Sampling Teoremi ve Dirac Operatörler

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Abdullah KABLAN

Mutlay DOĞAN

Haziran 2012

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Sampling Teoremi ve Dirac Operatörler

Öğrencinin, Adı Soyadı: Mutlay Doğan

Tez Savunma Tarihi: 18 Haziran 2012

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ramazan KOÇ

FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Abdullah KABLAN

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyeleri</u>	İmzası
Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN	....
Yrd. Doç. Dr. Salih TATAR	....
Yrd. Doç. Dr. Abdullah KABLAN	....

ÖZ

SAMPLING TEOREMİ VE DIRAC OPERATÖRLER

DOĞAN, Mutlay

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Abdullah KABLAN

Haziran 2012

47 sayfa

Bu tezde sampling teoremi ve Dirac operatörler arasındaki bağıntı incelenmiştir. İlk olarak Dirac operatörlerin temeli olan sınır değer problemleri üzerinde durduk ve daha sonra, özdeğer ve özfonksiyonların asimtotik davranışlarını inceledik. İkinci olarak da aynı çalışmayı Dirac operatörleri için yaptık.

Ayrıca sampling teoremini ve onun genellemesi olan Kramer teoremini ispatı ile verdik. Tüm bu ön hazırlıklardan sonra Dirac operatörüyle ile ilgili sampling teoremi ve detaylı ispatı gösterildi. Son bölümde de bu teoremin bir uygulaması yapıldı ve değişkenlerin bazı özel seçimleriyle Hartley dönüşümünün elde edildiği görüldü.

Anahtar Kelimeler: Strum-Liouville denklemleri, Dirac operatörleri, Sampling teoremi, Kramer teoremi.

ABSTRACT

SAMPLING THEOREM AND DIRAC OPERATORS

DOĞAN, Mutlay

M.Sc. in Mathematics

Supervisor: Asist. Prof. Dr. Abdullah Kablan

June 2012

47 pages

In this thessis a relation between sampling theorem and Dirac operators is studied. As a first we studied on boundary value problems which is the base of Dirac operators and then asympthotic behaviours of eigenvalues and eigenfunctions are given. As as second same researches were studied for Dirac operators.

In addition we gave sampling theorem and its generalization called by Kramer theorem with proofs. After all these preliminaries sampling theorem associated with Dirac operators and its proof in details are indicated. One application of this theorem was shown in the last section and then we have indicated that for some particular choices of variables we obtain Hartley transform.

Key Words: Strum-Liouville equations, Dirac operators, Sampling theorem, Kramer theorem.

TEŞEKKÜR

Bu yüksek lisans çalışmamda bana her türlü yardımı ve desteği hiç esirgemeden yapan saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Abdullah KABLAN bey'e ve bu çalışma süresince manevi desteğiyle hep yanımda olan eşime, çocuklarıma en içten duygularımla sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER LİSTESİ

(X, μ)	Ölçüm uzayı
$L^p(-\sigma, \sigma)$	$(-\sigma, \sigma)$ aralığında p. kökten integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$S_n(t)$	Sampling fonksiyonları
$\{t_n\}$	Sampling noktaları
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
λ_n	Özdeğerler
L	Lineer operatörler
U_n	Sınır şartları
$C^{(n)}$	$n.$ mertebeden türevleri sürekli olan fonksiyonlar uzayı
$G(t)$	Sampling değerlerinin kanonik çarpımı
W	Wronskiyen determinantı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$O(-)$	Asimptotik gösterim
U	Sınır şartlarının determinantı
D_R	Yarıçapı R olan çember
E	Lineer fonksiyon uzayı

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu tezde ayrıntılarıyla anlatılacak olan sampling teoremi Shanon [1] tarafından bilgi teorisinde ilk defa ortaya atılmıştır. Sampling teoreminin haberleşme mühendislerinin ilgisini çekmesi ise ilk defa Nyquist [2] ile olmuştur. Bu teoremin asıl kaynağı E.T ve J.M. Whittaker [3]-[4] ve Ferror [6] dur. İngiliz litaratüründe Shannon-Whittaker teoremi olarak bilinen Sampling teoremi buna karşılık Rus litaratüründe Kotel'nikov [7] teoremi olarak bilinir. Bundan dolayı günümüz çalışmalarının çoğunda Whittaker, Kotel'nikov ve Shannon'a itafen WSK veya WKS sampling teoremi olarak geçer. Bu teoremin iki genelleştirmesi Kramer [26] ve Weiss [8] tarafından, alışılmış Fourier dönüşümü yerine daha genel integral dönüşümleri alınarak yapılmıştır.

Genel olarak, sampling teoremi fonksiyonların bazı örneklem verilerini ki bunlar genelde fonksiyonun veya onların türevlerinin belirli noktalardaki değerleridir, kullanarak yeniden yazılmasıdır. Dolayısıyla sampling teorisi, interpolasyon ve yaklaşım teorisinin bir ürünü olarak görülmekle birlikte tam fonksiyonlarlada alakalıdır.

Sampling teoreminin kısa tarihine bakıldığında sampling teorisi daha çok yaklaşım teorisi, tam fonksiyonlar teorisi ve Fourier serilerinin teorisi gibi temel matematik alanlarının gölgesi altında kalmıştır. Belkide bu yüzden sampling teorisi matematikçilerden çok fizikçilerin ve mühendislerin çalışma konusu olmuştur.

Sampling teori 1950'lerde ortaya çıksada asıl matemtiksel kökleri Poissen, Borel, Hadamard ve E.T. Whittaker gibi matematikçilere hatta Cauchy'nin 'Five short stories about the cardinal series' başlıklı makalesine kadar uzandığı bilinmektedir.

Sampling teorisinin temel bir sonucu olan sampling teoreminin ifadesi şöyledir: Eğer bir zaman fonksiyonu W'yu aşmayacak frekansa sahip değil ise o zaman bu fonksiyon $t_n = n / w, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ noktalarındaki değerleriyle aşağıdaki biçimde tekrar yazılabilir.

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} f(t_k)\frac{\sin\sigma(t-t_k)}{\sigma(t-t_k)},\ t\in\mathbb{R}$$

Bu teoremin mühendisliği ilgilendiren tarafı sürekli bir sinyalin (fonksiyonun) eş aralıklı alınmış bilgileriyle tekrar yapılandırılabilmesidir. Buradaki frekans sınırının bilgisi yeniden yapılandırmanın tam olması için gerekli olan sampling noktalarının minimum oranını belirlemektedir. Bu minimum oran Nyquist oranı olarak bilinir, [9].

Bir fonksiyona sampling teoreminin uygulanabilmesi için öncelikle fonksiyonun bir aralık içerisinde band-limit fonksiyon olması, yani $[-\sigma,\sigma]$ aralığında, $f(t)$ fonksiyonunun $F\in L^2(-\sigma,\sigma)$ olmak üzere

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}F(w)e^{itw}dw$$

biçiminde yazılabilmesi gerekir. Dolayısıyla band-limit fonksiyonlar Fourier integral biçiminde yazılabilen fonksiyonlardır diyebiliriz. Buradan WSK sampling teoremi, bir sonlu aralık üzerinde Fourier dönüşümlerinin yeniden yapılandırılması için oluşturulan sampling seri açılımlarını sağlar. Bununla birlikte Fourier dışındaki bazı integral dönüşümlerinin yeniden yapılandırılması da mümkündür. Örneğin bunlardan bir tanesi optik problemlerde kullanılan Hankel dönüşümüdür.

Bu konudaki değişik düşüncelerden biride J.M. Whittaker'ın [10] sampling serisindeki çekirdek fonksiyonları, üstel fonksiyonlar yerine Bassel fonksiyonlarını almasıdır. Bu doğrultudaki bir başka düşünce de H. Kramer'in [26] çekirdek fonksiyonlarını ikinci mertebeden düzenli Sturm-Liouville sınır değer problemlerinin çözümlerinden almasıdır. Bu fikir ilk olarak P. Wiess [8] tarafından ortaya atılmıştır fakat teoremin ispatını vermemiştir. Ancak bundan iki yıl sonra Kramer ispatı ile birlikte sampling teoreminin Sturm-Liouville problemleri ile bağlantısını kurmuştur. Bu bağıntı daha sonraları birçok matematikçi tarafından çeşitli Sturm-Liouville problemleri kullanılarak yapılmıştır. Bu konudaki gelişim süreci ve referanslar beşinci bölümde verildiğinden burada bahsedilmeyecektir.

Bu tezde sampling teoreminin Dirac operatörlerle bağlantısı kurulmuştur. İkinci bölümde Sturm-Liouville problemleri tanıtılarak bu denklemlerin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik açılımları verilmiştir. Üçüncü bölümde ise önceki bölümde elde edilen sonuçlar Dirac operatörlere taşınmıştır. Sampling teoremi ise dördüncü bölümde verilmiş ve ispatı detaylı bir şekilde yapılmıştır. Son bölümde ise sampling teoreminin Dirac operatörlerle bağlantısı kurularak ana teorem verilmiş ve ispatı yapılmıştır. Ayrıca buna ilişkin birde uygulama yapılmıştır.

BÖLÜM 2

STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

2.1. Operatörlerin Temel Özellikleri

L belirli bir kümede tanımlanmış bir lineer operatör olsun. Eğer $Ly = \lambda y$ ise sıfırdan farklı y elemanına, L nin **özfonksiyonu** ve λ ya da L nin bu öz elemanına karşılık gelen ***özdeğeri*** denir.

Bir çok uygulamada karşılaşılan en basit türden operatörlerden biri de

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

dir. Burada $q(x)$ fonksiyonu, $[a,b]$ aralığında reel değerli ve sürekli bir fonksiyondur. L operatörü için $y(x)$ fonksiyonu $a,\ b$ sınır noktalarında türevlenebilirdir.

Bu operatör için en önemli sınır değer koşulları aşağıda verilmiştir:

1. $y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0,\ \ y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0$, öyle ki α ve β keyfi seçilmiş herhangi iki reel sayıdır.
2. $y(a) = y(b),\ \ y'(a) = y'(b)$.

Bu bölümün asıl amacı Sturm-Liouville problemi olarak bilinen aşağıdaki sınır değer problemlerini incelemektir.

$$Ly(x) = -y'' + q(x)y = \lambda y \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0 \\ y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Eğer $[a,b]$ sonlu ve $q(x)$ toplanabilir (integrallenebilir) bir fonksiyon ise bu Sturm-Liouville problemine ***düzenlidir*** denir. Aksi halde, eğer $[a,b]$ sonsuz veya $q(x)$ integrallenemeyen bir fonksiyon ise bu Sturm-Liouville problemine ***tekildir*** denir.

Daha genel aşağıdaki formda ikinci derece denklemler

$$y'' + p(x)y' + \{l(x) + \lambda r(x)\}y = 0, \qquad (2.3)$$

(2.1) denklemine indirgenebilir. Öyle ki $r(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında pozitif bir fonksiyondur. Eğer $p(x)$ in birinci türevi ve $r(x)$ in ikinci türevinin sürekli olduğunu kabul eder ve (2.3) denkleminde

$$\xi = \int_a^x \sqrt{r(t)}dt, \quad \eta(\xi) = \phi(x)y(x), \quad \phi(x) = \sqrt[4]{r(x)}\exp(\frac{1}{2}\int_a^x p(t)dt) \qquad (2.4)$$

değişken değiştirmeleri yapılırsa, (2.3) denklemi aşağıdaki kanonik forma dönüştürülmüş olur.

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \{\lambda + q(\xi)\}\eta = 0.$$

(2.4) teki dönüşümlere ***Liouville dönüşümleri*** denir.

(2.1), (2.2) sınır değer problemini ele alalım. Bu denklemlerde $[a,b]$ aralığı $[0,\pi]$ olarak alındığında (bu $t = \dfrac{x-a}{b-a}\pi$ dönüşümü ile yapılabilir), sınır değer probleminde herhangi bir değişiklik olmaz. Eğer belirli bir λ_1 değeri için sınır değer probleminin sıfırdan farklı $y(x,\lambda_1) \neq 0$ çözümü varsa o zaman λ_1 değerine (2.1), (2.2) sınır değer probleminin ***özdeğeri***, $y(x,\lambda_1)$ fonksiyonuna da (2.1), (2.2) nin bir ***özfonksiyonu*** denir.

Yardımcı Teorem 2.1: [10] İki farklı $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ özdeğere karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$ ve $y(x,\lambda_2)$ özfonksiyonları ortagonaldir (diktir), yani

$$\int_0^\pi y(x,\lambda_1)y(x,\lambda_2)dx = 0, \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2).$$

İspat: $f(x)$ ve $g(x)$ sürekli ve iki defa türevlenebilen iki fonksiyon olsun. $f(x)$ fonksiyonunu (2.1) denkleminde y yerine yazarsak

$$Lf = f''(x) - q(x)f(x)$$

olur. Yukarıdaki denkleme iki defa kısmi integral uygulandığında

$$\int_0^\pi Lf \cdot g(x)dx = W_\pi\{f,g\} - W_0\{f,g\} + \int_0^\pi f(x)Lg(x)dx \qquad (2.5)$$

eşitliği elde edilir. Öyleki burada

$$W_x\{f,g\} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

dir. $f(x) = y(x,\lambda_1)$ ve $g(x) = y(x,\lambda_2)$ olsun. (1.2) deki sınır değer koşullarından

$$W_0\{f,g\} = W_\pi\{f,g\} = 0$$

olur. O halde (2.5) ten

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^\pi y(x,\lambda_1)y(x,\lambda_2)dx = 0$$

elde edilir. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan

$$\int_0^\pi y(x,\lambda_1)y(x,\lambda_2)dx = 0$$

olmak zorundadır. Dolayısıyla yardımcı teorem ispatlanmış olur.

