

**Cayley Ağacı Üzerinde Üç Etkileşimli Ising Modelinin  
Dinamik Davranışları**

**Gaziantep Üniversitesi  
Matematik Ana Bilim Dalı  
Yüksek Lisans Tezi**

**Danışmanlar:**

**Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN**

**Doç. Dr. Hasan AKIN**

**Halit SAYGILI**

**Ağustos 2012**

**©2012 HALİT SAYGILI.**

T.C.  
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Cayley Ağacı Üzerinde Üç Etkileşimli Ising Modelinin Dinamik Davranışları


Öğrencinin, Adı Soyadı: Halit SAYGILI

Tez Savunma Tarihi: 15.08. 2012


Fen Bilimleri Enstitüsü onayı


  
Prof. Dr. Ramazan KOÇ  
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığımı onaylarım.

  
Prof. Dr. Adil KILIÇ  
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

  
Doç. Dr. Hasan AKIN  
İkinci Tez Danışmanı

  
Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN  
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.


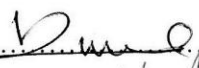

Jüri Üyeleri :

Yrd. Doç. Dr. Ali BOZKURT

Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN

Yrd. Doç. Dr. Mine MENEKŞE YILMAZ

İmzası

  
.....  
  
.....  
  
.....

**İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.**

**Halit SAYGILI**



**ÖZ**

**CAYLEY AĞACI ÜZERİNDE ÜÇ ETKİLEŞİMLİ ISING MODELİNİN  
DİNAMİK DAVRANIŞLARI**

SAYGILI, Halit

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Yöneticileri: Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN

Doç. Dr. Hasan AKIN

Ağustos 2012

39 sayfa

Bu tezde, üçüncü ve dördüncü mertebeden Cayley ağacı üzerinde üç bağlantı sabiti ile verilen Hamitonyen denklemi tarafından üretilen Ising modeline karşılık gelen dinamik sistemin faz diyagramları incelenmektedir. Önce tanımlanan Ising sisteme karşılık gelen yinelemeli denklemler elde edilmektedir. Elde edilen yinelemeli denklemlerin limit davranışlarını incelemek için bilgisayar programlama kodları ile faz diyagramları çizilmekte ve bu faz diyagramlarının yorumu yapılmaktadır.

**Anahtar Kelimeler:** Ising modeli, faz diyagramları, lineer olmayan dinamik sistemler.

## **ABSTRACT**

### **DYNAMIC BEHAVIOR OF THE ISING MODEL ON THE CAYLEY TREE WITH THREE INTERACTIONS**

SAYGILI, Halit

M. Sc. in Mathematics.

Supervisor(s): Assist. Prof. Kuddusi KAYADUMAN

Associate Prof. Hasan AKIN

August 2012

39 page

In this thesis, the phase diagrams of the Ising model which generated the Hamiltonian with ternary competing interactions on Cayley tree of order three and four are studied. At first, the iterative equations that correspond to the Ising system, described earlier, are obtained. Then phase diagrams are plotted (sound signal recorded) by means of computer programming codes to investigate the limit behavior of the recursive equations obtained. These phase diagrams are interpreted.

**Key Words:** Ising Model, phase diagrams, nonlinear dynamical systems.

## TEŞEKKÜR

Bu alıŐma sűresince tűm bilgilerini benimle paylaŐmaktan kaçınmayan, her tűrlű konuda desteęini benden esirgemeyen ve tezimde bűyűk emeęi olan, aynı zamanda kiŐilik olarak ta bana çok Őey katan Gaziantep Ŭniversitesi űęretim űyelerinden danıŐman hocam, Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN'a ve Zirve Ŭniversitesi űęretim űyelerinden danıŐman hocam, Doç. Dr. Hasan AKIN' a sonsuz minnet ve teŐekkűrlerimi sunarım. Bu çalıŐmada maddi destek saęlayan TŬBİTAK'a (109T678 no'lu proje) teŐekkűrlerimi sunarım. ÇalıŐma sűresince beni hep destekleyen ve gűvenen çok sevdięim aileme sonsuz teŐekkűrlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER LİSTESİ

	Sayfa No
ÖZ .....	vii
ABSTRACT .....	vi
TEŞEKKÜR .....	vii
İÇİNDEKİLER LİSTESİ .....	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	x
1. BÖLÜM .....	1
GİRİŞ .....	1
2. BÖLÜM .....	3
TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAR .....	3
2.1. Ising Modeli .....	3
2.2. Graf .....	4
2.3. Latis (Örgü) .....	5
2.4. Spin .....	6
2.5. Konfigürasyon .....	7
2.6. Cayley Ağacı .....	7
2.7. Cayley ağacı üzerindeki komşuluklar .....	10
3. BÖLÜM .....	12
ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN CAYLEY AĞACI ÜZERİNDEKİ ISING MODELİNİN DİNAMİK DAVRANIŞLARI .....	12
3.1. Üç Etkileşimli Ising Modelinin Yineleme Denklemleri .....	12
3.2. Faz Diyagramlarının Çizimi ve Yorumu .....	17
4. BÖLÜM .....	24
DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN CAYLEY AĞACI ÜZERİNDEKİ ISING MODELİNİN DİNAMİK DAVRANIŞLARI .....	24
4.1. Üç Etkileşimli Ising Modelinin Yineleme Denklemleri .....	24
4.2. Faz Diyagramlarının Çizimi ve Yorumu .....	29
5. BÖLÜM .....	34
ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR .....	34



6. BÖLÜM .....	36
SONUÇLAR .....	36
KAYNAKLAR: .....	38

## ŞEKİLLER LİSTESİ

### Sayfa No

Şekil 2.1. Spinlerin herhangi bir andaki pozitif (+) ya da negatif (-) durumları [9] .....	4
Şekil 2.2. Genel bir graf örneği [2] .....	5
Şekil 2.3. Kare latis, Üçgen latis ve Petek latis.....	5
Şekil 2.4. Ağaç latis örnekleri .....	5
Şekil 2.5. İkinci mertebeden Cayley ağacının (+, -) spin değerli bazı konfigürasyonları .....	6
Şekil 2.6. Üçüncü mertebeden Cayley ağacının (+, -) spin değerli bazı konfigürasyonları .....	6
Şekil 2.7. Üçüncü mertebeden bir yarı Cayley ağacı; $x_0$ ağacımızın kökü (sabit nokta) ..	8
Şekil 2.8. Tek taraflı ikinci mertebeden yarı Cayley ağacı .....	8
Şekil 2.9. Üçüncü ve dördüncü mertebeden Cayley ağacının genel görünümü.....	9
Şekil 2.10. En yakın komşular olan $x$ ve $y$ köşe noktaları .....	10
Şekil 2.11. Doğrultulmuş (prolonged) sonraki en yakın üçlü komşular olan $x, y$ ve $z$ köşe noktaları .....	10
Şekil 2.12. Birinci seviyeden sonraki en yakın üçlü komşular olan $x_0, y, z$ ve $t$ köşe noktaları .....	11
Şekil 3.1. Üçüncü mertebeden Cayley ağacının $V_2$ üzerindeki konfigürasyonu .....	14
Şekil 3.2. $\Gamma^3$ Cayley ağacının pozitif sınır değerli başlangıç koşul diyagramı .....	18
Şekil 3.3. $\beta = -0.25$ ve $\beta = -0.35$ değerleri için modelimizin faz diyagramları .....	20
Şekil 3.4. $\gamma = 0.03$ ve $\gamma = 0.05$ değerleri için modelimizin faz diyagramları .....	21
Şekil 3.5. $\gamma = -0.30$ ve $\gamma = 0.00$ değerleri için modelimizin faz diyagramları.....	22
Şekil 4.1. $\Gamma^4$ ( $k=4$ ) Cayley ağacının pozitif sınır değerli başlangıç koşul diyagramı .....	30
Şekil 4.2. $\beta = -0.50$ ve $\beta = 0.50$ değerleri için modelimizin faz diyagramları.....	31
Şekil 4.3. $\gamma = 0.03$ ve $\gamma = -0.03$ değerleri için modelimizin faz diyagramları.....	32
Şekil 4.4. $\gamma = 0.00$ ve $\gamma = -0.05$ değerleri için modelimizin faz diyagramları.....	33

## 1. BÖLÜM

### GİRİŞ

Cayley ağacı üzerindeki latis modellerinin incelenmesi son zamanlarda yoğun olarak çalışılmaktadır. Bu latis modelleri temel bilimlerde özellikle fizikteki karşılığı olarak gerçek uygulama alanlarına sahip olmamasına rağmen realistik sistemlerin çözümüne ilham kaynağı olmasından dolayı hem matematikçiler hem de diğer bilim dallarında çalışan bilim insanları tarafından incelenmektedir. Vannimendus tarafından ilk olarak ikinci mertebeden Cayley ağacı üzerinde en yakın komşuluklu ve sonraki en yakın komşuluklu Ising modelinin faz diyagramı incelenmiştir [13]. Bu çalışmada ferromanyetik ve paramanyetik faz bölgelerine ilave olarak modulated faz bölgesi de elde edilmiştir. Sıfıra yakın sıcaklıklarda çoklu-kritik (Lifshitz) noktası elde edilmiştir. Yine Tsalis ve ark. [10], tarafından ikinci mertebeden Cayley ağacı üzerinde üç etkileşim sabitli Ising modelinin faz diyagramları incelenmiştir.

Uğuz ve Akın [12] tarafından üçlü avize yapısına benzer Cayley ağacı üzerinde üç etkileşimli Ising modelinin faz diyagramları incelenmiştir. Bu çalışmada sıfır olmayan sıcaklıklarda çoklu-kritik (Lifshitz) noktalarının varlığı gösterilmiştir.

Bu tezde önce üçüncü mertebeden sonra dördüncü mertebeden Cayley ağacı üzerinde tanımlı üç etkileşim sabitli Ising modelinin faz diyagramları incelenmektedir. Yinelemeli denklemlerimizi üretecek olan Hamiltonyen denklemi üç etkileşimli bağlantı sabitine sahiptir. Bu sabitlerimiz karşılıklı en yakın ikili komşuluk etkileşimi  $J_1$ , doğrultulmuş (prolonged) sonraki en yakın üçlü komşuluk etkileşimi  $J_p$  ve birinci seviyeden sonraki en yakın üçlü komşuluk etkileşiminden  $J_{1l}$  oluşmaktadır. Tezimizde tespit ettiğimiz önemli bulgularımızdan birisi düşük sıcaklıklar için faz diyagram bölgelerinde paramanyetik fazın tamamen ortadan kalkmasıdır. Bu durumda bilinen metotlarla elde ettiğimiz lineer olmayan dinamik sistemimizin kararlılık analizi yapılamamaktadır. Örneğin çoklu kritik noktaları civarında lineerleştirme işlemi yapılamadığında faz geçişler için belli bir yöntem uygulanamamaktadır. Tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezle ilgili genel bilgiler verilmektedir.

Üzerinde çalıştığımız konuyla ilgili daha önce yapılan çalışmalardan ve bu tezde yapılan çalışmalarla ilgili ön bilgiler verilmektedir. İkinci bölümde ise tezimizle alakalı sonraki kısımlarda kullanılacak temel tanım ve notasyonlar verilmektedir. Üçüncü ve dördüncü bölümler tezin temel kısmını içermektedir. Üçüncü bölümde üçüncü mertebeden Cayley ağacı üzerindeki 3 etkileşim sabitli Ising modelinin temel denklemleri elde edilmekte ve daha sonra da elde edilen lineer olmayan dinamik sisteme karşılık gelen bazı faz diyagramları bilgisayar kodları kullanılarak çizilmiştir. Daha sonra ise çizilen bu faz diyagramları yorumlanmıştır. Dördüncü bölümde üçüncü bölümde yapılan işlemleri dördüncü mertebeden Cayley ağacı üzerinde uygulanmaktadır. Beşinci bölümde ise daha önceki yapılan çalışmalarla ilgili bilgiler verilmektedir. Son bölümde ise tezde elde edilen sonuçlar yorumlanmakta ve gelecekte yapılabilecek çalışmalar hakkında öneriler sunulmaktadır.

## 2. BÖLÜM

### TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAR

#### 2.1. Ising Modeli

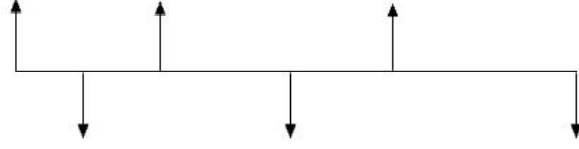
İstatistiksel fizik, kuramsal fiziğin temel disiplinlerinden biri olup fizik problemlerinin çözümünde olasılık metodlarını kullanır. Bu problemler; nükleer reaksiyonlar, biyoloji, kimya, matematik, nöroloji ve hatta sosyoloji gibi sosyal bilimlerde bile yaygın olarak incelenmektedir. Son zamanlarda olasılık teorisinde yeni bir stokastik süreç tipi olan Markov random alanı tanımlanmıştır. Bu tür süreç tipleri istatistiksel fizik için bir araştırma konusu olmuştur.

Fakat istatistiksel fizikte bu tür süreçlerin Markov süreçlerinin doğal bir genelleştirilmesi olduğu açıktır ve bu alanda boş olan indeksin yerini almıştır [13]. Markov random alan kavramı Alman fizikçi Ernst Ising'ten sonra birçok özel model, genel bir olasılık çerçevesi içine yerleştirilmesi sonucu meydana gelmiştir.

Ising modeli, Wilhelm Lenz' in doktora öğrencisi olan Ernst Ising tarafından ferromanyetik problemleri çözmek için 1925 yılında tanıtılmış ve Ising spin-1/2 modelinin tek boyuttaki çözümünü yapmıştır. Sonraları bu model Ising modeli diye adlandırılmıştır.

Matematikçiler ve diğer bilim adamlarının karmaşık sistemlerin davranışlarını incelemek için kullandıkları Ising modeli, matematiksel bir modelleme aracıdır. Ising modelinin yapısı bir karmaşık sistemin iç elemanlarını incelemek ve sistemin tüm davranışını belirlemek için elemanların birbirleriyle olan etkileşimlerini yaklaşım metotları ile tahmin etmeye olanak sağlayan bir sistemdir [8].

Ising, her bir nokta veya köşede küçük bir dipol veya spin takılı olan eksen üzerindeki noktaların bir dizisini  $0, 1, 2, \dots, n$  şeklinde düşünmüştür. Spin, verilen herhangi bir anda yukarı (pozitif) veya aşağı (negatif) yönelimi ifade eder. Bu spinlerin durumlarını gösteren konfigürasyonlar genel olarak aşağıdaki şekilde görüldüğü formdadır;



Şekil 2.1. Spinlerin herhangi bir andaki pozitif (+) ya da negatif (-) durumları [9]

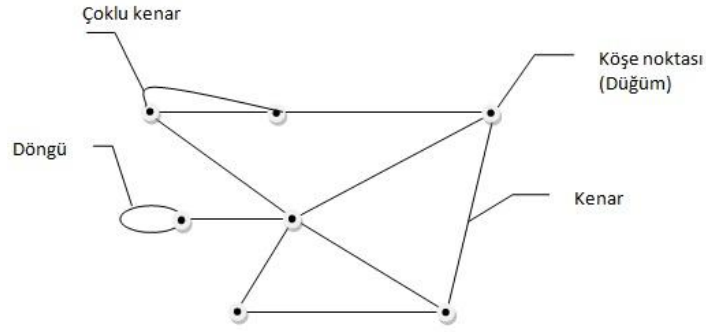
Ising [8], Random alanı olarak bilinen, tüm mevcut konfigürasyonların kümesi üzerine bir olasılık ölçümü oluşturmuştur. Tüm iki taraflı dizilerin oluşturduğu  $\Phi^{\mathbb{Z}}$  uzayını aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz [13];

$$w = (\dots, w_{-1}, w_0, w_1, w_2, \dots)$$

Burada  $w_i$  'ler  $\Phi = \{+, -\}$  değerlerinden birini alır. (+) spin yukarısını, (-) spin aşağısını ifade etmektedir. O halde  $\Phi$  üzerinde tanımlı  $\sigma_i$  spinini bir fonksiyon olarak düşünebiliriz. Eğer  $w_i = +$  ise  $\sigma_i(w) = 1$  eğer  $w_i = -$  ise  $\sigma_i(w) = -1$  şeklinde gösterilebilir.

