsız olarak hareket edecek şekilde sensörlere sahipti (Şekil 2.4) [17].

Şekil 2.4 Helpmate

3. BÖLÜM

Bu bölümde tezin sonraki bölümlerinde gerekli olacak temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

3.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 3.1.1 X boş olmayan bir küme ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

M-1) Her $x, y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$ ve $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

M-2) Her $x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$,

M-3) Her $x, y, z \in X$ için $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

şartları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde metrik ve (X,d) sıralı ikilisine metrik uzay denir [12].

Tanım 3.1.2 X boş olmayan bir küme ve τ da X in kuvvet kümesi $\mathrm{P}(X)$ in bir alt koleksiyonu olsun.

T-1) X ve $\varnothing$ kümeleri τ ya aittir. Yani $X \in \tau$ ve $\varnothing \in \tau$ dur.

T-2) τ nun herhangi bir alt koleksiyonuna ait kümelerin bileşkesi yine τ ya aittir. Yani I herhangi bir indis kümesi ve $i \in I$ için $U_i \in \tau$ ise $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ dur.

T-3) τ ya ait iki kümenin kesişimi yine τ ya aittir. Yani $U, V \in \tau$ ise $U \cap V \in \tau$ dur.

özellikleri sağlanıyorsa τ ya X üzerinde bir topoloji denir. τ koleksiyonu X üzerinde bir topoloji ise (X,τ) sıralı ikilisine bir topolojik uzay ve X in elemanlarına noktalar denir [9].

Tanım 3.1.3 (X,τ) bir topolojik uzay olsun. τ nun elemanlarına (X,τ) uzayının açık kümeleri veya bir karışıklık meydana gelmeyecekse X in açık kümeleri denir [9].

Tanım 3.1.4 (X,τ) bir topolojik uzay ve U kümesi X in bir alt kümesi olsun. U nun X e göre tümleyeni olan $X-U$ kümesi (X,τ) uzayında açıksa U ya (X,τ) uzayının kapalı alt kümesi denir [9].

Tanım 3.1.5 A bir (X,τ) topolojik uzayının alt kümesi ve $x\in X$ olsun. x noktasını içeren her U açık kümesi x noktasından başka A nın bir elemanını içeriyorsa x noktasına A kümesinin bir limit (yığılma) noktası denir. Yani $x\in U$ özelliğindeki her $U\in\tau$ için $(A-\{x\})\cap U\neq\varnothing$ ise x noktasına A kümesinin bir limit (yığılma) noktası denir. A nın bütün limit noktalarının kümesi $\tilde{A}$ ile gösterilir [9].

Tanım 3.1.6 (X,τ) bir topolojik uzay A, X in bir alt kümesi ve $\tilde{A}$, A nın limit noktalarının kümesi olsun. $A\cup\tilde{A}$ kümesine A kümesinin kapanışı denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir [9].

Tanım 3.1.7 $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ bire-bir ve örten bir fonksiyon olsun. f ve f^{-1} fonksiyonlarının her ikisi de sürekli ise f ye bir homeomorfizm denir. (X,τ_1) ve (Y,τ_2) uzayları arasında bir homeomorfizm varsa bu uzaylara homeomorfik uzaylar denir ve genellikle $(X,\tau_1)\cong(Y,\tau_2)$ şeklinde gösterilir [12].

Tanım 3.1.8 Homeomorfizmler altında korunan özelliklere topolojiksel özellikler denir [12].

Tanım 3.1.9 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun.

i. I bir indis kümesi olmak üzere her $i\in I$ için $U_i\in\tau$ ve

$$A\subseteq\bigcup_{i\in I}U_i$$

ise $\upsilon=\{U_i : i\in I\}$ koleksiyonuna A nın bir açık örtüsü denir.

ii. $\upsilon=\{U_i : i\in I\}$ koleksiyonu A nın açık örtüsü ve $J\subseteq I$ olmak üzere $V=\{U_i : i\in J\}$ koleksiyonu A nın bir örtüsü ise $V=\{U_i : i\in J\}$

örtüsüne $\upsilon = \{U_i : i \in I\}$ örtüsünün bir alt örtüsü denir. Bu durumda J sonlu ise $V = \{U_i : i \in J\}$ örtüsüne $\upsilon = \{U_i : i \in I\}$ örtüsünün sonlu alt örtüsü denir.

Tanım 3.1.10 (X,τ) bir topolojik uzay olsun. X in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (X,τ) uzayına kompakt uzay denir [9].

Not 3.1.1 Kompaktlığın tanımı gereğince bir uzayın kompakt olmadığını göstermek için uzayın sonlu hiçbir alt örtüsü olmayan açık bir örtüsünün olduğunu göstermek yeterlidir [9].

Tanım 3.1.11 (X,τ) bir topolojik uzay ve A, X in bir alt kümesi olsun. (A,τ_A) alt uzayı kompakt ise A ya X in kompakt alt kümesi denir [9].

Tanım 3.1.12 (X,τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun.

a) $x \in U \subseteq C$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ ve X in kompakt bir C alt kümesi varsa X uzayına x noktasında yerel kompakttır denir.

b) Her $x \in X$ için (X,τ) uzayı x noktasında yerel kompakt ise (X,τ) uzayına yerel kompakt uzay denir.

c) $A \subseteq X$ olmak üzere (A,τ_A) uzayı yerel kompakt ise A kümesine (X,τ) uzayının yerel kompakt bir alt kümesi denir [9].

Teorem 3.1.13 Yerel kompakt her (X,τ) uzayının kapalı her A alt uzayı yerel kompakttır [9].

Teorem 3.1.14 (X,τ_1) yerel kompakt bir topolojik uzay ve (Y,τ_2) herhangi bir topolojik uzay olmak üzere $f : X \to Y$ sürekli, örten ve açık bir fonksiyon olsun. Bu durumda (Y,τ_2) uzayı yerel kompakttır [9].

Tanım 3.1.15 X ve Y topolojik uzaylar olsunlar. X^Y, Y den X e bütün sürekli fonksiyonlarının alt kümesi olsun. K ve U sırasıyla Y ve X in kompakt alt kümeleri için $(K;U) = \ f \in X^Y : f(K) \subset U \$ olduğunda bütün $(K;U)$ alt kümelerinin bir alt tabanından ibaret olan topolojik uzaya X^Y üzerinde kompakt-açık topoloji denir.

Tanım 3.1.16 (X,τ) bir topolojik uzay olsun. $I=[0,1]$ olmak üzere sürekli her $f:I\to X$ fonksiyonuna X de bir yol denir. $f(0)$ noktasına f yolunun başlangıç noktası ve $f(1)$ noktasına da f yolunun bitiş noktası denir. $f(0)=a$ ve $f(1)=b$ ise f ye a noktasını b noktasına birleştiren bir yol veya a dan b ye bir yol denir [12].

Örnek 3.1.1 (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Her $a\in X$ için $f(t)=a$ şeklinde tanımlanan $f:I\to X$ sabit fonksiyonu X de bir yoldur. Bu şekilde tanımlanan f yoluna a değerli sabit yol denir ve genellikle e_a ile gösterilir.

Örnek 3.1.2 (X,τ) bir topolojik uzay ve $f:I\to X$ fonksiyonu X de bir yol olsun. Bu durumda $g(t)=f(1-t)$ şeklinde tanımlı $g:I\to X$ fonksiyonu da X de bir yoldur. Bu şekilde tanımlanan g yoluna f nin tersi denir ve genellikle $\overleftarrow{f}$ ile gösterilir. Böylece, f fonksiyonu a dan b ye bir yol ise $\overleftarrow{f}$ de b den a ya bir yoldur.

Örnek 3.1.3 (X,τ) bir topolojik uzay ve $f:I\to X$ ve $g:I\to X$ fonksiyonları sırasıyla a noktasından b noktasına ve b noktasından c noktasına iki yol olsun. $fg:I\to X$ fonksiyonu

$$(fg)(t)=\begin{cases} f(2t), 0\le t\le 1/2 \\ g(2t-1), 1/2\le t\le 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. f ve g fonksiyonları sürekli, $[0,1/2],[1/2,1]$ kümeleri I da kapalı ve

$$f\left(2\frac{1}{2}\right)=f\ 1\ =b \text{ ve } g\left(2\cdot\frac{1}{2}-1\right)=g\ 0\ =b$$

olduğundan fg fonksiyonu süreklidir. Böylece fg fonksiyonu X de bir yoldur. Diğer yandan

$$fg\ \ 0\ =f\ 0\ =a \text{ ve } fg\ 1\ =g\ 1\ =c$$

olduğundan fg , a dan c ye bir yoldur. Bu şekilde tanımlanan fg yoluna f ve g yollarının çarpımı denir.

Tanım 3.1.17 (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Her $a,b \in X$ için $f(0)=a$ ve $f(1)=b$ olacak şekilde bir f yolu varsa (X,τ) uzayına yol bağlantılı uzay denir [12].

Örnek 3.1.4 $I=[0,1]$ aralığı yol bağlantılıdır. $a,b \in I$ olsun. Bu durumda $f(t)=tb+(1-t)a$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu I da bir yoldur. Üstelik, $f(0)=a$ ve $f(1)=b$ olduğundan f yolu a dan b ye bir yoldur.

Tanım 3.1.18 $p:E\rightarrow B$ ye her uzaya göre homotopi özelliklerini koruyan sürekli fonksiyona bir fibrasyon denir.

4.BÖLÜM

Bu bölümde cebirsel topolojinin konularından olan ve robotların hareket algoritmalarını oluşturmada rol oynayan homotopi teorinin temel tanım ve örnekleri verilmiştir.

4.1. Homotopi

Tanım 4.1.1 X ve Y iki topolojik uzay ve f_0 ile f_1, X den Y ye giden iki sürekli fonksiyon olsun. Eğer $0 \leq t \leq 1$ için t ye göre sürekli olarak değişen bir

$$f_t : X \to Y$$

sürekli fonksiyonlar ailesi var ise bu taktirde f_0 ile f_1 fonksiyonlarına homotopiktir denir [10].

Tanım 4.1.2 X ve Y iki topolojik uzay ve

$$f_0, f_1 : X \to Y$$

sürekli fonksiyonlar olsun. Eğer $I = [0,1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F : X \times I &\to Y \\ (x,t) &\to F(x,t) \end{aligned}$$

$F(x,0) = f_0(x)$ ve $F(x,1) = f_1(x)$ olacak şekilde bir sürekli F mevcutsa f_0 ile f_1 sürekli fonksiyonları homotopiktir ve F fonksiyonuna da f_0 ile f_1 arasındaki homotopi denir. Bu durumda $f_0 \cong f_1$ ya da $F : f_0 \cong f_1$ yazarız [10].