Yardımcı Teorem 2.2: (2.1), (2.2) nin oluşturduğu sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir, [10].

İspat: $\lambda_1 = u + iv$ bir kompleks özdeğer olsun. $q(x)$ reel değerli, α ve β da reel olduğundan, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = u - iv$ de $\overline{y}(x,\lambda_1)$ özfonksiyonuna karşılık gelen bir özdeğerdir. O halde bir önceki yardımcı teoremden

$$\int_0^{\pi} \left|y(x,\lambda_1)\right|^2 dx = 0$$

dır. Buradan $y(x,\lambda_1) \equiv 0$ dır. Bu ise özfonksiyonların sıfır olmayacağıyla çelişir.

Teorem 2.1: Eğer $q(x)$, $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ise o zaman her bir α için, (2.1) denkleminin bir tek $\varphi(x,\lambda),(a \le x \le b)$ çözümü vardır, öyleki $\varphi(a,\lambda) = \sin\alpha$ ve $\varphi'(a,\lambda) = -\cos\alpha$ dır. Her $x \in [a,b]$ için, $\varphi(x,\lambda)$, λ ya bağlı bir tam fonksiyondur, [12].

2.2. Özdeğer ve Özfonksiyonların Asimtotik Davranışları

$\cot\alpha = -h$ ve $\cot\beta = H$ olsun. O halde (2.2) sınır koşulları

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \tag{2.6}$$

şeklinde yazılabilir. (2.1) denkleminin aşağıdaki başlangıç koşullarını sağlayan çözümlerini sırasıyla $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ ile gösterelim

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \quad \varphi_x'(0,\lambda) = h \tag{2.7}$$

$$\psi(0,\lambda) = 0, \quad \psi_x'(0,\lambda) = 1 \tag{2.8}$$

Yardımcı Teorem 2.3: [10] $\lambda = s^2$ olsun. O halde

$$\varphi(x,\lambda) = \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau, \tag{2.9}$$

$$\psi(x,\lambda) = \frac{\sin sx}{s} + \frac{1}{s}\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}q(\tau)\psi(\tau,\lambda)d\tau \tag{2.10}$$

İspat: (2.9) u ispatlamak için $\varphi(x,\lambda)$ çözümünün (2.1) denklemini sağladığını

dikkate

alalım.

$$\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau =$$

S

$$\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}\varphi''_{\tau}(\tau,\lambda)d\tau + s^2\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$

ağ tarafta, birinci kısmın iki defa integrali alınıp (2.7) uygulandığında aşağıdaki eşitlik elde edelir.

$$\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau = -h\sin sx + s\varphi(x,\lambda) - s\cos sx\,.$$

Burada (2.9) bulunmuş olur. (2.10) denklemide aynı şekilde çıkarılabilir. **Yardımcı Teorem 2.4:** $s=\sigma+it$ olsun. O halde $|\,s\,|> s_0$ şartını sağlayan bir $s_0>0$ sayısı vardır, öyle ki

$$\varphi(x,\lambda)=O(e^{|t|x}),\quad \psi(x,\lambda)=O(|\,s\,|^{-1}\,e^{|t|x}) \tag{2.11}$$

değerlendirmeleri geçerlidir. Daha açık olarak $0\le x\le\pi$ için

$$\begin{aligned}\varphi(x,\lambda)&=\cos sx+O\Big(\frac{e^{|t|x}}{|\,s\,|}\Big),\\ \psi(x,\lambda)&=\frac{\sin sx}{s}+O\Big(\frac{e^{|t|x}}{|\,s\,|^2}\Big)\end{aligned} \tag{2.12}$$

şeklinde yazılabilir, [10].

İspat: (2.9) da $\varphi(x,\lambda)=e^{|t|x}f(x)$ yazılırsa;

$$f(x)=\{\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx\}e^{-|t|x}+\frac{1}{s}\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}e^{-|t|(x-\tau)}q(\tau)f(\tau)d\tau$$

olur. $\mu=\max\limits_{0\le x\le\pi}|\,f(x)\,|$ olsun. Bu durumda son eşitlikten;

$$\mu\le 1+\frac{|\,h\,|}{|\,s\,|}+\frac{\mu}{|\,s\,|}\int_0^x |\,q(\tau)\,|\,d\tau\,;$$

elde edilir. Buradan,

$$\mu \leq \left(1+\frac{|h|}{|s|}\right)\left(1-\frac{1}{|s|}\int_0^{\pi}|q(\tau)|\,d\tau\right)^{-1}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizlik paydanın pozitif olmasıyla gerçekleşir ki bu da,

$$|s| > \int_0^{\pi}|q(\tau)|\,d\tau$$

olmasıyla sağlanır.

Böylelikle (2.11), $\varphi(x,\lambda)$ için ispatlanmış olur. Benzer şekilde (2.10) kullanılarak $\psi(x,\lambda)$ için de ispatlanabilir. (2.9), (2.10) un sağ tarafındaki integrale (2.11) yazılarak (2.12) elde edilir.

Açıkça görülüyor ki $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ nın s nin fonksiyonları olarak genel asimtotik açılımları bu işlemler tekrarlanarak bulunabilir.

Şimdi özdeğerler ve özfonksiyonlar için asimtotik formüller çıkararak, sonsuz tane özdeğerin varlığını göstereceğiz.

İlk olarak, tekrar $h \neq \infty$ ve $H \neq \infty$ olduğunu kabul edelim. $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu, (2.6) denklemindeki birinci sınır şartlarını tüm λ lar için sağlar. O halde $\varphi(x,\lambda)$ yı (2.6) denkleminin ikinci şartında yerine koyarak özdeğerleri bulabiliriz.

Yardımcı teorem 2.3 den, özdeğerler reeldir. Demek ki $\operatorname{Im} s = t = 0$ dır. Bu nedenle (2.12) deki birinci denklem;

$$\varphi(x,\lambda) = \cos sx + O(s^{-1}) \qquad (2.13)$$

olur. (2.9) denkleminin x e göre türevini alıp (2.13) te kullandığımızda, kolayca;

$$\varphi'(x,\lambda) = -s\sin sx + O(1) \qquad (2.14)$$

elde edilir.

Şimdi de, (2.12) ve (2.14) te bulunan $\varphi(x,\lambda)$ ve $\varphi'(x,\lambda)$ değerlerini (2.6)'nın ikinci şartında uygularsak;

$$-s\sin s\pi + O(1) = 0 \tag{2.15}$$

denklemini elde ederiz, öyleki s 'nin büyük değerleri için çözümlerin tamsayı olduğu açıktır. Böylece sonsuz sayıda özdeğerlerin varlığı ispatlanmış olur.

Şimdi de, yeterince büyük alınan bir N tamsayısı için (2.15) denkleminin sadece bir kökünün, herbir $n > N$ tamsayısına yakın olduğunu gösterelim. Bunun için, (2.15) denkleminin sol tarafının s ye göre türevi alınırsa ki bu (2.9) formülüyle yapılabilir. (Teorem 2.1' den (2.15) in sol tarafındaki $O(1)$, λ nın bir analitik fonksiyonudur)

Dolayısıyla $-\pi s\cos s\pi + O(1)$ elde edilir. Eğer s, büyük tamsayılara yeterince yakınsa, bu ifadenin sıfır olmadığı kolayca görülür.

s_n, (2.15) denkleminin n. kökü olsun. s_n nin Sturm teoremi ve asimtotik fomüllerden , sadece n ye yakınsadığı görülür.

Diğer bir ispatı Sturm teorisini kullanmadan aşağıdaki gibi elde ederiz. Zaten daha önce λ özdeğerlerinin,

$$\varphi(\pi,\lambda) + H\varphi'_x(\pi,\lambda) = \omega(\lambda) = 0$$

denklemini sağladığını görmüştük. Eğer $\lambda = s^2$ alırsak. O halde $\omega(\lambda) = \omega_1(s)$ eşitliği (2.9) denklemine göre s nin bir tam fonksiyonudur. O aynı zamanda (2.13) ve (2.14) asimtotik formüllerinden de bulunur. ($\sin \pi s \neq 0$)

$$\omega_1(s) = -H\sin s\pi\{1 + O(|s|^{-1}\} \tag{2.16}$$

s -uzayında yarıçapı $R = N + \frac{1}{2}$ olan bir D_R çemberi alalım, öyleki N bir doğal sayı olsun. Rouche teoremi ve asimtotik formül (2.16) dan $s\sin s\pi$ fonksiyonundaki gibi, D_R çemberinin içinde bir çok $\omega_1(s)$ nin sıfırı vardır. Yani $2(N+1)$ tanedir. $\omega_1(s)$ fonksiyonu çift fonksiyondur, o halde sadece pozitif köklere dikkat edilmesi gerekir. Herbir pozitif sıfır bir özdeğere karşılık gelir ve $(N+1)$ tane özdeğer (s_k), $N + \frac{1}{2}$ den daha azdır. Buradan da aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$s_n = n + O(1) \qquad (2.17)$$

Gerçekten $s_n = m_n + O(1)$, $m_n \neq n$ olsun. O halde, bir tarafta s_n den daha küçük $n+1$ tane $s_k(k = 0,1,2,.....n)$ özdeğeri vardır. Diğer tarafta, $m_n + \frac{1}{2}$ yarıçaplı diskte $2(m_n + 1)$ tane $\omega_1(s)$ nin sıfırları olmalıdır, yani δ, S_n den daha küçük $M_n + 1 \neq n + 1$ S_k özdeğeri olmalıdır ki böylelikle (2.17) nin geçerliliği ispatlanmış olur. $s_n = n + \delta_n$ alırsak. (2.15) denklemi;

$$(n + \delta_n)\sin\delta_n\pi + O(1) = 0$$

formuna dönüşür. O nedenle $\sin\delta_n\pi = O(n^{-1})$ olur. Yani $\delta_n = O(n^{-1})$ dir. Böylece, yeterince büyük n değeri için (2.15) denkleminin kökleri;

$$s_n = n + O(n^{-1}) \qquad (2.18)$$

olur. Eğer (2.1) denklemindeki $q(x)$ in türevi sınırlı ise (2.18) asimtotik formülü daha da keskinleştirilebilir. Gerçekten (2.9) denkleminin x e göre türevi alınıp, $\varphi(x,\lambda)$ ve $\varphi'(x,\lambda)$ (2.6) denkleminin ikinci sınır şartında uygulanırsa, basit bir dönüşümden sonra aşağıdaki

$$(-s + B)\sin s\pi + A\cos s\pi = 0 \qquad (2.19)$$

bulunur, öyleki

$$A = h + H + \int_0^\pi \{\cos s\tau + \frac{H}{s}\sin s\tau\} q(\tau)\varphi(\tau)d\tau,$$
$$B = \frac{hH}{s} + \int_0^\pi \{\sin s\tau + \frac{H}{s}\} q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau.$$

(2.13) ten

$$A = h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)\cos 2s\tau d\tau + O(\frac{1}{s}),$$
$$B = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)\sin 2s\tau d\tau + O(\frac{1}{s}).$$

elde edilir. $q(x)$ in sınırlı türeve sahip olduğu varsayıldığından, kısmi integralden,

$$\int_0^\pi q(\tau)\cos 2s\tau d\tau = O(\frac{1}{s}), \quad \int_0^\pi q(\tau)\sin 2s\tau d\tau = O(\frac{1}{s}),$$

ve

$$A = h + H + h_1 + O(\frac{1}{s}), \quad h_1 = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)d\tau, \quad B = O(\frac{1}{s}).$$

bulunur. Dolayısıyla (2.19) denklemi

$$\tan s\pi = (h + H + h_1 + O(1/s))/(s + O(1/s)).$$

şeklinde yazılabilir. Tekrar $s_n = n + \delta_n$ alındığında;

$$\tan \pi\delta_n = \frac{h + H + h_1}{n} + O(\frac{1}{n^2})$$

olur. Bundan dolayı

$$\delta_n = \frac{h + H + h_1}{\pi n} + O(\frac{1}{n^2})$$

ve

$$s_n = n + \frac{c}{n} + O(\frac{1}{n^2}), \tag{2.20}$$

öyleki

$$c = \frac{1}{\pi}(h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)d\tau)$$

dir. $q(x) \in C^2([0,\pi])$ olduğu farz edilirse, c_1 sabit olmak üzere daha keskin bir asimtotik formül olan

$$s_n = n + \frac{c}{n} + \frac{c_1}{n^3} + O(\frac{1}{n^4}) \tag{2.21}$$

bulunur.