## 2.2. Graf

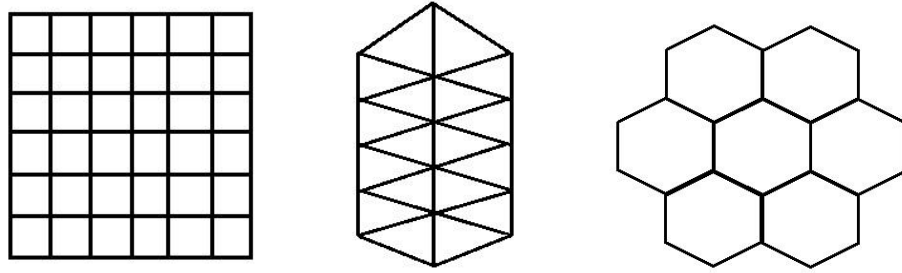
Bilindiği gibi bir graf; düğüm olarak da adlandırılan noktalar ve her biri bu noktaları veya sadece bir noktanın kendisini birleştiren ve kenar olarak adlandırılan çizgiler topluluğudur. Graf ifadesi bazı çalışmalarda çizge diye de adlandırılmaktadır. Yol haritaları graf için bir örnek olabilir. Haritadaki şehirler noktaları ve o şehirleri birleştiren yollar ise kenarları oluşturur. Genel bir graf,  $G = (V, \Lambda)$  şeklinde ifade edilebilir. Burada  $V$ ,  $G$  grafi üzerindeki köşe noktalarının kümesini;  $\Lambda$  ise  $G$  grafi üzerindeki kenarların kümesini göstermektedir. Köşe noktaları bir nesnenin veya sistemin iç elemanlarını temsil ederken, kenarlar ise eleman çiftleri arasındaki potansiyel etkileşimleri temsil etmektedir. Genel bir graf örneği aşağıdaki gibi verilebilir.



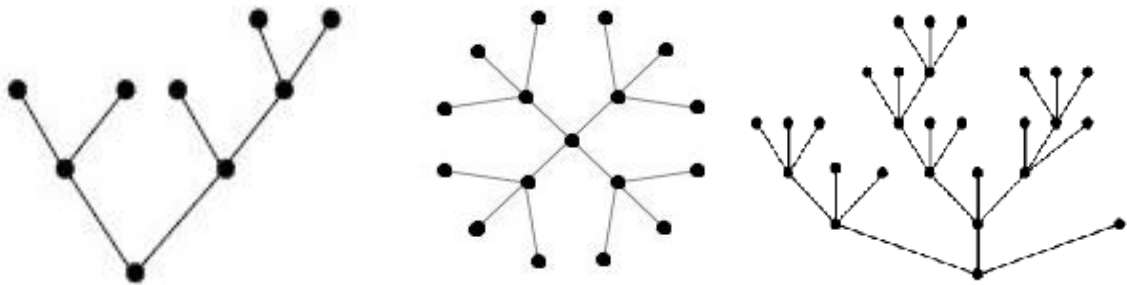
Şekil 2.2. Genel bir graf örneği [2]

### 2.3. Latis (Örgü)

Geometrik örgü şekillerine veya modellerine latis adı verilir. Latis modellerini sonlu, sonsuz ya da periyodik (hiyerarşik) olarak sınıflandırabiliriz. Latisler bu sınıflandırmaya göre değişik isimlerle adlandırılabilir. Pek çok uygulamada bu tür grafların düzenli bir yapıya sahip olduğu söylenebilir. Bazı genel latis örnekleri aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.3. Kare latis, Üçgen latis ve Petek latis



Şekil 2.4. Ağaç latis örnekleri

Karmaşık sistemlerin örneklerini atomlar, moleküller, insanlar, meyve ağaçları ve hücre organizasyonları olarak sıralayabiliriz. Düzenli içyapılardan oluşan bu öğeler, grafi teoriksel olarak incelemeye imkân vermektedir.

**Tanım 2.1.**  $x, y \in V$  iki köşe noktası olmak üzere eğer bu noktaları birbirlerine bağlayan bir kenar var ise bu iki köşe noktası birbirinin ‘en yakın komşusudur’ denir[13].

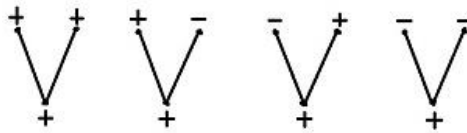
#### 2.4. Spin

$S$  belirli özelliklere sahip bir küme ve  $G$  bir graf olsun. Bir  $V$  köşe noktasındaki bir spin,  $V$  kümesine  $S$ ’nin bir elemanının atanması durumudur.

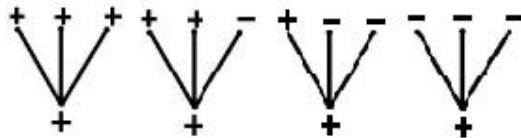
Grafın her bir noktasına bir spin değeri karşılık gelmektedir. Spinlerin farklı kombinasyonları, graf üzerindeki komşu öğelerin birbiriyle olan etkileşimlerinin toplam olasılığını belirlememize yardımcı olmaktadır.

Bazı genel spin örnekleri; sıcaklık (sıcak veya soğuk), manyetizma (pozitif veya negatif), yön (yukarı, aşağı veya yan yönler) ve renk (mavi, yeşil, kırmızı veya mor), ... gibi sıralanabilir.

Ising modelinde genel olarak spinler (+) ve (-) olarak kullanılmaktadır. İki ve üç boyutlu bir latis üzerindeki herhangi bir spin konfigürasyonu aşağıdaki şekilde düşünülebilir;



Şekil 2.5. İkinci mertebeden Cayley ağacının (+, -) spin değerli bazı konfigürasyonları



Şekil 2.6. Üçüncü mertebeden Cayley ağacının (+, -) spin değerli bazı konfigürasyonları

Sistemin elemanları latis üzerindeki konumlarına bağlı olarak birbirlerini etkilemeleri değişmektedir. Bu latis üzerindeki noktaların her birine farklı spinlerin karşılık gelmesi sonucu sistemin toplam enerjisi meydana gelmektedir.



**Tanım 2.2.** Bir karmaşık sistemin toplam enerjisini ölçen fonksiyona Hamiltonyen denklemi denir.

Hamiltonyen denklemi sistem içindeki her bir noktaya bir spin değeri atayarak o grafın özel durumdaki enerjisini ölçer.

## 2.5. Konfigürasyon

Bir konfigürasyon her bir  $x \in V$  köşe noktasını,  $\varphi(x) \in S$  olan bir spin değerine atayan dönüşümdür ve

$$\varphi: V \rightarrow S$$

$$x \rightarrow \varphi(x)$$

şeklinde de ifade edilir.  $\varphi$  konfigürasyonu  $\Omega = S^V$  uzayının bir elemanı olup, bir konfigürasyon, latisin bir özel durumudur.

## 2.6. Cayley Ağacı

$k \geq 1$  olmak üzere bir  $\Gamma^k$  ( $k$ -ncı mertebeden) Cayley ağacı;  $k$  tane nokta ve her noktadan çıkan  $k+1$  tane kenarı bulunan bağlantısız (döngüsüz) birleşik bir grafiğe sahip olan yarı sonsuz bir ağaçtır (şekil 2.7, 2.9). Bir yarı Cayley ağacı oluşturulurken, merkezi bir “ $x_0$ ” noktasından başlanır ve hepsi bu “ $x_0$ ” noktasına bağlı  $k$  tane nokta eklenir, bu  $k$  tane noktalar takımı “birinci kabuk” (shell) olarak adlandırılır. Daha sonra bu  $k$  tane noktanın her birine yine  $k$  tane nokta eklenerek  $k \cdot k = k^2$  tane yeni nokta oluşur ve bu  $k^2$  tane noktalar takımına ise “ikinci kabuk” denir. Bu şekilde iterasyonel olarak ilerleyerek üçüncü, dördüncü ve sonraki kabuklar oluşturulur. Böylece sonsuza uzanan bir latis diyagramı olan yarı Cayley ağacı elde edilir. Burada başlangıç noktası ( $x_0$ ) hariç ( $x_0$ ’ın  $k$  tane) bütün noktaların  $k+1$  tane “en yakın komşuluğu” vardır. Bu Cayley ağacı aynı zamanda bir graf örneği olduğundan  $\Gamma^k = (V, \Lambda)$  ile ifade edilebilir. Burada  $V$ ,  $\Gamma^k$ ’nin noktalarının kümesini;  $\Lambda$  ise  $\Gamma^k$ ’nin kenarlarının kümesini ifade etmektedir.



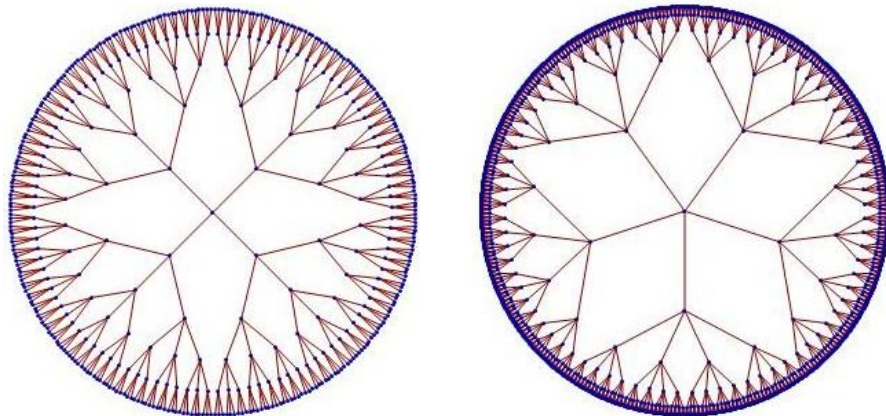
$\Gamma^k$  üzerinde herhangi iki nokta  $x, y \in V$  olmak üzere eğer bu iki noktayı birleştiren yalnız bir tane  $l \in \Lambda$  kenarı varsa, yani  $d(x, y) = 1$  ise  $(x, y)$  ikilisine “en yakın komşular” denir ve  $l = \langle x, y \rangle$  ile gösterilir.

$x, y \in V$  ( $\Gamma^k$  üzerinde) herhangi iki nokta olmak üzere, eğer  $d(x, y) = 2$  ise  $(x, y)$  ikilisine “sonraki en yakın komşular” denir.  $x, y, z \in V$  olmak üzere  $(x, z)$  sonraki en yakın komşular olsun.

Eğer  $d(x, x_0) = |x| \neq |z| = d(z, x_0)$ ; yani  $x$  ve  $z$  noktaları farklı kabuklarda ise  $(x, y, z)$  üçlüsüne “doğrultulmuş (prolonged) sonraki en yakın üçlü komşular” denir ve  $\langle x, y, z \rangle$  ile gösterilir.

Şimdi de  $y, z, t \in W_1$  noktalarını göz önüne alalım. Burada  $y, z, t$  noktaları birinci seviyede oldukları için  $x_0$  ‘a olan uzaklıkları 1 birim, ikili olarak birbirlerine olan uzaklıkları ise 2 birimdir, yani  $|y| = |z| = |t| = 1$  ve  $d(y, z) = d(y, t) = d(z, t) = 2$  dir. Bu  $(x_0, y, z), (x_0, y, t), (x_0, z, t)$  üçlülerine de “birinci seviyeden sonraki en yakın üçlü komşular” denir ve  $\langle x_0, y, z \rangle, \langle x_0, y, t \rangle, \langle x_0, z, t \rangle$  şeklinde gösterilir.

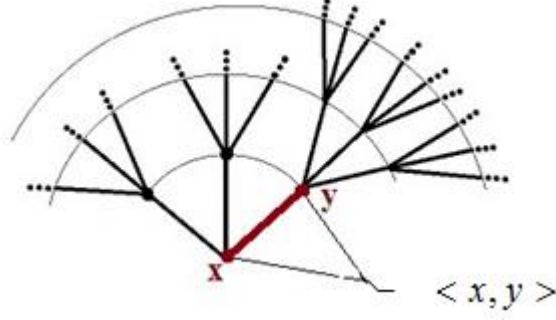
Aşağıda ‘Mathematica’ programlama dili ile üretilmiş üçüncü mertebeden ( $\Gamma^3$ ) ve dördüncü mertebeden ( $\Gamma^4$ ) Cayley ağaçlarının genel yapısını gösteren şekilleri verelim:



Şekil 2.9. Üçüncü ve dördüncü mertebeden Cayley ağacının genel görünümü

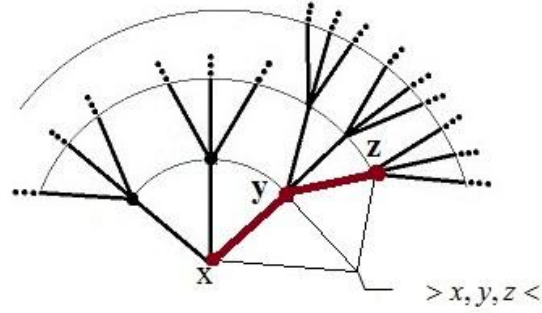
## 2.7. Cayley ağacı üzerindeki komşuluklar

Bu kesimde Cayley ağacı üzerindeki önceki kesimde (2.6) tanımlanan komşulukları şekiller üzerinde inceleyelim. Eğer iki köşe noktası olan  $x$  ve  $y$  'yi birleştiren bir kenar  $l \in \Lambda$  var ise “en yakın komşuluk” adını alır ve  $\langle x, y \rangle$  şeklinde gösterilir.



