GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LATİS DEĞERLİ EGOROFF TEOREMİ VE LATİS DEĞERLİ LUSİN TEOREMİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ALİ KARAKUŞ
ARALIK 2012

Latis Değerli Egoroff Teoremi ve Latis Değerli Lusin Teoremi

Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN
Aralık 2012

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Latis Değerli Egoroff Teoremi ve Latis Değerli Lusin Teoremi

Öğrencinin, Adı Soyadı: Ali KARAKUŞ

Tez Savunma Tarihi: 28.12.2012

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Doç. Dr. Metin BEDİR
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Fahir Talay Akyıldız
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyeleri</u>	<u>İmzası</u>
Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN	....
Yrd. Doç. Dr. Ali BOZKURT	....
Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN	....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Ali KARAKUŞ

ÖZ

LATİS DEĞERLİ EGOROFF TEOREMİ VE LATİS DEĞERLİ LUSİN TEOREMİ

KARAKUŞ, Ali
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN
Aralık 2012
79 sayfa

Bu tezde, klasik analizde fonksiyonların yakınsaklıklarını belirlemede çok önemli bir yere sahip olan Egoroff ve Lusin teoremlerinin, latis değerli bulanık ölçüm uzayı üzerinde, latis değerli bulanık ölçüm fonksiyonları kullanılarak, latis aileleri ve latis işlemleri olan supremum ve infimum $(\wedge, \vee)$ yardımıyla ifadeleri ve ispatları verilerek, bulanık ölçüm uzayı üzerindeki Egoroff ve Lusin teoremleri latis değerli bulanık ölçüm uzayı üzerine genelleştirilmeye çalışılmıştır. Ayrıca, latis değerli bulanık ölçüm uzayı üzerinde, latis değerli zayıf sıfır toplamsal bulanık ölçüm tanımı yapılarak, latis değerli Egoroff ve latis değerli Lusin teoremleri için örneklere yer verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Latis değerli Egoroff teoremi, Latis değerli Lusin teoremi, latis değerli bulanık ölçüm, latis değerli zayıf sıfır toplamsal bulanık ölçüm.

ABSTRACT

LATTİCE VALUED EGOROFF THEOREM AND LATTİCE VALUED LUSİN THEOREM

KARAKUŞ, Ali
M. Sc. in Depertmant of Mathematics
Supervisor: Asst Prof. Dr. Mehmet ŞAHIN
December 2012
79 pages

In this thesis, we examined, in classical analysis, which has an important role in determining convergence of functions Egoroff and Lusin Theorems, on lattice valued fuzzy measure space, using the lattice valued fuzzy measure functions, with the help of lattice families and lattice operations supremum and infimum $(\wedge, \vee)$ giving statements and proofs, Egoroff and Lusin theorems on fuzzy measure space generalized to lattice valued fuzzy measure space. In addition, giving the definition of lattice valued weakly null additive fuzzy measure on lattice valued fuzzy measure space and the examples of Lattice valued Egoroff and lattice valued Lusin theorems are presented.

Keyword: Lattice valued Egoroff theorem, Lattice valued Lusin theorem, lattice valued fuzzy measure, lattice valued weakly null additive fuzzy measure.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince gösterdiği yol ve yöntemlerle desteklerini benden esirgemeyen değerli hocalarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN'e, Sayın Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN'a ve benden maddi manevi hiçbir desteğini esirgemeyen çok değerli aileme teşekkürü bir borç bilirim…

İÇİNDEKİLER

SAYFA

SEMBOLLER LİSTESİ

X	Evrensel küme
R	Reel sayılar kümesi
$\varnothing$	Boş küme
2^{A}	A kümesinin kuvvet kümesi
$\mathcal{L}$	Latisler kümesi
$\mathfrak{I}$	Küme sınıfı
$A \times B$	A ile B nin kartezyen çarpımı
f	Klasik küme fonksiyonu
f^{-1}	f fonksiyonunun tersi
D_f	f fonksiyonunun tanım kümesi
$\Re_f$	f fonksiyonunun değer kümesi
$1_A(x)$	İşaret fonksiyonu
μ	Klasik ölçüm fonksiyonu (veya bulanık ölçüm fonksiyonu)
X_E	Karakteristik fonksiyon
$\overline{E}$ (E^C)	E kümesinin tümleyeni
$\{E_n\}$	Kümeler dizisi
$\Re$	Halka (ya da cebir)
φ	Yarı halka

F	σ-halka
M	Monoton sınıf
β	Bağıntı
$\vee$	En küçük üst sınır

$\wedge$	En büyük alt sınır
$\vee$A	A kümesinin en küçük üst sınırı
$\wedge$A	A kümesinin en büyük alt sınırı
G	Bulanık küme
G_α	α seviyeli elemanlarının kümesi
U	Bulanık evrensel küme
μ^*	Dış ölçüm
$\mathcal{F}$	Ölçülebilir kümelerin sınıfı
g_λ	λ-bulanık ölçümü
Bel	Güvenirlik (Belief) ölçümü
PI	Makul (Plausibilitiy) ölçüm
m	Latis değerli bulanık ölçüm
l_n	Latis değerli fonksiyon dizisi
h.h.h	Hemen hemen her yerde
p.h.h.h	Pseudo hemen hemen her yerde
h.h.d	Hemen hemen düzgün
p.h.h.d	Pseudo hemen hemen düzgün