BÖLÜM 3

BİR BOYUTLU DIRAC OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEORİSİ

3.1. Operatörlerin Tanım ve Temel Özellikleri

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ P(x)=\begin{pmatrix}p_{11}(x) & p_{12}(x)\\ p_{21}(x) & p_{22}(x)\end{pmatrix}, p_{12}(x)\equiv p_{21}(x), p_{ik}(x), i,k=1,2$$

olmak üzere

$$B\frac{dy}{dx}+P(x)y=\lambda y, y(x)=\begin{pmatrix}y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

matris denklemini ele alalım. Burada $p_{ik}(x), i,k=1,2$ fonksiyonları $[0,\pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar ve λ bir parametredir. (3.1) denklemi aşağıda verilen birinci dereceden adi diferansiyel denklem sistemine denktir.

$$\begin{aligned} y_2'+p_{11}(x)y_1+p_{12}(x)y_2&=\lambda y_1,\\ -y_1'+p_{21}(x)y_1+p_{22}(x)y_2&=\lambda y_2.\end{aligned} \tag{3.2}$$

öyleki $p_{12}(x)=p_{21}(x)\equiv 0,\ p_{11}(x)=V(x)+m, p_{22}(x)=V(x)-m$ dir. Burada $V(x)$ potansiyel fonksiyon ve m de bir parçacığın kütlesidir. (3.2) ye relativistik kuantum teorisinde bir boyutlu hareketsiz ***Dirac sistemi*** denir.

(3.1) sistemine aşağıdaki matris dönüşümünü uygulayalım.

$$H(x)=\begin{pmatrix}\cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x)\\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x)\end{pmatrix}$$

B ve H matrislerinin değişme özelliği vardır. Yani $BH=HB$ dir. $y=H(x)z$ alınıp, y (3.1) denkleminde yerine konulup H^{-1} ile çarpıldığında

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}(Hz)+H^{-1}PHz=H^{-1}\lambda Hz$$

elde edilir. Ya da

$$B\frac{dz}{dx}+\left(H^{-1}B\frac{d}{dx}H+H^{-1}PH\right)z=\lambda z \tag{3.3}$$

olur. $Q(x)=H^{-1}B(d\,/\,dx)H+H^{-1}PH$ matrisini hesaplamak için

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}H=\begin{pmatrix}\varphi'(x) & 0\\ 0 & \varphi'(x)\end{pmatrix},$$

dir ve

$$H^{-1}PH=\begin{pmatrix}p_{11}\cos^2\varphi+p_{12}\sin 2\varphi+p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi\\ p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi & p_{11}\sin^2\varphi-p_{12}\sin 2\varphi+p_{22}\cos^2\varphi\end{pmatrix}$$

olur. O halde Q matrisi aşağıdaki forma dönüşür.

$$Q(x)=\begin{pmatrix}q_{11}(x) & q_{12}(x)\\ q_{12}(x) & q_{22}(x)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\varphi'+p_{11}\cos^2\varphi+p_{12}\sin 2\varphi+p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi\\ p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi & \varphi'+p_{11}\sin^2\varphi-p_{12}\sin 2\varphi+p_{22}\cos^2\varphi\end{pmatrix}$$

$\varphi(x)$ fonksiyonunnu $q_{12}(x)\equiv 0$ olacak şekilde seçersek, bu durumda

$$p_{12}(x)\cos 2\varphi(x)+\frac{1}{2}\{p_{22}(x)-p_{11}(x)\}\sin 2\varphi(x)=0$$

$p_{11}(x)\neq p_{22}(x)$ olduğundan

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2p_{12}(x)}{p_{11}(x)-p_{22}(x)},$$

olur ve $Q(x)$ matrisi

$$Q(x)=\begin{pmatrix}q_{11}(x) & 0\\ 0 & q_{22}(x)\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}p(x) & 0\\ 0 & r(x)\end{pmatrix}$$

formuna dönüşür. O halde (3.3) denklemi tekrar aşağıdaki gibi yazılır

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{dz}{dx}+\begin{pmatrix}p(x) & 0\\ 0 & r(x)\end{pmatrix}z=\lambda z \tag{3.4}$$

Şimdi de $\varphi(x)$ fonksiyonunu öyle seçelim ki $iz\, Q(x) = q_{11}(x) + q_{22}(x) = 0$ olsun. Bu da $2\varphi'(x) + p_{11}(x) + p_{22}(x) = 0$ demektir. Dolayısıyla

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x \{p_{11}(s) + p_{22}(s)\}ds$$

olur. O halde (3.3) denklemi aşağıdaki forma dönüşür.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} z = \lambda z \tag{3.5}$$

(3.4) ve (3.5) denklemlerine (3.1) denkleminin yada (3.2) denklem sisteminin ***kanonik formları*** denir. Bu formlar değişik spektral teori problemlerinin çözümünde kullanılır. Örneğin özdeğerler ve vektör değerli özfonksiyonların asimtotik davranışlarının belirlenmesinde kullanılır. Bununla beraber keyfi vektör değerli bir fonksiyonun (3.1) denkleminin vektör değerli özfonksiyonları cinsinden açılım problemlerinde (3.4) kanonik denklemi kullanılır. Ayrıca, sonsuz bir aralıkta (3.1) denkleminin özdeğerlerinin asimtotik dağılımıyla ilgili problemlerde ve ters problemlerde (3.5) denklemi kullanılır. O halde (3.1) denklemi için sınır değer problemi ele alındığında, ikinci denklem aşağıdaki gibi (3.4) kanonik denklem formuna dönüşür.

$$y_2' - \{\lambda + p(x)\}y_1 = 0, \quad y_1' + \{\lambda + r(x)\}y_2 = 0 \tag{3.6}$$

$$y_1(0)\sin\alpha + y_2(0)\cos\alpha = 0 \tag{3.7}$$

$$y_1(\pi)\sin\beta + y_2(\pi)\cos\beta = 0. \tag{3.8}$$

$p(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonlarının $[0,\pi]$ aralığında sürekli olduğu kabul edilir ise bu durumda sınır değer probleminin aşikar olmayan

$$y(x,\lambda_0) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda_0) \\ y_2(x,\lambda_0) \end{pmatrix}$$

bir çözümü vardır. Burada λ_0 bir özdeğer ve buna karşılık gelen $y(x,\lambda_0)$ da vektör değerli bir özfonksiyon olur.

Yardımcı Teorem 3.1: [10], Farklı $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ özdeğerlere karşılık gelen vektör değerli özfonksiyonlar; $y(x,\lambda_1)$ ve $y(x,\lambda_2)$ ortagonaldir. Yani $y^{\mathrm{T}} = (y_1\ y_2)$ olmak üzere

$$\int_0^{\pi} y^{\mathrm{T}} z dz \equiv \int_0^{\pi} \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx = 0.$$

İspat: $y(x,\lambda_1)$, $y(x,\lambda_2)$ (3.6) denklem sisteminin çözümleri olduğundan,

$$\begin{aligned} y_2' - \{\lambda_1 + p(x)\}y_1 = 0, \quad z_2' - \{\lambda_2 + p(x)\}z_1 = 0 \\ y_1' - \{\lambda_1 + r(x)\}y_2 = 0, \quad z_1' - \{\lambda_2 + r(x)\}z_2 = 0 \end{aligned}$$

olur. Sırasıyla bu denklemler $z_1, -z_2, -y_1$ ve y_2 ile çarpılıp, toplandığında,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\{y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2) - y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)\} \\ &\qquad = (\lambda_1 - \lambda_2)\{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi de 0 dan π ye integrali alınırsa,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^{\pi} y^{\mathrm{T}}(x,\lambda_1)z(x,\lambda_2)dx = \{y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2) - y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)\}_0^{\pi},$$

bulunur. (3.7) ve (3.8) sınır şartlarından sağ taraf sıfır olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Yardımcı Teorem 3.2: (3.6), (3.7) ve (3.8) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir, [10].

İspat: Yardımcı teorem 2.2 nin ispatına benzer biçimde yapılabilir, [10].

3.2 Özdeğerler ve Vektör Değerli Özfonksiyonlar için Asimptotik Formüller

A ve B iki lineer diferansiyel operatör ve E_1, E_2 de iki lineer fonksiyon uzayı olsun.

Tanım 3.1: E_1 uzayından E_2 uzayına tanımlı, sürekli lineer bir X operatörü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu operatöre bir dönüşüm operatörü denir.

1. $AX = XB$,

2. X^{-1} var ve sürekli.

$[0,\pi]$ aralığında $p_k(x)$, $r_k(x), (k = 1,2)$ fonksiyonları sürekli ve reel değerli olmak üzere A ve B yi aşağıdaki formda alalım.

$$A \equiv \begin{pmatrix} p_1(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r_1(x) \end{pmatrix}, \quad B \equiv \begin{pmatrix} p_2(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r_2(x) \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

E_1 ve E_2 sürekli türevlenebilir vektör değerli fonksiyonlar kümesi olarak alındığında, δ ve γ herhangi iki reel sayı olmak üzere $f(x)$ ve $g(x)$ aşağıdaki sınır şartlarını sağlar.

$$\begin{aligned} f_1(0)\sin\gamma + f_2(0)\cos\gamma = 0 \\ g_1(0)\sin\delta + g_2(0)\cos\delta = 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Bu durumda X matris operatörü aşağıdaki forma dönüştürülür.

$$X\{f(x)\} = R(x)f(x) + \int_0^x K(x,s)f(s)ds, \tag{3.11}$$

burada $R(x)$ ve $K(x,s)$ ikinci mertebeden sürekli ve türevlenebilen iki matristir.

$$R(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ -\beta(x) & \alpha(x) \end{pmatrix},$$

ve $\alpha(x), \beta(x)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} \alpha(x) = \frac{1}{k}\sin\left\{\frac{1}{2}\int_0^x iz[A-B]d\tau + \sin^{-1}\frac{1}{k}\right\}, \\ \beta(x) = \frac{1}{k}\cos\left\{\frac{1}{2}\int_0^x iz[A-B]d\tau + \sin^{-1}\frac{1}{k}\right\}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

$k = \sec(\delta - \gamma)$.

Başlangıç şartlarını sağlayan (3.6) denklem sisteminin çözümünü $\varphi(x,\lambda)$ olarak gösterirsek;

$$\varphi_1(0,\lambda) = \cos\alpha, \quad \varphi_2(0,\lambda) = -\sin\alpha \tag{3.13}$$

olur. Buradan da $\varphi(x,\lambda)$, (3.7) denkleminin sınır şartlarını sağladığı açıkça görülür.

$p(x) = r(x) \equiv 0$ için (3.6) ve (3.13) problemlerini ele alırsak, çözümü $\psi(x,\lambda)$ ile gösterilen problemin çözümlerinin;

$$\begin{aligned} \psi_1(x,\lambda) = \cos(\lambda x - \alpha) \\ \psi_2(x,\lambda) = \sin(\lambda x - \alpha) \end{aligned} \tag{3.14}$$

olduğu açıkça görülür. Dönüşüm matris operatörü (3.6), (3.7) problemlerinin çözümlerine uygulanırsa, (3.6) sistemi;

$$A_1 y \equiv \begin{pmatrix} -p(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & -r(x) \end{pmatrix} y = \lambda y \tag{3.15}$$

formuna dönüşür. Diğer taraftan (3.14) ten tanımlanmış olan vektör değerli fonksiyon $\psi(x,\lambda)$ nın çözümü;

$$B_1 y = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & 0 \end{pmatrix} y = \lambda y \tag{3.16}$$

olur. $\psi(x,\lambda)$, $B_1\psi = \lambda\psi$ nin çözümü olduğu için, X in tanımından

$$A_1 X\{\psi\} = XB_1\{\psi\} = X\{\lambda\psi\} = \lambda X\{\psi\}$$

olur. Yani $\varphi = X\{\psi\}$, $A_1\{\psi\} = \lambda\psi$'nin çözümüdür. Buradan, eğer $\psi(x,\lambda)$, (3.16)nın çözümü ise o halde $\varphi(x,\lambda) = X\{\psi(x,\lambda)\}$, (3.15)'in çözümü olur. Bu durumu ele aldığımızda

$$p_1(x) = -p(x), \quad r_1(x) = -r(x), \quad p_2(x) = r_2(x) = 0$$

olur. O halde $iz[A_1 - B_1] = -[p(x) + r(x)]$ olur. Aynı zamanda (3.10), (3.7)'nin sınır şartlarında yerine konulursa $K = 1$ olur. ($\gamma = \delta$). (3.12)'dende

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \cos\left\{\frac{1}{2}\int_0^x [p(\tau) + r(\tau)]d\tau\right\}, \\ \beta(x) &= \sin\left\{\frac{1}{2}\int_0^x [p(\tau) + r(\tau)]d\tau\right\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

elde edilir. (3.6), (3.13) problemlerinin çözümü olan $\psi(x,\lambda)$ için (3.11)'in türevi alınırsa,

$$\varphi(x,\lambda) = R(x)\psi(x,\lambda) + \int_0^x K(x,s)\psi(s,\lambda)ds$$

olur. Buradan, $R(x)$ matrisini $\alpha(x), \beta(x)$ fonksiyonları cinsinde ifade edip, (3.17)'deki değerlerinden ve (3.14)'ün $\psi(x,\lambda)$ kapalı formundan aşağıdaki formülleri elde ederiz.

$$\varphi_1(x,\lambda)=\cos\left\{\xi(x,\lambda)-\alpha\right\}+\int_0^x\left\{K_{11}(x,s)\cos(\lambda s-\alpha)+K_{12}(x,s)\sin(\lambda s-\alpha)\right\}ds \quad (3.18)$$

$$\varphi_2(x,\lambda)=\sin\left\{\xi(x,\lambda)-\alpha\right\}+\int_0^x\left\{K_{21}(x,s)\cos(\lambda s-\alpha)-K_{22}(x,s)\sin(\lambda s-\alpha)\right\}ds \quad (3.19)$$

$\psi(x,\lambda)$ vektör değerli fonksiyonun bileşenleri için

$$\xi(x,\lambda)=\lambda x-\frac{1}{2}\int_0^x[p(\tau)-r(\tau)]d\tau \quad (3.20)$$

ve $K_{ij}(x,s), i,j=1,2$, (3.11)'den $K(x,s)$ Kernel matrisinin elemanlarıdır.