Şekil 2.10. En yakın komşular olan  $x$  ve  $y$  köşe noktaları

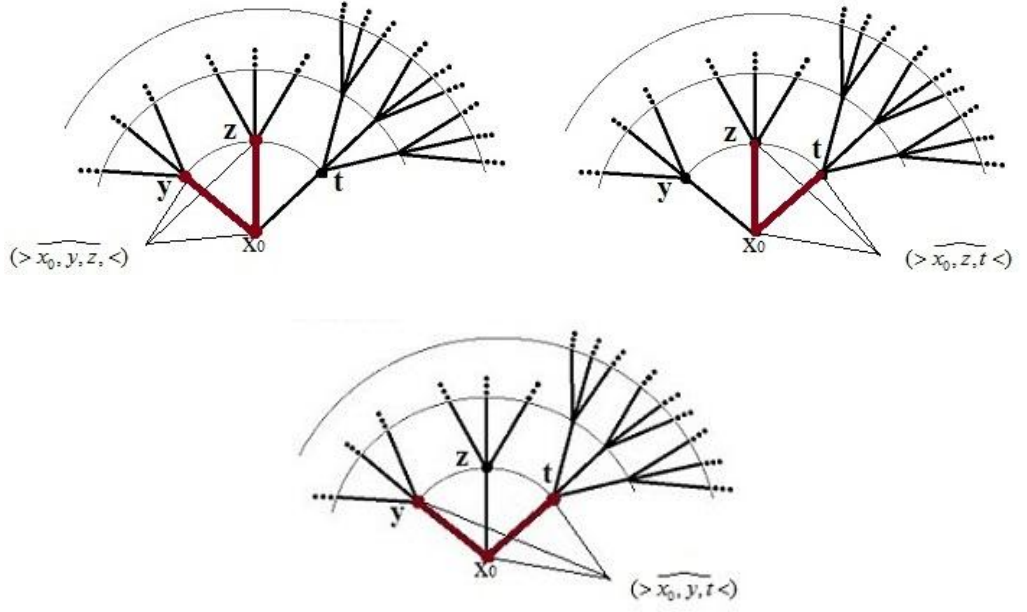
Ağacımız üzerindeki doğrultulmuş (prolonged) sonraki en yakın üçlü komşular olan noktalarımız  $x, y, z$  olsun,  $\langle x, y, z \rangle$  şeklinde gösterdiğimiz bu komşuluğumuzu da aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.



Şekil 2.11. Doğrultulmuş (prolonged) sonraki en yakın üçlü komşular olan  $x, y$  ve  $z$  köşe noktaları

Birinci seviyedeki  $y, z, t \in W_1$  noktalarını göz önüne alalım. Burada  $y, z, t$  noktalarının  $x_0$  'a olan uzaklıkları 1 birim, ikili olarak birbirlerine olan uzaklıkları ise 2 birimdir, yani  $d(y, x_0) = |y| = d(z, x_0) = |z| = d(t, x_0) = |t| = 1$  ve  $d(y, z) = d(y, t) = d(z, t) = 2$  dir. Bu  $(x_0, y, z), (x_0, y, t), (x_0, z, t)$  üçlülerine de “birinci seviyeden sonraki en yakın

üçlü komşular “ denir ve  $(> x_0, y, z, <)$ ,  $(> x_0, y, t, <)$ ,  $(> x_0, z, t, <)$  şeklinde gösterdiğimiz bu komşulukları aşağıdaki şekillerle ifade edelim.



Şekil 2.12. Birinci seviyeden sonraki en yakın üçlü komşular olan  $x_0, y, z$  ve  $t$  köşe noktaları

### 3. BÖLÜM

## ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN CAYLEY AĞACI ÜZERİNDEKİ ISING MODELİNİN DİNAMİK DAVRANIŞLARI

#### 3.1. Üç Etkileşimli Ising Modelinin Yineleme Denklemleri

Bu bölümde önce üçüncü mertebeden bir Cayley ağacı üzerindeki üç etkileşimli Ising modeli için faz diyagramları incelenecektir. Burada önceden seçilen  $x_0$  sabit noktası (üç kenara sahip) dışında bütün noktalardan  $(k+1)$  yani dört tane kenar çıkan bir yarı sonsuz diyagram üzerinde çalışmalar yapılacaktır. Üçüncü mertebeden Cayley ağacı üzerinde  $J_1, J_p$  ve  $J_{1l}$  sırasıyla en yakın, yönlendirilmiş sonraki en yakın üçlü ve birinci seviyedeki sonraki en yakın üçlü komşuluk bağlantı sabitleridir. Ising modelimiz için spin değerlerimiz  $\Phi = \{-1, 1\}$  kümesinden seçilerek tek tabakalı üçüncü mertebeden Cayley ağacı üzerindeki Ising modelimizi oluşturacak Hamiltonyen denklemi aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$H(\sigma) = -J_1 \sum_{\langle x, y \rangle} \sigma(x)\sigma(y) - J_p \sum_{\langle x, y, z \rangle} \sigma(x)\sigma(y)\sigma(z) - J_{1l} \sum_{\langle x, y, z \rangle} \sigma(x)\sigma(y)\sigma(z) \quad (3.1.1)$$

Yinelemeli denklemlerimizi oluşturmak için  $V_n$  üzerindeki kısmi ayrışım fonksiyonlarının  $V_{n-1}$ 'in alt kümeleri üzerinde tanımlı ayrışım fonksiyonlarıyla bağlantısını göz önüne alalım.

$$Z^{(n)} \left( \begin{matrix} i_1, i_2, i_3 \\ i_0 \end{matrix} \right)$$

$V_n$  üzerindeki kısmi ayrışım fonksiyonu olsun,  $x_0$  kök (sabit nokta) üzerindeki spinimiz  $i_0$  ve birinci kabuktaki yani  $W_1$  (birinci seviye) üzerindeki spinlerimiz ise  $i_1, i_2, i_3$  tür.

$V_n$  kümesi üzerindeki toplam ayrışım fonksiyonu,

$$Z^{(n)} = \sum_{\sigma \in V_n} \exp(-\beta H(\sigma)) \quad (3.1.2)$$

olur ve  $\beta = \frac{1}{T}$  ters sıcaklık değeri olarak tanımlanır.

Burada göz önüne alacağımız muhtemel 16 farklı  $Z^n$  kısmi ayrışım fonksiyonu vardır [13]. Aşağıdaki ifadede görüldüğü gibi farklı spin değerli konfigürasyonlarının birbirine denk olduğu görülür. Bunlardan bazıları

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} +, +, - \\ + \end{pmatrix} \equiv Z^{(n)} \begin{pmatrix} +, -, + \\ + \end{pmatrix} \equiv Z^{(n)} \begin{pmatrix} -, +, + \\ + \end{pmatrix}$$

şeklinindedir. Buradan yalnızca 8 tane bağımsız kısmi ayrışım fonksiyonu olduğu anlaşılmaktadır. Bu kısmi ayrışım fonksiyonlarını aşağıdaki gibi yazabiliriz;

$$\begin{aligned} z_1^{(n)} &= Z^{(n)} \begin{pmatrix} +, +, + \\ + \end{pmatrix}, & z_2^{(n)} &= Z^{(n)} \begin{pmatrix} +, +, - \\ + \end{pmatrix} \\ z_3^{(n)} &= Z^{(n)} \begin{pmatrix} +, -, - \\ + \end{pmatrix}, & z_4^{(n)} &= Z^{(n)} \begin{pmatrix} -, -, - \\ + \end{pmatrix} \\ z_5^{(n)} &= Z^{(n)} \begin{pmatrix} +, +, + \\ - \end{pmatrix}, & z_6^{(n)} &= Z^{(n)} \begin{pmatrix} +, +, - \\ - \end{pmatrix} \\ z_7^{(n)} &= Z^{(n)} \begin{pmatrix} +, -, - \\ - \end{pmatrix}, & z_8^{(n)} &= Z^{(n)} \begin{pmatrix} -, -, - \\ - \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Böylece keyfi  $Z^{(n+1)} \begin{pmatrix} i_1, i_2, i_3 \\ i_0 \end{pmatrix}$  kısmi ayrışım fonksiyonumuzu,  $z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \dots, z_8^{(n)}$

kısmi ayrışım fonksiyonlarının kombinasyonu olarak yazabiliriz. Kolaylık olması bakımından

$$a = \exp\left(\frac{J_1}{T}\right), \quad b = \exp\left(\frac{J_p}{T}\right), \quad c = \exp\left(\frac{J_{ll}}{3T}\right) \quad (3.1.4)$$

biçiminde değişken değişimi yapılabilir. Böylece (3.1.4) deki parametreler yardımıyla  $z_i^{(n+1)}$  ( $i=1,2, \dots, 8$ ) kısmi ayrışım fonksiyonlarını aşağıdaki biçimde elde ederiz.

$$\begin{aligned} z_1^{(n+1)} &= a^3 c^9 (b^3 z_1^{(n)} + 3b z_2^{(n)} + 3b^{-1} z_3^{(n)} + b^{-3} z_4^{(n)})^3 \\ z_2^{(n+1)} &= a c^{-3} (b^3 z_1^{(n)} + 3b z_2^{(n)} + 3b^{-1} z_3^{(n)} + b^{-3} z_4^{(n)})^2 (b^{-3} z_5^{(n)} + 3b^{-1} z_6^{(n)} + 3b z_7^{(n)} + b^3 z_8^{(n)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_3^{(n+1)} &= a^{-1}c^{-3}(b^3z_1^{(n)} + 3bz_2^{(n)} + 3b^{-1}z_3^{(n)} + b^{-3}z_4^{(n)})(b^{-3}z_5^{(n)} + 3b^{-1}z_6^{(n)} + 3bz_7^{(n)} + b^3z_8^{(n)})^2 \\
z_4^{(n+1)} &= a^{-3}c^9(b^{-3}z_5^{(n)} + 3b^{-1}z_6^{(n)} + 3bz_7^{(n)} + b^3z_8^{(n)})^3 \\
z_5^{(n+1)} &= a^{-3}c^{-9}(b^{-3}z_1^{(n)} + 3b^{-1}z_2^{(n)} + 3bz_3^{(n)} + b^3z_4^{(n)})^3 \\
z_6^{(n+1)} &= a^{-1}c^3(b^{-3}z_1^{(n)} + 3b^{-1}z_2^{(n)} + 3bz_3^{(n)} + b^3z_4^{(n)})^2(b^3z_5^{(n)} + 3bz_6^{(n)} + 3b^{-1}z_7^{(n)} + b^{-3}z_8^{(n)}) \\
z_7^{(n+1)} &= ac^3(b^{-3}z_1^{(n)} + 3b^{-1}z_2^{(n)} + 3bz_3^{(n)} + b^3z_4^{(n)})(b^3z_5^{(n)} + 3bz_6^{(n)} + 3b^{-1}z_7^{(n)} + b^{-3}z_8^{(n)})^2 \\
z_8^{(n+1)} &= a^3c^{-9}(b^3z_5^{(n)} + 3bz_6^{(n)} + 3b^{-1}z_7^{(n)} + b^{-3}z_8^{(n)})^3.
\end{aligned}$$

Burada  $(z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \dots, z_8^{(n)})$  fonksiyonları da  $Z^{(n+1)}$  ayrışım fonksiyonuna karşılık gelir. Şimdi

bu eşitliklerden ikincisi olan  $(z_2^{(n+1)})$  ayrışım fonksiyonunu nasıl elde edeceğimizi kısaca

açıklayalım. Yukarıdaki (3.1.3) konfigürasyonu ve (3.1.4) parametreleri göz önüne alırsak;

$$z_2^{(n+1)} = ac^{-3}(b^3z_1^{(n)} + 3bz_2^{(n)} + 3b^{-1}z_3^{(n)} + b^{-3}z_4^{(n)})^2(b^{-3}z_5^{(n)} + 3b^{-1}z_6^{(n)} + 3bz_7^{(n)} + b^3z_8^{(n)})$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikte parantezin önündeki  $a, b$  ve  $c$  katsayıları

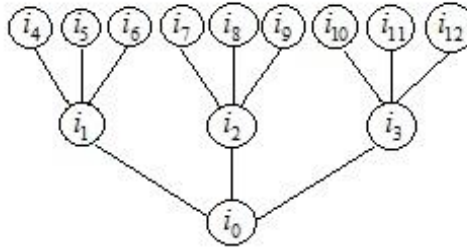
$Z_2^{(n)} \left( \begin{matrix} i_1, i_2, i_3 \\ i_0 \end{matrix} \right) = \left( \begin{matrix} +, +, - \\ + \end{matrix} \right)$  seçilmesiyle en yakın ikili komşuluklar, doğrultulmuş sonraki en

yakın üçlü komşuluklar ve birinci seviyeden sonraki en yakın üçlü komşulukların etkileşimleri

ile hesaplanır. Örneğin ikinci eşitlikteki  $(z_1^{(n)})^2 \cdot z_5^{(n)}$  teriminin katsayısı  $ab^3c^{-3}$  'e eşittir.

$Z_2^{(n)} \left( \begin{matrix} i_1, i_2, i_3 \\ i_0 \end{matrix} \right) = \left( \begin{matrix} +, +, - \\ + \end{matrix} \right)$  seçimini göz önüne alalım, bu ayrışım fonksiyonu üzerindeki

karşılıklı komşuluk etkileşimlerini hesaplamak için aşağıdaki şeklimizi inceleyelim.



Şekil 3.1. Üçüncü mertebeden Cayley ağacının  $V_2$  üzerindeki konfigürasyonu

Şekil 3.1' de  $i_j$ 'lere ağacın köşeleri bu köşeleri birleştiren doğru parçalarına da

kenarları denir. Yukarıdaki konfigürasyonda  $a = \exp\left(\frac{J_1}{T}\right)$  katsayısının mertebesini

belirleyen  $\langle i_0, i_1 \rangle, \langle i_0, i_2 \rangle$  ve  $\langle i_0, i_3 \rangle$  şeklinde üç tane ikili en yakın komşuluk

etkileşimi;  $b = \exp\left(\frac{J_p}{T}\right)$  katsayısının mertebesini belirleyen  $\langle i_0, i_1, i_4 \rangle,$



$(> i_0, i_1, i_5 <), \dots, (> i_0, i_3, i_{11} <), (> i_0, i_3, i_{12} <)$  şeklinde dokuz tane yönlendirilmiş üçlü komşuluk etkileşimi ve  $c = \exp\left(\frac{J_{ll}}{3T}\right)$  katsayısının mertebesini belirleyen  $(> i_0, i_1, i_2 <), (> i_0, i_2, i_3 <), (> i_0, i_1, i_3 <)$  şeklinde üç tane birinci seviyeden komşuluk etkileşimi vardır. Eğer spin değerlerini pozitif ( $i_4 = i_5 = i_6 = \dots = i_{12} = +$ ) seçersek,  $(z_1^{(n)})^2 \cdot z_5^{(n)}$  teriminin katsayısı  $ab^3c^{-3} = \exp\left(\frac{J_1}{T}\right)\exp\left(\frac{3J_p}{T}\right)\exp\left(\frac{-3J_{ll}}{3T}\right)$  olur. Bu işlemi takip ederek ve bazı basitleştirmelerden sonra ikinci eşitliğin  $(z_2^{(n+1)})$  elde edileceği açıktır.

Burada bazı ayrışım fonksiyonları diğerlerinin lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilmektedir. Böylece  $z_2^3 = c^{-36} z_1^2 z_4^2$ ,  $z_3^3 = c^{-36} z_1 z_4^2$ ,  $z_6^3 = c^{36} z_5^2 z_8^2$  ve  $z_7^3 = c^{36} z_5 z_8^2$  eşitlikleri göz önüne alındığında yalnızca dört tane bağımsız fonksiyonumuz kalmaktadır.