Her bir $t \in [0,1]$ için $f_t : X \to Y$ bir sürekli dönüşümü ise $F(X,t)$ yi $f_t(x)$ ile gösterilebilir. $f : I \to Y$ bir yol olsun.

$$\begin{aligned} F : I \times I &\to Y \\ (x,t) &\to F(x,t) = f((1-t)x) \end{aligned}$$

fonksiyonu f yolu ile $\varepsilon_{f(0)}$ sabit yolu arasında bir homotopidir.

Tanım 4.1.3 X, Y iki uzay ve A, X 'in bir alt kümesi olsun. f_0 ile f_1 de X den Y ye giden iki sürekli fonksiyon olsun. Eğer $a \in A$ için $F(a,t)$, t ye bağlı olmayacak şekilde bir

$$F : X \times I \to Y$$

homotopisi mevcut ise f_0 ile f_1 ’e A ya göre homotopiktir denir. Yani $\forall a \in A$ ve $\forall t \in I$ için

$$F(a,t) = f_t(a) = f_0(a) = f_1(a)$$

dır. Buna göre F homotopisine A alt kümesine göre relatif homotopi denir ve $f_0 \cong f_1(relA)$ dır [10].

Örnek 4.1.1 $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ fonksiyonu ile $g : [0,1] \to \mathbb{R},\ g(x) = 2$ sabit fonksiyonunun homotopik olduğunu gösterelim.

Çözüm: $F : I \times I \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(x,t) \to F(x,t) = (1-t)x^2 + 2t$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu F fonksiyonu $\forall x,t \in I$ için süreklidir.

$t = 0$ için

$F(x,0) = (1-0)x^2 + 2.0 = x^2 = f(x)$ ve

$t = 1$ için

$F(x,1) = (1-1)x^2 + 2.1 = 2 = g(x)$

olur. O halde $f \cong g$ dir.

Örnek 4.1.2 $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ fonksiyonu ile $g : [0,1] \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun homotopik olduğunu gösterelim.

Çözüm: Bu iki fonksiyonun homotopik olduğunu göstermek için $F(x,0) = f(x) = x^2,\ F(x,1) = g(x) = \sqrt{x}$ olacak şekilde bir $F : I \times I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon bulmalıyız.

$F : I \times I \to \mathbb{R}$ olmak üzere $(x,t) \to F(x,t) = \sqrt{x}t + (1-t)x^2$ fonksiyonunu ele alalım. Bu F fonksiyonu $\forall x,t \in I$ için süreklidir. Ayrıca

$t = 0$ için

$F(x,0) = \sqrt{x} \cdot 0 + (1-0) \cdot x^2 = x^2 = f(x)$ ve

$t = 1$ için

$F(x,1) = \sqrt{x} \cdot 1 + (1-1)x^2 = \sqrt{x} = g(x)$

olur. O halde $F : f \cong g$ dir. $A = \{0,1\} \subset I$ olsun.

$$F(0,t) = 0 = g(0) = f(0)$$
$$F(1,t) = 1 = g(1) = f(1)$$

olduğundan her $a \in A$ için $F(a,t)$ değeri t ye bağlı olmaz. Bu ise F nin A ya göre relatif homotopi olduğu anlamına gelir. O halde $f \cong g(rel(A))$ olur.

Örnek 4.1.3 $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ çember olmak üzere $f : S^1 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to f(x,y) = (x,y)$ ile $g : S^1 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to g(x,y) = (0,0)$ fonksiyonlarının homotopik olduklarını gösteriniz.

Çözüm: $F : S^1 \times I \to R^2,\ ((x,y),t) \to F((x,y),t) = ((1-t)x,(1-t)y)$ fonksiyonunu düşünelim.

F fonksiyonu süreklidir ve

$t = 0$ için

$F((x,y),0) = (x,y) = f(x,y)$

$t = 1$ için

$F((x,y),1) = (0,0) = g(x,y)$

olup $F = f \cong g$ elde edilir.

Teorem 4.1.1 $f,g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ iki sürekli fonksiyon olsun. Buna göre

$$F : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^m$$
$$(x,t) \to F(x,t) = (1-t) \cdot f(x) + t \cdot (g(x))$$

fonksiyonu süreklidir ve

$$F(x,0) = f(x)$$
$$F(x,1) = g(x)$$

olup F, f ile g arasında bir homotopidir [11].

Tanım 4.1.4 X ve Y iki uzay olsun. Eğer

$$f : X \to Y \text{ ve } g : Y \to X$$

sürekli fonksiyonları

$$gf \cong I_X = X \to X$$

ve

$$fg \cong I_Y = Y \to Y$$

olacak şekilde mevcutsa X ve Y uzaylarına aynı homotopi tipindendir veya homotopik denktir denir [10].

Örnek 4.1.4 $n > 0$ için $D^n \subset \mathbb{R}^n$, $D^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \leq 1\}$ n diski tek bir noktanın oluşturduğu tek nokta kümesi ile aynı homotopi tipine sahip olduğunu gösterelim.

Çözüm: D^n ile $\{y\}$ nin aynı homotopi tipine sahip olduğunu göstermek için

$$\begin{aligned} f : \{y\} &\to D^n \\ y &\to f(y) = y \end{aligned}$$

içine fonksiyonu ile

$$\begin{aligned} g : D^n &\to \{y\} \\ x &\to g(x) = y \end{aligned}$$

sabit fonksiyonunu ele alalım.

$$\begin{aligned} gf = \{y\} &\to D^n \to \{y\} \\ y &\to y \to y \end{aligned}$$

olup $gf = I_y$

$$\begin{aligned} fg = D^n &\to \{y\} \to D^n \\ x &\to y \to y \end{aligned}$$

fonksiyonu ve $I_{D^n} = D^n \to D^n$ birim fonksiyonu için

$$
\begin{aligned}
F : D^n \times I &\to D^n \\
(x,t) &\to F(x,t) = t \cdot x + (1-t) \cdot y
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlı fonksiyon sürekli ve

$$
\begin{aligned}
F(x,0) &= y = fg(x) \\
F(x,1) &= x = I_{D^n}(x)
\end{aligned}
$$

olur. O halde F fonksiyonu fg ve I_{D^n} arasında bir homotopidir. Yani $fg \cong I_{D^n}$ dir.

Tanım 4.1.5 X bir uzay olsun. Eğer X uzayı tek bir noktaya homotopik denk ise bu uzaya büzülebilir uzay denir [11].

Teorem 4.1.2 S büzülebilir bir uzay ve T herhangi bir uzay ise $f,g : T \to S$ sürekli fonksiyonu homotopiktir [11].

İspat: $f,g : T \to S$ iki fonksiyon olsun. S büzülebilir olduğundan

$$
h : S \to \{0\} \ ve \ j : \{0\} \to S
$$

sürekli fonksiyonları $h \circ j \cong I_0$ ve $j \circ h \cong I_S$ olacak şekilde mevcuttur. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
f &= I_S \circ f \cong j \circ h \circ f \\
g &= I_S \circ g \cong j \circ h \circ g
\end{aligned}
$$

dir.

$$
\begin{aligned}
h \circ f : T &\to \{0\} \to S \\
t &\to hof(t) = 0
\end{aligned}
$$

olduğundan dolayı

$$
\begin{aligned}
j \circ h \circ f : T &\to S \\
t &\to j(0)
\end{aligned}
$$

fonksiyonu sabit fonksiyon olmalıdır. Benzer şekilde $j \circ h \circ g : T \to S$ fonksiyonuyla sabit fonksiyon elde edilir. O halde $f \cong g$ olur.

Tanım 4.1.6 X bir topolojik uzay ve A, X 'in bir alt kümesi olsun. Eğer $r : X \to A$ sürekli fonksiyonu $i : A \to X$ içine fonksiyon olmak üzere, $ri = I_A : A \to A$

olacak şekilde bulunabiliyorsa A ya X in retraksiyonu ve r fonksiyonuna retraksiyon fonksiyonu denir [10].

4.2. Yolların Homotopisi

Eğer f ile g ; $f(1)=g(0)$ olacak şekilde X içinde iki yol ise f ile g nin $f*g$ çarpımı

$$(f*g)(t)=\begin{cases} f(2t), & 0\le t\le 1/2 \\ g(2t-1), & 1/2\le t\le 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{0,1\}$ kümesine göre homotopi olan yolların homotopi sınıfından bahsedeceğiz.

Tanım 4.2.1 f ile g , X içinde iki yol olsun. Eğer f ile g , $\{0,1\}$ e göre homotopik ise bunlara denktir denir ve bu durum $f\sim g$ ile gösterilir. Buna göre eğer X içindeki f_0 ile f_1 yolları için

$$\begin{aligned} F: I\times I &\to X \\ (t,s) &\to F(t,s) \end{aligned}$$

sürekli fonksiyonu

$$\begin{aligned} F(t,0)&=f_0(t) \\ F(t,1)&=f_1(t) \\ F(0,s)&=f_0(0)=f_1(0) \\ F(1,s)&=f_0(1)=f_1(1) \end{aligned}$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa f_0 ile f_1 birbirine denktir denir. $F=f_0\sim f_1$ yazılır [13]. Buna göre X içindeki yolları homotopi sınıflarına ayırabiliriz. O halde X içindeki yolların homotopi sınıflarının kümesi

$$A=\{[f]\,|\,f:[0,1]\xrightarrow{\text{sürekli}}X\}$$

olarak gösterebiliriz. $[f],[g]\in A$ için $f(1)=g(0)$ oluyorsa, $[f][g]=[f*g]$ olarak bir işlem tanımlanıyor.

Teorem 4.2.1 f_0,f_1,g_0,g_1 X içinde $f_0(1)=g_0(0)$ ve $f_1(1)=g_1(0)$ özelliğindeki yollar olsun. Eğer $f_0\sim f_1$ ve $g_0\sim g_1$ ise $f_0*g_0\sim f_1*g_1$ dir. Eğer $f_0\sim f_1$ ve $g_0\sim g_1$ ise $f_0*g_0\sim f_1*g_1$ dir [13].