Yardımcı Teorem 3.3: $0\le x\le\pi$ olmak üzere x'de $|\lambda|\to\infty$ giderken aşağıdaki hesaplamalar geçerlidir, [10].

$$\begin{aligned}\varphi_1(x,\lambda)&=\cos\left\{\xi(x,\lambda)-\alpha\right\}+O(\lambda^{-1})\\ \varphi_2(x,\lambda)&=\sin\left\{\xi(x,\lambda)-\alpha\right\}+O(\lambda^{-1})\end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_1(x,\lambda)&=-x\sin\left\{\xi(x,\lambda)-\alpha\right\}+O(1)\\ \frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_2(x,\lambda)&=x\cos\left\{\xi(x,\lambda)-\alpha\right\}+O(1)\end{aligned} \quad (3.22)$$

İspat: $K_{ij}(x,s),(i,j=1,2)$ fonksiyonu türevlenebilir olduğundan, (3.18) ve (3.19) un kısmi integrali alındığında (3.21) elde edilir. Eğer (3.18) ve (3.19)'un λ'ya göre birinci türevleri alınırsa, (3.22) elde edilir ve böylece yardımcı teorem ispatlanmış olur.

Yardımcı Teorem 3.4: (3.6), (3.7) ve (3.8) sınır değer problemlerinin özdeğerleri tek katlıdır (basittir), [10].

İspat: $\psi(x,\lambda)$, (3.7)'nin sınır şartlarını sağladığından, istenen özdeğerleri bulmak için $\varphi_1(x,\lambda)$, $\varphi_2(x,\lambda)$, (3.8) denkleminin sınır şartlarında uygulanır ve kökleri bulunur.

$$D(\lambda)=\varphi_1(\pi,\lambda)\sin\beta+\varphi_2(\pi,\lambda)\cos\beta$$

olur. O halde

$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda}\sin\beta+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\lambda}\cos\beta$$

olur. λ_0 çift özdeğer ve $\varphi^0(x,\lambda_0)$ da buna karşılık gelen vektör değerli özfonksiyonlardan biri olsun. O halde $D(\lambda_0)=0,\ \dfrac{dD(\lambda_0)}{d\lambda}=0$ koşulları aynı anda sağlanır. Yani

$$\begin{gathered}\varphi_1^0(\pi,\lambda_0)\sin\beta+\varphi_2^0(\pi,\lambda_0)\cos\beta=0\\ \frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_1^0(\pi,\lambda_0)\sin\beta+\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_2^0(\pi,\lambda_0)\cos\beta=0\end{gathered}$$

olur. $\sin\beta$ ve $\cos\beta$ aynı anda sıfır olamayacağından yukarıdaki son iki denklemden;

$$\varphi_2^0(\pi,\lambda)\frac{\partial\varphi_1^0(\pi,\lambda_0)}{\partial\lambda}-\varphi_1^0(\pi,\lambda)\frac{\partial\varphi_2^0(\pi,\lambda_0)}{\partial\lambda}=0 \tag{3.23}$$

elde edilir. Şimdi de (3.6) denklem siteminin λ'ya göre türevi alınırsa;

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial y_2}{\partial\lambda}\right)_x^{'}-\{\lambda+p(x)\}\frac{\partial y_1}{\partial\lambda}&=y_1\\ \left(\frac{\partial y_1}{\partial\lambda}\right)_x^{'}+\{\lambda+r(x)\}\frac{\partial y_2}{\partial\lambda}&=-y_2\end{aligned} \tag{3.24}$$

elde edilir. (3.6) ve (3.24) denklemleri sırasıyla $\dfrac{\partial y_1}{\partial\lambda},-\dfrac{\partial y_2}{\partial\lambda},-y_1,y_2$ ile çarpılıp, birlikte toplanır ve 0'dan π'ye x' e göre integrali alınırsa;

$$\left\{y_1(x,\lambda)\frac{\partial y_2}{\partial\lambda}-y_2(x,\lambda)\frac{\partial y_1}{\partial\lambda}\right]_0^\pi=\int_0^\pi\left[y_1^2(x,\lambda)+y_2^2(x,\lambda)\right]dx$$

elde edilir. $\lambda=\lambda_0$ alındığında,

$$\frac{\partial\varphi_1^0(x,\lambda_0)}{\partial\lambda}\Big|_{x=0}=\frac{\partial\varphi_2^0(x,\lambda_0)}{\partial\lambda}\Big|_{x=0}=0$$

eşitliği dikkate alınırsa, (3.18), (3.19) ve (3.23) eşitliğinden,

$$\int_0^\pi[\{\varphi_1^0(x,\lambda_0)\}^2+\{\varphi_2^0(x,\lambda_0)\}^2]dx=\varphi_1^0(\pi,\lambda_0)\frac{\partial\varphi_2^0(\pi,\lambda_0)}{\partial\lambda}-\varphi_2^0(\pi,\lambda)\frac{\partial\varphi_1^0(\pi,\lambda)}{\partial\lambda}=0$$

bağıntısı elde edilir. Dolayısıyla $\varphi_1^0(x,\lambda_0)=\varphi_2^0(x,\lambda_0)\equiv0$ ya da $\varphi^0(x,\lambda)\equiv0$ dır. Bu da mümkün olmadığından, yardımcı teorem ispatlanmış olur.

BÖLÜM 4

SAMPLING TEOREMİ VE STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİ

4.1. Whittaker-Shannon-Kotel’nikov Teoremi ve Genelleştirmeleri

Bu bölümde, tezin de konusu olan Whittaker-Shannon-Kotel’nikov (WSK) sampling teoreminden bahsedeceğiz. Eğer bir zaman fonksiyonunun bir saniyedeki devir sayısı 0 ile W arasında ise o zaman bu fonksiyon aralık uzunluğu $1/2W$ olan ayrık noktalardaki değerler serisi (ordinat değerlerinin serisi) ile tekrar yazılabilir. Başka bir ifadeyle $f(t)$ W yu aşmayacak frekansa sahip değil ise o zaman bu fonksiyon aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(\frac{n}{W}) \frac{\sin \pi(Wt-n)}{\pi(Wt-n)}$$

Bu sonuç haberleşme ve elektrik mühendisliğinde Shannon sampling teoremi olarak bilinsede bundan bağımsız olarak E. T. Whittaker ve V. Kotelnikov tarafından da bulunduğundan (WSK) sampling teoremi olarak adlandırılır. Bu teoremi daha açık ifade edip ispatını yapmadan önce bazı tanım ve teoremler verecegiz.

Tanım 4.1 (Ölçülebilir Fonksiyon): X uzayı μ pozitif ölçüsü ile (X,μ) ölçüm uzayı olsun ve $0 < p < \infty$ sayıları için aşağıdaki ifade sağlanırsa f fonksiyonuna X üzerinde kompleks değerli ***ölçülebilir bir fonksiyon*** denir, [24].

$$\left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} < \infty$$

Tanım 4.2 (Band Limit Sinyal Fonksiyonu): Eğer $f(t)$, $[-\sigma,\sigma]$ aralığında $F \in L^2(-\sigma,\sigma)$ için Fourier dönüşümlü bir fonksiyon ise $f(t)$ fonksiyonuna σ bantlı bir ***bant limit sinyal (fonksiyonu)*** denir. Yani $f(t)$ fonksiyonunun

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}F(w)e^{itw}dw, \qquad F\in L^2(-\sigma,\sigma) \tag{4.1}$$

biçiminde yazılmasıdır.

Teorem 4.1 (Parseval Eşitliği): $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ortagonal fonksiyonlar kümesi ve $f,g\in L^2(a,b)$ olsun. f,g fonksiyonları sırasıyla

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\psi_n(x), \quad g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}d_n\psi_n(x)$$

olarak yazılabiliyorsa, aşağıdaki eşitlikler doğrudur, [24].

$$\int_a^b\{f(x)\}^2dx=\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2,$$
$$\int_a^b\{g(x)\}^2dx=\sum_{n=1}^{\infty}d_n^2,$$
$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}c_nd_n$$

Teorem 4.2 (Hölder Eşitsizliği): p ve q negatif olmayan ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ koşulunu sağlayan reel sayılar olsun. Eğer $f\in L^p, g\in L^q$ ise $f\cdot g\in L^1$ ve

$$\int|fg|\,d\mu\le\|f\|_p\cdot\|g\|_q$$

dir, [24].

Tanım 4.3 (Tam fonksiyon): Kompleks değişkenli $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin tamamında analitik ve bu nedenle her noktasında fourier seri açılımına sahip ise $f(z)$ fonksiyonuna ***tam fonksiyon*** denir. Sıfırdaki seri açılımı aşağıdaki gibidir.

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$$

Burada $a_n=f^n(0)/n!$ katsayılardır, [25].

Tanım 4.4 (Üstel Tipten Tam Fonksiyon): $f(z)=\exp(\sigma z^m)$ fonksiyonuna $m.$ mertebeden σ tipinde ***üstel tam fonksiyon*** denir. $m=1$ alınırsa sadece σ *tipinde üstel tam fonksiyon* denir, [11].

Tanım 4.5: $\forall\sigma \geq 0$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için B_σ^2 kümesi ile $\mathbb{C}$ de $L^2(\mathbb{R})$ ye ait olan, en fazla σ tipindeki üstel bütün tam fonksiyonların kümesini göstereceğiz. Yani

$$f \in \mathrm{B}_\sigma^2 \Leftrightarrow \left|f(z)\right| \leq \sup_{x\in\Re}\left|f(x)\right|\exp\left(\sigma\left|z\right|\right), \quad \int_{\mathbb{R}}\left|f(x)\right|^2 dx < \infty, \quad z \in \mathbb{C}$$

Teorem 4.3 (Hadamard Faktorizasyon Teoremi): Herhangi sonlu, tam ve ρ. mertebeden $f(z)$ fonksiyonu aşağıdaki formda yazılabilir

$$f(z) = z^m e^{P(z)} \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{z_n}; p\right)$$

burada z_n değerleri $f(z)$ fonksiyonunun sıfır olmayan kompleks kökleri ve $p\left(p \leq \rho\right)$ sayısı, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left|z_n\right|^{p+1}}$ serisini yakınsak yapan en küçük tam sayı, $P(z)$ polinomu derecesi ρ'yu aşmayan bir polinom, m sayısı orijindeki sıfırın katı ve $G(u;p)$ ise aşağıdaki biçimde tanımlanan bir fonksiyondur.

$$G(u;p) = (1-u)\exp\left(u + \frac{u^2}{2}\cdots\frac{u^p}{p}\right), \quad G(u;0) = (1-u)$$

Örnek olarak

$$\sin\pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

verilebilir, [25].

4.1.1. Whittaker-Shannon-Kotel'nikov Sampling Teoremi

Teorem 4.4 (Whittaker-Shannon-Kotel'nikov): $f(t)$ $\left[-\sigma, \sigma\right]$ aralığında bir σ bant limit sinyal fonksiyonu ise o zaman $t_k = k\pi / \sigma,\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$ değerli sampling noktalarında

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(t_k)\frac{\sin\sigma(t - t_k)}{\sigma(t - t_k)},\ t \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Bu seri $\mathbb{R}$ nin kompakt her alt kümesinde mutlak ve düzgün yakınsaktır, [22]. Burada $\left\{t_k\right\}_{k=\infty}^{\infty}$ değerlerine sampling değerleri ve

$$S_k\left(t\right) := \frac{\sin\sigma\left(t-t_k\right)}{\sigma\left(t-t_k\right)} \tag{4.3}$$

fonksiyonlarına da ***sampling fonksiyonları*** denir.

(4.2) ifadesinde verilen σ / π sampling sıklığına Nyquist oranı denir. Bu oran fonksiyonun yeniden tam olarak yapılandırılması için gerekli olan minimum orandır.