Yinelemeli denklemlerimizi elde etmek için  $u_i^{(n+1)} = \sqrt[3]{z_i^{(n+1)}}$  değişken değişim yapılarak aşağıdaki yeni denklemlerimizi elde ederiz [13];

$$\begin{aligned} u_1^{(n+1)} &= ac^3(b^3(u_1^n)^3 + 3bc^{-12}(u_1^n)^2(u_4^n) + 3b^{-1}c^{-12}(u_1^n)(u_4^n)^2 + b^{-3}(u_4^n)^3) \\ u_4^{(n+1)} &= a^{-1}c^3(b^{-3}(u_5^n)^3 + 3b^{-1}c^6(u_5^n)^2(u_8^n) + 3bc^{12}(u_5^n)(u_8^n)^2 + b^3(u_8^n)^3) \\ u_5^{(n+1)} &= a^{-1}c^{-3}(b^{-3}(u_1^n)^3 + 3b^{-1}c^{-12}(u_1^n)^2(u_4^n) + 3bc^{-12}(u_1^n)(u_4^n)^2 + b^3(u_4^n)^3) \\ u_8^{(n+1)} &= ac^{-3}(b^3(u_5^n)^3 + 3bc^6(u_5^n)^2(u_8^n) + 3b^{-1}c^{12}(u_5^n)(u_8^n)^2 + b^{-3}(u_8^n)^3). \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Toplam ayrışım fonksiyonu  $Z^{(n)} = (u_1 + u_4)^3 + (u_5 + u_8)^3$ ,  $u_i^{(n+1)}$  terimleri yardımıyla aşağıdaki şekilde (3.1.6) denklemler sistemi oluşturulur [13]. Faz diyagramlarını incelemek için aşağıdaki azaltılmış değişkenleri seçmek uygundur [13].

$$x^{(n+1)} = \frac{u_4^{(n+1)} + u_5^{(n+1)}}{u_1^{(n+1)} + u_8^{(n+1)}}, \quad y^{(n+1)} = \frac{u_1^{(n+1)} - u_8^{(n+1)}}{u_1^{(n+1)} + u_8^{(n+1)}}, \quad z^{(n+1)} = \frac{u_4^{(n+1)} - u_5^{(n+1)}}{u_1^{(n+1)} + u_8^{(n+1)}} \quad (3.1.6)$$

$x$  değişkeni, en-yakın komşuluk sınırlarının titreşiminin bir ölçümüdür ve  $y, z$  gibi sıralı bir parametre değildir (ayrıntılı bilgi için [13] çalışmasına bakınız).

Yukarıdaki (3.1.5) ayrışım fonksiyonları (3.1.6) denklemlerinde yerine konursa yeni denklemlerimiz aşağıdaki formu alır;

$$K = a^{-1}c^3(b^{-3}(u_5^n)^3 + 3b^{-1}c^6(u_5^n)^2(u_8^n) + 3bc^{12}(u_5^n)(u_8^n)^2 + b^3(u_8^n)^3) + a^{-1}c^{-3}(b^{-3}(u_1^n)^3 + 3b^{-1}c^{-12}(u_1^n)^2(u_4^n) + 3bc^{-12}(u_1^n)(u_4^n)^2 + b^3(u_4^n)^3)$$

$$L = ac^3(b^3(u_1^n)^3 + 3bc^{-12}(u_1^n)^2(u_4^n) + 3b^{-1}c^{-12}(u_1^n)(u_4^n)^2 + b^{-3}(u_4^n)^3) + ac^{-3}(b^3(u_5^n)^3 + 3bc^6(u_5^n)^2(u_8^n) + 3b^{-1}c^{12}(u_5^n)(u_8^n)^2 + b^{-3}(u_8^n)^3)$$

$$M = ac^3(b^3(u_1^n)^3 + 3bc^{-12}(u_1^n)^2(u_4^n) + 3b^{-1}c^{-12}(u_1^n)(u_4^n)^2 + b^{-3}(u_4^n)^3) - ac^{-3}(b^3(u_5^n)^3 + 3bc^6(u_5^n)^2(u_8^n) + 3b^{-1}c^{12}(u_5^n)(u_8^n)^2 + b^{-3}(u_8^n)^3)$$

$$N = a^{-1}c^3(b^{-3}(u_5^n)^3 + 3b^{-1}c^6(u_5^n)^2(u_8^n) + 3bc^{12}(u_5^n)(u_8^n)^2 + b^3(u_8^n)^3) - a^{-1}c^{-3}(b^{-3}(u_1^n)^3 + 3b^{-1}c^{-12}(u_1^n)^2(u_4^n) + 3bc^{-12}(u_1^n)(u_4^n)^2 + b^3(u_4^n)^3)$$

Olmak üzere bu kısaltmalar göz önüne alındığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$$x^{(n+1)} = \left( \frac{K}{L} \right), y^{(n+1)} = \left( \frac{M}{L} \right), z^{(n+1)} = \left( \frac{N}{L} \right). \quad (3.1.7)$$

Şimdi  $h = \frac{2}{u_1^{(n)} + u_8^{(n)}}$  olmak üzere  $u_1^{(n)}, u_4^{(n)}, u_5^{(n)}$  ve  $u_8^{(n)}$  aşağıdaki gibi seçilirse

$$\begin{aligned} u_1^n &= h(1 + y^n) \\ u_4^n &= h(x^n + z^n) \\ u_5^n &= h(x^n - z^n) \\ u_8^n &= h(1 - y^n), \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

bu durumda aşağıdaki lineer olmayan dinamik sistem elde edilir [13]:

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} &= \frac{A_2(x^n, y^n, z^n) + A_3(x^n, y^n, z^n)}{a^2 \left( (A_1(x^n, y^n, z^n) + A_4(x^n, y^n, z^n)) \right)} \\ y^{(n+1)} &= \frac{A_1(x^n, y^n, z^n) - A_4(x^n, y^n, z^n)}{A_1(x^n, y^n, z^n) + A_4(x^n, y^n, z^n)} \\ z^{(n+1)} &= \frac{A_2(x^n, y^n, z^n) - A_3(x^n, y^n, z^n)}{a^2 \left( (A_1(x^n, y^n, z^n) + A_4(x^n, y^n, z^n)) \right)}. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Burada gerekli kısaltmaları yapmak için  $A_1, A_2, A_3$  ve  $A_4$  fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde düzenleyebiliriz;

$$A_1(x^n, y^n, z^n) = c^3(b^3(1+y^n)^3 + 3bc^{-12}(1+y^n)^2(x^n+z^n) + 3b^{-1}c^{-12}(1+y^n)(x^n+z^n)^2 + b^{-3}(x^n+z^n)^3)$$

$$A_2(x^n, y^n, z^n) = c^3(b^{-3}(x^n-z^n)^3 + 3b^{-1}c^6(x^n-z^n)^2(1-y^n) + 3bc^{12}(x^n-z^n)(1-y^n)^2 + b^3(1-y^n)^3)$$

$$A_3(x^n, y^n, z^n) = c^{-3}(b^{-3}(1+y^n)^3 + 3b^{-1}c^{-12}(1+y^n)^2(x^n+z^n) + 3bc^{-12}(1+y^n)(x^n+z^n)^2 + b^3(x^n+z^n)^3)$$

$$A_4(x^n, y^n, z^n) = c^{-3}(b^3(x^n-z^n)^3 + 3bc^6(x^n-z^n)^2(1-y^n) + 3b^{-1}c^{12}(x^n-z^n)(1-y^n)^2 + b^{-3}(1-y^n)^3).$$

### 3.2. Faz Diyagramlarının Çizimi ve Yorumu

Bu kesimde yukarıda elde ettiğimiz (üçüncü mertebeden) yinelemeli denklemlerin (dizi) Vannimenus [13] metoduyla bilgisayar kodları yazılarak belli değerler ve parametrelerin belli aralıkları için faz diyagramları çizdirilmektedir.

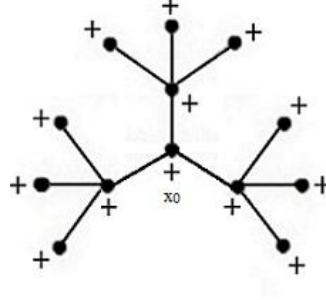
Bir modelin faz diyagramı; o fazların yapısını, bir fazdan diğer faza geçişini, fazların istikrarını ve ilgili fazlar arasındaki geçiş hatlarını gösterir. Ayrıntılı olarak farklı faz geçişlerini tartışmadan önce, faz diyagramının esas özelliklerinin bilinmesi gerekir. Bu bilgileri bazı bilgisayar programları yardımıyla sayısal olarak ifade etmek mümkündür.

Faz diyagramları  $\left(\frac{T}{J_1}, \frac{-J_p}{J_1}, \frac{J_{1l}}{J_1}\right)$  üç boyutlu uzayda, yineleme bağıntıları (3.1.9)

yardımıyla sayısal olarak belirlenir. Burada  $\frac{T}{J_1} = \alpha$ ,  $\frac{-J_p}{J_1} = \beta$ ,  $\frac{J_{1l}}{J_1} = \gamma$  ve sırasıyla

$a = \exp(\alpha^{-1})$ ,  $b = \exp(-\alpha^{-1}\beta)$ ,  $c = \exp(\alpha^{-1}\gamma)$  eşitliklerini tanımlayalım. Modelimizin

başlangıç koşulları  $\bar{\sigma}^{(n)}(V - V_n) \equiv +$  pozitif sınır şartı altında aşağıdaki gibidir;



Şekil 3.2.  $\Gamma^3$  Cayley ağacının pozitif sınır değerli başlangıç koşul diyagramı

Yukarıda elde ettiğimiz yinelemeli denkleminizin (dizimizin) (3.1.9) ilk terimini yani  $(x_0^{(n+1)}, y_0^{(n+1)}, z_0^{(n+1)})$  terimini  $u_i^{(n+1)} = \sqrt[3]{z_i^{(n+1)}}$  eşitliği yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edebiliriz [13];

$$u_1^{(n+1)} = \sqrt[3]{z_1^{(n+1)}} = \sqrt[3]{a^{12}b^9c^{(12)3}} = a^4b^3c^{12}$$

$$u_4^{(n+1)} = \sqrt[3]{z_4^{(n+1)}} = \sqrt[3]{a^{12}b^{-9}c^{(-6)3}} = a^4b^{-3}c^{-6}$$

$$u_5^{(n+1)} = \sqrt[3]{z_5^{(n+1)}} = \sqrt[3]{a^6b^{-9}c^{(6)3}} = a^2b^{-3}c^6$$

$$u_8^{(n+1)} = \sqrt[3]{z_8^{(n+1)}} = \sqrt[3]{a^{-6}b^9c^{(-12)3}} = a^{-2}b^3c^{-12}.$$

Yukarıdaki eşitlikler,

$$x^{(n+1)} = \frac{u_4^{(n+1)} + u_5^{(n+1)}}{u_1^{(n+1)} + u_8^{(n+1)}}, \quad y^{(n+1)} = \frac{u_1^{(n+1)} - u_8^{(n+1)}}{u_1^{(n+1)} + u_8^{(n+1)}}, \quad z^{(n+1)} = \frac{u_4^{(n+1)} - u_5^{(n+1)}}{u_1^{(n+1)} + u_8^{(n+1)}}$$

ifadelerinde yerine konursa aşağıdaki pozitif sınırlı başlangıç koşulları (yinelemeli denklem sisteminin ilk terimi) elde edilir;

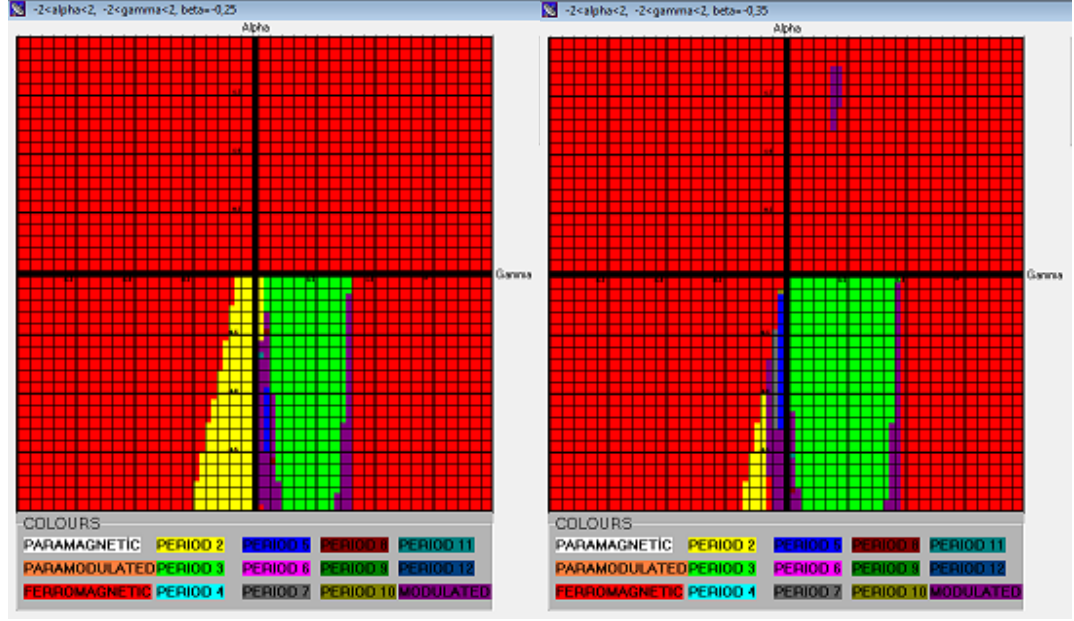
$$\begin{aligned} x^{(n+1)} &= \frac{u_4^n + u_5^n}{u_1^n + u_8^n} = \frac{a^4c^6(a^2 + c^{12})}{b^6(a^6c^{24} + 1)} \\ y^{(n+1)} &= \frac{u_1^n - u_8^n}{u_1^n + u_8^n} = \frac{(a^6c^{24} - 1)}{(a^6c^{24} + 1)} \\ z^{(n+1)} &= \frac{u_4^n - u_5^n}{u_1^n + u_8^n} = \frac{a^4c^6(a^2 - c^{12})}{b^6(a^6c^{24} + 1)}. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Yukarıdaki başlangıç koşullarından başlayarak yineleme denklemlerinin yakınsaklığına bakılır. Yeterince büyük sayıda iterasyon yapılarak bu dizinin yakınsaklık davranışı incelenir. Farklı sınır durumlarıyla ilgili olası başlangıç koşulları ile ilgili [1,3-6] incelenebilir. En basit anlamda bu dizi  $(x^*, y^*, z^*)$  gibi bir sabit noktaya ulaşır. Dizimizin faz diyagramları,  $(x^*, y^*, z^*)$  noktalarının (aşağıda belirtilen özelliklerine göre) yakınsama durumlarına göre sınıflandırılır.

Eğer  $y^*, z^* = 0$  ise ‘paramanyetik faz’ (kısaca **P**),  $y^*, z^* \neq 0$  ise de ‘ferromanyetik faz’ (kısaca **F**) oluşmaktadır. Sistem ‘periyot-p’ şeklinde periyodik de olabilir. Periyodik faz bazı periyotların belli aralıklarla aynı konfigürasyonda tekrar etmesidir. Eğer  $p = 2$  ise yani periyot-2 durumunda ‘antiferromanyetik faz’ (kısaca **P2**),  $p = 4$  yani periyot-4 olması durumunda ise ‘antifaz’ (kısaca **P4**) oluşur.