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Ölçüm, temel olarak bir ipin uzunluğu, bir tarlanın alanı ve bir evin hacminin hesaplanması ihtiyacından doğmuştur ve insan yaşamına kolaylıklar getirmiştir. Bu yüzden ölçüm kavramının hayatımıza girişi çok eskilere dayanmaktadır. Ölçüm ilk olarak, insanlar tarafından kendi sayılarını veya hayvanlarının sayılarını belirlemek için, ardından bir çubuğun veya bir ipin reel düzlemdeki uzunluğunun ölçümünün belirlenmesi için, daha sonraları tarımın gelişmesi ve yerleşik hayata geçiş ile birlikte bir tarlanın alanını hesaplamak için kullanılmıştır. Ancak bu ölçüm daha karmaşık ölçümler için yetersiz kalmıştır. Örneğin bir yaprağın yüzey alanının hesaplanmasında birçok problemle karşılaşılmıştır. İşte bu noktada basit anlamda ölçümün yetersizliği ortaya çıkmıştır. Ölçüm, R de uzunluk kavramının, R^2 de alan kavramının ve R^3 de hacim kavramının genelleştirilmesidir. Bu bağlamda daha kompleks şekil, cisim veya kümelerin ölçümü için bilimin ve özellikle de matematiğin gelişmesiyle bir çok çalışma yapılmıştır. Örneğin; A.L. Cauchy (1789-1857), integrali bir toplamın limiti olarak tanımlayan ilk matematikçi oldu. Bu aynı zamanda ölçümün R^2 ye uyarlanması anlamına geliyordu. Daha sonra Riemann (1826-1865), Cauchy'nin çalışmalarını sürdürmüştür. Ayrıca Riemann, genel olarak aralıklar üzerindeki ölçüm hakkında çalışmalar yapmıştır. Bu çalışmalar büyük aralıkları, daha küçük parçalara ayırarak, hesaplama esasına dayanıyordu. Ayrıca G. Cantor (1845-1918) integral ile ölçüm arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Yapılan çalışmalar arasında özellikle de Fransız matematikçiler Emile Borel (1871-1956) ve Henri Lebesque (1875-1941) in yapmış olduğu çalışmalar bugünkü klasik ölçüm teorisinin temelini oluşturmaktadır. Klasik ölçüm teorisindeki toplamsallık özelliğinden dolayı bu ölçüme toplamsal ölçüm de denilmektedir. [49]

Bilimin hızlı ilerleyişine bağlı olarak toplamsallık şartının çoğu zaman kısıtlayıcı olduğu görülmüştür. Buna bağlı olarak toplamsallık yerine monotonluk, süreklilik gibi şartlar kullanılarak ölçüm kuralları oluşturulmuştur. Bu konuda özellikle Shafer$\left[31,32\right]$, Sugeno$\left[33,34\right]$ ve Zadeh$\left[54,55\right]$ tarafından önemli çalışmalar yapılmıştır. Bu ölçümler genel olarak bulanık ölçüm olarak adlandırılır.

Bulanık ölçümler, klasik ölçümlerin daha derinlemesine analiz edilmiş, ayrıntılı olarak incelenmiş halidir. Bu ölçümün temelinde 1930'ların sonlarında, meşhur kuantum fizikçisi olan Max Blanck' in "çok değerli mantığı" kümelere uygulaması vardır. Bu, bilimin bulanık kümeler ve üyelik fonksiyonları ile tanışması demekti. Yaklaşık otuz sene sonra Zadeh $\left[54\right]$ tarafından

$$\mu : X \rightarrow \left[0,1\right]$$

tanımlı bir dönüşüm olmak üzere;

$$\mu = \left\{(x, \mu(x)) : \mu(x) \in \left[0,1\right]\right\}$$

bulanık kümesinin tanımının verilmesiyle matematikte yeni bir çığır açılmış oldu. Bilinen olgularla ifade edilen klasik kümeler yerine, dereceli üyelik fonksiyonuyla ifade edilen bulanık kümeler tanımlanmış oldu. Bu bulanık küme teorisiyle birlikte klasik kümelerin gerçek olaylarla daha çok örtüşen, bulanık kümelere genelleştirilmesine bağlı olarak, klasik ölçümlerin de bulanık ölçümlere genelleştirilmesi önemli bir çalışma alanı olmuştur. $\left[1,2,3,4,14,17,18\right]$

Klasik ölçümlerin bulanık ölçümlere genelleştirilmesinin yanı sıra son yıllarda klasik ölçümlerin ve bulanık ölçümlerin latis değerli ölçümlere genelleştirilmesi ile ilgili çalışmalar da yapılmaktadır. $\left[20,21,22,37,38,39,40\right]$ Yapılan bu çalışmalara paralel olarak bu tezde klasik ölçüm, bulanık ölçüm ve latis değerli ölçüm arasındaki ilişkilerden de bahsedilmiştir.

Bu tez 8 bölümden oluşmaktadır. Giriş kısmında ölçümün hayatımıza girişinden, ölçüm, bulanık ölçüm üzerine yapılmış çalışmalardan bahsedilmiştir. Tezin ikinci bölümünde klasik kümeler, bulanık kümeler, küme sınıfları ve kısmi sıralı kümeler hakkında genel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde klasik ölçümle alakalı temel tanım, teoremler ve örneklere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde bulanık ölçümle ilgili temel tanım ve teoremler verilerek örnekler çözülmüştür.

Beşinci bölümde latislerle ilgili temel tanım ve teoremler verilerek örnekler çözülmüştür. Altıncı bölümde latis değerli bulanık ölçüm fonksiyonlarından, sıfır toplamsallıktan, oto-süreklilikten, düzgün oto-süreklilikten ve monoton küme fonksiyonlarının yapısal karakteristiklerinden bahsedilmiştir. Yedinci bölümde bulanık ölçüm uzaylarında ölçülebilir fonksiyonlardan, hemen hemen her yerde düzgün süreklilikten, Pseudo hemen hemen her yerde düzgün süreklilikten bahsedilmiştir. Sekizinci bölümde ise Egoroff ve Lusin teoremlerinin bulanık ölçüm uzayları üzerinde, latis aileleri yardımıyla, latis işlemleri kullanılarak ifadeleri ve ispatları verilmeye çalışılmıştır. Burada kullanılan latis ifadesi, herhangi bir kümenin veya aralığın karşılaştırılabilir herhangi iki elemanının, infimumlarının ve supremumlarının yine aynı kümeye veya aralığa düştükleri anlamına gelmektedir. Elemanları bu şartları sağlayan kümeler latis kümesi olarak adlandırılmaktadır.