İspat: Bu teoremin ispatında ana fikrimiz, e^{itw} fonksiyonuna basit notasyonlar uygulayarak onu 2σ periyotlu fonksiyon yapıp, $F\left(w\right)$ fonksiyonunu $\mathbb{R}$ reel eksenin tamamına $e^{-inw\pi/\sigma}$ fonksiyonlarının Fourier serisinde yazmak olacaktır. Bu durumda F 'nin Fourier açılımı

$$F\left(w\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} c\left(n\right)e^{-inw\pi/\sigma}, \quad c\left(n\right) = \frac{1}{2\sigma}\int_{-\sigma}^{\sigma} F\left(w\right)e^{inw\pi/\sigma}dw$$

biçimindedir. Aynı şekilde e^{itw} nunda Fourier açılımı aşağıdaki gibidir

$$e^{itw} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\sigma(t-t_n)}{\sigma(t-t_n)} e^{inw\pi/\sigma}$$

biçiminde hesaplanır. (4.1) ifadesinin sağ tarafına Parseval eşitliğini uygularsak

$$f\left(t\right) = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c\left(n\right)\frac{\sin\sigma\left(t-t_n\right)}{\sigma\left(t-t_n\right)} \tag{4.4}$$

elde ederiz. Gerçektende

$$f\left(t_n\right) = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} c\left(n\right).$$

olduğundan (4.2) ifadesi elde edilir. Buradan da ispat tamamlanır. (4.4) ifadesi $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|c\left(n\right)\right| \in L^2\left(\mathbb{R}\right)$ olduğundan yakınsaktır. Bununla birlikte (4.4) deki seriye Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygularsak (4.2) ifadesinin $\mathbb{R}$ kümesinin kompakt her alt kümesinde mutlak ve düzgün yakınsak olduğu kolaylıkla görülebilir. Dikkat edilirse $F \in L^2(-\sigma, \sigma)$ olduğundan $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c(n)| < \infty$ dur.

Şimdiye kadar seçilen sampling değerleri olan $\{t_n\}$ dizisi eşit aralıklar olarak seçilmişti. Şimdi ise eşit olmayan aralıklar için (WSK) sampling teoreminin genelleştirmesinde büyük rol oynayan Paley ve Wiener'in çalışması olan Paley-Wiener teoremini verelim.

4.1.2. WSK Metodunun Paley-Wiener Genelleştirmesi

Düzenli sampling noktalarının seçimiyle oluşturulan WSK metodunun, Paley-Wiener genelleştirmesi sampling noktalarının düzensiz ve belirli bir şartı sağlayacak biçimde seçilmesiyle oluşturulmuş daha genel bir metodtur.

Teorem 4.5 (Paley-Wiener): $\{t_n\}$ reel sayılar dizisi aşağıdaki şekilde seçilsin

$$D := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| t_k - \frac{k\pi}{\sigma} \right| < \frac{\pi}{4\sigma} \tag{4.5}$$

ve $G(t)$ aşağıdaki biçimde tanımlanmış bir fonksiyon olsun:

$$G(t) = (t - t_k) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{t_k}\right)\left(1 - \frac{t}{t_{-k}}\right) \tag{4.6}$$

o halde (4.2) deki seri açılımı

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k) S_k^{**}(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{4.7}$$

biçiminde olur. Burada

$$S_k^{**}(t) := \frac{G(t)}{G'(t_k)(t - t_k)} \tag{4.8}$$

dir, [20].

(4.7) serisinin sağ tarafı $\mathbb{R}$ kümesinin kompakt her alt kümesinde düzgün yakınsaktır. Açıktır ki $t_k = (k\pi)/\sigma = -t_{-k}$ alındığı zaman $G(t)$ fonksiyonu $\sin \sigma t / \sigma$ ya eşit olur. Bu da (WSK) sampling teoremindeki (4.2) ve (4.3) ifadelerinin (4.7), (4.8) ifadelerine denk olması demektir.

WSK sampling teoreminin başka bir genellemesi olan, (4.1) integralindeki e^{ixt} fonksiyonunun yerine daha genel fonksiyonlar alındığı zaman durumun nasıl olacağını açıklayan aşağıdaki Kramer teoremini verelim.

4.1.3. WSK Metodunun Kramer Genelleştirmesi

WSK metodunun bir başka genelleştirmesi olan Kramer sampling metodu bu tezin de ana unsuru olacaktır. Çünkü bu teoremle birlikte ilk defa sampling metodu ile sınır-değer problemleri arasında ilişki kurulmuş ve metot için gerekli olan sampling noktaları sınır-değer probleminin özdeğerlerinden ve sampling fonksiyonları da sınır-değer probleminin öz fonksiyonlarından elde edilmiştir.

Teorem 4.6 (Kramer): $K(x,t) \in L^2(I)$, $t \in \mathbb{R}$ için sürekli bir fonksiyon ve $\{t_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ reel sayılar dizisi için $K(x,t_n) \in L(I)$ ortagonal fonksiyonların ailesi olsun. $F(x) \in L^2(I)$ için

$$f(t) = \int_I F(x) K(x,t) dx \tag{4.9}$$

biçiminde ifade edilebilirse o zaman $f(t)$ fonksiyonun sampling serisi

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) S_n^*(t) \tag{4.10}$$

biçiminde olur. Burada

$$S_n^*(t) = \frac{\int_I K(x,t) \overline{K(x,t_n)} dx}{\int_I \left|K(x,t_n)\right|^2 dx} \tag{4.11}$$

dir, [26].

İspat: $F(x) \in L^2(I)$ olduğundan

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) \overline{K(x,t_n)}$$

seri açılımına sahiptir. Burada

$$c(n) = \frac{\int_I F(x) K(x, t_n) dx}{\int_I \left|\overline{K(x, t_n)}\right|^2 dx}$$

fonksiyonları katsayılardır. Benzer şekilde $K(x,t) \in L^2(I)$ olduğundan

$$K(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(n) K(x, t_n)$$

burada

$$d(n) = \frac{\int_I K(x,t) \overline{K(x, t_n)} dx}{\int_I \left|\overline{K(x, t_n)}\right|^2 dx}$$

katsayılardır. Bunlarla birlikte (4.9) denkleminin sağ tarafına Parseval eşitliği uygulanırsa istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Gerçektende, $I = [-\pi, \pi]$, $K(x,t) = e^{ixt}$ ve $t_n = n$ alındığında

$$S_n^*(t) = \frac{\sin \pi (t-n)}{\pi (t-n)}$$

olacaktır ve böylece

$$f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{ixt} dx, \qquad F(x) \in L^2(-\pi, \pi)$$

iken

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi (t-n)}{\pi (t-n)}$$

seri açılımı ortaya çıkacaktır. Bu bize Kramer teoreminin (WSK) sampling teoreminin bir genellemesi olduğunu söyler.

Bu teoremde şu ana kadar $K(x,t)$ fonksiyonları ve $E = \{t_k\}_{n=-\infty}^{\infty}$ dizisinin nasıl bulunacağı konusunda herhangi bir fikir sunulmamıştır. Ancak yine Kramer bu fonksiyonların ve dizinin belirli bir kendine-eş sınır-değer probleminden elde edilebileceğini söylemiştir.

4.2. Sampling Teoremi ve Sınır Değer Problemleri

Teorem 4.7: Aşağıdaki Sturm-Liouville problemini ele alalım.

$$y'' - q(x)y = -\lambda y = -t^2 y, \ -\infty < a \le x \le b < \infty \tag{4.12}$$

$$y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0, \tag{4.13}$$

$$y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0, \tag{4.14}$$

öyle ki $q(x)$, (a,b) aralığında sürekli ve $x \to a^+$, $x \to b^-$ iken sonlu limite sahip olsun. $\phi(x,\lambda)$ ve $\chi(x,\lambda)$, (4.12) problemininin aşağıdaki şartları sağlayan çözümleri olsun.

$$\phi(a,\lambda) = \sin\alpha, \quad \phi'(a,\lambda) = -\cos\alpha \tag{4.15}$$

$$\chi(b,\lambda) = \sin\beta, \quad \chi'(b,\lambda) = -\cos\beta. \tag{4.16}$$

$F(x) \in L^2(a,b)$ olmak üzere

$$f(\lambda) = \int_a^b F(x)\phi(x,\lambda)dx \tag{4.17}$$

ve

$$f^*(\lambda) = \int_a^b F(x)\chi(x,\lambda)dx \tag{4.18}$$

olur. O halde, $f(\lambda)$ ve $f^*(\lambda)$, $1/2$ dereceden η tipinde $(0 \le \eta \le b-a)$ tam fonksiyonlardır ve aşağıdaki sampling gösterimlerine sahiptir, [12].

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda_n)\frac{G(\lambda)}{(\lambda-\lambda_n)G'(\lambda_n)}, \tag{4.19}$$

$$f^*(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f^*(\lambda_n)\frac{G(\lambda)}{(\lambda-\lambda_n)G'(\lambda_n)}, \tag{4.20}$$

öyle ki $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, (4.12), (4.13) ve (4.14) problemlerinin özdeğerleridir ve $G(\lambda)$ da ϕ ve χ fonksiyonlarının Wronskianıdır. ($W(\phi,\chi) = \phi(x,\lambda)\chi'(x,\lambda) - \phi'(x,\lambda)\chi(x,\lambda)$). Genelliği kaybetmeden $G(\lambda)$ aşağıdaki formda yazılabilir.

$$G(\lambda) = \begin{cases} \prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\dfrac{\lambda}{\lambda_n}\right), \text{ özdeğerlerden hiçbiri sifir değil ise,} \\ \lambda\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\dfrac{\lambda}{\lambda_n}\right), \text{ özdeğerlerden biri sifir, yani } \lambda_0{=}0 \text{ ise} \end{cases} \tag{4.21}$$

(4.19) ve (4.20) serileri kompleks düzlemin herhangi bir kompakt alt kümesi üzerinde yakınsaktır ve bu sayede bu seriler arasında her n için $f^*(\lambda_n) = k_n f(\lambda_n)$ şeklinde ne sıfır nede sonsuz olan bir k_n vardır öyle ki $k_n = \phi(x,\lambda_n) / \chi(x,\lambda_n)$ şeklindedir.

İspat: Öncelikle [12, sayfa 7-11,19] dan $W(\phi,\chi)$ Wronskianı x den bağımsızdır. Gerçekten $W(\phi,\chi)$ tüm sıfırları reel, basit $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ biçimindeki özdeğerlerdir ve; $1/2$ dereceli bir tam fonksiyondur. $n \to \infty$ iken $\lambda_n = O(n^2)$ (Daha açık ifadeyle $n \to \infty\, iken \quad \lambda_n \sim n^2\pi^2 / (b-a)^2$ dir, [21] s.19) olduğundan (4.21) deki çarpım yakınsak ve $1/2$ dereceli bir tam fonksiyon tanımlar ve bu fonksiyon $\hat{G}(\lambda)$ şeklinde gösterilir. Tam fonksiyonlar için Hadamard faktörizasyon teoreminden

$$G(\lambda) = h(\lambda)\hat{G}(\lambda)$$

olur ve $h(\lambda)$ sıfır köküne sahip olmayan sıfırıncı dereceden bir tam fonksiyondur. O halde

$$\frac{G(\lambda)}{G'(\lambda_n)} = \frac{h(\lambda)\hat{G}(\lambda)}{h(\lambda_n)\hat{G}'(\lambda)}$$

olur ve (4.17), (4.19), ((4.18), (4.20)) istenen $(f(\lambda)/h(\lambda))(f^*(\lambda)/h(\lambda))$ fonksiyonu için geçerlidir. Buradan genelliği kaybetmeksizin, $G(\lambda) = \hat{G}(\lambda)$ olarak kabul edilebilir.

$\phi(x,\lambda_n)$, herbir λ_n özdeğerlerine karşılık gelen bir özfonksiyondur. Buradan

$$\psi_n(x) = \phi(x,\lambda_n)$$

gösterimini kullanalım. $F(x)$ ve $\phi(x,\lambda)$ her ikiside $L^2(a,b)$ uzayında olduğundan,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(n)\frac{\psi_n(x)}{\left\|\psi_n\right\|^2}, \tag{4.22}$$

$$\phi(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left\langle \phi, \psi_n \right\rangle}{\left\|\psi_n\right\|^2}\psi_n(x), \tag{4.23}$$

olur, öyle ki

$$\hat{F}(n) = \int_a^b F(x)\psi_n(x)dx, \tag{4.24}$$

ve

$$\left\langle \phi, \psi_n \right\rangle = \int_a^b \phi(x,\lambda)\psi_n(x)dx. \tag{4.25}$$

dır. (4.22) ve (4.23) serileri $L^2(a,b)$ uzayında yakınsaktır. (4.17), (4.22), (4.23) ve Parseval eşitliğinden

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda_n) \frac{\left\langle \phi, \psi_n \right\rangle}{\left\| \psi_n \right\|^2}, \tag{4.26}$$

bulunur. Çünkü

$$f(\lambda_n) = \int_a^b F(x)\phi(x,\lambda_n)\,dx = \int_a^b F(x)\psi_n(x)\,dx = \hat{F}(n). \tag{4.27}$$

dir. Şimdi

$$\int_a^b U(x)(LV(x))\,dx - \int_a^b V(x)(LU(x))\,dx = W_{x=b}(U,V) - W_{x=a}(U,V), \tag{4.28}$$

bağıntısını kullanırsak ki burada

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - q(x) \tag{4.29}$$

$U(x) = \phi(x,\lambda)$ ve $V(x) = \phi(x,\lambda')$ dür. O zaman

$$(\lambda - \lambda')\int_a^b \phi(x,\lambda)\,\phi(x,\lambda')\,dx = \phi(b,\lambda)\,\phi'(b,\lambda') - \phi'(b,\lambda)\,\phi(b,\lambda') \tag{4.30}$$

elde edilir.