İspat: $F = f_0 \sim f_1$ ve $G = g_0 \sim g_1$ olsun ve $\{0,1\}$ e göre homotopik olsun. Yani,

$$\begin{aligned} F : I \times I &\to X \\ (t,s) &\to F(t,s) \end{aligned}$$

sürekli fonksiyonu için

$$\begin{aligned} F(t,0) = f_0(t), F(0,s) = F_0(s) = f_0(0) = f_1(0) \\ F(t,1) = f_1(t), F(1,s) = F_1(s) = f_0(1) = f_1(1) \end{aligned}$$

sağlanır ve

$$\begin{aligned} G : I \times I &\to X \\ (t,s) &\to G(t,s) \end{aligned}$$

sürekli fonksiyonu için

$$\begin{aligned} G(t,0) = g_0(t), G(0,s) = G_0(s) = g_0(0) = g_1(0) \\ G(t,1) = g_1(t), G(1,s) = G_1(s) = g_0(1) = g_1(1) \end{aligned}$$

sağlanır. Buna göre,

$$\begin{aligned} H : I \times I &\to X \\ (t,s) &\to H(t,s) \end{aligned}$$

fonksiyonunu

$$H(t,s) = \begin{cases} F(2t,s), 0 \le t \le 1/2 \\ G(2t-1,s), 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu fonksiyon süreklidir çünkü; $t = 1/2$ için $F(1,s) = f_0(1) = g_0(0) = G(0,s)$ olduğundan dolayı H fonksiyonu süreklidir. Ayrıca

$$H(t,0) = \begin{cases} F(2t,0), 0 \le t \le 1/2 \\ G(2t-1,0), 1/2 \le t \le 1 \end{cases} = \begin{cases} f_0(2t), 0 \le t \le 1/2 \\ g_0(2t-1), 1/2 \le t \le 1 \end{cases} = (f_0 * g_0)(t)$$

ve

$$H(t,1) = \begin{cases} F(2t,1), 0 \le t \le 1/2 \\ G(2t-1,1), 1/2 \le t \le 1 \end{cases} = \begin{cases} f_1(2t), 0 \le t \le 1/2 \\ g_1(2t-1), 1/2 \le t \le 1 \end{cases} = (f_1 * g_1)(t)$$

olur. Ayrıca

$$H(0,s) = F(0,s) = f_0(0) = (f_0 * g_0)(0) = f_1(0) = (f_1 * g_1)(0)$$

ve

$$H(1,s) = G(1,s) = g_0(1) = (f_0 * g_0)(1) = g_1(1) = (f_1 * g_1)(1)$$

olur. Buna göre $H = f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$ elde edilir.

Teorem 4.2.2 X bir uzay ve f, g, h, X içinde $f(1) = g(0), g(1) = h(0)$ olacak şekilde üç yol olsun. Buna göre $(f * g) * h \sim f * (g * h)$ dir [14].

İspat:

$$\left[f * g \;\; * h \right](t) = \begin{cases} f(4t), 0 \le t \le 1/4 \\ g(4t-1), 1/4 \le t \le 1/2 \\ h(2t-1), 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

ve

$$\left[f * (g * h) \right](t) = \begin{cases} f(2t), 0 \le t \le 1/2 \\ g(4t-2), 1/2 \le t \le 3/4 \\ h(4t-3), 3/4 \le t \le 1 \end{cases}$$

dir. Buna göre;

$$\begin{aligned} F : I \times I &\to X \\ (t,s) &\to F(t,s) \end{aligned}$$

fonksiyonunu

$$F(t,s) = \begin{cases} f\left(\dfrac{4t}{1+s}\right), 0 \le t \le s+1/4 \\ g(4t-s-1), s+1/4 \le t \le s+2/4 \\ h\left(\dfrac{4t-s-2}{2-s}\right), s+2/4 \le t \le 1 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Her t,s değeri için f,g,h fonksiyonları sürekli olup $F(t,s)$ süreklidir.

$$F(t,0)=\begin{cases} f(4t), 0\le t\le {}^{1}\!/_{4} \\ g(4t-1), {}^{1}\!/_{4}\le t\le {}^{1}\!/_{2} \\ h(2t-1), {}^{1}\!/_{2}\le t\le 1 \end{cases} = \left[\ f*g\ \ *h\right](t)$$

ve

$$F(t,1)=\begin{cases} f(2t), 0\le t\le {}^{1}\!/_{2} \\ g(4t-2), {}^{1}\!/_{2}\le t\le {}^{3}\!/_{4} \\ h(4t-3), {}^{3}\!/_{4}\le t\le 1 \end{cases} = \left[f*\ \ g*h\ \right](t)$$

dir. Ayrıca

$$F(0,s)=f(0)=((f*g)*h)(0))=(f*(g*h))(0)$$

ve

$$F(1,s)=h(1)=((f*g)*h)(1)=(f*(g*h))(1)$$

dir. Böylece F homotopiktir. Yani $(f*g)*h\sim f*(g*h)$ elde edilir.

Eğer $x\in X$ ise

$$\begin{aligned} \left[0,1\right] &\to X \\ t &\to \varepsilon_x(t)=x \end{aligned}$$

sabit bir yoldur. Buna göre bir f yolu x noktasında başlayıp y de bitiyor ise ε_x*f ve $f*\varepsilon_y$ yollarından söz edilebilir.

Teorem 4.2.3 f, X içinde x noktasında başlayıp y noktasında biten bir yol ise $\varepsilon_x*f\sim f$ ve $f*\varepsilon_y\sim f$ dir [14].

İspat: Sadece $\varepsilon_x*f\sim f$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} F: I\times I &\to X \\ (t,s) &\to F(t,s) \end{aligned}$$

fonksiyonunu

$$F(t,s)=\begin{cases} x & ,0\le t\le 1-{}^{s}\!/_{2} \\ f\left(\dfrac{2t-1+s}{1+s}\right), & 1-{}^{s}\!/_{2}\le t\le 1 \end{cases}$$

fonksiyonu olarak tanımlayalım. Bu fonksiyon süreklidir. Ayrıca

$$F(t,0)=\begin{cases}\varepsilon_x(2t), 0\le t\le 1/2\\ f(2t-1), 1/2\le t\le 1\end{cases}=(\varepsilon_x * f)(t)$$

ve

$$F(t,1)=\begin{cases}x \quad ,t=0\\ f(t), 0\le t\le 1\end{cases}=f(t)$$

elde edilir. Buna göre $\varepsilon_x * f\sim f$ elde edilir. Burada $[\varepsilon_x][f]=[f]$ olduğu söylenebilir. Burada ε_x birim olarak elde edilir.

Tanım 4.2.2 f bir yol ise $\overline{f}(t)=f(1-t)$ biçiminde tanımlanan $\overline{f}, f$ yolunun tersidir. Ayrıca $f\sim g$ olması için gerek ve yeter şart $\overline{f}\sim\overline{g}$ olmasıdır [14].

Teorem 4.2.4 f, X içinde başlangıç noktası x bitim noktası y olan bir yol olsun. Buna göre $f*\overline{f}\sim\varepsilon_x$ ve $\overline{f}*f\sim\varepsilon_y$ dir [14].

İspat: Sadece $f*\overline{f}\sim\varepsilon_x$ olduğunu gösterelim.

$$(f*\overline{f})(t)=\begin{cases}f(2t), 0\le t\le 1/2\\ \overline{f}(2t-1), 1/2\le t\le 1\end{cases}=\begin{cases}f(2t), 0\le t\le 1/2\\ f(2-2t), 1/2\le t\le 1\end{cases}$$

dir.

$$\begin{aligned}F: I\times I&\to X\\ (t,s)&\to F(t,s)\end{aligned}$$

olmak üzere

$$F(t,s)=\begin{cases}f((2t)(1-s)), 0\le t\le 1/2\\ f((2t-2)(1-s)), 1/2\le t\le 1\end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon süreklidir. Ayrıca

$$\begin{aligned}F(t,0)&=(f*\overline{f})(t)\\ F(t,1)&=f(0)=x=\varepsilon_x(t)\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $f*\overline{f}\sim\varepsilon_x$ olur. Buradan $[f][\overline{f}]=\varepsilon_x$ olup $[f]=[f]^{-1}$ olduğu söylenir.

5. BÖLÜM

5.1. Konfügürasyonlar Uzayı

Bir sistemin konfügürasyon uzayı ilk kez klasik mekanikte ortaya konulan bir kavramdır. Konfügürasyon uzayı, nesnelerin sistemlerinin etkileşimleri ve yapılarını çalışmada kullanılan matematiksel bir yapıdır. Bu bölümde tüm fiziksel sistemlerin konfügürasyon uzaylarında uygulamada geçerli olan tanımlarını verip bir konfügürasyon uzayını oluşturmayı örneklerle göstereceğiz.

Tanım 5.1.1 Bir T sisteminin konfügürasyonu; T de ki her sabit noktayı kendisine götüren, her sabit mesafeye göre bir izometri belirten ve $\mathbb{R}^k$ üzerinde alışılmış metrik olarak tanımlanan

$$c : T \to \mathbb{R}^k$$

fonksiyonudur [15].

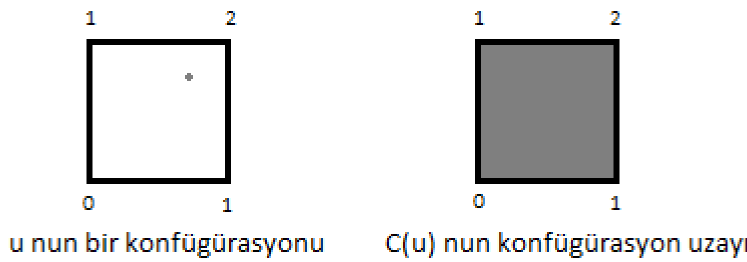
Tanım 5.1.2 Bir sistemin konfügürasyon uzayı, bu sistemin tüm mümkün konfügürasyonlarının uzayıdır. Konfügürasyon uzayı uygun öklid uzayın bir alt uzayına topolojiktir [15].

5.2 Bir Konfügürasyon Uzayı'nın Oluşturulması

Bir giriş olarak, farklı yüzeylerde kısıtlanmış parçaların temel sistemlerinin sayısının konfügürasyon uzaylarının basit örneklerini vereceğiz.

Örnek 5.2.1 Rastgele bir kağıt parçası üzerinde bir u noktası aldığımızı varsayalım. O zaman u nun her farklı pozisyonu u nun bir konfügürasyonudur. Kağıt parçasının her köşesini ''1'' birim olacak şekilde belirlersek o zaman u nun bir konfügürasyonu (x_u, y_u) tarafından temsil edilebilir. $((x_u, y_u) \in \{[0,1] \times [0,1]\})$ Böylece bu sistem için $C(u)$

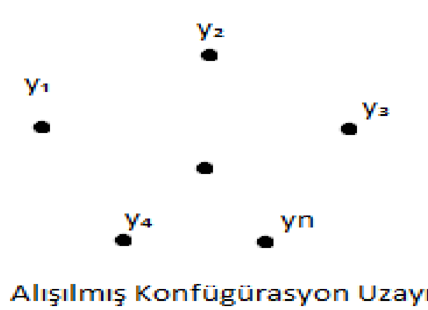
konfügürasyon uzayının birim kareye homeomorfik olduğunu görürüz. Bu durumda $C(u) = [0,1] \times [0,1]$, u nun mümkün tüm konfügürasyonlarının birleşimidir [8].