2. BÖLÜM

KÜMELER İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

Klasik ölçüm, bulanık ölçüm ve latis değerli ölçüm kavramlarını incelerken kullanılan temel tanım, teorem ve örneklerin yer aldığı bu bölümde, klasik ölçüm kuramının tanımlandığı küme sınıflarının ürettiği halkalar ve cebirler $[25,49]$ ile bulanık kümeler ve bulanık kümeler üzerindeki cebirsel yapılar yer almaktadır $[9,10,11,12,13,48,49,54,55]$. Ayrıca bu bölümde, latisleri incelerken kullanılan kısmi sıralı küme ile ilgili temel tanım ve teoremlere de yer verilmiştir $[5,15,45]$. Bu bölüm $[15,45,49,54]$ numaralı kaynaklardan derlenmiştir.

2.1. Kümeler ve Fonksiyonlar

Belirli bir alandaki tüm elemanları içeren kümeye evrensel küme denir. Bu çalışmada evrensel küme X ile gösterilmiştir. Hiçbir elemanı olmayan kümeye boş küme denir ve $\varnothing$ ile gösterilir. X e ait herhangi bir A alt kümesinin tüm alt kümelerinin ailesine A nın kuvvet kümesi denir ve $P(\mathrm{A})$ veya 2^{A} ile gösterilir.
$\mathrm{A}, B \in X$ olsun.

i) A ile B nin arakesiti: $\mathrm{A} \cap B = \{x : x \in \mathrm{A} \ \ ve \ \ x \in B\}$

ii) A ile B nin birleşimi: $\mathrm{A} \cup B = \{x : x \in \mathrm{A} \ veya \ x \in B\}$

iii) A ile B nin farkı: $\mathrm{A} - B = \{x : x \in \mathrm{A} \ ve \ x \notin B\}$

- $\mathrm{A} \supset B$ ise $\mathrm{A} - B$ kümesine öz küme denir.

iv) A nın tümleyeni: $\mathrm{A}^C = X - \mathrm{A}$ ya da $\overline{\mathrm{A}} = X - \mathrm{A}$

v) A ile B nin simetrik farkı : $\mathrm{A} \Delta B = (\mathrm{A} - B) \cup (B - \mathrm{A}) = (A \cup B) - (A \cap B)$

- $A \Delta B = \varnothing$ dir $\Leftrightarrow A = B$ dir.

vi) Λ herhangi bir indeks kümesi olsun.

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha, \forall \alpha \in \Lambda\} \quad , \qquad \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha, \exists \alpha \in \Lambda\}$$

olmak üzere aşağıdaki özellik De Morgan Kuralı olarak bilinir.

$$\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)^C = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^C \quad , \quad \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)^C = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^C$$

ya da

$$\overline{\bigcup_{t \in T} A_t} = \bigcap_{t \in T} \overline{A_t} \quad , \qquad \overline{\bigcap_{t \in t} A_t} = \bigcup_{t \in T} \overline{A_t}$$

vii) $A \cap B = \varnothing$ ise A ile B kümelerine ayrık kümeler denir. Eğer $\alpha, \beta \in \Lambda$ olmak üzere, $\alpha \neq \beta$ iken $A_\alpha \cap B_\beta = \varnothing$ ise $\left(A_\alpha\right)_{\alpha \in \Lambda}$ küme ailesine ikişer ikişer ayrıktır denir.

viii) A ile B nin kartezyen çarpımı : $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ şeklindedir.

ix) $A \times B$ nin herhangi bir $f : A \to B$ alt kümesi, $\forall (a,b),(a,c) \in f$ iken $b = c$ koşulunu sağlarsa, f ye fonksiyon denir. f nin tanım kümesi $D_f = \{a \in A : (a,b) \in f, b \in B\}$ ve değer kümesi $\Re_f = \{b \in B : (a,b) \in f, \exists a \in A\}$ şeklinde tanımlanır. Herhangi bir $M \subset A$ alt kümesinin görüntüsü $f(M) = \{b \in B : b = f(a), \exists a \in M\}$ ve herhangi bir $N \subset B$ alt kümesinin görüntüsü $f^{-1}(N) = \{a \in A : f(a) \in N\}$ şeklindedir.

x) Bir A kümesinin işaret fonksiyonu

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyona ait bazı özellikler aşağıdaki gibidir.

$1_{A\cap B} = 1_A \cdot 1_B$

$1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_A \cdot 1_B$

$1_{A^C} = 1 - 1_A$

xi) E bir küme olmak üzere $\forall x \in X$ için X_E karakteristik fonksiyonu

$$X_E = \begin{cases} 1 & , \quad x \in E \quad ise \\ 0 & , \quad x \notin E \quad ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki durumları sağlar.

- $\forall x \in X$ için $E = F \Leftrightarrow X_E(x) = X_F(x)$
- $\forall x \in X$ için $E \subset F \Leftrightarrow X_E(x) \leq X_F(x)$
- $X_x \equiv 1$ ve $X_\varnothing \equiv 0$.[49]

2.2. Kümelerde Temel İşlemler

Kümelerin kümesine sınıf adı verilir. $\Im$, X in alt kümelerinin bir sınıfı ve T bir indeks kümesi olsun. Buradan $\{E_t : t \in T\}$, X in alt kümelerinin ailesi ise $\{E_t : t \in T\} \in \Im$ olur. $\Im$ sınıfındaki en az bir kümeye ait olan X deki tüm noktaların kümesi, $\Im$ nin tüm kümelerinin birleşimi olarak adlandırılır

ve $$\bigcup \Im$$

ile gösterilir. T indeks kümesindeki her t ye karşılık bir E_t kümesi bulunur öyleki

bu kümelerin birleşiminin sınıfı, $\{E_t : t \in T\}$ şeklindedir ve

$$\bigcup_{t\in T} E_t \quad \text{veya} \quad \bigcup_t E_t$$

ile gösterilir. Özel olarak $\Im = \{E_1, E_2\}$ alınır ise

$$\bigcup \Im = E_1 \cup E_2$$

ile gösterilir. Eğer $\Im=\{E_1,E_2,...,E_n\}$ $(\Im=\{E_1,E_2,...\})$ alınırsa

$$\bigcup\Im=E_1\cup E_2\cup...\cup E_n$$

veya
$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)$$

şeklinde ifade edilir. $\Im$ nin her bir kümesine ait olan X in tüm noktalarının kümesine $\Im$ nin kesişim kümesi denir. Ve $\bigcap\Im$ ile gösterilir. [49]