$\phi(x,\lambda)$ ve $\phi(x,\lambda')$, $x = a$ noktasında (4.15) teki aynı sınır şartlarını sağladığı için $W_{x=a}(\phi(x,\lambda),\phi(x,\lambda')) = 0$ olur. ϕ ve χ nin Wronskianı olan $W(\phi,\chi)$, x den bağımsız olduğundan $x = b$ noktasında işlem yapılabilir ve

$$G(\lambda) = W_{x=b}(\phi, \chi) = \phi(b,\lambda)\,\chi'(b,\lambda) - \phi'(b,\lambda)\,\chi(b,\lambda) \\ = -\cos\beta\,\phi(b,\lambda) - \sin\beta\,\phi'(b,\lambda) \tag{4.31}$$

elde edilir. Eğer $\sin\beta \neq 0$ ise o zaman

$$G(\lambda)\,\phi(b,\lambda') - G(\lambda')\,\phi(b,\lambda) = \sin\beta\,[\phi'(b,\lambda')\,\phi(b,\lambda) - \phi'(b,\lambda)\,\phi(b,\lambda')]$$

olur ve (4.30) ile birleştirildiğinde

$$(\lambda - \lambda')\sin\beta \int_a^b \phi(x,\lambda)\,\phi(x,\lambda')\,dx = G(\lambda)\,\phi(b,\lambda') - G(\lambda')\,\phi(b,\lambda) \tag{4.32}$$

elde edilir. $\lambda' \to \lambda_n$ iken (4.32)'in limiti alındığında aşağıdaki

$$\left\langle \phi, \psi_n \right\rangle = \int_a^b \phi(x,\lambda)\,\psi_n(x)\,dx = \frac{G(\lambda)\,\psi_n(b)}{(\lambda - \lambda_n)\sin\beta} \tag{4.33}$$

elde edilir. Birkez daha $\lambda \to \lambda_n$ iken (4.33)'ün limiti alındığında

$$\left\| \psi_n \right\|^2 = \int_a^b |\,\psi_n\,|^2\;dx = \frac{G'(\lambda_n)\,\psi_n(b)}{\sin\beta} \tag{4.34}$$

olur. (4.33) ve (4.34), (4.26) da yerine konduğunda (4.19) elde edilir. Burada $\psi_n(b) \neq 0$ dır. Eğer $\psi_n(b) = 0$ olduğu varsayılırsa, o zaman $\psi_n(x)$ bir özfonksiyon olduğundan (4.14)'ü sağlar. Buda $\psi_n'(b)\sin\beta = 0$ olması demektir. Fakat $\sin\beta \neq 0$ olduğundan $\psi_n'(b) = 0$ olmak zorundadır. Buda $\psi_n(x) \equiv 0$ demektir ki bu $\psi_n(x)$ in özfonksiyon olmasıyla çelişir.

Benzer şekilde eğer $\sin\beta = 0$ ise

$$(\lambda - \lambda')\cos\beta \int_a^b \phi(x,\lambda)\,\phi(x,\lambda')\,dx = G(\lambda')\,\phi'(b,\lambda) - G(\lambda)\,\phi'(b,\lambda') \tag{4.35}$$

olur. $\lambda' \to \lambda_n$ iken limiti alındığında

$$\left\langle \phi, \psi_n \right\rangle = \int_a^b \phi(x,\lambda)\psi_n(x)\,dx = \frac{-G(\lambda)\,\psi_n'(b)}{(\lambda - \lambda_n)\cos\beta} \tag{4.36}$$

bulunur. Bu da (4.34) gibi yazıldığında

$$\left\|\psi_n\right\|^2 = \int_a^b |\psi_n|^2\, dx = \frac{-G'(\lambda_n)\psi_n'(b)}{\cos\beta} \tag{4.37}$$

bulunur. (4.36) ve (4.37), (4.26) da yerine yazıldığında (4.19) elde edilir.

O halde, $f(\lambda)$, aşağıdaki bağıntıdan $1/2$ dereceli η $(0 \le \eta \le b-a)$ tipinde tam fonksiyondur. Çünkü

$$|f(\lambda)| \le \left\|F\right\|_2 \max_{a\le x\le b} |\phi(x,\lambda)| \sqrt{b-a}$$

dır ve $\phi(x,\lambda)$ da bu özelliğe sahiptir, [21].

Benzer analizler $\chi(x,\lambda)$'ya uygulandığında $f^*(\lambda)$ içinde benzer sonuçlar bulunabilir. (4.19) ve (4.20) serileri arasındaki ilişki herhangibir λ_n özdeğeri için $0 \ne k_n \ne \infty$ olmak üzere $\chi(x,\lambda_n) = k_n \phi(x,\lambda_n)$ eşitliğinden kolayca görülür, [21].

Şimdi (4.19) serisinin düzgün yakınsak olduğunu gösterelim. (4.20) içinde benzer ispat yapılabilir.

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(n) \frac{\psi_n(x)}{\left\|\psi_n(x)\right\|^2}$$

olsun. O halde (4.26), (4.33), (4.34) ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden $\sin\beta \ne 0$ için

$$\left| f(\lambda) - \sum_{n=0}^{N} f(\lambda_n) \frac{G(\lambda)}{(\lambda-\lambda_n)G'(\lambda_n)} \right|^2 = \left| f(\lambda) - \sum_{n=0}^{N} \hat{F}(n) \frac{\left\langle \phi, \psi_n \right\rangle}{\left\|\psi_n\right\|^2} \right|^2$$

$$= \left| \int_a^b \phi(x,\lambda)\{F(x) - S_N(x)\}dx \right|^2 \le \left(\int_a^b |\phi(x,\lambda)|^2\, dx \right) \left\|F - S_N\right\|^2 \le C(K)\left\|F - S_N\right\|^2$$

elde edilir. Fakat $N \to \infty$ iken son terim sıfıra gider, öyle ki

$$C(K) = \max_{\lambda\in K} \left(\int_a^b |\phi(x,\lambda)|^2\, dx \right) < \infty$$

sabittir ve sadece K kompakt kümesine bağlıdır. $\sin\beta = 0$ olduğunda da ispat aynıdır. Sadece (4.33) ve (4.34) yerine (4.36) ve (4.37) kullanılır.

Yardımcı Teorem 4.1: $\tilde{G}(t) = G(\lambda)$, $\tilde{\phi}(x,t) = \phi(x,\lambda)$, $\tilde{\chi}(x,t) = \chi(x,\lambda)$ öyle ki $\lambda = t^2$, $\lambda_n = t_{\pm n}^2$, $t_{-n} = -t_n, n = 0,1,2,....$ $F(x) \in L^2(a,b)$ ve

$$\tilde{f}(t)=\int_a^b F(x)\tilde{\phi}(x,t)dx,$$
$$\tilde{f}^*(t)=\int_a^b F(x)\tilde{\chi}(x,t)dx.$$

olsun. O halde $\tilde{f}(t)$ ve $\tilde{f}*(t)$ birinci dereceden üstel tipte tam fonksiyonlardır ve η, $(0\leq\eta\leq b-a)$ tipindedir. Bu fonksiyonlar aşağıdaki sampling açılımlarını içerir:

i) Eğer hiçbir özdeğeri sıfır değilse;

$$\left.\begin{matrix}\tilde{f}(t)\\ \tilde{f}*(t)\end{matrix}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\begin{matrix}\tilde{f}(t_n)\\ \tilde{f}*(t_n)\end{matrix}\right\}\frac{\tilde{G}(t)(2t_n)}{(t^2-t_n^2)\tilde{G}'(t_n)}. \tag{4.38}$$

ii) Eğer özdeğerlerden bir tanesi $\lambda_0=0$ ise o halde

$$\left.\begin{matrix}\tilde{f}(t)\\ \tilde{f}*(t)\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\tilde{f}(0)\\ \tilde{f}^*(0)\end{matrix}\right\}\frac{\tilde{G}(t)}{t^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\begin{matrix}\tilde{f}(t_n)\\ \tilde{f}*(t_n)\end{matrix}\right\}\frac{\tilde{G}(t)(2t_n)}{(t^2-t_n^2)\tilde{G}'(t_n)} \tag{4.39}$$

olur.

İspat: Açıkça, $\tilde{f}(t)=f(\lambda)=f(t^2),\tilde{f}^*(t)=f^*(\lambda)=f^*(t^2)$ olduğu görülür. Burada sadece $\tilde{f}(t)$ için ispat yapacağız. Çünkü $\tilde{f}*(t)$'nin ispatıda aynıdır.

i) (4.19) da λ yerine t^2 alınırsa ve aşağıdaki eşitlik

$$\frac{d\tilde{G}(t)}{dt}=2tG'(\lambda)$$

dikkate alınırsa

$$\tilde{G}'(t_n)=2t_nG'(\lambda)$$

elde edilir. (4.20) denklemi $t_n\neq 0,\ n=0,1,2,\ldots$ için (4.38) denklemini sağlar.

ii) Eğer $\lambda_0=0$ ise (4.19) daki birinci terim

$$f(0)\frac{G(\lambda)}{\lambda G'(0)}=\tilde{f}(0)\frac{\tilde{G}(t)}{t^2}$$

olur. (4.21) den $G'(0) = 1$ olduğu kolayca görülür. (4.39) u bulmak içinde, (4.19) daki kalan terim birinci durumdaki gibi yapılır.

Yardımcı Teorem 4.2: Yardımcı teorem 4.1 deki aynı varsayımla

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t_n) \frac{G(t)}{G'(t_n)(t - t_n)}$$

elde edilir. Eğer hiçbir özdeğer sıfır değilse

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}(0) \frac{G(t)}{t^2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \tilde{f}(t_n) \frac{G(t)}{G'(t_n)(t - t_n)}.$$

Eğer özdeğerlerden bir tanesi $\lambda_0 = 0$ ise o halde

$$\tilde{f}^*(t) = \tilde{f}^*(0) \frac{G(t)}{t^2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \tilde{f}^*(t_n) \frac{G(t)}{G'(t_n)(t - t_n)}$$

olur.

İspat: Bu ispat hemen $f(t), G(t)$, t de çift fonksiyonlar ve $G'(t)$ de t de tek fonksiyon olmasından çıkar. Bu durumda $G'(t_{-n}) = G'(-t_n) = -G'(t_n)$ olur.

Yardımcı Teorem 4.3: $\psi(x,\lambda) = c_1 \phi(x,\lambda) + c_2 \chi(x,\lambda)$ ve $F(x) \in L^2(a,b)$ olsun. O halde, eğer

$$f(\lambda) = \int_a^b F(x)\psi(x,\lambda)dx,$$

ise

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda_n) \frac{G(\lambda)}{(\lambda - \lambda_n)G'(\lambda_n)}$$

dır.

BÖLÜM 5

SAMPLING TEOREMİ VE DIRAC OPERATÖRLER

5.1. Probleme Giriş

4. bölümde kurulan Sampling teorisi ve sınır-değer problemleri arasındaki ilişkiyi bu bölümde Dirac operatörlerine genişleteceğiz. Mühendislik ve fizik alanında önemli bir yere sahip olan Dirac operatörlerin spektral özellikleri bir çok matematikçi tarafından incelenmiş ve incelenmektedir. Bu operatörün Sampling teorisi ile ilk bağıntısını kuran A. Zayed'tir, [27]. 4. bölümde olduğu gibi bu bölümde bu ilişki Kramer teoremi (Teorem 4.6) ile kurulacaktır.

Kramer, $K(x,t)$ fonksiyonun ve $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sampling noktalarının belirli sınır değer problemleri yardımıyla bulunduğunu söylemiştir. Yani

$$L \equiv p_0(x)\frac{d^n}{dx^n} + ... + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x), \quad x \in I$$

kendine-eş bir diferansiyel operatör öyle ki $p_k(x)$, $n-k$ defa sürekli türevli $k = 0,1,2,...,n$, kompleks değerli bir fonksiyon ve her $x \in I$ için $p_0(x) \neq 0$ olsun. $U_j(y) = 0, j = 1,...,n$ lineer bağımsız homojen kendine-eş sınır koşulları olsun. Eğer sınır değer problemi

$$\begin{aligned} &Ly = ty, \quad x \in I \\ &U_j(y) = 0, \quad j = 1,...,n \end{aligned}$$

t parametresi yerine $\{t_n\}$ özdeğerleri alındığında, $\{\varphi_n(x)\}$ probleminin özfonksiyonlarını üreten bir $\varphi(x,t)$ fonksiyonu vardır, yani $\varphi(x,t_n) = \varphi_n(x)$ olur. O halde sampling noktaları $\{t_n\}$ ve $K(x,t)$ fonksiyonuda $\varphi(x,t)$ olur.