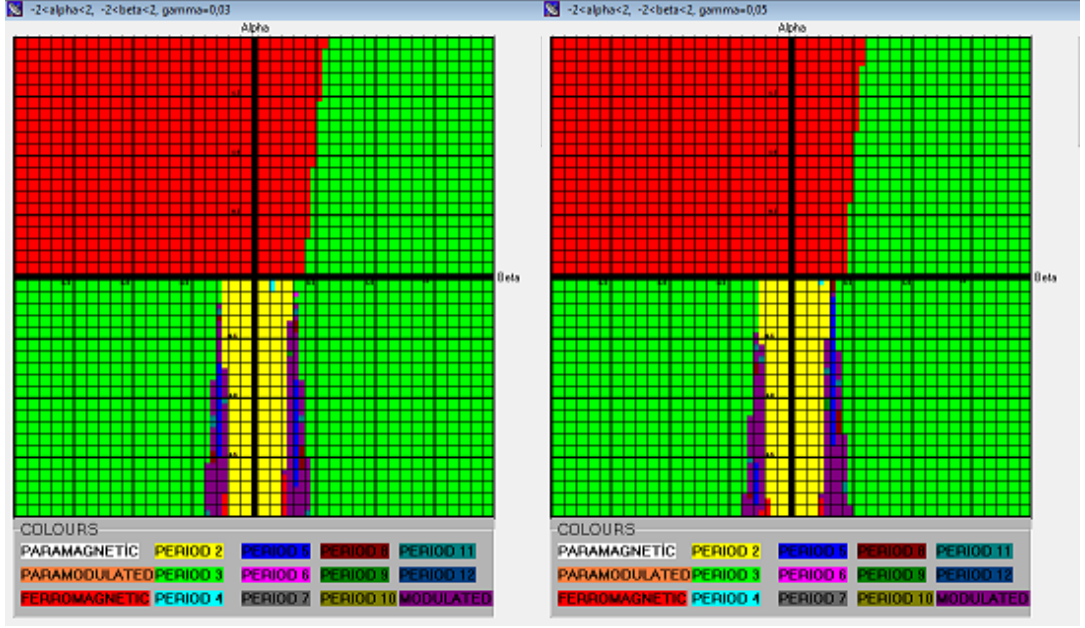
Son olarak sistem periyodik olmayabilir. Gerçekten periyodik olmayan durum ile çok uzun periyotlu durum arasındaki farkı sayısal olarak hesaplamak oldukça zordur. Biz periyodik fazların periyodunu 2–12 arasında olanları göz önüne alacağız ve *periyot – p* :  $p = 2, 3, \dots, 12$  ( $P2, P3, \dots, P12$ ) şeklinde ifade edeceğiz. Periyodu 12 den büyük olan veya periyodik olmayan fazlara ise ‘modulated faz’ (kısaca **M**) diyeceğiz. Modulated bölgelerde iki durum olabilir. Elde edilen  $(x^{(n+1)}, y^{(n+1)}, z^{(n+1)})$  dizisinin yeterince büyük iterasyondan sonraki terimleri periyot 12 den daha büyük olur ya da rastgele değişebilir. Bu bölgeleri tam olarak tespit edebilmek için ya daha güçlü bilgisayarlarla daha büyük iterasyonlar yapılmalı ya da dalga vektörleri vasıtasıyla verilen kritik değerler için titreşimin olup olmadığına bakılmaktadır. Bu kısmi ayrışım fonksiyonları arasındaki ilişki ve fazlarla ilgili detaylı bilgi için Vannimenus[13], Ganikhodjaev ve ark., [3], [4], [5] ve Mariz ve ark., [10] gibi çalışmalar incelenebilir.

Bu tezde Cayley ağacı üzerindeki Ising modelinin üç bağlantı sabitli Hamiltonyen denklemleri için faz diyagramları elde edilmekte ve bütün faz diyagramları  $-2 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 2$  aralığında çizilmektedir. Bu şekillerimizden bazıları aşağıda verilmiştir;



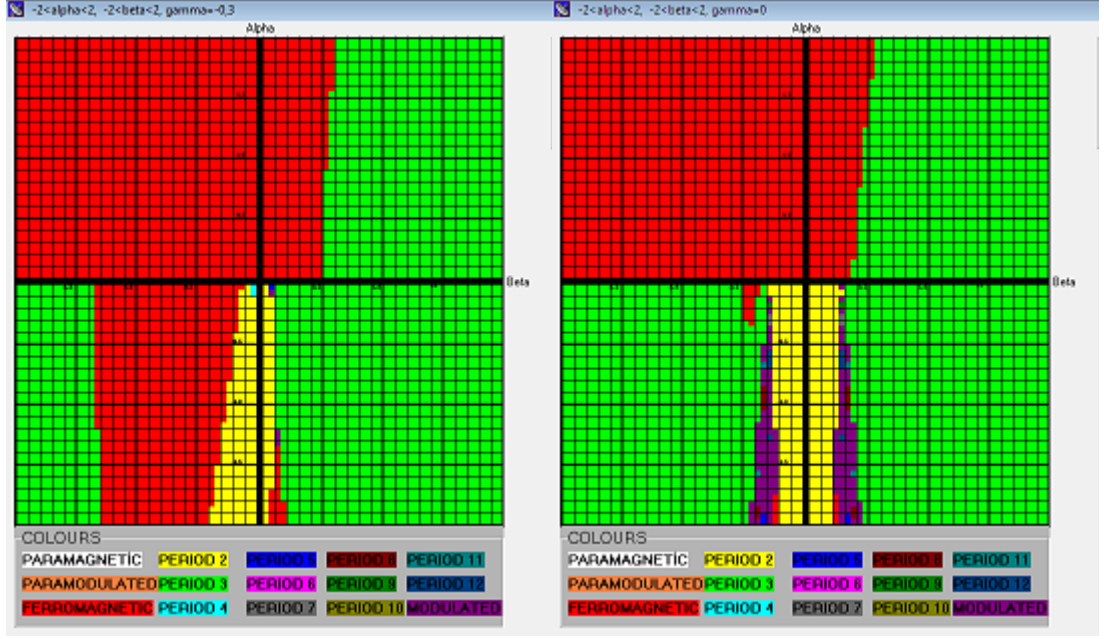
Şekil 3.3.  $\beta = -0.25$  ve  $\beta = -0.35$  değerleri için modelimizin faz diyagramları

Şekil 3.3'te betanın  $\beta = -0.25$  ve  $\beta = -0.35$  değerleri için faz diyagramları çizdirildi.  $\beta = -0.25$  değeri için elde edilen diyagramda birinci ve ikinci bölgelerde tamamen ferromanyetik faz oluşmaktadır. Üçüncü bölgede yine büyük çoğunlukla ferromanyetik fazla birlikte  $\alpha$ -ekseni boyunca aşağı doğru genişleyen periyot-2 fazı görülmektedir. Dördüncü bölgede ise çok az periyot-2, periyot-5, modulated, periyot-3 ve çok küçük adacıklar halinde periyot-8 ve periyot-11 fazlarının yanı sıra ferromanyetik fazlar görülmektedir. Ayrıca  $(0.05, -0.3)$ ,  $(0.1, -1.0)$  ve  $(0.1, -0.5)$  noktalarında çoklu-kritik (Lifshitz) noktalar görülmektedir. Bu noktalar geçiş noktaları olduğu için bunların yakın komşuluklarında birden fazla faz bulunur.  $\beta = -0.35$  değeri için çizilen faz diyagramı,  $\beta = -0.25$  değeri için elde edilen grafiğe çok yakın olduğu görülmektedir. Birinci şekilden farklı olarak birinci bölgede küçük bir adacık şeklinde modulated faz görülüyor. Üçüncü bölgedeki periyot-2 fazı azalarak aşağı doğru kaymış ve ince çubuklar halinde ferromanyetik, modulated ve periyot-7 fazları görülmektedir. Ayrıca dördüncü bölgedeki modulated ve ferromanyetik faz azalırken periyot-3 fazı genişlemektedir.



Şekil 3.4.  $\gamma = 0.03$  ve  $\gamma = 0.05$  değerleri için modelimizin faz diyagramları

Şekil 3.4'te gamanın  $\gamma = 0.03$  ve  $\gamma = 0.05$  değerleri için faz diyagramları çizdirildi.  $\gamma = 0.03$  değeri için elde edilen diyagramda birinci bölgenin büyük bir bölümünde periyot-3 ve  $\alpha$ -eksenine yakın kısımlarda ferromanyetik faz oluşmaktadır. İkinci bölgenin tamamı ferromanyetik fazdan oluşurken üçüncü bölgede ise yine periyot-3 fazının yanı sıra ince çubuklar halinde uzanan periyot-2, modulated, periyot-5, ferromanyetik fazlar ve çok küçük adacıklar halinde periyot-11 ve periyot-8 fazları görülmektedir. Dördüncü bölge ise üçüncü bölgenin  $\alpha$ -eksenine göre simetriğine çok yakın bir şekilde periyot-2, modulated, periyot-5, ferromanyetik fazlar görülürken farklı olarak çok küçük parçalar halinde periyot-4, periyot-6 ve periyot-9 fazları da meydana gelmektedir. Ayrıca  $(-0.3, -0.2)$ ,  $(-0.2, -1.8)$ ,  $(0.3, -0.3)$  ve  $(0.4, -1.2)$  noktalarında çoklu-kritik (Lifshitz) noktalar görülmektedir. İkinci şeklimizde  $\gamma = 0.05$  değeri için çizilen faz diyagramı ise  $\gamma = 0.03$  değeri için elde edilen faz diyagramına çok yakın olduğu görülmekle birlikte sadece bazı fazların boyutunda değişiklikler göze çarpmaktadır.



Şekil 3.5.  $\gamma = -0.30$  ve  $\gamma = 0.00$  değerleri için modelimizin faz diyagramları

Şekil 3.5'te  $\gamma = -0.30$  ve  $\gamma = 0.00$  değerleri için faz diyagramları çizdirildi.  $\gamma = -0.30$  değeri için elde edilen diyagramda bir önceki şeklimizde (Şekil 3.4) olduğu gibi birinci bölgede periyot-3 ve ferromanyetik faz görülürken ikinci bölgede sadece ferromanyetik faz oluşmuştur. Üçüncü bölgede ise uzun bölgeler halinde periyot-3, ferromanyetik faz ve  $\alpha$ -eksenine yakın bölgede periyot-2, çok küçük bir adacık halinde de periyot-4 görülmektedir. Dördüncü bölge ise yine  $\alpha$ -eksenine yakın kısımlarda ince çubuk şeklinde periyot-2 fazı uzanırken çok az ferromanyetik faz ve noktalar halinde periyot-5 ve modulated fazlar gözükmemekte. Geri kalan kısımlarda ise çok yoğun olarak periyot-3 gözükmemektedir. Ayrıca  $(0.10, -0.05)$ ,  $(0.10, -0.10)$ ,  $(0.10, -1.20)$  ve  $(0.10, -1.35)$  noktalarında çoklu-kritik (Lifshitz) noktalar görülmektedir.  $\gamma = 0.00$  değeri için çizilen ikinci grafikte birinci ve ikinci bölgeler  $\gamma = -0.30$  değeri için çizilen grafiğin birinci ve ikinci bölgesinin  $\beta$ -ekseninin negatif yönünde yaklaşık 1 birim kayması ile oluşan fazlardan meydana gelmektedir. Üçüncü bölgede ise ferromanyetik bölge çok azalırken periyot-3 fazı artarak yoğun bir şekilde ortaya çıkmaktadır. Yine  $\alpha$ -ekseni boyunca uzanan periyot-2 ve modulated fazların yanı sıra noktalar halinde periyot-7, periyot-8, periyot-9, periyot-11 ve periyot-12 fazları gözükmemektedir. Dördüncü bölge ise çok küçük farklarla beraber üçüncü bölgenin  $\alpha$ -eksenine göre simetriği olan bir bölge karşımıza çıkmaktadır. Birinci şekilde



olduğu gibi ikinci şeklimizde de yoğun bir şekilde çoklu-kritik (Lifshitz) noktalar görölmektedir.

Bu bölümde faz diyagramlarında göröldüğü gibi bağlantı sabitlerinin seçimi önceki çalışmalara [2,4,5,6,8,9], kıyasla tamamen değışmiştir. Elde edilen şekillerde dikkat çekici noktalar; paramanyetik faz hariç bütün fazlar elde edilmesi, parametreler çok az değıştiğinde bile bazı şekillerde çok büyük değışimlerin gözlemlenmesidir.

## 4. BÖLÜM

### DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN CAYLEY AĞACI ÜZERİNDEKİ ISING MODELİNİN DİNAMİK DAVRANIŞLARI

#### 4.1. Üç Etkileşimli Ising Modelinin Yineleme Denklemleri

Bu kesimde Vannimenus [13] ve Mariz ve ark. [10], çalışmalarındaki sonuçlara benzer olarak 4. mertebeden Cayley ağacı üzerinde elde edilen ve üç bağlantı sabitine sahip Hamiltonyen ile üretilen Ising modelinin faz diyagramlarının davranışlarını incelemek için gerekli olan yinelemeli denklemler elde edilmektedir.

Bu bölümde, önceki bölümde 3. Mertebeden Cayley ağacı üzerinde incelediğimiz Ising modeli için belli parametreler için çizdirilen faz diyagramlarında Cayley ağacının mertebesi arttığında ne tür değişimler olduğunu incelemek istiyoruz. Bu nedenle 4. Mertebeden üç etkileşim sabitli Ising modeli için yinelemeli denklemlerini elde edeceğiz. Daha sonra bilgisayar kodları yazılarak bu yinelemeli denklemlere karşılık gelen faz diyagramları çizdirilecektir.