Örnek 2.2.1. $X=\{a,b,c,d\}$ ve $\Im=\{\{a\},\{b\},\{b,d\},\{c,d\}\}$, $F=\{a,c\}$ alırsak

$$\Im\cap F=\{\{a\},\{c\},\varnothing\}.$$

Örnek.2.2.2. $X=(-\infty,\infty)$ ve $\Im=\{[a,b]:-\infty<a\le b<\infty\}$, $F=[0,2]$ olsun.

$$\Im\cap F=\{[a,b]:0\le a\le b\le 2\}$$

kümesi, tüm kapalı aralıkların bir alt sınıfıdır.

Önerme 2.2.1. $E,F\subset X$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) $E\subset F$

ii) $E\cup F=F$

iii) $E\cap F=E$. [49]

Önerme 2.2.2. X evrensel küme ve $E,F\subset X$ olmak üzere kümelerde birleşim, kesişim ve tümleyen işlemleri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) Tümleme özelliği: Bir kümenin tümleyeninin tümleyeni kendisidir. Yani $\overline{\overline{E}}=E$ dir.

ii) Değişme özelliği: $E\cup F=F\cup E$ veya $E\cap F=F\cap E$

iii) Birleşim özelliği: $$\bigcup_{t\in T}\left(\bigcup_{s\in S_t}E_s\right)=\bigcup_{s\in U_{t\in T}S_t}E_s$$

veya $$\bigcap_{t\in E}\left(\bigcap_{s\in S_t} E_s\right)=\bigcap_{s\in U_{t\in T}S_t} E_s$$

iv) Dağılma özelliği: $$F\cap\left(\bigcup_{t\in T}E_t\right)=\bigcup_{t\in T}\left(F\cap E_t\right)$$

veya $$F\cup\left(\bigcap_{t\in T}E_t\right)=\bigcap_{t\in T}\left(F\cup E_t\right)$$

v) İdempotentlik: $E\cup E=E$ ve $E\cap E=E$

vi) $E\cap\bar{E}=\varnothing$ ve $E\cup\bar{E}=X$

vii) $\{E_1,E_2,...\}$ (ya da $\{E_n\}$) kümelerin bir dizisi olsun. n nin sonsuz çoklukta değeri için E_n ye ait olan X in tüm noktalarının kümesine $\{E_n\}$ nin üst limiti denir ve $\lim_n Sup E_n$ veya $\overline{\lim_n} E_n$ şeklinde gösterilir. n nin sonlu değeri için E_n ye ait olan X in tüm noktalarının kümesine $\{E_n\}$ nin alt limiti denir ve $\lim_n \inf E_n$ veya $\overline{\lim_n E_n}$ şeklinde gösterilir. [49]

Önerme 2.2.3. $\lim_n \sup E_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i$ ve $\lim_n \inf E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty}E_i$ dir. [49]

Önerme 2.2.4. Her $\{E_n\}$ monoton dizisi için $\lim_n E_n$ mevcuttur ve

$$\bigcup_n E_n \quad \text{ya da} \quad \bigcap_n E_n$$

dir. Bu eşitlik $\{E_n\}$ nin sırasıyla artan ya da azalan olmasına bağlıdır. Genellikle $\{E_n\}$ artan ve $\lim_n E_n=E$ ise E_n artarak E ye yaklaşır, eğer $\{E_n\}$ azalan ve $\lim_n E_n=E$ ise E_n azalarak E ye yaklaşır. Ayrıca her $n=1,2...$ için $E_n\subset E_{n+1}$ ise $\{E_n\}$ artan, $E_n\supset E_{n+1}$ ise $\{E_n\}$ ye azalan denir. Azalan ve artan dizilere monoton dizi denir. [49]

Önerme 2.2.5 ise kümelerdeki işlemler ile karakteristik fonksiyonlardaki işlemler arasındaki ilişkiyi gösterir.

Önerme 2.2.5.

(1) $$X_{\bigcup_{t\in T} E_t} = \sup_{t\in T} X_{E_t}$$

özel olarak $$X_{E\cup F} = \max(X_E, X_F)$$

(2) $$X_{\bigcap_{t\in T} E_t} = \inf_{t\in T} X_{E_t}$$

ve özel olarak $$X_{E\cap F} = \min(X_E, X_F)$$

(3) $$X_{\bar{E}} = 1 - X_E$$

(4) $$X_{E-F} = X_E - \min(X_E, X_F) = \min(X_E, 1 - X_F) = \max(0, X_E - X_F)$$

(5) $$X_{E\Delta F} = \left| X_E - X_F \right|$$

(6) $$X_{\lim Sup_n E_n} = \lim_n Sup X_{E_n}$$

(7) $$X_{\liminf_n E_n} = \liminf_n X_{E_n}$$

ve $\lim_n E_n$ mevcut ise $X_{\lim_n E_n} = \lim_n X_{E_n}$ dir. [49]

Önerme 2.2.6 $\overline{\limsup_n E_n} = \liminf_n \overline{E_n}$ dir. [49]

Önerme 2.2.7 $\overline{\lim_n}(E \cup F_n) = E \bigcup \overline{\lim_n} F_n$ dir. [49]

2.3. Küme Sınıfları

Tanım 2.3.1. X in tüm alt kümelerinin sınıfına X in kuvvet kümesi denir ve $P(X)$ gösterilir. [49]