Son yıllarda sampling teoremi ile sınır değer problemleri arasındaki bağıntı bir çok çalışmaya konu olmuştur. [13]'de sampling teoremi ile regüler Sturm-Liouville sınır değer problemleri arasında ilişki kurulmuştur. Bu araştırmada Kramer'in sampling serileri (4.10) ve (4.11) ile Lagrange-tipi interpolasyon formülü arasında bir fark olmadığı gösterilmiştir. Daha sonra bu sonuçlar [14] de tekil sınır değer problemlerine genişletilmiştir. Sampling teoremleri, diferansiyel denklemlerle [15-16] da ilişkilendirilmiş ve [17,18,19]'da daha genel tipte sınır değer problemleri incelenmiştir. [20] de interpolasyon fonksiyonunu oluşturmak için Green fonksiyonu kullanılmıştır. İntegral denklemiyle ilgili sampling teoremide [21] de verilmiştir.

Bu bölümde bir boyutlu Dirac operatörü kullanarak sampling teoremini inşa edeceğiz. Ayrıca burada elde edilen sonuçların Sturm-Liouville kullanılarak elde edilen sonuçlardan farklı olmadığını göstereceğiz. Ancak buradaki farklılık bu çalışmanın özel bir durumunun Hartley dönüşümü için sampling serisini meydana getirmesidir. Hartley dönüşümü

$$F(x) = \int_0^\infty [\cos xt + \sin xt] f(t)dt.$$

biçiminde bir dönüşümdür ve bir elektrik mühendisi tarafından bulunmuştur, [22]. Hartley dönüşümü, Fourier dönüşümünün dezavantajları dikkate alınarak ortaya konmuştur ki bu dezavantaj reel değerli bir $f(t)$ fonksiyonunu

$$F(x) = \int_{-\infty}^\infty [\cos xt + i\sin xt] f(t)dt,$$

formülüyle kompleks değerli bir $F(x)$ fonksiyonuna dönüştürmesidir, [23].

İkinci bölümde detaylıca incelediğimiz aşağıdaki bir boyutlu Dirac diferansiyel denklem sistemlerini ele alalım,

$$\begin{aligned} y_2' + p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 &= \lambda y_1 \\ -y_1' + p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 &= \lambda y_2 \end{aligned}$$

öyleki $p_{ij}(x), i, j = 1,2$, $[0,\pi]$ aralığında reel değerli fonksiyonlar ve λ bir parametredir. Bu denklem sistemi matris formu kullanılarak aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$B\frac{dy}{dx} + P(x)y = \lambda y,$$

öyle ki

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Bu denkleme aşağıda verilen dönüşüm uygulanarak

$$H(x) = \begin{pmatrix} \cos\phi(x) & -\sin\phi(x) \\ \sin\phi(x) & \cos\phi(x) \end{pmatrix},$$

$\phi(x) = (1/2)\tan^{-1}[2p_{12}(x)/(p_{11}(x) - p_{22}(x))]$ ve $y = H(x)z$ olmak üzere yukarıdaki denklem sistemi aşağıdaki kanonik forma dönüşür.(Bkz. Bölüm 3)

$$B\frac{dz}{dx} + Q(x)z = \lambda z, \tag{5.1}$$

burada bazı uygun $p(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonları için

$$Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix},$$

dir. O halde şimdi sadece Dirac sistemlerinin bir kanonik formu olan (5.1) i kullanabiliriz. (5.1) denklemi için aşağıdaki Dirac operatörü ele alalım.

$$y_2' - p(x)y_1 = \lambda y_1, \quad y_1' + r(x)y_2 = -\lambda y_2, \tag{5.2}$$

$$y_1(0)\sin\alpha + y_2(0)\cos\alpha = 0 \tag{5.3}$$

$$y_1(\pi)\sin\beta + y_2(\pi)\cos\beta = 0, \tag{5.4}$$

burada $p(x)$ ve $r(x)$, $[0,\pi]$ aralığında süreklidir.

(5.2)-(5.4) probleminin, reel ve tek katlı olan sayılabilir sayıda $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ özdeğerleri ve bu özdeğerlere karşılık gelen vektör değerli $y_n^T(x,\lambda_n) = (y_{n,1}(x,\lambda_n), y_{n,2}(x,\lambda_n))$ (Bkz. Bölüm 3) özfonksiyonları vardır. Burada T ile transpozu gösterdik. Üstelik farklı özdeğerlere ait olan vectör değerli özfonksiyonlar diktir.(Bkz. yard. teorem 3.1) Yani;

$$\int_0^{\pi} y_n^T(x,\lambda_n) y_m(x,\lambda_m) dx$$
$$= \int_0^{\pi} [y_{n,1}(x,\lambda_n) y_{m,1}(x,\lambda_m) + y_{n,2}(x,\lambda_n) y_{m,2}(x,\lambda_m)] dx = 0$$

dır. Şimdi $y(x,\lambda)$ ve $z(x,\lambda')$, (5.2) denkleminin çözümleri olsun; o halde

$$y_2' - p(x) y_1 = \lambda y_1, \quad y_1' + r(x) y_2 = -\lambda y_2 \tag{5.5}$$

$$z_2' - p(x) z_1 = \lambda' z_1, \quad z_1' + r(x) z_2 = -\lambda' z_2. \tag{5.6}$$

olur. (5.5) denklemlerini, z_1 ve $-z_2$ ile (5.6) denklemlerinide, $-y_1$ ve y_2 ile sırasıyla çarpılıp daha sonra birlikte toplanırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\{z_1(x,\lambda') y_2(x,\lambda) - z_2(x,\lambda') y_1(x,\lambda)\} \\ &\qquad = (\lambda - \lambda')\{y_1(x,\lambda) z_1(x,\lambda') + y_2(x,\lambda) z_2(x,\lambda')\}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Eğer $f^T(x) = (f_1(x), f_2(x))$ sürekli türevli ve (5.3), (5.4) sınır şartlarını sağlayan vektör değerli bir fonksiyon ise o zaman bu $f(x)$ fonksiyonu (5.2)-(5.4) probleminin vektör değerli özfonksiyonları cinsinden mutlak yakınsak bir seriye açılabilir.

Yani

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n \frac{\phi_n(x)}{\|\phi_n\|^2} \tag{5.8}$$

olur. Burada

$$\hat{f}_n = \int_0^{\pi} f^T(x) \phi_n(x) dx = \int_0^{\pi} [f_1(x) \phi_{n,1}(x) + f_2(x) \phi_{n,2}(x)] dx$$

dir. $\phi_n^T(x) = (\phi_{n,1}(x), \phi_{n,2}(x))$ de λ_n özdeğerlerine karşılık gelen vektör değerli özfonksiyonlardır ve

$$\left\|\phi_n\right\|^2 = \int_0^\pi \phi_n^T(x)\phi_n(x)dx = \int_0^\pi [\phi_{n,1}^2(x) + \phi_{n,2}^2(x)]dx$$

olur. Eğer f sadece karesi integrallenebilen bir fonksiyon ise o zaman (5.8) serisi f ye yakınsar.

5.2 Sampling Teoremi ve Dirac Operatörler

Şimdi (5.2)-(5.4) sınır değer problemiyle ilgili sampling teoremini ana teorem olarak verebiliriz.

Teorem 5.1. $f(x)$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında karesi integrallenebilen vektör değerli bir fonksiyon olsun.

$$F(\lambda) = \int_0^\pi f^T(x)\phi(x,\lambda)dx \tag{5.9}$$

öyleki $\phi(x,\lambda)$, (5.2) denkleminin bir çözümü ve $\phi_1(0,\lambda) = \cos\alpha$ ve $\phi_2(0,\lambda) = -\sin\alpha$ olsun. O halde, $F(\lambda)$ derecesi en fazla π olan üstel bir tam fonksiyondur ve $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ noktalarındaki değerleri kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$F(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\lambda_n)\frac{G(\lambda)}{(\lambda-\lambda_n)G'(\lambda_n)} \tag{5.10}$$

Bu seri $\mathbb{C}$ nin kompakt bir alt kümesinde düzgün yakınsaktır ve $G(\lambda)$, sıfırları tam olarak (5.2)-(5.4) probleminin özdeğerleri olan bir tam fonksiyondur ve bu fonksiyon aşağıdaki formda yazılabilir, [27].

$$G(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-n}}\right). \tag{5.11}$$

İspat: Öncelikle (5.11) de verilen sonsuz çarpım bir tam fonksiyon tanımlar. Çünkü $|n| \to \infty$ iken (5.2)-(5.4) probleminin özdeğerleri $\lambda_n = a_0 + n + a_1/n + O(1/n^2)$ asimtotik formülünü sağlar. Bu da aşağıdaki bağıntıdan $F(\lambda)$ fonksiyonunun en fazla π tipinde üstel bir tam fonksiyon olduğunu gösterir.

$$|F(\lambda)| \le \int_0^\pi |f_1(x)||\phi_1(x,\lambda)|dx + \int_0^\pi |f_2(x)||\phi_2(x,\lambda)|dx$$

Ayrıca $\phi_1(x,\lambda)$ ve $\phi_2(x,\lambda)$, en fazla π tipinde üstel bir tam fonksiyon olmasından ki bu Bölüm. 3 yrd. teorem 3.3 den görülebilir, her λ için $\phi(x,\lambda)$, $L^2(0,\pi)$ uzayında olduğundan,

$$\phi(x,\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_n \frac{\phi_n(x)}{\left\|\phi_n\right\|^2}, \tag{5.12}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_n &= \int_0^{\pi} \phi^T(x,\lambda)\phi_n(x)dx \\ &= \int_0^{\pi} \left[\phi_1(x,\lambda)\phi_{n,1}(x) + \phi_2(x,\lambda)\phi_{n,2}(x)\right]dx, \end{aligned} \tag{5.13}$$

ve

$$\phi^T(x,\lambda) = (\phi_1(x,\lambda), \phi_2(x,\lambda)), \quad \phi_n^T(x) = (\phi_{n,1}(x), \phi_{n,2}(x))$$

dir. f, $L^2(0,\pi)$ uzayında olduğundan (5.8) formunda açılıma sahiptir. Parseval bağıntısından ve (5.9) dan

$$F(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n \frac{\hat{\phi}_n}{\left\|\phi_n\right\|^2}$$

bulunur. Ayrıca

$$F(\lambda_n) = \int_0^{\pi} f^T(x)\phi(x,\lambda_n)dx = \int_0^{\pi} f^T(x)\phi_n(x)dx = \hat{f}_n$$

dır. Böylece

$$F(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\lambda_n)\frac{\hat{\phi}_n}{\left\|\phi_n\right\|^2} \tag{5.14}$$

elde edilir. (5.7) deki bağıntıdan

$$(\lambda - \lambda')\int_0^{\pi} y^T(x,\lambda)z(x,\lambda')dx = W(z,y)\mid_{x=\pi} - W(z,y)\mid_{x=0} \tag{5.15}$$

bulunur. Burada

$$W(y,z) = \begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) \\ z_1(x,\lambda') & z_2(x,\lambda') \end{vmatrix}$$

dır. $\psi(x,\lambda)$; $\psi_1(\pi,\lambda) = \cos\beta$ ve $\psi_2(\pi,\lambda) = -\sin\beta$ olmak üzere, (5.2) diferansiyel denkleminin çözümü olsun. O halde $G(\lambda)$ yı aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= W(\phi(\pi,\lambda),\psi(\pi,\lambda)) \\ &= \phi_1(\pi,\lambda)\psi_2(\pi,\lambda) - \phi_2(\pi,\lambda)\psi_1(\pi,\lambda) \\ &= -\sin\beta\,\phi_1(\pi,\lambda) - \cos\beta\,\phi_2(\pi,\lambda) \end{aligned} \tag{5.16}$$

Benzer şekilde

$$G(\lambda') = -\sin\beta\,\phi_1(\pi,\lambda') - \cos\beta\,\phi_2(\pi,\lambda') \tag{5.17}$$

bulunur. (5.16)'yı $\phi_1(\pi,\lambda')$ ile ve (5.17)'yi $\phi_1(\pi,\lambda)$ ile çarpıp, çıkan sonuçlar birbirinden çıkarılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned} &G(\lambda)\phi_1(\pi,\lambda') - G(\lambda')\phi_1(\pi,\lambda) \\ &\quad = \cos\beta[\phi_2(\pi,\lambda')\phi_1(\pi,\lambda) - \phi_1(\pi,\lambda')\phi_2(\pi,\lambda)] \end{aligned} \tag{5.18}$$

Eğer $y(x,\lambda) = \phi(x,\lambda)$ ve $z(x,\lambda') = \phi(x,\lambda')$, (5.15)'de yerine konur ve $W(\phi(0,\lambda),\phi(0,\lambda')) = 0$ olduğu gözönüne alınırsa (çünkü $\phi(0,\lambda)$ ve $\phi(0,\lambda')$ nün her ikiside 0 da (5.3) ün sınır şartlarını sağlar) aşağıdaki denklem elde edilir.

$$(\lambda-\lambda')\int_0^\pi \phi^T(x,\lambda)\phi(x,\lambda')dx = \phi_1(\pi,\lambda')\phi_2(\pi,\lambda) - \phi_2(\pi,\lambda')\phi_1(\pi,\lambda) \tag{5.19}$$