Şimdi bu yinelemeli denklemlerin nasıl elde edildiğini açıklayalım. Dördüncü mertebeden Cayley ağacı üzerinde  $J_1, J_p$  ve  $J_{ll}$  sırasıyla en yakın, doğrultulmuş sonraki en yakın ve birinci seviyedeki sonraki en yakın komşuluk bağlantı sabitleri olsun. Ising modelimizi için spin değerlerimizi  $\Phi = \{-, +\}$  kümesinden seçerek tek tabakalı Cayley ağacı üzerindeki Ising modelimizi oluşturacak Hamiltonyen denklemini ( $\Gamma^3$  'te olduğu gibi) aşağıda verelim;

$$H(\sigma) = -J_1 \sum_{\langle x,y \rangle} \sigma(x)\sigma(y) - J_p \sum_{>x,y,z<} \sigma(x)\sigma(y)\sigma(z) - J_{ll} \sum_{>x,y,z<} \sigma(x)\sigma(y)\sigma(z) \quad (4.1.1)$$

Yinelemeli denklemlerimizi oluşturmak için  $V_n$  üzerindeki kısmi ayrışım fonksiyonlarının  $V_{n-1}$  'in alt kümeleri üzerinde tanımlı kısmi ayrışım fonksiyonlarıyla bağlantısını göz önüne alalım.

$$Z^{(n)} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ & & i_0 & \end{pmatrix}, \quad (4.1.2)$$

$V_n$  üzerindeki kısmi ayrışım fonksiyonu olsun;  $x_0$  kök (sabit nokta) üzerindeki spinimiz  $i_0$  ve birinci kabuktaki yani  $W_1$  üzerindeki spinlerimiz ise  $i_1, i_2, i_3, i_4$  tür.  $V_n$  kümesi üzerindeki toplam ayrışım fonksiyonu,

$$Z^{(n)} = \sum_{\sigma \in V_n} \exp(-\beta H(\sigma)) \quad (4.1.3)$$

şeklinde olur ve  $\beta = \frac{1}{T}$  ters sıcaklık değeri olarak tanımlanır. Burada göz önüne alacağımız muhtemel 32 farklı  $Z^n$  kısmi ayrışım fonksiyonları vardır [13]. Ancak aşağıdaki ifadede görüldüğü gibi farklı spin değerli konfigürasyonların bazılarının birbirine denk olduğu görülür. Örneğin;  $Z^{(n)} \begin{pmatrix} + & + & + & - \\ & & + & \end{pmatrix}$ ,  $Z^{(n)} \begin{pmatrix} + & + & - & + \\ & & + & \end{pmatrix}$  ve  $Z^{(n)} \begin{pmatrix} + & - & + & + \\ & & + & \end{pmatrix}$  fonksiyonları aynı toplam enerjiye sahip olan denk konfigürasyonlar üzerinde tanımlanır. Bu yaklaşımla yalnızca aşağıdaki (4.1.4) ile ifade edilen 10 tane kısmi ayrışım fonksiyonunu incelememiz yeterlidir. Bu kısmi ayrışım fonksiyonları aşağıdaki şekilde göz önüne alalım;

$$\begin{aligned} z_1^{(n)} &= Z^{(n)} \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ & & + & \end{pmatrix}, & z_2^{(n)} &= Z^{(n)} \begin{pmatrix} + & + & + & - \\ & & + & \end{pmatrix} \\ z_3^{(n)} &= Z^{(n)} \begin{pmatrix} + & + & - & - \\ & & + & \end{pmatrix}, & z_4^{(n)} &= Z^{(n)} \begin{pmatrix} + & - & - & - \\ & & + & \end{pmatrix} \\ z_5^{(n)} &= Z^{(n)} \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ & & + & \end{pmatrix}, & z_6^{(n)} &= Z^{(n)} \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ & & - & \end{pmatrix} \\ z_7^{(n)} &= Z^{(n)} \begin{pmatrix} + & + & + & - \\ & & - & \end{pmatrix}, & z_8^{(n)} &= Z^{(n)} \begin{pmatrix} + & + & - & - \\ & & - & \end{pmatrix} \\ z_9^{(n)} &= Z^{(n)} \begin{pmatrix} + & - & - & - \\ & & - & \end{pmatrix}, & z_{10}^{(n)} &= Z^{(n)} \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ & & - & \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Böylece keyfi  $Z^{(n+1)} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ & & i_0 & \end{pmatrix}$  kısmi ayrışım fonksiyonu  $z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \dots, z_{10}^{(n)}$  fonksiyonlarının bir kombinasyonu olarak yazılır [13]. Önceki kesimde (3.1) olduğu

gibi aşağıdaki değişken (4.1.5) değişimleri yardımıyla  $z_i^{(n+1)}$  ( $i=1,2, \dots, 10$ ) denklemleri elde edilir. Burada,

$$a = \exp\left(\frac{J_1}{T}\right), b = \exp\left(\frac{J_p}{T}\right) \text{ ve } c = \exp\left(\frac{J_{1l}}{4T}\right) \quad (4.1.5)$$

olarak kabul edilmektedir. Gerekli işlemler ve kısaltmalardan sonra,

$$\begin{aligned} z_1^{(n+1)} &= a^4 c^{24} (b^4 z_1^{(n)} + 4b^2 z_2^{(n)} + 6z_3^{(n)} + 4b^{-2} z_4^{(n)} + b^{-4} z_5^{(n)})^4 \\ z_2^{(n+1)} &= a^2 (b^4 z_1^{(n)} + 4b^2 z_2^{(n)} + 6z_3^{(n)} + 4b^{-2} z_4^{(n)} + b^{-4} z_5^{(n)})^3 \\ &\quad (b^{-4} z_6^{(n)} + 4b^{-2} z_7^{(n)} + 6z_8^{(n)} + 4b^2 z_9^{(n)} + b^4 z_{10}^{(n)}) \\ z_3^{(n+1)} &= c^{-8} (b^4 z_1^{(n)} + 4b^2 z_2^{(n)} + 6z_3^{(n)} + 4b^{-2} z_4^{(n)} + b^{-4} z_5^{(n)})^2 \\ &\quad (b^{-4} z_6^{(n)} + 4b^{-2} z_7^{(n)} + 6z_8^{(n)} + 4b^2 z_9^{(n)} + b^4 z_{10}^{(n)})^2 \\ z_4^{(n+1)} &= a^{-2} (b^4 z_1^{(n)} + 4b^2 z_2^{(n)} + 6z_3^{(n)} + 4b^{-2} z_4^{(n)} + b^{-4} z_5^{(n)}) \\ &\quad (b^{-4} z_6^{(n)} + 4b^{-2} z_7^{(n)} + 6z_8^{(n)} + 4b^2 z_9^{(n)} + b^4 z_{10}^{(n)})^3 \\ z_5^{(n+1)} &= a^{-4} c^{24} (b^{-4} z_6^{(n)} + 4b^{-2} z_7^{(n)} + 6z_8^{(n)} + 4b^2 z_9^{(n)} + b^4 z_{10}^{(n)})^4 \\ z_6^{(n+1)} &= a^{-4} c^{-24} (b^{-4} z_1^{(n)} + 4b^{-2} z_2^{(n)} + 6z_3^{(n)} + 4b^2 z_4^{(n)} + b^4 z_5^{(n)})^4 \\ z_7^{(n+1)} &= a^{-2} (b^{-4} z_1^{(n)} + 4b^{-2} z_2^{(n)} + 6z_3^{(n)} + 4b^2 z_4^{(n)} + b^4 z_5^{(n)})^3 \\ &\quad (b^4 z_6^{(n)} + 4b^2 z_7^{(n)} + 6z_8^{(n)} + 4b^{-2} z_9^{(n)} + b^{-4} z_{10}^{(n)}) \\ z_8^{(n+1)} &= c^8 (b^{-4} z_1^{(n)} + 4b^{-2} z_2^{(n)} + 6z_3^{(n)} + 4b^2 z_4^{(n)} + b^4 z_5^{(n)})^2 \\ &\quad (b^4 z_6^{(n)} + 4b^2 z_7^{(n)} + 6z_8^{(n)} + 4b^{-2} z_9^{(n)} + b^{-4} z_{10}^{(n)})^2 \\ z_9^{(n+1)} &= a^2 (b^{-4} z_1^{(n)} + 4b^{-2} z_2^{(n)} + 6z_3^{(n)} + 4b^2 z_4^{(n)} + b^4 z_5^{(n)}) \\ &\quad (b^4 z_6^{(n)} + 4b^2 z_7^{(n)} + 6z_8^{(n)} + 4b^{-2} z_9^{(n)} + b^{-4} z_{10}^{(n)})^3 \\ z_{10}^{(n+1)} &= a^4 c^{-24} (b^4 z_6^{(n)} + 4b^2 z_7^{(n)} + 6z_8^{(n)} + 4b^{-2} z_9^{(n)} + b^{-4} z_{10}^{(n)})^4 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Burada  $Z_i^{(n+1)}$  ( $i=1,2,\dots,10$ ) ayrışım fonksiyonlarının nasıl elde edildiğini bir önceki kısımda açıklamıştık (4.1). Burada tekrar olmaması için yeniden ayrıntılı olarak açıklama yapılmamaktadır.

Şimdi yukarıdaki denklemlerden bazılarının diğer denklemlerin lineer kombinasyonu olarak yazılabildiğini gösterelim;

$$z_2^4 = c^{-96} z_1^3 z_5^3, \quad z_3^4 = c^{-128} z_1^2 z_5^2, \quad z_4^4 = c^{-96} z_1 z_5^3, \quad z_7^4 = c^{96} z_6^3 z_{10}, \quad z_8^4 = c^{128} z_6^2 z_{10}^2, \\ z_9^4 = c^{96} z_6 z_{10}^3 \quad \text{eşitlikleri sağlandığından yalnızca 4 tane bağımsız fonksiyon kalır.}$$

Yinelemeli denklemlerimizi elde etmek için  $u_i^{(n+1)} = \sqrt[4]{z_i^{(n+1)}}$  değişken değişimi yapılarak aşağıdaki yeni denklemlerimizi elde ederiz [13]:

$$u_1^{(n+1)} = ac^6 (b^4 (u_1^n)^4 + 4b^2 c^{-24} (u_1^n)^3 (u_5^n) + 6c^{-32} (u_1^n)^2 (u_5^n)^2 + 4b^{-2} c^{-24} (u_1^n) (u_5^n)^3 + b^{-4} (u_5^n)^4)$$

$$u_5^{(n+1)} = a^{-1} c^6 (b^{-4} (u_6^n)^4 + 4b^{-2} c^{24} (u_6^n)^3 (u_{10}^n) + 6c^{32} (u_6^n)^2 (u_{10}^n)^2 + 4b^2 c^{24} (u_6^n) (u_{10}^n)^3 + b^4 (u_{10}^n)^4)$$

$$u_6^{(n+1)} = a^{-1} c^{-6} (b^{-4} (u_1^n)^4 + 4b^{-2} c^{-24} (u_1^n)^3 (u_5^n) + 6c^{-32} (u_1^n)^2 (u_5^n)^2 + 4b^2 c^{-24} (u_1^n) (u_5^n)^3 + b^4 (u_5^n)^4)$$

$$u_{10}^{(n+1)} = ac^{-6} (b^4 (u_6^n)^4 + 4b^2 c^{24} (u_6^n)^3 (u_{10}^n) + 6c^{32} (u_6^n)^2 (u_{10}^n)^2 + 4b^{-2} c^{24} (u_6^n) (u_{10}^n)^3 + b^{-4} (u_{10}^n)^4).$$

Toplam ayrışım fonksiyonu  $Z^{(n)} = (u_1 + u_5)^4 + (u_6 + u_{10})^4$ ,  $u_i^{(n+1)}$  terimleri yardımıyla oluşturulur. Faz diyagramlarını incelemek için aşağıdaki azaltılmış değişkenleri seçmemiz uygun olacaktır.

$$x^{(n+1)} = \frac{u_5^{(n+1)} + u_6^{(n+1)}}{u_1^{(n+1)} + u_{10}^{(n+1)}}, \quad y^{(n+1)} = \frac{u_1^{(n+1)} - u_{10}^{(n+1)}}{u_1^{(n+1)} + u_{10}^{(n+1)}}, \quad z^{(n+1)} = \frac{u_5^{(n+1)} - u_6^{(n+1)}}{u_1^{(n+1)} + u_{10}^{(n+1)}} \quad (4.1.6)$$

$x$  değişkeni, en yakın komşuluk sınırlarının titreşiminin bir ölçümüdür ve  $y$ ,  $z$  gibi sıralı bir parametre değildir (ayrıntılı bilgi için [13] çalışmasına bakınız).

Yukarıdaki (4.1.5) eşitliklerindeki değişkenler (4.1.6) denklemlerinde yerine konursa yeni denklemlerimiz aşağıdaki formu alır [13];

$$x^{(n+1)} = \frac{1}{a^2} \frac{A}{B}, \quad y^{(n+1)} = \frac{C}{B}, \quad z^{(n+1)} = \frac{1}{a^2} \frac{D}{B}.$$

Burada  $A, B, C$  ve  $D$  denklemleri aşağıdaki biçimde alınmıştır;

$$\begin{aligned}
A &= c^6(b^{-4}(u_6^n)^4 + 4b^{-2}c^{24}(u_6^n)^3(u_{10}^n) + 6c^{32}(u_6^n)^2(u_{10}^n)^2 \\
&\quad + 4b^2c^{24}(u_6^n)(u_{10}^n)^3 + b^4(u_{10}^n)^4) + c^{-6}(b^{-4}(u_1^n)^4 + 4b^{-2}c^{-24}(u_1^n)^3(u_5^n) \\
&\quad + 6c^{-32}(u_1^n)^2(u_5^n)^2 + 4b^2c^{-24}(u_1^n)(u_5^n)^3 + b^4(u_5^n)^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= c^6(b^4(u_1^n)^4 + 4b^2c^{-24}(u_1^n)^3(u_5^n) + 6c^{-32}(u_1^n)^2(u_5^n)^2 \\
&\quad + 4b^{-2}c^{-24}(u_1^n)(u_5^n)^3 + b^{-4}(u_5^n)^4) + c^{-6}(b^4(u_6^n)^4 + 4b^2c^{24}(u_6^n)^3(u_{10}^n) \\
&\quad + 6c^{32}(u_6^n)^2(u_{10}^n)^2 + 4b^{-2}c^{24}(u_6^n)(u_{10}^n)^3 + b^{-4}(u_{10}^n)^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= c^6(b^4(u_1^n)^4 + 4b^2c^{-24}(u_1^n)^3(u_5^n) + 6c^{-32}(u_1^n)^2(u_5^n)^2 + 4b^{-2}c^{-24}(u_1^n)(u_5^n)^3 \\
&\quad + b^{-4}(u_5^n)^4) - c^{-6}(b^4(u_6^n)^4 + 4b^2c^{24}(u_6^n)^3(u_{10}^n) + 6c^{32}(u_6^n)^2(u_{10}^n)^2 \\
&\quad + 4b^{-2}c^{24}(u_6^n)(u_{10}^n)^3 + b^{-4}(u_{10}^n)^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= c^6(b^{-4}(u_6^n)^4 + 4b^{-2}c^{24}(u_6^n)^3(u_{10}^n) + 6c^{32}(u_6^n)^2(u_{10}^n)^2 + 4b^2c^{24}(u_6^n)(u_{10}^n)^3 \\
&\quad + b^4(u_{10}^n)^4) - c^{-6}(b^{-4}(u_1^n)^4 + 4b^{-2}c^{-24}(u_1^n)^3(u_5^n) \\
&\quad + 6c^{-32}(u_1^n)^2(u_5^n)^2 + 4b^2c^{-24}(u_1^n)(u_5^n)^3 + b^4(u_5^n)^4).
\end{aligned}$$

Şimdi

$$\begin{cases}
u_1^n = h(1 + y^n) \\
u_5^n = h(x^n + z^n) \\
u_6^n = h(x^n - z^n) \\
u_{10}^n = h(1 - y^n)
\end{cases} \quad (4.1.7)$$

değişken değiştirmesi yapılırsa bu durumda aşağıdaki lineer olmayan dinamik sistemi elde ederiz [13]:

$$x^{(n+1)} = \frac{A_2(x^n, y^n, z^n) + A_3(x^n, y^n, z^n)}{a^2 \left( (A_1(x^n, y^n, z^n) + A_4(x^n, y^n, z^n)) \right)}$$

$$y^{(n+1)} = \frac{A_1(x^n, y^n, z^n) - A_4(x^n, y^n, z^n)}{A_1(x^n, y^n, z^n) + A_4(x^n, y^n, z^n)} \quad (4.1.8)$$

$$z^{(n+1)} = \frac{A_2(x^n, y^n, z^n) - A_3(x^n, y^n, z^n)}{a^2 \left( (A_1(x^n, y^n, z^n) + A_4(x^n, y^n, z^n)) \right)}.$$

Burada gerekli kısaltmaları yapmak için  $A_1, A_2, A_3$  ve  $A_4$  fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde düzenleyebiliriz;

$$A_1(x^n, y^n, z^n) = c^6(b^4(1+y^n)^4 + 4b^2c^{-24}(1+y^n)^3(x^n+z^n) + 6c^{-32}(1+y^n)^2(x^n+z^n)^2 + 4b^{-2}c^{-24}(1+y^n)(x^n+z^n)^3 + b^{-4}(x^n+z^n)^4)$$

$$A_2(x^n, y^n, z^n) = c^6(b^{-4}(x^n-z^n)^4 + 4b^{-2}c^{24}(x^n-z^n)^3(1-y^n) + 6c^{32}(x^n-z^n)^2(1-y^n)^2 + 4b^2c^{24}(x^n-z^n)(1-y^n)^3 + b^4(1-y^n)^4)$$

$$A_3(x^n, y^n, z^n) = c^{-6}(b^{-4}(1+y^n)^4 + 4b^{-2}c^{-24}(1+y^n)^3(x^n+z^n) + 6c^{-32}(1+y^n)^2(x^n+z^n)^2 + 4b^2c^{-24}(1+y^n)(x^n+z^n)^3 + b^4(x^n+z^n)^4)$$

$$A_4(x^n, y^n, z^n) = c^{-6}(b^4(x^n-z^n)^4 + 4b^2c^{24}(x^n-z^n)^3(1-y^n) + 6c^{32}(x^n-z^n)^2(1-y^n)^2 + 4b^{-2}c^{24}(x^n-z^n)(1-y^n)^3 + b^{-4}(1-y^n)^4).$$

## 4.2. Faz Diyagramlarının Çizimi ve Yorumu

Bu kesimde yukarıda elde ettiğimiz (dördüncü mertebeden) yinelemeli denklemlerin (4.1.8) Vannimenus [13] metoduyla bilgisayar kodları yazılarak belli değerler için faz diyagramları çizdirilmektedir.