Tanım 2.3.2. Boş olmayan bir $\Re$ sınıfında her $E, F \in \Re$ için

i) $E \cup F \in \Re$

ii) $E - F \in \Re$ ise $\Re$ ye bir halka denir. Başka bir deyişle bir halka, birleşme ve fark işlemlerine göre kapalı olan boş kümeden farklı bir sınıftır. Kümedeki birleşme işleminin tekliğinden dolayı aynı zamanda sonlu birleşimler altında kapalıdır. $[49]$

Önerme 2.3.1. $\varnothing$, her halkanın alt kümesidir. $[49]$

Teorem 2.3.1. Her halka, simetrik fark ve arakesit işlemleri altında kapalıdır ve tersine simetrik fark ve arakesit işlemleri altında kapalı olan boş kümeden farklı her sınıf bir halkadır. $[49]$

Teorem 2.3.2. Arakesit, fark, birleşim işlemleri altında kapalı olan boş kümeden farklı bir sınıf, bir halkadır. $[49]$

İspat: $E \Delta F = \big(E - (E \cap F)\big) \cup \big(F - (E \cap F)\big)$ olduğu göz önünde bulundurulur ve Teorem 2.3.1 uygulanırsa istenilen elde edilir. $[49]$

Örnek 2.3.1. X in tüm sonlu alt kümelerinin sınıfı bir halkadır. $[49]$

Örnek 2.3.2. X reel doğru, yani $X = (-\infty, +\infty) = \{x : -\infty < x < +\infty\}$ olsun. Sınırlı, soldan kapalı, sağdan açık aralıkların tüm sonlu birleşimlerinin sınıfı, yani

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{x : -\infty < a_i \leq x < b_i < +\infty\}$$

formundaki tüm alt kümelerin sınıfı bir halkadır. $[49]$

Tanım 2.3.3. Boş olmayan bir $\Re$ sınıfı için

i) $\forall E, F \in \Re$ için $E \cup F \in \Re$

ii) $\forall E \in \Re$ için $\bar{E} \in \Re$

sağlanıyorsa, $\Re$ ye cebir denir. Başka bir deyişle bir cebir, birleşim ve tümleyen işlemleri altında kapalı, boş olmayan bir sınıftır. Açıkça bu tanımda "$\cup$" yerine "$\cap$" de yazılabiliriz. $[49]$

Teorem 2.3.3. Bir cebir X i içeren bir halkadır ve tersine X i içeren bir halka bir cebirdir. [49]

Örnek 2.3.3. Tüm sonlu kümeler ve onların tümleyenlerinden oluşan sınıf bir cebirdir. Bu örnekte bahsi geçen özellik, Önerme 2.3.2 ile genelleştirilebilir. [49]

Önerme 2.3.2. $\Re$ bir halka ise $\Re \cup \{E : \bar{E} \in \Re\}$ bir cebirdir. [49]

Tanım 2.3.4. Boş olmayan bir φ sınıfı aşağıdaki koşulları sağlıyorsa φ ye bir yarı halka denir.

i) $\forall E, F \in \varphi$ için $E \cap F \in \varphi$

ii) $E \subset F$ yi sağlayan $\forall E, F \in \varphi$ için sonlu $\{C_0, C_1, ..., C_n\}; C_i \in \varphi$ sınıfı mevcut olsun öyleki

$$E = C_0 \subset C_1 \subset ... \subset C_n = F$$

ve $$D_i = C_i - C_{i-1} \in \varphi; \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Her halka bir yarı halkadır ve boş küme her yarı halkaya aittir. [49]

Örnek 2.3.4. X in tüm tek elemanlı kümelerini ve boş kümeyi içeren sınıf bir yarı halkadır. [49]

Örnek 2.3.5. X reel doğru olsun. Tüm sınırlı, soldan kapalı, sağdan açık aralıkların sınıfı bir yarı halkadır. [49]

Tanım 2.3.5. Boş olmayan F sınıfı için

i) E,F$\in F$ için E$-$F$\in F$

ii) $E_i \in F$ $, i = 1, 2, ...,$ $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in F$

sağlanıyorsa F ye bir σ-halka denir.

Bir σ-halka, sayılabilir birleşimler altında kapalı bir halkadır. [49]

Önerme 2.3.3. Bir σ-halka, sayılabilir kesişimler altında kapalıdır ve dolayısıyla F bir σ-halka ve $\{E_n\} \in F$ bir küme dizisi ise

$$\lim_n \sup E_n \in F \quad \text{ve} \quad \lim_n \inf E_n \in F \text{ dir. } [49]$$

Örnek 2.3.6. Tüm sayılabilir kümelerin sınıfı bir halkadır. [49]

Tanım 2.3.6. X ' i içeren σ- halkaya bir σ-cebir (ya da σ-cisim) denir. [49]

Örnek 2.3.7. Tüm sayılabilir kümeleri ve onların tümleyenlerini içeren sınıf bir σ-cebirdir. [49]

Önerme 2.3.4. F bir σ-halka ise $F \cup \{E : \bar{E} \in F\}$ bir σ-cebirdir. [49]

Tanım 2.3.7. Boş olmayan bir M sınıfında, her monoton dizi $\{E_n\} \subset M$ için $\lim_n E_n \in M$ ise M ye bir monoton sınıf denir. [49]

Önerme 2.3.5. Bir σ-halka, bir monoton sınıftır. [49]

Önerme 2.3.6. Bir halka aynı zamanda bir monoton sınıf ise bir σ- halkadır. [49]

Örnek 2.3.8. X reel doğru olsun. Tüm aralıkların sınıfı (boş küme ve tek elemanlı kümeler aralıklar olarak ifade edilebilir) bir monoton sınıftır. [49]

2.4 Bağıntı, Sıralı Kümeler ve Sayılabilir Kümeler

Tanım 2.4.1. A ve B boş olmayan kümeler olsunlar. $A \times B$ kartezyen çarpımının bir β alt kümesine A kümesinden B kümesine bir bağıntı denir. Eğer $(a,b) \in \beta$ ise; "*a ve b, β ile bağlıdır*" denir ve $a\beta b$ ile gösterilir. [45]