Şekil 5.1 Bir noktanın konfügürasyonu ve konfügürasyon uzayı

Örnek 5.2.2 Örnek 5.2.1 de ki duruma bir diğer v parçası eklediğimizi varsayalım, böylece sayfa üzerinde u ve v parçalarının konfügürasyon uzayına bakarız. u nun konfügürasyon uzayı önceki gibi $C(u)$ dur ve benzer şekilde v nin konfügürasyon uzayı $C(v) = [0,1] \times [0,1]$ dır. u ve v nin aynı sayfa üzerinde ortak konfügürasyon uzayında kesişimlere sadece $C(u)$ ve $C(v)$ nin çarpımında izin verilir. Bu yüzden sayfa üzerinde iki parçacığın konfügürasyon uzayı $C(u) \times C(v) = [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ dört boyutlu uzayda birim küptür [8].

Örnek 5.2.3 Y bir topolojik uzay ve $X = F(Y,n), i \neq j$ için $y_i \neq y_j$ özelliğindeki $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ n demet içeren $Y \times Y \times \ldots \times Y$'nin alt kümesi olsun. $X = F(Y,n)$ çarpışmalardan kaçınan Y nin hareket eden parçacıklarının sisteminin konfügürasyon uzayıdır. Bu uzaya alışılmış konfügürasyon uzayı denir [1].



Şekil 5.2 Alışılmış konfügürasyon uzayı

Sonuç 5.2.1 O zaman her eklenen parçadan sonra o parçanın pozisyonunu tanımlamak için ihtiyaç olan ekstra iki koordinat alacağız. Böylece n parçalı sistemin bir parçası için konfügürasyon uzayı $\underbrace{[0,1]\times\ldots\times[0,1]}_{2n\,kez}$ dir [8].

5.3 Düzlemde Parçacıklar

Farklı yüzeylerde kısıtlanmış parçaları düzleme genişletirsek bir parçacık için konfügürasyon uzayının sadece düzlem $(\mathbb{R}^2)$ olduğunu görürüz. İki parçacık için konfügürasyon uzayı $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ veya $\mathbb{R}^4$ dür [8].

$\mathbb{R}^2$ düzleminde n parçacıklı konfügürasyon uzayı basitçe $(\mathbb{R}^2)^n=\mathbb{R}^{2n}$ dir. Bu başlangıçta parçaların konfügürasyon uzayının $\mathbb{R}^2$ olması düşüncesinden bir parça karışık görülebilir. Ancak her bir parçacık kendine özgü olan koordinat çiftini göz önüne almak zorunda bu yüzden tüm parçacıkların pozisyonları için $2n$ koordinatları olacaktır. Böylece konfügürasyon uzayı $\mathbb{R}^{2n}$ dir.

Genel olarak bir yüzey üzerinde hareketi sınırlı n parçacıklı her sistem için parçacıkların çalışma uzayı sadece T olmasına rağmen konfügürasyon uzayı T^n dir.

5.4 Bağlantı Konfügürasyon Uzayları

Her tek pozisyonun veya düzenlemenin bir bağlantı olabileceğini düşünürsek o zaman bu sözü edilen bağlantının bir konfügürasyon uzayıdır. O halde konfügürasyonların koleksiyonu bu bağlantının konfügürasyonunu yapar.

Önceden verilen tanımlar burada da uygulanır özellikle bağlantının sabit noktaları tüm konfügürasyonlar için sabit kalmalı ve bağlantıların uzunlukları tüm konfügürasyonlar için aynı olmalıdır.

Tanım 5.4.1 Bir L bağlantısının konfügürasyonu $c:L\to\mathbb{R}^k$ olarak tanımlanır öyle ki $c\big|F=f\big|F$ olup F sabit noktaların kümesidir ve f, $\mathbb{R}^k$da sabit noktaların yerel fonksiyonudur. c fonksiyonu ayrıca kenar uzunluklarını korur, yani c alışılmış metriğe göre izometridir [15].

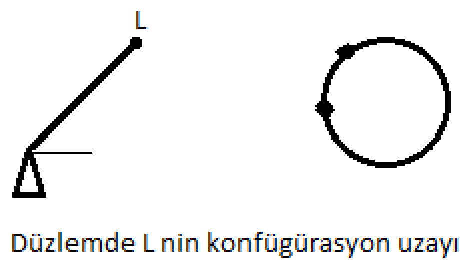
Tanım 5.4.2 L nin konfügürasyon uzayı $C(L)$, tüm konfügürasyonların uzayıdır. c Fonksiyonu tam olarak tanımlama gerekmeksizin konfügürasyon uzayları belirtilebilir ve tanımlanabilir olduğu için tanımlanmaz [15].

Örnek 5.4.1 L , $\mathbb{R}^k$ da bir ucunda sabit tek çubuğu içeren bir bağlantı olsun.(Bu bağlantı tek kol olarak adlandırılır.) O zaman L nin bir konfügürasyonu çubuğun diğer ucunun pozisyonları tarafından tanımlanabilir. (veya $k=2$ durumundaki gibi) Yatay eksenle yaptığı açı ile $\mathbb{R}^k$ da çubuğun konfügürasyon uzayı S^{k-1} olur [8].

Bir tek çubuğun konfügürasyon uzayı üzerine inşa edilen tüm konfügürasyon uzayları S^{k-1} dir ve bundan böyle bağlantıların konfügürasyon uzaylarını

$$\underbrace{S^{k-1}\times S^{k-1}\times\ldots\times S^{k-1}}_{koldaki\ eklemler\ kadar}$$

in alt uzayı olarak göreceğiz.

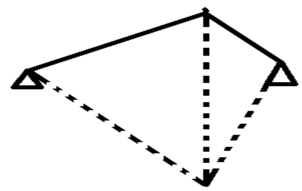


Şekil 5.3 Tek koldan oluşan bağlantının konfügürasyon uzayı

Örnek 5.4.2 L yi genişletelim ve iki bağlantı içersin öyle ki bir eklem bir ucundan önceki örnekte olduğu gibi sabittir ve ikinci eklem ayrıca bir ucundan sabit ama o sabit olduğunda birinci eklemin ucu serbesttir [8].

Açıkça karşılıklı olarak bu iki eklemin pozisyonları bağımsızdır ve ayrıca konfügürasyon uzayı bu iki bileşen eklemin konfügürasyon uzayının çarpımıdır. Böylece $C(L)=S^{k-1}\times S^{k-1}$ dir. Tüm bağlantıların konfügürasyon uzaylarını görmek için alt bağlantıların konfügürasyon uzaylarının kesişimlerine ayrıca bakılır.

Örnek 5.4.3 L , $\mathbb{R}^2$ de iki tek koldan oluşan bir bağlantı olsun.(Örnek 5.4.2 gibi) öyle ki onların sabit kolları arasında ki mesafe onların uzunlukları toplamından daha az ve onların serbest noktalarında birleşiktir. O zaman L nin konfügürasyonları, iki bileşenli eklemlerin konfügürasyon uzaylarının kesişimlerine karşılık gelir. Yani L nin konfügürasyon uzayı sadece iki ayrık noktadır (S^0) [15].



Şekil 5.4 İki koldan oluşan bağlantının konfügürasyon uzayı

Örnek 5.4.4 Örnek 5.4.3 de ki gibi $\mathbb{R}^k$ da sabit iki eklem içeren bir bağlantı alalım öyle ki onların sabit uç noktaları arasındaki uzaklık eklemlerin uzunluğu toplamından daha az ve onların serbest uçları birleşmiş olsun. Önceki gibi her ayrık eklem için konfügürasyon uzayları sadece S^{k-1} dir. Bu alt konfügürasyonların kesişimi S^{k-2} gibi bu bağlantı için konfügürasyon uzayıdır [15].

6. BÖLÜM

Bu bölümde robotların hareket algoritmalarının nasıl oluştuğundan, bu algoritmalar oluşturulurken karşılaşılan karışıklıklara topolojik yaklaşımlardan bahsedilip topolojik yaklaşımın özellikleri verilecektir.

6.1. Hareket Planlama Algoritması

Tanım 6.1.1 X de bir $\gamma:[0,1]\rightarrow X$ sürekli eğrisi $0\leq t\leq 1$ olmak üzere sistemin $\gamma(0)=A$ noktasında başlayıp $\gamma(1)=B$ noktasında sonlanan bir $\gamma(t)$ hareketidir [2].

Tüm sürekli $\gamma:[0,1]\rightarrow X$ yolları PX ile gösterilir. PX yol uzayı $\gamma_1,\gamma_2\in PX$, X de yollar olmak üzere;

$$\rho(\gamma_1,\gamma_2)=\max_{t\in[0,1]} d(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$$

metriği ile bir metrik uzaydır [2].

Tanım 6.1.2 Başlangıç ve bitiş konfügürasyonlarının $(\gamma(0),\gamma(1))\in X\times X$ çiftini bir $\gamma\in PX$ yolu ile birleştiren fonksiyon

$$\pi: PX\rightarrow X\times X$$

ile gösterilir. π bir sürekli fonksiyondur [6].

Verilen $(A,B)\in X\times X$ konfügürasyonlarının bir çifti $\pi^{-1}(A,B)$ ters görüntüsü A da başlayıp B de sonlanan tüm sürekli $\gamma\in PX$ yollarını içerir. Böylece, A konfügürasyonundan B konfügürasyonuna sistemin bulduğumuz bir sürekli hareketi $\pi^{-1}(A,B)$ kümesinden seçilmiş bir elemanına eşittir. X yol bağlantılı olduğu için $\pi^{-1}(A,B)$ kümesi boş değildir ve böylece bir seçim her zaman mümkündür.

Bir hareket planlama programı, verilen başlangıç ve bitiş konfügürasyonlarının sisteminin bir sürekli hareketinin bir kuralını belirtir. Matematiksel olarak; $X\times X$ kabul edilebilir konfügürasyonların tüm çiftlerinin uzayından PX olarak tanımlanan sistemin tüm sürekli hareketlerinin uzayına tanımlanan fonksiyon

$$s : X \times X \to PX$$

olup öyle ki

$$\pi \circ s = 1_{X \times X}$$

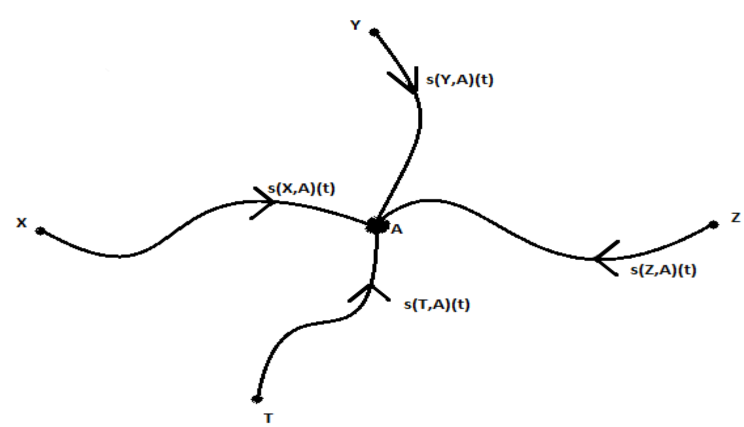
dir.