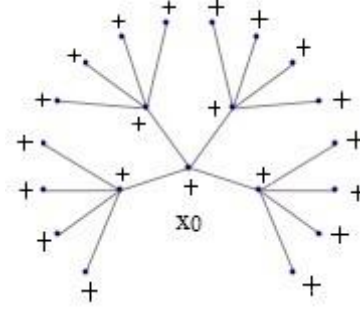
Bir modelin faz diyagramı; o fazların yapısını, bir fazdan diğer faza geçişini, fazların istikrarını ve ilgili geçiş hatlarını gösterir. Ayrıntılı olarak farklı faz geçişlerini tartışmadan önce, faz diyagramının esas özelliklerinin bilinmesi gerekir. Bu bilgileri bazı bilgisayar programları yardımıyla sayısal olarak ifade etmek mümkündür. Faz

diyagramları  $\left(\frac{T}{J_1}, \frac{-J_p}{J_1}, \frac{J_{ll}}{J_1}\right)$  üç boyutlu uzayda, yineleme bağıntıları (4.1.8) yardımıyla

sayısal olarak belirlenir. Burada  $\frac{T}{J_1} = \alpha$ ,  $\frac{-J_p}{J_1} = \beta$ ,  $\frac{J_{ll}}{J_1} = \gamma$  ve sırasıyla  $a = \exp(\alpha^{-1})$ ,

$b = \exp(-\alpha^{-1}\beta)$ ,  $c = \exp(\alpha^{-1}\gamma)$  eşitliklerini tanımlayalım. Modelimizin başlangıç

koşulları  $\bar{\sigma}^{(n)}(V - V_n) \equiv +$  pozitif sınır şartı altında aşağıdaki gibidir;



Şekil 4.1.  $\Gamma^4$  ( $k=4$ ) Cayley ağacının pozitif sınır değerli başlangıç koşullu diyagramı

Yukarıda elde ettiğimiz yinelemeli denkleminin (dizimizin) (4.1.8) ilk terimini yani  $(x_0^{(n+1)}, y_0^{(n+1)}, z_0^{(n+1)})$  terimini  $u_i^{(n+1)} = \sqrt[4]{z_i^{(n+1)}}$  eşitliği yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edebiliriz [13];

$$u_1^{(n+1)} = \sqrt[4]{z_1^{(n+1)}} = \sqrt[4]{a^{20}b^{16}c^{(30)4}} = a^5b^4c^{30}$$

$$u_5^{(n+1)} = \sqrt[4]{z_5^{(n+1)}} = \sqrt[4]{a^{-20}b^{-16}c^{(-18)4}} = a^{-5}b^{-4}c^{-18}$$

$$u_6^{(n+1)} = \sqrt[4]{z_6^{(n+1)}} = \sqrt[4]{a^{12}b^{-16}c^{(18)4}} = a^3b^{-4}c^{18}$$

$$u_{10}^{(n+1)} = \sqrt[4]{z_{10}^{(n+1)}} = \sqrt[4]{a^{20}b^{16}c^{(-30)4}} = a^5b^4c^{-30},$$

Yukarıdaki eşitlikler,

$$x^{(n+1)} = \frac{u_5^{(n+1)} + u_6^{(n+1)}}{u_1^{(n+1)} + u_{10}^{(n+1)}}, \quad y^{(n+1)} = \frac{u_1^{(n+1)} - u_{10}^{(n+1)}}{u_1^{(n+1)} + u_{10}^{(n+1)}}, \quad z^{(n+1)} = \frac{u_5^{(n+1)} - u_6^{(n+1)}}{u_1^{(n+1)} + u_{10}^{(n+1)}}$$

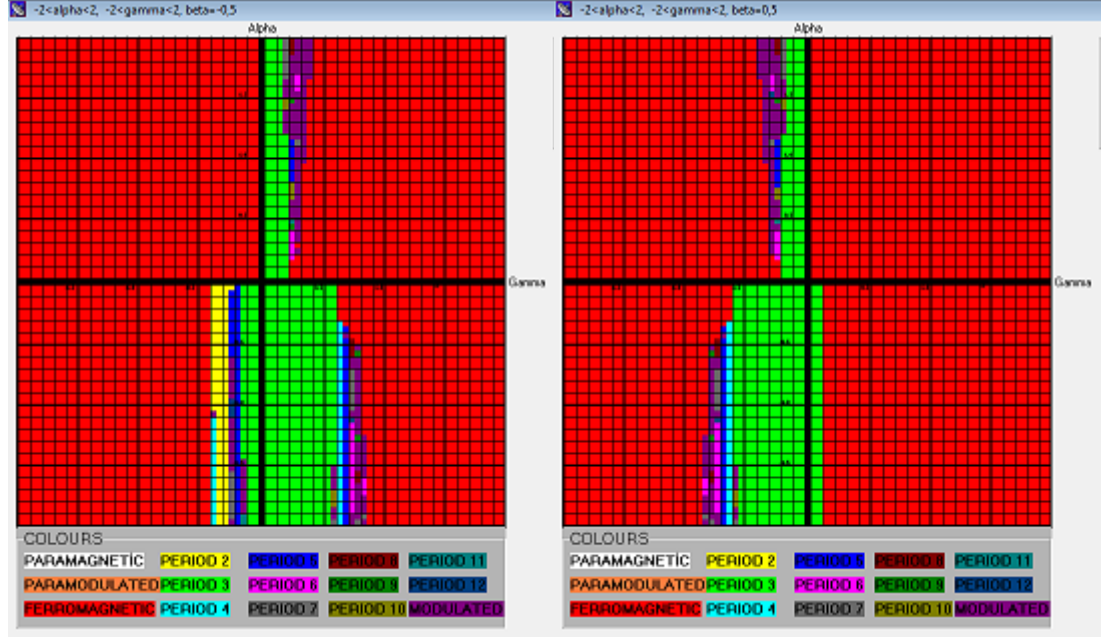
ifadelerinde yerine konursa aşağıdaki pozitif sınırlı başlangıç koşulları (yinelemeli denklem sisteminin ilk terimi) aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$x^{(n+1)} = \frac{c^{12}(1+a^8c^{36})}{a^{10}b^8(1+c^{60})}, \quad y^{(n+1)} = \frac{c^{60}-1}{c^{60}+1} \quad \text{ve} \quad z^{(n+1)} = \frac{c^{12}(1-a^8c^{36})}{a^{10}b^8(1+c^{60})} \quad (4.2.1)$$

Üçüncü bölümde uyguladığımız metodları bu kesimde elde edilen bu değerler için de uygulayarak dördüncü mertebeden Cayley ağacı üzerindeki üç etkileşimli Ising



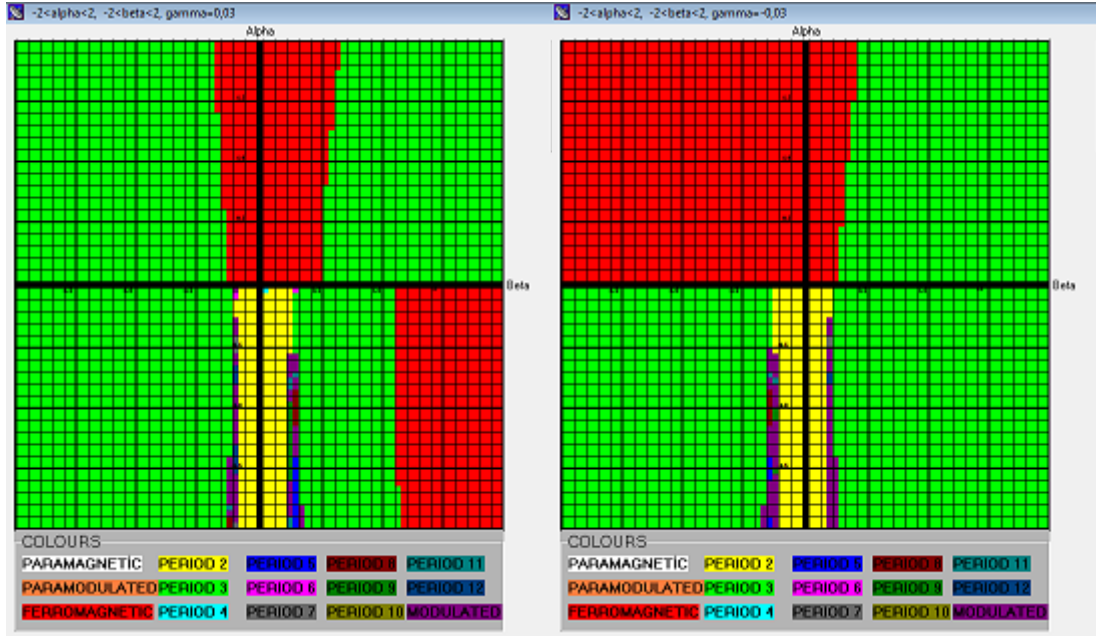
modelimizin faz diyagramları elde edilir. Yine bütün faz diyagramları  $-2 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 2$  aralığında çizilmiştir ve bu şekillerimizden bazıları aşağıda verilmiştir;



Şekil 4.2.  $\beta = -0.50$  ve  $\beta = 0.50$  değerleri için modelimizin faz diyagramları

Şekil 4.2’de betanın  $\beta = -0.50$  ve  $\beta = 0.50$  değerleri için faz diyagramları çizdirildi.  $\beta = -0.50$  değeri için elde edilen diyagramda birinci bölgede yoğunlukla ferromanyetik faz gözükürken  $\alpha$ -ekseni boyunca uzanan periyot-3 ve modulated faz göze çarpmaktadır. Ayrıca irili ufaklı periyot-5, periyot-6, periyot-7, periyot-8, periyot-9, periyot-10 ve periyot-11 fazları oluşmaktadır. ikinci bölgede tamamen ferromanyetik faz oluşurken üçüncü bölgede yine büyük çoğunluk ferromanyetik faz olmak üzere  $\alpha$ -eksenine yakın bölgelerde uzun çubuklar şeklinde periyot-2, periyot-3, periyot-4, periyot-5, periyot-7, periyot-11, periyot-12 ve modulated faz gözükmektedir. Dördüncü bölgede ise ferromanyetik fazla birlikte çoğunlukla periyot-3 olmak üzere kısa ve uzun şeritler halinde periyot-4, periyot-5, periyot-6, periyot-7, periyot-8, periyot-9, periyot-12 ve modulated fazlar oluşmaktadır. Yine daha önceki şekillerimizde de olduğu gibi (0,2, 1.5), (0,2,0.8) (-0.1,-1.9) ve (0.7, -0.5) noktalarında çoklu-kritik (Lifshitz) noktalar görülmektedir. Diğer taraftan  $\beta = 0.50$  değeri için elde edilen diyagramda birinci bölge tamamen ferromanyetik fazdan oluşurken, ikinci bölge ise  $\beta = -0.50$  değeri için çizilen grafiğin birinci bölgesinin  $\alpha$ -eksenine göre simetriğine çok yakın bir diyagram ortaya çıkmaktadır. Üçüncü bölge de birinci şeklimizin dördüncü bölgesinin  $\alpha$ -eksenine göre

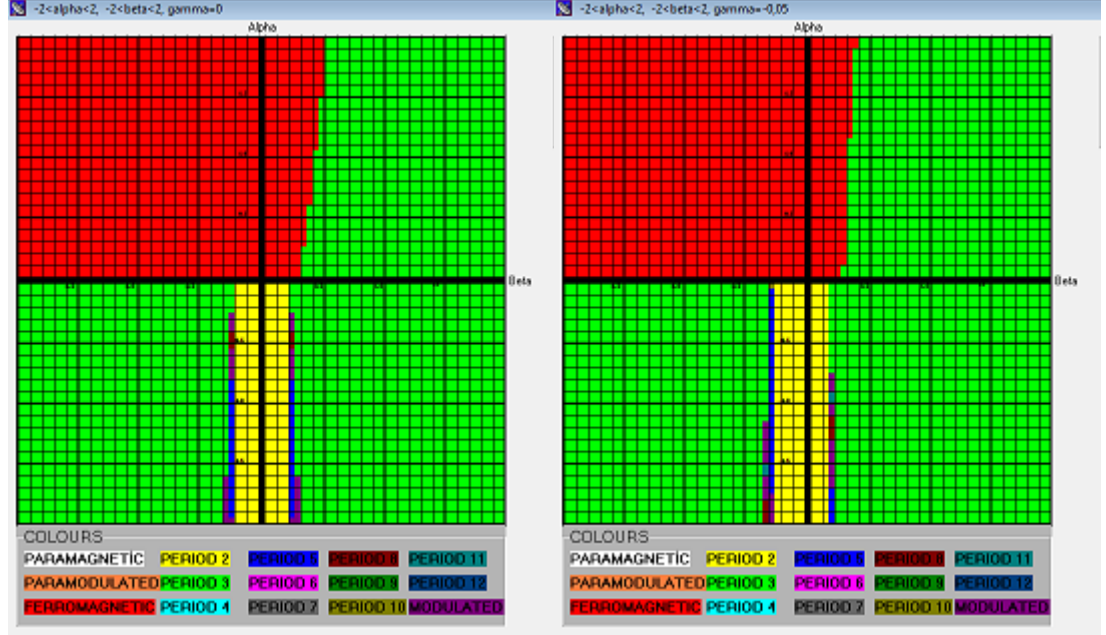
simetriğine çok yakın bir diyagram oluşmaktadır. Dördüncü bölge ise  $\alpha$  – eksenine boyunca (0.1) birimlik bir şerit halinde periyot-3 fazı dışında tamamen ferromanyetik fazdan meydana gelmektedir. Yine daha önceki şekillerimizde de olduğu gibi çoklu-kritik (Lifshitz) noktalar göze çarpmaktadır.