Örnek 2.4.1. X boş olmayan bir küme olsun. Bir küme işlemi olan '$\subset$' işlemi $P(X)$ de bir bağıntıdır. [45]

Tanım 2.4.2. β, A kümesinden B kümesine bir bağıntı olsun. B kümesinden A kümesine $\beta^{-1} = \{(b,a) : \ (a,b) \in \beta\}$ bağıntısına ters bağıntı (β nin tersi) denir ve

$$a\beta b \Leftrightarrow b\beta^{-1}a$$

şeklinde gösterilir. Ayrıca $b\beta^{-1}a \Leftrightarrow a\left(\beta^{-1}\right)^{-1}b$ olduğundan $\left(\beta^{-1}\right)^{-1}=\beta$ dir. [45]

Tanım 2.4.3. β, A kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. β bağıntısına $\forall a,b,c\in\beta$ için

i) $a\beta a$ ise yansıyan

ii) $a\beta b$ iken $b\beta a$ ise simetrik

iii) $a\beta b$ ve $b\beta c$ iken $a\beta c$ ise geçişken

şartlarını sağlıyorsa denklik bağıntısı denir. [45]

Tanım 2.4.4. A kümesinin ikişer ikişer ayrık olan alt kümelerinin $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ küme sınıfı için $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ ise o zaman $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ küme sınıfına, A nın bir parçalanışı denir. [45]

Tanım 2.4.5. β, A kümesinde bir denklik bağıntısı olmak üzere $\forall x\in A$ için $\hat{x}=[x]=\{y : x\beta y\}$ sınıfına A daki bir denklik sınıfı denir. Öyleki, β tarafından oluşturulan A daki bütün denklik sınıfları A/β ile gösterilir ve A nın β tarafından bölümü denir. [45]

Önerme 2.4.1. β, A kümesinde bir denklik bağıntısı olsun. $\forall x,y\in A$ için

$$[x]=[y]\Leftrightarrow x\beta y$$

dir ve A/β, A nın bir parçalanışıdır. [45]

Tanım 2.4.6. A kümesindeki bir β bağıntısı $\forall a,b\in A$ için $a\beta b$ ve $b\beta a$ iken $a=b$ oluyor ise β bağıntısına ters simetriktir denir. [45]

Tanım 2.4.7. β, A kümesinde bir bağıntı olsun. Eğer β bağıntısı yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa β bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı denir. A kümesi üzerinde bir β kısmi sıralama bağıntısı varsa, bu β bağıntısıyla beraber A kümesine ya da (A, β) ikilisine kısmi sıralı küme denir. [45]

Örnek 2.4.2. $\left(P(X),\subset\right)$ bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Çünkü $\forall A,B\in P(X)$ için

i) $\forall \mathrm{A} \in P(X)$ için $\mathrm{A} \subset \mathrm{A}$

ii) $\mathrm{A} \subset B$ ve $B \subset \mathrm{A}$ iken $\mathrm{A} = B$

iii) $\mathrm{A} \subset B$ ve $B \subset C$ iken $\mathrm{A} \subset C$. [45]

Tanım 2.4.8. $(P, \leq)$ bir kısmi sıralama bağıntısı ve $\mathrm{A} \subset P$ olsun. Eğer $\forall x \in \mathrm{A}$ için $a \in P$ ve $x \leq a$ ise a ya A kümesinin üst sınırı denir. Eğer A kümesinin her b üst sınırı için $a \leq b$ ise a ya en küçük üst sınır veya A kümesinin supremumu denir. A kümesinin en küçük üst sınırı $\sup \mathrm{A}$ veya $\vee \mathrm{A}$ ile gösterilir.

Benzer şekilde $\forall x \in \mathrm{A}$ için $a \in P$ ve $a \leq x$ ise a ya A kümesinin alt sınırı denir. Eğer A kümesinin her b alt sınırı için $b \leq a$ ise a ya en büyük alt sınır veya infumum denir. A kümesinin en büyük alt sınırı, $\inf \mathrm{A}$ veya $\wedge \mathrm{A}$ ile gösterilir. Eğer A sadece x ve y gibi iki elemandan oluşuyorsa $\vee\{x, y\}$ yerine $x \vee y$ ve $\wedge\{x, y\}$ yerine $x \wedge y$ kullanılır. [15]

Önerme 2.4.2. Eğer $\mathrm{A} \subset P$ kümesinin bir supremumu ve infimumu varsa tektir. [2]

Tanım 2.4.9. $(P, \leq)$ bağıntısı kısmi sıralı olsun. $\forall x, y \in P$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ var ise $(P, \leq)$ ye tam sıralama bağıntısı denir. [15]

Örnek 2.4.3. Reel sayılar kümesinde '$\leq$' işlemi tam sıralama bağıntısıdır. [15]

Tanım 2.4.10. Herhangi bir A kümesi ile $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi arasında birebir bir ilişki kurulabiliyor ise A ya sayılabilirdir denir. Böyle bir ilişki kurulamıyor ise kümeye sayılamaz denir. Sayılabilir kümelerin sayılabilir birleşimleri de sayılabilirdir. Dahası, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi sayılabilirdir. Fakat $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sayılamazdır. Bundan dolayı $\mathbb{R}$ (reel sayılar kümesi) de sayılamazdır. [25]