Burada $1_{X\times X} : X \times X \to X \times X$ birim fonksiyonu belirtir ve bunun anlamı tam olarak $s(A,B)$ yolunun bir (A,B) çiftine atanmasıdır.

Teorem 6.1.1 Bir sürekli $s : X \times X \to PX, \pi \circ s = 1_{X\times X}$ hareket planlaması var olması için gerek ve yeter şart X konfügürasyon uzayının büzülebilir olmasıdır [1].

İspat $(\Rightarrow)$ $s : X \times X \to PX$'in bir sürekli hareket planlama algoritması olduğunu varsayalım. $A,B \in X$ için $s(A,B)$, A da başlayıp B de sonlanan bir yoldur. $B = B_0 \in X$ ve $F(x,t) = s(x,B_0)(t)$ şeklinde tanımlansın. $F : X \times [0,1] \to X$, her $x \in X$ için $F(x,0) = x$ ve $F(x,1) = B_0$ ile bir sürekli deformasyondur. Böylece X büzülebilirdir.

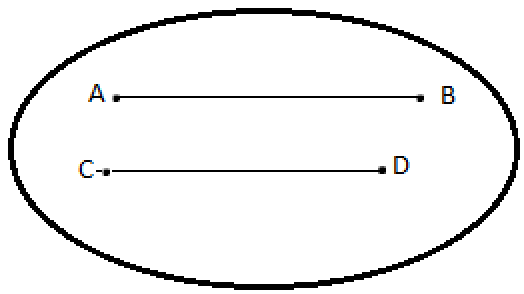
$(\Leftarrow)$ X'in büzülebilir olduğunu varsayalım. O zaman $B_0 \in X$ noktası üzerinde $x \to x$ sabit fonksiyonu ile $X \times X$ özdeşlik fonksiyonunu bağlayan $F : X \times [0,1] \to X$ bir sürekli homotopisi vardır. Kullanılan F, $F(B,t)$ ters yolu ve $F(A,t)$ yolunun birleştiği $s(A,B)$ yolu tarafından herhangi verilen iki A,B noktasını bağlayabilir. Bu X de sürekli bir hareket planlama algoritması tanımlar.



Şekil 6.1 Sürekli hareket planlaması gösterimi

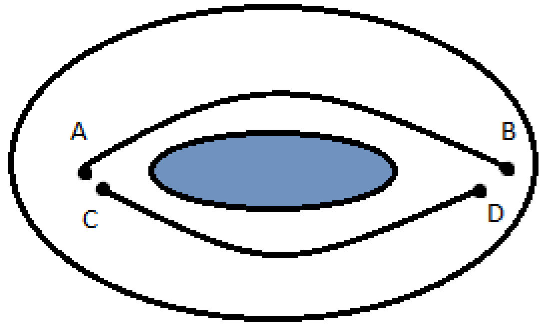
Sonuç 6.1.1 Büzülemeyen konfügürasyon uzayları ile bir sistem için her hareket planlama algoritması süreksiz olmalıdır [1].

Örnek 6.1.1 Bir bölgede verilen bir A pozisyonundan verilen bir B pozisyonuna nasıl hareket edeceğini öğretmek zorunda olduğumuz o bölgede yaşayacak bir robotumuz olduğunu varsayalım. $X \subset R^2$ olmak üzere bölgenin bir konveks şekle sahip olduğunu varsayalım. O zaman sabit bir hız ile düz bir çizgi boyunca A dan B ye uygulanabilir bir $s(A,B)$ hareketi oluşturulabilir. Bu kural $s : X \times X \to PX$ şeklinde bir sürekli hareket planı açıkça tanımlar [2].



Şekil 6.2 Konveks bir bölgede robot hareketi

Örnek 6.1.2 Bölgemizin ortasında bir göl ve bizim robotumuz yüzme yeteneğine sahip olmadığı için onun yolunu kuru alan üzerinde bulmak zorunda olduğunu varsayalım. Bu durum bölgemizde $s : X \times X \to PX$ sürekli olmayan hareket planlama stratejisi olduğunu kolaylıkla gösterir. Gerçekten, varsayalım ki öyle bir sürekli s stratejisi olsun. A ve B sabit noktaları ile $\gamma = s(A,B)$ yolunu düşünelim. Şimdi varsayalım ki A noktası sabit kalsın fakat B noktası harekete başlasın ve göl etrafında $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere bir B_α çemberi oluştursun. İlk dönüş $B_0 = B = B_1$ dir. B noktasının bu hareketi altında bizim hareket plan programımız PX yol uzayında bir $s(A,B_\alpha) \in PX$ sürekli eğri üretecek. Biz bir çelişkiye varırız çünkü bir yandan son $s(A,B_1)$ yolu başlangıç $s(A,B)$ yoluna eşit olmalı fakat diğer yandan $s(A,B_1)$ yolu $s(A,B_0)$ başlangıç yoluna homotopiktir [2].



Şekil 6.3 Konveks olmayan bir bölgede robot hareketi

Böylece örnek 6.1.2 de her $s : X \times X \to PX$ hareket plan programı için her zaman başlangıç bitiş konfügürasyonlarının $(A,B) \in X \times X$ çifti vardır ve s, (A,B) de sürekli değildir. Bu (A,B) nin bazı keyfi (A', B') yaklaşımları için tamamen farklı $s(A', B')$ hareketlerine sebep olması anlamına gelir.

Teorem 6.1.1, örnek 6.1.1 de niçin bir sürekli hareket planı olduğunu ve örnek 6.1.2 de niçin bir sürekli hareket planı olmadığını açıklar.

Tanım 6.1.3 X bir yol bağlantılı topolojik uzay olsun. X de bir robot hareket planı sonlu sayıda $F_1, \ldots, F_k \subset X \times X$ alt kümeler ve $i = 1, \ldots, k$ olmak üzere $s_i : F_i \to PX$ sürekli fonksiyonları tarafından verilir öyle ki aşağıdaki şartları sağlar [4].

$a)$ $F_1, \ldots, F_k$ kümeleri $i \neq j$ olmak üzere $F_i \cap F_j = \varnothing$ dir**.** Yani

$$X \times X = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k$$

dır.

$b)$ Her $i = 1, \ldots, k$ için $\pi \circ s_i = 1_{F_i}$ dir.

$c)$ Her F_i kümesi bir öklidyen retraksiyondur.

F_i alt kümelerini hareket planının yerel alanları olarak tanımlanır. s_i fonksiyonları hareket planının yerel kuralları olarak adlandırılır.

Tanım 6.1.4 $(A,B) \in X \times X$ başlangıç bitiş konfügürasyonlarının çiftinde bir hareket planının dengesizliklerinin düzeni en büyük r sayısı olarak tanımlanır öyle ki (A,B) nin her komşuluğu r mesafeli $F_1,...,F_k$ yerel alanları ile kesişime sahiptir [2].

Bir başka deyişle, bir $(A,B)\in X\times X$ çiftinde hareket planındaki dengesizliklerin düzeni en büyük r sayısı olarak tanımlanır öyle ki (A,B)

$$\bar{F}_{i_1}\cap\bar{F}_{i_2}\cap...\cap\bar{F}_{i_r},\ 1\le i_1<i_2<...<i_r\le k$$

kümesine aittir. $(A',B')\in X\times X$, (A,B) nin bir küçük karışıklığı ise r tane $F_{i1},F_{i2},...,F_{ir}$ yerel alandan birinin içine düşer.

Tanım 6.1.5 Bir hareket planının dengesizliklerinin düzeni $(A,B)\in X\times X$ tüm mümkün çiftlerinde dengesizliklerinin düzeninin maksimumu olarak tanımlanır. Denk olacak şekilde bir hareket planının dengesizliklerinin düzeni en büyük r öyle ki $F_1,...,F_k$ yerel alanları arasında bazı r lerin kapanışlarının ara kesitleri boş değildir.

$$\bar{F}_{i_1}\cap\bar{F}_{i_2}\cap...\cap\bar{F}_{i_r}\neq\varnothing,\ 1\le i_1<i_2<...<i_r\le k$$

Açıkca bir hareket planının dengesizliklerinin düzeni yerel kuralların toplam sayısını aşamaz. Yani

$$1\le r\le k$$

dır [2].

Sonuç 6.1.2 Hareket planının dengesizliklerinin düzeni bire eşitse, yani yerel kurallar ile $s:X\times X\to PX$ gibi bir sürekli fonksiyon tanımlanırsa Teorem 6.1.1 den bildiğimiz gibi sadece X büzülebilir bir uzay olduğunda olabilir [2].

Dengesizliklerin düzeni, hareket planının çok önemli bir fonksiyonel karakteristiğini temsil eder. Dengesizliklerin düzeni r ye eşitse o zaman orada $(A,B)\in F_j$ başlangıç-bitiş konfügürasyonlarının bir çifti vardır öyle ki keyfi olarak (A,B) ye yakın $(A_1,B_1),(A_2,B_2),...,(A_{r-1},B_{r-1})$ konfügürasyonlarının $r-1$ çifti $i\neq j$ olmak üzere farklı F_i kümelerine aittir. (A,B) girdi bilgisinin küçük karışıklıkları bu hareket planlama algoritması tarafından önerilen ayrık r hareketlerine yol açtığı anlamındadır.

6.2 Topolojik Karmaşıklık $TC(X)$

Endüstri uygulamalarının çoğunda mekanik sistemlerin konfügürasyon uzayları yarı cebirsel kümeler gibi görülür. Yani

$$x \in \mathbb{R}^n; P(x) = 0, Q_1(x) > 0, \ldots, Q_l(x) > 0$$

formunda olan kümelerin sonlu birleşimleridir. $P, Q_1, \ldots, Q_l \in \mathbb{R}\left[X_1, \ldots, X_n\right]$ reel katsayıları ile polinomlardır. Her yarı cebirsel küme bir çokyüzlü cisme homeomorfiktir. Her pürüzsüz manifold bir çok yüzlü cisme homeomorf olduğu bilinir. Temel amacımız gerçek robotik uygulamalarının hareket plan algoritması çalışmak olduğu için, X konfügürasyon uzayını çok yüzlü bir cisme homeomorfik varsayabiliriz.