$\cos\beta \neq 0$ olması koşuluyla, (5.18) eşitliği kullanılarak (5.19) eşitliği aşağıdaki forma dönüştürülür.

$$(\lambda-\lambda')\int_0^\pi \phi^T(x,\lambda)\phi(x,\lambda')dx = \frac{G(\lambda')\phi_1(\pi,\lambda) - G(\lambda)\phi_1(\pi,\lambda')}{\cos\beta}$$

Yukarıdaki ifadenin $\lambda' \to \lambda_n$ iken limiti alınırsa

$$(\lambda-\lambda_n)\int_0^\pi \phi^T(x,\lambda)\phi_n(x)dx = \frac{-G(\lambda)\phi_{n,1}(\pi)}{\cos\beta} \tag{5.20}$$

elde edilir. Çünkü (5.16) ve (5.4) den $G(\lambda_n) = 0$ dır. Benzer şekilde

$$(\lambda-\lambda_n)\int_0^\pi \phi^T(x,\lambda)\phi_n(x)dx=\frac{-G(\lambda)\phi_{n,2}(\pi)}{sin\beta} \tag{5.21}$$

$\sin\beta\neq 0$ olmak koşuluyla bulunur. λ'ya göre türevi alınıp ve $\lambda\to\lambda_n$ iken limit alınırsa

$$\left\|\phi_n\right\|^2=\int_0^\pi \phi_n^T(x)\phi_n(x)dx=\frac{-G'(\lambda_n)\phi_{n,1}(\pi)}{\cos\beta}=\frac{-G'(\lambda_n)\phi_{n,2}(\pi)}{\sin\beta} \tag{5.22}$$

elde edilir. (5.13), (5.20), (5.22) den $\beta\neq\pi/2$ olmak üzere

$$\frac{\hat{\phi}_n}{\left\|\phi_n\right\|^2}=\frac{G(\lambda)}{(\lambda-\lambda_n)G'(\lambda_n)} \tag{5.23}$$

bulunur. Eğer $\beta=\pi/2$ ise aynı sonucu bulmak için (5.13), (5.21) ve (5.22) kullanılır. Şimdi (5.23) denklemi (5.14) de yerleştirildiğinde (5.10) elde edilir.

(5.10) serisinin kompleks düzlemdeki bir K kompakt kümesinde düzgün yakınsak olduğunu göstermek için

$$S_N(x)=\sum_{n=-N}^{N}F(\lambda_n)\frac{\phi_n(x)}{\left\|\phi_n\right\|^2}$$

olsun. $\beta\neq\pi/2$ için Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve (5.14), (5.20), (yada $\beta=\pi/2$ için (5.21)) ve (5.22) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|F(\lambda)-\sum_{n=-N}^{N}F(\lambda_n)\frac{G(\lambda)}{(\lambda-\lambda_n)G'(\lambda_n)}\right|^2\\
&=\left|F(\lambda)-\sum_{n=-N}^{N}F(\lambda_n)\frac{\hat{\phi}_n}{\left\|\phi_n\right\|^2}\right|^2\\
&=\left|\int_0^\pi [f(x)-S_N(x)]^T\phi(x,\lambda)dx\right|^2\\
&\leq\left(\int_0^\pi \phi^T(x,\lambda)\phi(x,\lambda)dx\right)\left\|f-S_N\right\|^2\\
&\leq C(K)\left\|f-S_N\right\|^2
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $N \to \infty$ iken son terim sıfıra gider ki burada $C(K)$ için

$$C(K) = \max_{\lambda \in K} \left(\int_0^{\pi} \phi^T(x,\lambda)\phi(x,\lambda)dx \right) < \infty$$

yazılabilir. İspatı tamamlamak için (5.16) daki $G(\lambda)$ fonksiyonunun aslında (5.11) deki sonsuz çarpım olduğunu göstermeliyiz. Elbette (5.16) da tanımlanan fonksiyon sadece sıfırları Dirac probleminin özdeğerleri olan bir tam fonksiyondur. Eğer (5.11) deki sonsuz çarpım geçici olarak $\hat{G}(\lambda)$ şeklinde gösterilirse o halde $G(\lambda) = g(\lambda)\hat{G}(\lambda)$ olur. Burada $g(\lambda)$ sıfıra sahip olmayan bir tam fonksiyondur. Böylelikle

$$\frac{G(\lambda)}{G'(\lambda_n)} = \frac{g(\lambda)\hat{G}(\lambda)}{g(\lambda_n)\hat{G}'(\lambda_n)}$$

bulunur ve $F(\lambda) / g(\lambda)$ fonksiyonu için teoremin sonucu geçerli olur.

5.3 Uygulama

$p(x) = 0 = r(x)$ için (5.2)-(5.4) sınır değer problemini ele alırsak:

$$y_2' = \lambda y_1, \quad y_1' = -\lambda y_2, \tag{5.24}$$

$$y_1(0)\sin\alpha + y_2(0)\cos\alpha = 0 \tag{5.25}$$

$$y_1(\pi)\sin\beta + y_2(\pi)\cos\beta = 0 \tag{5.26}$$

(5.24) ve (5.25) probleminin bir çözümünün $\phi^T(x,\lambda) = (\cos(\lambda x - \alpha), \sin(\lambda x - \alpha))$ olduğu kolayca görülür. Bu çözümü (5.26) da yerine koyarak $\cos(\lambda\pi - \alpha)\sin\beta + \sin(\lambda\pi - \alpha)\cos\beta = \sin(\lambda\pi + \beta - \alpha) = 0$ bulunur. Bu nedenle $\lambda_n = n - \gamma / \pi$ özdeğerlerdir öyleki $\gamma = \beta - \alpha$ dır. O halde (5.11) denkleminde tanımlanan $G(\lambda)$, $\delta = \gamma / \pi$ ve $\gamma \neq 0$ olmak üzere aşağıdaki şekilde verilir.

$$G(\lambda) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n-\delta}\right) = \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right) \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{n^2 - \delta^2}\right) = \frac{\sin\pi(\lambda+\delta)}{\sin\pi\delta}$$

Eğer $\gamma = 0$ ise o halde $G(\lambda) = \lambda \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda^2 / n^2) = \sin\pi\lambda / \pi$ olur.

Buradan Teorem 5.1 aşağıdaki forma dönüşür. Eğer bazı $f_1, f_2 \in L^2[0,\pi]$ için

$$F(\lambda) = \int_0^\pi \{f_1(x)\cos(\lambda x - \alpha) + f_2(x)\sin(\lambda x - \alpha)\}dx$$

ise o halde tüm δ lar için

$$F(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n-\delta)\frac{\sin\pi(\lambda - n + \delta)}{\pi(\lambda - n + \delta)}$$

olur.

Özel olarak eğer $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ alınırsa o zaman $f(x)$ bandlimit fonksiyonunun $F(\lambda)$ Hartley dönüşümünün aşağıdaki genellemesi elde edilir.

$$F(\lambda) = \int_0^\pi \{\cos(\lambda x - \alpha) + \sin(\lambda x - \alpha)\}f(x)dx$$

Bu da bazı keyfi c sabitleri için ve $\delta = c - \alpha / \pi$ olmak üzere aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$F(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n-\delta)\frac{\sin\pi(\lambda - n + \delta)}{\pi(\lambda - n + \delta)}$$

$\alpha = 0$ olduğu zaman aşağıdaki Hartley dönüşümü bulunur.

$$F(\lambda) = \int_0^\pi \{\cos\lambda x + \sin\lambda x\}f(x)dx,$$

ve

$$F(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n-c)\frac{\sin\pi(\lambda - n + c)}{\pi(\lambda - n + c)}$$

şeklinde elde edilir.

BÖLÜM 6

SONUÇ

Bu çalışmada sampling teoreminin Dirac operatörlerle bağlantısı kurulmuştur. Sampling serisinin oluşturulmasında ihtiyaç duyulan sampling noktaları ve sampling fonksiyonları düzenli Dirac operatörlerin özdeğerlerinden ve özfonksiyonlarından elde edilmiştir.

WSK metodu, belirli şartlar altında verilmiş bir integral fonksiyonu ile birlikte sampling değerlerinin verilmesi durumunda sampling serisinin nasıl olacağı ile ilgili bize bilgi vermektedir. Bizde düzenli bir Dirac operatörün ayrık bir spektruma sahip olmasından ve özdeğer ve özfonksiyonlarının asimtotik davranışlarından yararlanarak WSK metodu ile verilen bir Dirac operatör arasında bir köprü kurduk. Bunuda verilen bir Dirac operatörün özdeğerlerini sampling değerleri ve özfonksiyonlarınıda sampling fonksiyonları seçerek yaptık. Böylece WSK metodunda ki çekirdek fonksiyonlarını alışılmış üstel fonksiyonlar almak yerine farklı bir yaklaşımda bulunduk.

KAYNAKLAR

[1] Shannon, C. E. (1949). Communications in the presence of noise. *Proceeding of the Institute of Radio Engineers.*, **37**, 10-21.

[2] Nyquist, H. (1928). Certain topics in telegraph transmission theory. *AIEE Trans*, **47**, 617-644.

[3] Whittaker, E. T. (1915). On the functions which are represented by the expansion of interpolating theory. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **35**, 181-194.

[4] Whittaker, J. M. (1929). The Fourier Theory of cardinal functions. *Proc. Math. Soc. Edinburgh*, **1**, 169-176.

[5] Whittaker JM., 1935. Interpolutory Function Theory. England: Cambrige University Press.

[6] Ferrar, W. L. (1927). On the consistency of cardinal function interpolation. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **47**, 230-242.

[7] Kotel'nikov VA, 1933. On the transmission capacity of 'ether' and wire in electrocommunications. Moscow: Izd. Red. Upr. Svyazi RKKA.

[8] Weiss, P. (1957). Sampling theorems associated with Strum-Liouville system. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **63**, 242.

[9] Whittaker JM., 1935. Interpolatory Function Theory. England:Cambridge University Press.

[10] Levitan BM, Sargjan IS. 1991. Sturm-Liouville and Dirac Operators. Boston: Kluwer Academic Publishers.

[11] Zayed AI. 1993. Advances in Shannon's Sampling Theory. Boca Raton Florida. CRC Press.

[12] Titchmarsh EC. 1962. Eigenfunction expansions Associated with Second-Order Differential Equations. 2nd edition . Oxford: Clarendon Press.

[13] Zayed, A. I., Butzer, P., Hinsen, G. (1990). On Lagrange interpolation and Kramer-type sampling theorems associated with Sturm-Liouville problems. *SIAM Journal of Mathematical Anal. and Appl.*, **50**, 893-909.

[14] Zayed, A. I. (1991). On Kramer's sampling theorem associated with general Sturm-Liouville problems and Lagrange interpolation, *SIAM Journal of Mathematical Anal. and Appl.*, **51,** 575-604.

[15] Kishi, G., Maeda, N. (1970). Samplings theorems for signals given by linear differential equations with constant coefficients, *Electron. Comm.* **53**, No. 4, 29-36.

[16] Maeda, N. (1970). Some relations between band-limited signals and signals satisfied by linear differential equations with constant coefficients, *Trans. Inst. Comm. Engrg.* **53-A**, No. 10, 568-569.

[17] Everitt, W., Butzer, P., Sch¨ottler, G. (1994). Sturm-Liouville boundary-value problems and Lagrange interpolation series, *J. Red. Mat. Appl.* **14** , 87-126.

[18] Zayed, A. I., El-Sayed, M. A., Annaby, M. N. (1991). On Lagrange interpolations and Kramer's sampling theorem associated with self-adjoint boundary-value problems, *Journal of Mathematical Anal. and Appl.* **150**, 269-284.

[19] Zayed, A. I. (1992). Kramer's sampling theorem for multidimensional signals and its relationship with Lagrange-type interpolation, *J. Multidimensional Systems Signal Processing* **3 ,** 323-340.

[20] Zayed, A. I. (1993). A new role of Green's functions in interpolation and sampling theory, *Journal of Mathematical Anal. and Appl.* **175,** 222-238.

[21] Annaby, M. N., El-Sayed, M. A. (1995). Kramer-type sampling theorems associated with Fredholm integral operators, *Methods Appl. Anal.* **2,** No.1,76-91.

[22] Hartley, R. V. (1942). A more symmetrical Fourier analysis applied to transmission problems, *Proc. Inst. Radio Engrg.* **30 ,** 144-150.

[23] Zayed, AI. 1996. Handbook of Function and Generalized Function Transformations. Boca Raton: CRC Press.

[24] Royden HL. 1960. Real Analysis. London: The Macmillan Company.

[25] Levin B. 1964. Distribution of Zeros of Entire Func. Island: Translations of Mathematical Monographs. Amer. Math Soc.

[26] Kramer, H. P. (1957). A generalized sampling theorem, *J. Math. Phys*. **63,** 68-72.

[27] Zayed, A. I., Garcia, A. G. (1997). Sampling theorem associated with Dirac operator and the Hartley transform, *Journal of Mathematical Anal. and Appl.* **214**, 587-598.