2.5. Bulanık Kümeler

2.5.1. Bulanık Kümeler ve Özellikleri

Önermelerin ikiden fazla değere sahip olabileceklerini kabul eden mantık sistemine çok değerli mantık denir. 1930' ların sonlarında, meşhur kuantum fizikçisi olan Max Blanck "çok değerli mantığı" kümelere uyguladı. Bu, bilimin bulanık kümeler ve üyelik fonksiyonları ile tanışması demekti. Yaklaşık otuz sene sonra Zadeh $[54]$ tarafından

$$\mu : X \to [0,1]$$

tanımlı bir dönüşüm olmak üzere;

$$\mu = \{(x, \mu(x)) : \mu(x) \in [0,1]\}$$

bulanık kümesinin tanımının verilmesiyle matematikte yeni bir çığır açılmış oldu. Bilinen olgularla ifade edilen klasik kümeler yerine, dereceli üyelik fonksiyonuyla ifade edilen bulanık kümelerin tanımlanması işlemleri klasik küme kavramından oldukça farklıdır. Çünkü bulanık bir küme, değişik üyelik yani dâhil olma derecelerine sahip bir küme türüdür. Böyle bir küme, elemanlarının her birine 0 ile 1 arasında üyelik değeri atayabilen bir üyelik fonksiyonu ile karakterize edilebilir. Kümeye dâhil olmayan elemanların üyelik değeri 0, kümeye tam dâhil olanların üyelik değerleri ise 1 olarak atanır. Kümeye dâhil olup olmadığı belli olmayan elemanlara ise belirsizlik durumlarına göre 0 ile 1 arasında değerler atanır. Oysa kesin küme teorisinde belirsiz eleman diye bir şey söz konusu değildir. Bir eleman kümeye ya dâhildir ya da tamamı ile kümenin dışındadır. Dolayısıyla kesin kümelerde bir elemanın alabileceği üyelik değeri ya 0 dır yada 1 dir. Bu bilgileri verdikten sonra bulanık kümenin tanımı ve bulanık kümeler üzerinde tanımlanan temel işlemlere değinebiliriz.

Tanım 2.5.1. X , klasik anlamda evrensel küme ve A, X in bir alt kümesi olsun. $\mu_{\mathrm{A}} : X \to \{0,1\}$ tanımlı olan μ_{A} karakteristik fonksiyonu

$$\mu_{\mathrm{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathrm{A} \\ 0 & x \notin \mathrm{A} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Görüldüğü üzere $\mu_{\mathrm{A}}(x); x \in \mathrm{A}$ iken $\mu_{\mathrm{A}}(x) = 1, x \notin \mathrm{A}$ iken $\mu_{\mathrm{A}}(x) = 0$ üyelik değerlerine sahiptir.

Eğer bu tanımda değer kümesi $[0,1]$ kapalı aralığı olarak alınırsa, A bir bulanık küme olarak adlandırılır. Burada $\mu_{\mathrm{A}}(x)$, x in A da üyelik derecesidir. $\mu_{\mathrm{A}}(x)$, 1'e ne kadar çok yakın ise x de A'ya o kadar çok aittir. Görüldüğü gibi X 'in A alt kümesinin kesin sınırı yoktur. Bu nedenle A kümesi

$$\mathrm{A} = \{(x, \mu_{\mathrm{A}}(x)) : x \in X\}$$

şeklinde karakterize edilebilir. [54]

Örnek 2.5.1. $\mathrm{A} = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.4), (x_3, 0.6), (x_4, 0.8), (x_5, 1)\}$ sıralı çiftlerinden oluşan bir bulanık kümedir. A nın üyelik fonksiyonu $\mu_{\mathrm{A}}(x)$, $[0,1]$ aralığında değerler alır. Burada

$\mu_{\mathrm{A}}(x_1) = 0.2$, $\mu_{\mathrm{A}}(x_2) = 0.4$, $\mu_{\mathrm{A}}(x_3) = 0.6$, $\mu_{\mathrm{A}}(x_4) = 0.8$ $\mu_{\mathrm{A}}(x_5) = 1$ dir.

Burada x_5 elemanı A bulanık kümesinin üyelik derecesi tam olan bir elemanı olurken, x_4 elemanı A bulanık kümesinin üyelik derecesi en fazla olan elemanı, x_1 elemanı ise A bulanık kümesinin üyelik derecesi en az olan elemanıdır. Eğer $(x_6, 0)$ şeklinde bir ikili verilseydi $\mu_{\mathrm{A}}(x_6) = 0$ olacaktı ve bu durumda ise, x_6 kümeye kesin olarak dâhil olmayan eleman olarak dikkate alınacaktı. [54]

Tanım 2.5.2. Her x elemanı $x \in X$ olmak üzere $\mu_{\mathrm{A}}(x) = 0$ ise A ya boş bulanık küme denir. $\mathrm{A} = \varnothing$ şeklinde gösterilir. [54]

Tanım 2.5.3. A, bir bulanık küme olsun. Eğer $\exists x \in X$ için $\mu_{\mathrm{A}}(x) = 1$ oluyorsa A kümesine normal bulanık küme denir. Eğer A bulanık kümesi normal bulanık küme değilse normalleştirmek için $\dfrac{\mu_{\mathrm{A}}(x)}{\max \mu_{\mathrm{A}}(x)}$ işlemi uygulanır. Öyleki burada $\max\{\mu_{\mathrm{A}}(x)\} < 1$ dir. [55]

Örnek 2.5.2. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ olmak üzere

$$\mathrm{A}=\{(x_1,0.1),(x_2,0.4),(x_3,0.9)\}$$

bulanık kümesini normalleştirelim:

$$\mathrm{A}_N=\left\{(x_1,\frac{0.1}{0.9}),(x_2,\frac{0.4}{0.9}),(x_3,\frac{0.9}{0.9})\right\}$$

$$\mathrm{A}_N=\{(x_1,0.11),(x_2,0.44),(x_3,1)\}$$

şeklinde olup $i=1,2,3$ için $\exists x_i \in X$, $\mu_{\mathrm{A}_N}(x_i)=1$ olur. [54]

Tanım 2.5.4. G , bir bulanık küme olsun. $\alpha \in [0,1]$ için

$$G_\alpha=\{x\in X:\mu_G(x)\geq\alpha\}$$

kümesine G nin güçlü α seviyeli elemanlarının kümesi denir. G nin güçlü α seviyeli elemanlarının kümesi ise $G_\alpha=\{x\in X:\mu_G(x)>\alpha\}$ şeklinde tanımlanır. [54]