Tanım 6.2.1 X bir çokyüzlü cisim olsun. Bir hareket planlama algoritması eğer

$$X \times X = F_1 \cup \ldots \cup F_k \tag{6.1}$$

sonlu kümelerin birleşimi öyle ki;

i. $s\big|F_i : F_i \to PX$ süreklidir. $(i = 1, \ldots, k)$

ii. $F_i \cap F_j = \varnothing,\ i \neq j$

iii. Her F_i bir öklidyen komşuluk retraksiyonudur.

özellikleri sağlanıyorsa $s : X \times X \to PX$ uygun olarak adlandırılır [6].

$(A, B) \in F_i$ noktalarının sabit bir yol çifti için, yol $t \to s(A, B)(t) \in X$, $A \in X$ noktasında başlayıp $B \in X$ noktasında sonlanan t nin bir fonksiyonu olarak sürekli s algoritması tarafından üretilir. $s(A, B)$ eğrisi (A, B) üzerindeki sürekliliğe bağlıdır. (A, B) noktalarının çifti $F_i \subset X$ kümesinde değişir.

Tanım 6.2.2 Bir X topolojik uzayı eğer bir $X \subset \mathbb{R}^n$ öklid uzayının içine bazı açık $X \subset U \subset \mathbb{R}^n$ komşuluklar için bir $r : U \to X, r\big|X = 1_X$ olacak şekilde daldırılabilirse (gömülebilirse) bu uzaya öklid retraksiyonu denir [6].

Bir $X \subset \mathbb{R}^N$ öklidyen retraksiyon olması için gerek ve yeter şart X in yerel kompakt olması ve yerel olarak büzülebilmesidir.

Endüstriyel uygulamalarda görülen hareket planlama algoritmaları uygundur. Daha önce belirtildiği gibi, X konfügürasyon uzayı genellikle bir yarı cebirsel kümedir ve algoritma başlangıç-bitiş konfügürasyonları için $F_j \subset X \times X$ olmak üzere çeşitli farklı kurallar tarafından tanımlanır. Eşitlik ve eşitsizlikler tarafından verilen F_i kümeleri reel cebirsel fonksiyonlar içerir böylece onlar yarı cebirseldir. $s|F_j : F_j \to PX$ ayrıca reel cebirseldir. Böylece bunlar süreklidir.

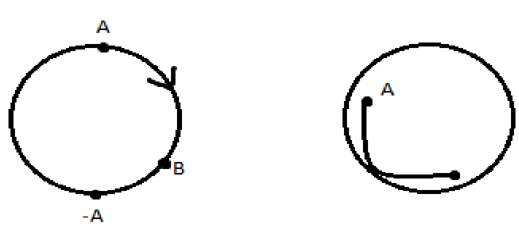
Tanım 6.2.3 Bir uygun hareket planlama algoritmasının topolojik karmaşıklığı s için (6.1) tipinin her temsilindeki k sürekliliğinin etkilerinin minimal sayısıdır [6].

Tanım 6.2.4 Bir sonlu boyutlu X çok yüzlü cisminin $TC(X)$ topolojik karmaşıklığı X de ki uygun hareket planlama algoritmasının topolojik karmaşıklığının minimalidir. $TC(X)=1 \Leftrightarrow X$ bir öklid retraksiyonu ve büzülebilirdir. $TC(X)=\infty$ ise X de kabul edilebilir bir hareket planlama algoritması yoktur [6].

Örnek 6.2.1 $TC(S^n)=\begin{cases} 2, n\, tek \\ \leq 3, n\, çift \end{cases}$ olduğunu gösterelim.

$A \neq -B$ olmak üzere $F_1 \subset S^n \times S^n$ tüm (A,B) çiftlerinin kümesi olsun. Sürekli bir $s_1 : F_1 \to PS^n$, kısa geodezik eğriler boyunca A dan B ye bir kesit oluşturabilir. $F_2 \subset S^n \times S^n$'yi $(A,-A)$ tam ters noktaların tüm çiftleri olarak alalım. $s_2 : F_2 \to PS^n$ bir sürekli kesiti, S^n üzerinde sıfıra eşit olmayan sabit bir vektör alanı n tek ise vardır ve oluşturulabilir.

n çift olduğu durumda S^n en azından bir sıfıra sahip olduğu için n in tek olduğu duruma ilave yapılır. Yani biz bir tek sıfıra sahip $(A_0 \in S^n)$ bir tanjant vektör alanı bulabiliriz. $F_2=\{(A,-A), A \neq A_0\}$ yazılabilir ve n in tek olduğu durumda ki gibi bir $s_2 : F_2 \to PS^n$ tanımlanır. $F_3=\{(A_0,-A_0)\}$ bir tek çift içerir ve A_0 dan $-A_0$ a seçilen keyfi bir yol tarafından $s_3 : F_3 \to PS^n$ tanımlanır [1].



Şekil 6.4 $TC(S^n)$ hesaplanmasında ki mümkün yollar

Tanım 6.2.5 $p: E \to B$ fibrasyonunun schwarz genusu her $U_j \subset B$ kümesi üzerinde her $p: E \to B$ nin $s_j : U_j \to E$ sürekli kesitinin var olması ile $B = U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_k$ tabanının bir açık örtüsü vardır. Burada ki k sayısı schwarz genusu olarak tanımlanır [7].

Önerme 6.2.1 X bir çok yüzlü cisim olsun. O zaman $TC(X)$ sayısı $\pi : PX \to X \times X$ yol fibrasyonunun schwarz genusuna denktir [7].

Bu önermenin ispatında aşağıda ispatıyla birlikte verdiğimiz lemmayı kullanacağız.

Lemma 6.2.1 $Y, Z \subset P$ bir P çok yüzlü cisminin ayrık kapalı alt kümeleri olsun. O zaman orada Y yi içeren ve Z den ayrık olan $F \subset P$ kapalı bir alt çok yüzlü vardır.
Yani $Y \subset F$ ve $F \cap Z = \varnothing$ dur [7].

İspat $P_\alpha \subset P$, $\bigcup P_\alpha = P$ olacak şekilde sonlu alt çok yüzlü cisimlerin bir yerel sonlu ailesi olsun. Burada α bir A indeks kümesinde olmak üzere $Y \cap P_\alpha$ ve $Z \cap P_\alpha$ ayrık kompakt kümelerdir. Böylece $\varepsilon_\alpha > 0$ reel sayılarının bir dizisini elde ederiz öyle ki

$$d(Y \cap P_\alpha, Z \cap P_\alpha) > \varepsilon_\alpha$$

dır. Burada d, P üzerinde onun topolojisi ile uyumlu sabit bir uzunluktur. $\{P_\alpha\}$ ailesinin yerel sonlu olmasını kullanarak P yi bölebiliriz öyle ki P_α da bulunan her tek yönlü hattın çapı ε_α dan küçüktür. F, Y de ki kapalı kesişimlerin P nin tüm tek yönlü hatlarının birleşimi olarak tanımlanır. O zaman F nin, P nin kapalı bir alt çok yüzlüsü olduğu açıktır ve Y yi içerir ama Z den ayrıktır.
Şimdi önerme 6.2.1' i ispatlayalım.

İspat $TC(X)$ sayısı k, π nin schwarz genusu g olarak tanımlansın. (6.1) de ki gibi $X \times X = F_1 \cup ... \cup F_k$ ayrışımını düşünelim. π nin sürekli kesitini kabul eden U_i açık kümesi her F_i tarafından kapsanır. Bu da $g \leq k$ olduğunu gösterir. Şimdi $k \leq g$ olduğunu göstermeliyiz. Öklidyen retraksiyonun aşağıdaki özelliğini kullanacağız. $F \subset X$ ve hem F hem de X öklidyen retraksiyon ise bu durumda F nin $U \subset X$ açık komşuluğu ve bir $r : U \to F$ kısıtlaması vardır öyle ki $j : U \to X$ e homotopiktir. $i : F \to X$ olmak üzere $i \circ r = j$ dir. Bu durumda her $i = 1, ..., k$ için F_i kümeleri ve

$X\times X$ öklidyen retraksiyondur. Öklidyen retraksiyon özelliğine göre F_i nin $U_i \subset X\times X$ açık komşuluğu ve $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere $h_\alpha^i : U_i \to X\times X$ sürekli homotopisi vardır öyle ki $h_0^i : U_i \to X\times X$ içerir ve h_1^i, F_i üzerinde U_i nin bir kısıtlanışıdır.

Şimdi $\pi \circ s_i^{'} = 1_{U_i}$ özelliği ile $s_i^{'} : U_i \to PX$ sürekli bir fonksiyon tanımlayabiliriz. Bir $(A,B)\in U_i$ çifti verildiğinde, $X\times X$ de ki $h_\alpha^i(A,B)$ yolu γ, X de $\gamma(0)=A$ da başlayıp $\gamma(1)$ de sonlanan ve δ, X de bir yol $\delta(0)=B$ de başlayıp $\delta(1)$ de sonlanan (γ,δ) yollarının bir çiftidir. Unutmayalım ki $(\gamma(1),\delta(1))$ F_i ye ait böylece $s_i = s\big|F_i : F_i \to PX$ kesiti $\gamma(1)$ ve $\delta(1)$ noktalarını bağlayan bir yol tanımlar.

$$\varepsilon = s_i(\gamma(1),\delta(1)) \in PX$$

Şimdi γ, ε ve δ^{-1} birleştiren $s_i^{'}(A,B)$ kuralım. (δ^{-1}, δ nın tersi)

$$s_i^{'}(A,B) = \gamma\cdot\varepsilon\cdot\delta^{-1}$$

dir. Şimdi $k \le g$ olduğunu göstermek istiyoruz. $U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_g = X\times X$ açık örtüsüne sahip olduğumuzu varsayalım öyle ki U_i lerin her biri π nin bir sürekli kesitini kabul eder. Tanım 6.2.1 in özelliklerini koruyan $F_i \subset U_i$ alt kümelerinden birini $i = 1,2,\ldots,g$ için bulabiliriz.

$Y_1 = X\times X - (U_2 \cup \ldots \cup U_g)$ ve $Z_1 = (X\times X) - U_1$ kapalı ve ayrıktır. Önceki lemma 6.2.1 gereğince Z_1 den ayrık Y_1 içeren bir F_1 kapalı alt çok yüzlüsü vardır.