Şekil 4.3.  $\gamma = 0.03$  ve  $\gamma = -0.03$  değerleri için modelimizin faz diyagramları

Şekil 4.3'te gamanın  $\gamma = 0.03$  ve  $\gamma = -0.03$  değerleri için faz diyagramları çizdirildi.  $\gamma = 0.03$  değeri için elde edilen diyagramda birinci bölgede periyot-3 ve ferromanyetik faz görülürken ikinci bölgede ise birinci bölgenin  $\alpha$  – eksenine göre simetriğine yakın ve yoğun bir şekilde periyot-3 ve ferromanyetik faz oluşmuştur. Üçüncü bölgede ise yine yoğun bir şekilde periyot-3 ve ince çubuklar ve noktalar şeklinde uzanan periyot-2, periyot-6, periyot-7, periyot-8, periyot-11, periyot-12 ve modulated faz gözükmektedir. Dördüncü bölge ise yine  $\alpha$  – eksenine yakın kısımlarda ince çubuk şeklinde periyot-2, periyot-4, periyot-5, periyot-6, periyot-8, periyot-9, periyot-11 ve modulated faz gözükmektedir. Bu fazlardan biraz daha yoğun olarak periyot-3 ve ferromanyetik faz oluşmuştur. Ayrıca (-0.20, -0.40), (-0.20, -1.40), (0.20, -1.60) ve (0.30, -1.80) noktalarında çoklu-kritik (Lifshitz) noktalar görülmektedir.  $\gamma = -0.03$  değeri için çizilen ikinci grafikte birinci bölge  $\gamma = 0.03$  değeri için çizilen grafiğin birinci bölgesinin  $\alpha$  – ekseninin negatif yönünde yaklaşık (0.2) birim kayması ile oluşan fazlardan meydana gelmektedir. İkinci bölgede tamamen ferromanyetik faz oluşmuştur. Üçüncü bölgemiz birinci şeklin dördüncü bölgesinin, dördüncü bölgemiz de birinci

şeklin üçüncü bölgesinin  $\alpha$ -eksenine göre simetriğine çok yakın bir diyagram oluşturmuştur. Birinci şeklimizdeki gibi ikinci şeklimizde de üçüncü ve dördüncü bölgelerde yoğun bir şekilde çoklu-kritik (Lifshitz) noktalar görülmektedir.



Şekil 4.4.  $\gamma = 0.00$  ve  $\gamma = -0.05$  değerleri için modelimizin faz diyagramları

Şekil 4.4'te gammanın  $\gamma = 0.00$  ve  $\gamma = -0.05$  değerleri için faz diyagramları çizdirildi.  $\gamma = 0.00$  değeri için elde edilen diyagramda birinci bölgede periyot-3 ve ferromanyetik faz görülürken ikinci bölgede ise tamamen ferromanyetik faz oluşmuştur. Üçüncü bölgede yoğun bir şekilde periyot-3 ve ince çubuklar ve noktalar şeklinde uzanan periyot-2, periyot-5, periyot-8 ve modulated faz gözükmemektedir. Dördüncü bölge ise üçüncü bölgenin  $\alpha$ -eksenine göre simetriğiyle birebir örtüşmektedir. Ayrıca  $(-0.20, -0.80)$ ,  $(-0.25, -1.60)$ ,  $(0.25, -1.60)$  ve  $(0.20, -0.80)$  noktalarında çoklu-kritik (Lifshitz) noktalar görülmektedir.  $\gamma = -0.05$  değeri için çizilen ikinci grafikte birinci bölge  $\gamma = 0.00$  değeri için çizilen grafiğin birinci bölgesinin  $\alpha$ -ekseninin negatif yönünde yaklaşık  $(0.1)$  birim kayması ile oluşan fazlardan meydana gelmektedir. İkinci bölgede tamamen ferromanyetik faz oluşmuştur. Üçüncü bölgemizde yoğun olarak periyot-3 fazının yanında periyot-2, periyot-5, periyot-8, periyot-10, periyot-11 ve modulated faz gözükmemektedir. Dördüncü bölgede ise üçüncü bölgenin  $\alpha$ -eksenine göre simetriğine çok yakın bir diyagram karşımıza çıkmakta olup sadece fazların boyutları değişmektedir. Birinci şeklimizdeki gibi ikinci şeklimizde de üçüncü ve dördüncü bölgelerde yoğun bir şekilde çoklu-kritik (Lifshitz) noktalar görülmektedir.

## 5. BÖLÜM

### ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Günümüzde Ising modeli olarak bilinen ve ilk olarak 1925 yılında Ernst Ising'in danışmanı tarafından doktora tezinde kendisine önerilen bu modelin tek boyutta çözümlenmesi yapılmıştır. Başlangıçta ferromanyetik model olarak da adlandırılan Ising modelinde faz geçişlerinin tek boyutta hatta daha fazla boyutlarda olmadığını öne sürmüştü. Daha sonraki çalışmalarda ise faz geçişlerinin olduğu ispatlanmıştır [2,4,5,6,8,9].

Cayley ağacı üzerindeki modellerden biri de Ising modelinin bir genelleştirilmesi olan Potts modelidir [11]. Potts modeli ilk olarak Domb tarafından ortaya atılmıştır. Ising modelinde spin sayısı 2 (+,-) iken Potts modelinde ise spin sayısı ikiden fazladır. Vannimenus [13], Ising modeli üzerine yaptığı çalışmalarda en yakın ( $J_1$ ) ve doğrultulmuş sonraki en yakın ( $J_p$ ) etkileşimli bağlantı sabitlerini kullanarak modulated faz (modüle edilmiş) geçişinin olduğunu göstermiştir. Vannimenus'ün yapmış olduğu bu çalışmalar daha sonraki pek çok araştırmacıya ışık tutmuştur. Mariz ve ark. [10]; Da Silca ve ark., Cayley ağacı üzerindeki Ising ve Potts modellerinin en yakın ve doğrultulmuş sonraki en yakın etkileşimli bağlantı sabitli Hamiltonyen denklemleri ile üretilen faz diyagramlarını ve bu diyagramlarda ortaya çıkan Lifshitz noktalarının (çoklu-kritik noktalar) varlığını araştırmıştır.

Inawashiro ve Thompson [7], Vannimenus'ün yapmış olduğu çalışmadan farklı olarak Ising modeli üzerindeki en yakın komşuluk ( $J_1$ ) ve doğrultulmuş (prolonged) sonraki en yakın komşuluk ( $J_p$ ) etkileşimlerini  $J_p = J_0$  olarak incelemişlerdir. Burada  $J_0$  birinci seviyeden sonraki en yakın komşuluk etkileşimi sabitidir.

Mariz ve ark. [10], bu sonuçları birinci seviyeden sonraki en yakın komşuluk etkileşimine dış manyetik alanının etkisini de göz önüne alarak genelleştirmişlerdir. Daha önce de bahsettiğimiz ve Ising modeli için en yakın ikili komşuluk ve sonraki en yakın üçlü komşuluk etkileşimlerinde faz geçişlerinin varlığını araştırmak için çalışmalar yapmıştır.

Uğuz ve Akın [12], üçlü avize modeli diye adlandırdıkları bir çalışmalarında karşılıklı en yakın ikili komşuluk etkileşimi ( $J_1$ ), doğrultulmuş (prolonged) sonraki en yakın üçlü komşuluk etkileşimi ( $J_p$ ) ve birinci seviyeden sonraki en yakın dördü komşuluk etkileşimi ile verilen Hamiltonyen tarafından üretilen Ising modeli için faz geçişlerini incelemişlerdir. Bu çalışmada faz diyagramlarında sıfırdan farklı sıcaklıklarda çoklu-kritik noktaların ve yoğun bir şekilde modulated fazların ortaya çıktığı gözlemlenmiştir.

## 6. BÖLÜM SONUÇLAR

İstatistiksel ya da matematiksel fizikte çalışma konularından biri de latis modelleri üzerine inşa edilen ve Ising ve Potts modelleri gibi iki farklı yöntemi olan Hamiltonyen denklemleri için faz diyagramlarının incelenmesidir. Bu tezimizde latis modellerinden biri olan Cayley ağacı üzerinde üç etkileşimli Ising modeli çalışılmıştır. Yarı sonsuz ve bağlantısız birleşik bir latis çeşidi olan Cayley ağacımız üzerinde tanımladığımız Hamiltonyen denkleminiz üç bağlantı sabitine sahiptir. Bunlar; sabit noktamız ( $x_0$ , fixed point) ile birinci seviyedeki spinlerimiz arasındaki ikili etkileşimi belirleyen (ölçen)  $J_1$  ; yine sabit noktamız, birinci seviyedeki bir spinimiz ve ikinci seviyedeki bir spinimiz arasındaki üçlü etkileşimi belirleyen  $J_p$  ve son olarak sabit noktamız ve birinci seviyedeki üç spinimiz arasındaki ayrı ayrı üçlü etkileşimleri belirleyen  $J_{ll}$  bağlantı sabitleridir. Hamiltonyeni oluşturan bu bağlantı sabitleri değiştikçe elde edilen yinelemeli denklemlerin limit davranışlarının da değiştiği gözlemlenmiştir. Bu çalışmada 3. ve 4. mertebeden Cayley ağacı üzerinde çalışılmıştır. Bu sayede Hamiltonyen denkleminin aynı olup Cayley ağacının mertebesi değiştiğinde elde edilen faz diyagramlarındaki değişimler tespit edilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde konuyla ilgili genel tanım ve açıklamalar yapılmıştır. Üçüncü bölümde 3. mertebeden Cayley ağacı üzerindeki Ising modelinin dinamik davranışlarını incelemek için yineleme denklemleri elde edilmiş ve pozitif sınır şartlı başlangıç değeri girilerek bilgisayar programı yardımıyla belli değerler aralığında faz diyagramları çizilmiştir. Şimdi elde edilen bazı özel değerler için çizilen faz diyagramlarından bahsedelim.

Üçüncü mertebeden Cayley ağacı için çizilen grafiklerde ferromanyetik faz (**F**), periyot-2 fazı (antiferromanyetik faz **P2**), periyot-3 (**P3**), periyot-4 (Antifaz **P4**), periyot-5 (**P5**), modulated (**M**), periyot-6 (**P6**), periyot-7 (**P7**), periyot-8 (**P8**), periyot-9 (**P9**), periyot-11 (**P11**) ve periyot-12 (**P12**) fazları ortaya çıkmıştır. Burada fazların yoğunluğu değişmekte olup bazıları çok yoğun iken bazıları da çok küçük adacıklar halinde göze çarpmaktadır. Bütün grafiklerimizde fazların geçiş noktalarında kaotik bir

yapı oluşturan çoklu-kritik (Lifshitz) noktalar görülmüştür. Ayrıntılar için Şekil 3.3-3.4 ve 3.5 incelenebilir.

Dördüncü mertebeden Cayley ağacı için farklı değerlerde çizdirilen grafiklerde ise bütün faz çeşitlerinin oluştuğu görülmüştür. Yani ferromanyetik faz (**F**), modulated faz (**M**), **P2** (antiferromanyetik faz), **P3, P4** (Antifaz), **P5, P6, P7, P8, P9, P11** ve **P12** fazlarının bütünü ortaya çıkmıştır. Yine çoklu-kritik (Lifshitz) noktalar bütün grafiklerde görülmektedir. Fazların yoğunlukları ve ayrıntılar için Şekil 4.2-4.3 ve 4.4 incelenebilir.

Tezde elde edilen yinelemeli denklemler için üçüncü ve dördüncü mertebeden ağaçlar üzerinde bazı değerler aynı veya birbirine çok yakın alınıp faz diyagramları çizdirildiğinde hem benzer hem de çok farklı şekillerin meydana geldiği görülmüştür. Bu ise sistemde çok kaotik bölgelerin olduğunu göstermektedir. Bu oluşan kaotik bölgelerde üst üste binen fazların var olma ihtimali yüksektir. Bu bölgelerin analizini tam olarak yapılabilmesi için dalga vektörlerinin manyetizasyon grafikleri incelenmelidir. Bu tezde incelediğimiz model için bu konu bir açık problem olarak bırakılmıştır. Göze çarpan bir farklılık ise Cayley ağacının mertebesi arttıkça grafiklerde meydana gelen faz bölgeleri genel olarak daralmasıdır. Tespit edilen önemli bulgulardan birisi de düşük sıcaklıklar için faz diyagram bölgelerinde paramanyetik fazın tamamen kaybolmasıdır. Bu durumda bilinen metotlarla elde ettiğimiz lineer olmayan dinamik sistemimizin kararlılık analizi yapılamamaktadır. Bunun nedeni ise sabit noktamızla birinci seviyedeki bir spinimiz ve ikinci seviyedeki bir spinimiz arasındaki üçlü etkileşimi belirleyen  $J_p$  (Şekil 2.11) bağlantı sabitinde birinci seviyedeki spinin etkileşiminden kaynaklandığı tahmin edilmektedir. Çünkü daha önce yapılan çalışmalarda  $J_p$  sadece sabit nokta ve ikinci seviyedeki spinlerin ikili etkileşimi olarak alındığında paramanyetik fazın ortaya çıktığı görülmüştür [2,4,5].

## KAYNAKLAR

- [1] Akin, H., N. Ganikhodjaev, Uguz, S., Temir, S., (2012). Behaviors of phase diagrams of Ising model with competing ternary and binary interactions on a Cayley tree of arbitrary order, *Acta Physica Polonica A*, **121** (1) 104-107.
- [2] Beaudin, L., (2007). A Review of the Potts model: Its connection to the tutte polynomial and its application to complex experiments. pp.1-25: <https://www.rose-hulman.edu/>.
- [3] Ganikhodjaev, N.N., Akin, H., Uguz, S., and Temir, S., (2011). On extreme Gibbs measures of the Vannimenus model, *Journal of Statistical Mechanics*, doi: 10.1088/1742-5468/2011/03/P03025 P03025.
- [4] Ganikhodjaev, N.N., U,guz, S., Akin, H., and Temir, S., (2010). On pure phases of the Vannimenus model, *AIP Conference Proceedings*, **1309**, 288-293.
- [5] Ganikhodjaev, N., Akin, H., Uguz, S., Temir, S., (2011). Phase diagram and extreme Gibbs measures of the Ising model on a Cayley tree in the presence of competing binary and ternary interactions, *Phase Transitions*, **84**: 11-12, , 1045-1063.
- [6] Ganikhodjaev, N.N., Akin H., and Temir, S., (2007). Potts model with two competing binary interactions, *Turkish Journal of Mathematics*, **31**, 229-238.
- [7] Inawashiro, S., Thompson, C.J., (1983). *Physical Letters*, **97(A)**; 245-248.
- [8] Ising, E., (1925). Beitrag sur Theorie des Ferromagnetismus. *Zeit. Fur Physik*, **31**; 253-258.
- [9] Kindermann, R., Snel, J.L, (1980). Markov Random Fields and their Applications: Contemporary Mathematics. *American Mathematical Society*, **Vol. 1**; 141.
- [10] Mariz, M., Tsalis, C., Albuquerque, A.L., (1985). Phase Diagram of the Ising model on a Cayley tree in the presence of competing Interactions and Magnetic Field, *Jour. Stat. Phys.* **40**, 577-592.
- [11] Potts, R.B., (1952). Some generalized order-disorder transformations. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **48**; 106.



- [12] Uguz, S., Akın, H., (2010). Phase diagrams of competing quadruple and binary interactions on Cayley tree-like lattice: Triangular Chandelier, *Physica A*, **389** (9) 1839-1848.
- [13] Vannimenus, J., (1981). Modulated Phase of an Ising System with competing Interactions on a Cayley tree, *Z. Phys. B*, **43**, 141-148.
- [14] Yokoi, C.S.O., Oliveira, M.J., and Salinas, S.R., (1985). Strange attractor in the Ising model with competing interactions on the Cayley tree, *Phys. Rev. Lett.*, **54**, 163-166.