Bazı $1 < i < g$ için aşağıdaki özellikleri koruyan $F_1,\ldots,F_{i-1} \subset X\times X$ kümelerini oluşturduğumuzu varsayalım.

a) Her F_j, U_j tarafından kapsanan bir çokyüzlü cisimdir.
b) $j \ne j^{'}$ için $F_j \cap F_{j^{'}} = \varnothing$
c) Her F_j nin kapanışı, $F_1 \cup \ldots \cup F_j$ de içerir.
d) $F_1 \cup \ldots \cup F_{i-1} \cup U_i \cup \ldots \cup U_g = X\times X$ dir.

$P_i = X\times X - (F_1 \cup \ldots \cup F_{i-1})$ bir çokyüzlü cismin bir açık alt kümesidir.

$Y_i = P_i - (U_{i+1} \cup ... \cup U_g)$ ve $Z_i = P_i - U_i$, P_i de ayrık ve kapalıdır. Lemma 5.2.1 uygulanırsa Y_i yi içeren Z_i den ayrık $F_i \subset P_i$ kapalı çok yüzlü cismi bulunur. Böylece $F_1,...,F_{g-1}$ alt kümeleri bulunur ve sonunda $F_g = X \times X - (F_1 \cup ... \cup F_{g-1})$ tanımlanır. Buradan $X \times X = F_1 \cup ... \cup F_g$ nin parçalanışını elde ederiz. Tanım (6.2.1) in tüm özellikleri korunur. Böylece $k \leq g$ elde edilir. $g \leq k$ ve $k \leq g$ den $k = g$ olur.

Tanım 6.2.6 X bir topolojik uzay olsun. Bu uzayın topolojik karmaşıklığı $TC(X)$ fibrasyonun schwarz genusu olarak adlandırılır [7].

X bir öklidyen retraksiyon olduğunda aşağıdaki önerme ile $TC(X)$ in karakterizasyonu çeşitli eşdeğerleri verilir.

Önerme 6.2.2 X bir öklidyen retraksiyon olsun. Bu durumda $TC(X) = k = l = r;\ k(X) = k,\ l(X) = l,\ r(X) = r$ aşağıdaki gibi tanımlanır [7].

i. $k = k(X)$ minimal bir sayıdır öyle ki (6.1) fibrasyonunun $s : X \times X \to PX$ kesiti ve k açık kümelerinin

$$U_1 \subset U_2 \subset ... \subset U_k = X \times X$$

her $i = 0,1,...,k-1$ için $s\big|(U_{i+1} - U_i)$ sürekli artan bir dizisi vardır. Burada $U_0 = \varnothing$ dur.

ii. $l = l(X)$ minimal bir sayıdır öyle ki (6.1) fibrasyonunun $s : X \times X \to PX$ kesiti ve k kapalı kümelerinin

$$F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_k = X \times X$$

her $i = 0,1,...,k-1$ için $s\big|(F_{i+1} - F_i)$ sürekli artan bir dizisi vardır. Burada $F_0 = \varnothing$ dur.

iii. $r = r(X)$ minimal bir sayıdır öyle ki (6.1) fibrasyonunun $s : X \times X \to PX$ kesiti ve $X \times X$

$$G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_r = X \times X,\ G_i \cap G_j = \varnothing,\ i \neq j$$

parçalanışı, her G_i $X\times X$ in bir yerel kompakt alt kümesi ve $i=1,...,r$ için $s|G_i : G_i \to PX$ sürekli olacak şekilde vardır.

İspat $TC(X)=s$ ve $W_1\cup W_2\cup...\cup W_s = X\times X$ her açık W_i kümesini (6.1) fibrasyonunun bir sürekli kesiti kabul eden bir açık örtü olsun. $i=1,...,s$ için $U_i = W_1\cup W_2\cup...\cup W_i$ dir. O zaman $U_1\subset U_2\subset...\subset U_s = X\times X$, $x,y\in X$ ve i en küçük indis öyle ki $(x,y)\in W_i$ olup $s(x,y)=s_i(x,y)$ kuralı tarafından $s: X\times X\to PX$ tanımlanır. Açıkça

$$U_{i+1}-U_i = W_{i+1}-(W_1\cup...\cup W_i)$$

ve $s|(U_{i+1}-U_i)$ süreklidir. Bu $TC(X)=s\geq k=k(X)$ olduğunu gösterir.

$TC(X)=s$ ve $W_1\cup W_2\cup...\cup W_s = X\times X$ her açık W_i kümesini (6.1) fibrasyonunun bir sürekli kesiti kabul eden bir açık örtü olsun. $X\times X$ uzayı metriklenebilir olduğundan normludur. O zaman $V_1\cup...\cup V_s = X\times X$ olacak şekilde bir $V_i\subset W_i$ kapalı alt kümesi bulunabilir. $F_i = V_1\cup V_2\cup...\cup V_i$ $(i=1,...,s)$ olacak şekilde $U_i = W_1\cup W_2\cup...\cup W_i$ için yapılan işlemler tekrar edilirse $TC(X)\geq l(X)$ elde edilir.

$U_1\subset U_2\subset...\subset U_l = X\times X$ i önermenin (i) şıkkını sağlayan açık altkümelerin artan bir dizisi olduğunu varsayalım. O zaman

$$G_i = U_i-(U_1\cup U_2\cup...\cup U_{i-1})$$

yerel kapalı ve önermenin (iii) deki şartlarını koruyan $X\times X$ in bir parçalanışıdır. Böylece $k=k(X)\geq r=r(X)$ dir. $l\geq r$ eşitsizliği benzer şekildedir.

Son olarak $r=r(X)\geq s=TC(X)$ göstermek istiyoruz. $X\times X = G_1\cup G_2\cup...\cup G_r$ ayrık yerel kompakt G_i alt kümelerini içine alan $X\times X$ in bir ayrışımı olduğunu varsayalım öyle ki her G_i (6.1)'in bir sürekli $s_i : G_i\to PX$ kesitini kabul eder. Böyle kesitler $t\in[0,1]$ ve $h_0^i, h_1^i : G_i\to X$ fonksiyonları birinci ve ikinci koordinatları üzerine $G_i\subset X\times X$ projeksiyonları $h_t^i : G_i\to X$ sürekli homotopileri ile 1-1 dir. $W_i\subset X\times X$ bir açık altküme olsun öyle ki $G_i=\bar{G}_i\cap W_i$ olup böyle W_i ler, G_i $X\times X$ in bir yerel kapalı alt kümesi olduğu için vardır. Bu homotopi (6.1) in sürekli bir $s_i : U_i\to PX$ kesiti olarak yorumlanır. Sonuç olarak $X \times X$ in bir $U_1, U_2, ..., U_r$ açık örtüsü elde edilir öyle ki her U_i (6.1) ün bir sürekli kesitini (kısıtlanışını) kabul eder. Böylece $TC(X) \leq r$ dir.

Sonuç 6.2.1 X bir öklidyen retraksiyon olsun. O zaman $TC(X)$, $i = 1, ..., m$ için V_i kümelerinin her biri üzerinde bir sürekli kesit kabul eden (6.1) fibrasyonuna sahip $X \times X$ in $\gamma = \{V_1, ..., V_m\}$ açık(kapalı) örtülerinin minimal $\mu(\gamma)$ çokluğuna eşittir [7].

İspat $TC(X) = k$ ve $\upsilon = \{U_1, ..., U_k\}$ sonuçtaki gibi özelliğe sahip $X \times X$ in açık (kapalı) örtüsüne sahipse o zaman açıkça $\mu(\upsilon) \leq k = TC(X)$ dir. Bu durumda sadece $TC(X) \leq \mu(\upsilon)$ olduğunu göstermeliyiz. $(x, y) \in X \times X$ için (x, y) noktasını içeren V_i kümelerinin sayısı $\mu((x, y))$ tarafından tanımlanır. γ örtüsünün $\mu(\gamma)$ çokluğu $i = 1, 2, ..., \mu(\gamma)$ için

$$\mu(\gamma) = \max_{(x,y) \in X \times X} \mu((x, y))$$

dir.
$i = 1, ..., \mu(\gamma)$ için

$$W_i = \{(x, y) \in X \times X; \mu((x, y)) \geq \mu(\gamma) - i + 1\}$$

yazarız. Her W_i açık (kapalı) ve

$$W_1 \subset W_2 \subset ... \subset W_{\mu(\gamma)} = X \times X$$

dir. Üstelik, $W_{i+1} - W_i$ her tümleyen alt kümelerin bir ailesinin ayrık bileşimidir ve her biri V_j kümelerinin içindedir. O, her $W_{i+1} - W_i$ üzerinde (6.1) fibrasyonunun bir sürekli kesitinin var olduğunu gösterir $TC(X) \leq \mu(\gamma)$ dir.
Bu sonuç robot hareket planlama algoritmalarının dengesizliklerinin derecelerindeki $TC(X)$ topolojik karmaşıklığının karakterizasyonu ile yakından alakalıdır.

Sonuç 6.2.2 X bir çok yüzlü cisim olsun. O zaman

$$TC(X) \leq 2 \dim X + 1$$

dir [1].

İspat: Bu sonuç, önceki sonuçta takip edilen her öklidyen retraksiyon için açık şekilde doğrudur. Bir hareket planlama algoritması açık şekilde oluşturulabildiği durumda çok yüzlü için açıklar ve ispat ederiz. $r = 0,1,...,n$ olmak üzere $X^{(r)} = X^r - X^{r-1}$, r boyutlu tüm tek yönlü hatların birleşimi olarak tanımlansın.

$$G_i = \bigcup_{r+s=i} X^{(r)} \times X^{(s)},\ i = 0,1,...,2n$$

dir. Önerme 6.2.2 (iii)'den takip edersek biz G_i nin

$$s_i : G_i \to PX$$

bir sürekli kesit kabul ettiğini gösteririz.

$$G_i = \bigcup_{r+s=i} \Delta^{(r)} \times \Delta^{(s)}$$

$\Delta^{(r)}$, $\Delta^{(s)}$ verilsin. Bir $\gamma, x_0 \in \Delta^{(r)}$ den $y_0 \in \Delta^{(s)}$ yolunu düşünelim. O zaman $\forall x \in \Delta^{(r)}$ den $\forall y \in \Delta^{(s)}$ ye başlangıç x_0 da olmak üzere ($\Delta^{(r)}$de ki doğru parçaları boyunca) hareketlenebilir, o zaman γ takip edilir ve sonunda y_0 dan y ye $\Delta^{(s)}$ de düz çizgi boyunca hareket eder.

Önerme 6.2.3 Her X topolojik uzayı için

$$cat(X) \leq TC(X) \leq cat(X \times X)$$

dir [1].

İspat Önermenin ispatından schwartz genus'un

$i)$ $B' \subset B$, $E' = p^{-1}(B')$ olsun. O zaman $E \to B \leq E' \to B'$ dir.

$ii)$ $E \to B \leq cat(B)$ dir.

(i) özelliğinden $PX \to X \times X$ bir fibrasyon ve $X \times x_0 \subset X \times X$ olup $\pi^{-1}(X \times x_0) = P_0 X$ dir. Buradan $TC(X) \geq cat(X)$ dir. (ii) özelliğinden $TC(X) \leq cat(X \times X)$ olur.

6.3 Bağıl Topolojik Karmaşıklık

Tanım 6.3.1 X bir topolojik uzay ve $A \subset X \times X$ bir alt uzay olsun. O zaman $TC_X(A), A$ da olan $(\gamma(0), \gamma(1))$ noktaların çifti özelliğindeki $\gamma : [0,1] \to X$ yollarının uzayı $P_A X \subset PX, \pi : P_A X \to A$ fibrasyonunun schwarz genusu olarak tanımlanır [7].

Lemma 6.3.1 X bir topolojik uzay olmak üzere. Bir $A \subset X \times X$ alt kümesi için aşağıdaki özellikler denktir [7].

a) $TC_X(A) = 1$ dir.

b) $X \leftarrow A \to X$ homotopiktir.

c) $A \to X \times X, \Delta_X \subset X \times X$ çapraz değerleri ile bir $A \to X \times X$ fonksiyonu homotopiktir.

Bazı açık eşitsizliklerden bahsedebiliriz.

$$TC_X(A) \le TC(X) \tag{6.2}$$

$$TC_X(A) \le cat_{X \times X}(A) \tag{6.3}$$

dır. Eğer $A \subset B \subset X \times X$ ise o zaman

$$TC_X(A) \le TC_X(B) \tag{6.4}$$

dir. $Y \subset X$ bir alt uzay olsun. O zaman

$$TC_X(Y \times Y) \le TC(Y) \tag{6.5}$$

dir.

Lemma 6.3.2 $A \subset X \times X$ ve $A \subset B$ olsun. O zaman

$$TC_X(A) = TC_X(B)$$

dır [7].

İspat: $h_t : B \to X \times X$, $h_0 : B \to X \times X$ mevcut ve h_1, A içine B özelliğinde bir fonksiyon olup bu özellikleri ile bir homotopi olduğu varsayalım. $TC_X(A) = k$ ve $X \leftarrow U_i \to X$ projektifleri homotopik olacak özellikte ve $A = U_1 \cup \ldots \cup U_k$ bir açık örtü olsun. Böylece $(a,b) \in U_i$ için $s_i(a,b,0) = a$ ve $s_i(a,b,1) = b$ ile $s_i : U_i \times I \to X$ bir homotopidir. $i = 1,2,\ldots,k$ için $W_i = h^{-1}(U_i)$ dir. O zaman $W_1 \cup \ldots \cup W_k = B$ bir açık örtüdür. $(x,y)\in W_i$ için $h_t(x,y)$ homotopisi $U_i \subset A$ da $(a,b)=(\gamma(1),\sigma(1))$ çiftinde sonlanan ve $\gamma(0)=x$ ve $\sigma(0)=y$ de başlayan X de ki (γ,σ) yollarının bir çifti olarak izlenir. γ nin birbirine bağlanması $s_i(a,b,\cdot)$ ve σ^{-1}, $(x,y)\in W_i$ üzerinde sürekli olacak şekilde x ve y yi bağlayan bir yoldur. Bu $TC_X(B)\le TC_X(A)$ olduğunu gösterir ve (6.4) ile ispat tamamlanır.

Lemma 6.3.3 X bir öklidyen retraksiyon ve $A\subset X\times X$ bir yerel kompakt alt küme olsun. O zaman $A\subset U\subset X\times X$ gibi bir açık komşuluk vardır öyle ki

$$TC_X(A)=TC_X(U)$$

dur [7].

$A_1,A_2,...,A_k \subset X\times X$, $X\times X$ i örten açık altkümeler ise o zaman

$$TC(X)\le TC_X(A_1)+TC_X(A_2)+...+TC_X(A_k)$$

olduğu açıktır.

Lemma 6.3.4 X bir öklidyen retraksiyon ve $X\times X$; $A_1,...,A_k\subset X\times X$ yerel kompakt kümeler tarafından örtülsün. Yani $X\times X=A_1\cup...\cup A_k$ dır. O zaman $TC(X)\le TC_X(A_1)+TC_X(A_2)+...+TC_X(A_k)$ dır [7].

Lemma 6.3.5 $Y\subset X$ bir retraksiyon olsun. O zaman $TC(Y)\le TC(X)$ dir [7].

İspat: $U_1\cup...\cup U_k=X\times X$ ve $TC(X)=k$ olacak şekilde her $i=1,...,k$ için bir sürekli $s_i:U_i\to PX$ kesiti (kısıtlanışı) ile bir açık örtü olduğunu varsayalım. $r:X\to Y$ bir retraksiyonu olsun. $(x,y)\in U_i\cap(Y\times Y)$ için $r(s_i(x,y)(t))$, $t\in[0,1]$ üzerinde sürekli bir şekilde x den y ye Y de bir yol tanımlar. Böylece $V_i=U_i\cap(Y\times Y)$ kümeleri özelliklerin gerektirdikleri ile $Y\times Y$ nin bir açık örtüsüdür. Böylece $TC(Y)\le k$ dır.

Sonuç 6.3.1 $Y\subset X$ bir retraksiyon ve X,Y içine deforme olabilirse o zaman $TC(X)=TC(Y)$ dir [7].

İspat: (6.5) eşitsizliği ve lemma 6.3.3 den

$$TC(Y) \geq TC_X(Y \times Y) = TC_X(X \times X) = TC(X)$$

dir. Lemma 6.3.5 de verilen eşitsizlikte $TC(Y) \leq TC(X)$ olup bu iki eşitsizlikten $TC(Y) = TC(X)$ olur.

Sonuç 6.3.2 Topolojik karmaşıklık homotopik değişmezdir. Bir başka deyişle X, Y topolojik uzayları homotopik denklerse o zaman $TC(X) = TC(Y)$ dir [1].

Önerme 6.3.1 Y bir öklidyen retraksiyon ve

$$X = Y \cup f(e_1^{n_1} \cup \ldots \cup e_r^{n_r})$$

$f : S^{n_1 - 1} \cup \ldots \cup S^{n_r - 1} \to Y$ aynı anda çeşitli yolların bağlanması ile Y den elde edilmiş olan bir sürekli fonksiyon olsun. O zaman

$$TC(X) \leq TC(Y) + cat(Y) + 1$$

dir [7].

İspat: $Z \subset X,\ Z = \{p_1, \ldots, p_r\}$ bağlanan yolların her birinin içinde olan $p_i \in e_i^{n_i}$ tek noktasını içeren bir sonlu küme olsun. O zaman $X - Z,\ Y$ ye homotopik denktir.

Lemma 6.3.6 Bir $A \subset X$ ve $x_0 \in X$ noktası için

$$TC_X(A \times x_0) = cat_X(A) = TC_X(x_0 \times A)$$

dır[7].

7. BÖLÜM

SONUÇLAR

Bu çalışmanın birinci bölümü olan giriş kısmında robotik bilimine topolojinin girişi ile ilgili geçmiş yıllarda yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir.

Çalışmanın ikinci ve üçüncü bölümünde sırasıyla önce robotlar ve onların gelişiminden daha sonra temel matematiksel kavramlardan bahsedilmiştir.

Çalışmanın dördüncü ve beşinci bölümünde sırasıyla önce homotopi teoriden daha sonra topolojinin robot bilimine girişini sağlayan ilk kez klasik mekanikte kullanılan konfügürasyon uzayı ile ilgili tanımlar verilip bu uzayla ilgili temel örneklerden bahsedilmiştir.

Çalışmanın son bölümünde ise topolojik robotlara bir giriş verilmiş ve özellikle robot hareket planlama problemine bir topolojik yaklaşım tanımlanmıştır. Bu yeni teori hem robot biliminde hem de topolojide kullanışlı görülür.

Robot biliminde robotun konfügürasyon uzayının homotopik özelliklerine bağlı robot hareket planlama algoritmasındaki dengesizlikleri açıklar. Topolojide, mekanik sistemlerin konfügürasyon uzayları olarak topolojik uzaylar düşünülürse, X topolojik uzayının hareket karmaşıklığını ölçen farklı yeni bir $TC(X)$ homotopi değişmezi keşfedilir.

KAYNAKLAR

[1] Farber, M., (2003). Topological Complexity of Motion Planing, *Discrete and Computational Geometry* **29**, 211-221.

[2] Farber, M., (2004). Instabilities of Robot Motion, *Topology and its Applications* **140**, 245-266.

[3] Farber, M., (2008). Topology of Random Linkages, *Algebraic and Geometric Topology* **8**, 155-171.

[4] Farber, M., Tabanchnikov, S., Yuzvinsky, S., (2003). Topological Robotics: Motion Planning in Projective Spaces, *International Mathematical Research Notices* **34**, 1853-1870.

[5] Farber M., Grant M., Yuzvinsky, S., (2007). Topological Complexity of Collision Free Motion Planning Algorithms in the Presence of Multiple Moving Obstacles, *Contemporary Mathematics AMS,* **438**, 75-83.

[6] Farber M., (2006). Topology of Robot Motion Planning, *Morse Theoretic Methods in Nonlinear Analysis and in Symplectic Topology*, *Springer*, 185-230.

[7] Farber M.,(2008). Invitation to Topological Robotics. First edition. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. Europen Mathematical Society.

[8] Hunt M., (2007). Linkages and Their Confuguration Spaces, Master’s Thesis, *University of Durham.*

[9] Kocak M., (2011). Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar. Üçüncü Baskı. Kampüs Yayıncılık.

[10] Kosniowski C.,(1980). A First Course in Algebraic Topology. First Edition. Cambridge University Press.

[11] Lahiri B.K., (2005). A First Course in Algebraic Topology. First Edition. Alpha Science International.

[12] Lipschutz, S.,(1965). General Topology. First Edition. McGraw- Hill, USA.

[13] Lovine, J.,(2002). Robots, Androids and Animatrons. Second Edition. McGraw-Hill, USA.

[14] Munkrer J.R.,(2000). Topology. First Edition. Prentice Hall, USA.

[15] Niemann S.H.,(1978). Geometry and Mechanics, PhD thesis, St Catherine's College, Oxford.

[16] Schwarz A.S.,(1966). The genus of a fiber space, *Amer*. *Math. Sci. Transl.* **55**, 49-140

[17] Siegwart R., Nourtakhsh I.R.,(2004). Introduction to Autonomous Mobile Robots. M.I.T Press.