2.6. Bulanık Kümelerde Temel İşlemler

A ve B bulanık kümeler μ_{A} ve μ_B sırasıyla A ve B bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları olmak üzere

$$\mathrm{A}=\{(x,\mu_{\mathrm{A}}(x)):\mu_{\mathrm{A}}(x)\in[0,1]\}$$

$$B=\{(x,\mu_B(x)):\mu_B(x)\in[0,1]\}$$

şeklinde tanımlanır. [54]

Tanım 2.6.1. Eğer $\forall x\in X$ için $\mu_{\mathrm{A}}(x)=\mu_B(x)$ ise A ve B ye eşit bulanık küme denir. $\mathrm{A}=B$ şeklinde gösterilir. [54]

Örnek 2.6.1. $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ olmak üzere

$$\mathrm{A} = \{(x_1, 0.3), (x_2, 0.4), (x_3, 0.6)\}$$

$$B = \left\{(x_1, \frac{3}{10}), (x_2, \frac{2}{5}), (x_3, \frac{3}{5})\right\}$$

şeklindeki bulanık kümeleri için

$\mu_{\mathrm{A}}(x_1) = 0.3$, $\mu_B(x_1) = \frac{3}{10}$

$\mu_{\mathrm{A}}(x_2) = 0.4$, $\mu_B(x_2) = \frac{2}{5}$

$\mu_{\mathrm{A}}(x_3) = 0.6$, $\mu_B(x_3) = \frac{3}{5}$

olup $\forall x \in X$ için $\mu_{\mathrm{A}}(x) = \mu_B(x)$ olduğundan A ve B eşit bulanık kümelerdir ve bu durum $\mathrm{A} = B$ biçiminde gösterilir. [54]

Tanım 2.6.2. A ve B, X de iki bulanık küme olsun. Eğer $\forall x \in X$ için

$$\mu_{\mathrm{A}}(x) \leq \mu_B(x)$$

oluyorsa B, A yi kapsar denir ve $\mathrm{A} \subseteq B$ şeklinde gösterilir. [54]

Tanım 2.6.3. A, B'nin alt kümesi ve $\mathrm{A} \neq B$ olduğu zaman A bulanık kümesi B bulanık kümesinin öz altkümesi olarak adlandırılır. $\forall x \in X$, $\mu_{\mathrm{A}}(x) < \mu_B(x)$ ise A, B nin öz alt kümesidir ve $\mathrm{A} \subset B$ şeklinde gösterilir. [54]

Tanım 2.6.4. A bulanık kümesinin $\overline{\mathrm{A}}$ tümleyeni $\mu_{\overline{\mathrm{A}}}(x) = 1 - \mu_{\mathrm{A}}(x)$ ile tanımlanır. Ayrıca

$$\mu_{\mathrm{A}}(x) + \mu_{\overline{\mathrm{A}}}(x) = 1$$

dir. Buna göre

$$\overline{\mathrm{A}} = \left\{ (x, \mu_{\overline{\mathrm{A}}}(x)) : \mu_{\overline{\mathrm{A}}}(x) = 1 - \mu_{\mathrm{A}}(x) \right\}$$

şeklindedir. [54]

Tanım 2.6.5. A ve B iki bulanık kümesi olsun. A ile B'nin kesişim kümesi $\forall x \in X$, $\mu_{\mathrm{A}\cap B}(x) = \min(\mu_{\mathrm{A}}(x), \mu_B(x)) = \mu_{\mathrm{A}}\left(x\right) \wedge \mu_B\left(x\right)$ olmak üzere

$$\mathrm{A} \cap B = \left\{ (x, \mu_{\mathrm{A}\cap B}(x)) : x \in X , \mu_{\mathrm{A}\cap B}(x) \in \left[0,1\right] \right\}$$

şeklindedir. [54]

Tanım 2.6.6. A ve B iki bulanık küme olsun. A ile B'nin birleşim kümesi

$$\forall x \in X \ , \ \mu_{\mathrm{A}\cup B}(x) = \max(\mu_{\mathrm{A}}(x), \mu_B(x)) = \mu_{\mathrm{A}}(x) \vee \mu_B(x)$$

olmak üzere

$$\mathrm{A} \cup B = \left\{ (x, \mu_{\mathrm{A}\cup B}(x)) : x \in X , \mu_{\mathrm{A}\cup B}(x) \in \left[0,1\right] \right\}$$

şeklindedir. [54]

Tanım 2.6.7. A ve B iki bulanık küme olsun. A ve B bulanık kümelerinin farkının üyelik fonksiyonu

$$\forall x \in X \ , \ \mu_{\mathrm{A}-B}(x) = \mu_{\mathrm{A}\cap \overline{B}}(x) = \min(\mu_{\mathrm{A}}(x), \mu_{\overline{B}}(x))$$

olmak üzere fark kümesi

$$\mathrm{A} - B = \left\{ (x, \mu_{\mathrm{A}-B}(x)) : x \in X , \mu_{\mathrm{A}-B}(x) \in \left[0,1\right] \right\}$$

şeklinde tanımlanır. [54]

2.7. Bulanık Kümelerin Özellikleri

G , T ve K bulanık kümeler , U evrensel küme olmak üzere

i) Idempotent : $G \cup G = G$, $G \cap G = G$

ii) Özdeşlik : $G \cap (U \times [0,1]) = G$, $G \cup \varnothing = G$

$G \cup (U \times [0,1]) = U \times [0,1]$, $G \cap \varnothing = \varnothing$

iii) Değişme Özelliği : $G \cap T = T \cap G$, $G \cup T = T \cup G$

iv) Birleşme Özelliği: $(G \cap T) \cap K = G \cap (T \cap K)$, $(G \cup T) \cup K = G \cup (T \cup K)$

v) Dağılma Özelliği: $G \cap (T \cup K) = (G \cap T) \cup (G \cap K)$

$G \cup (T \cap K) = (G \cup T) \cap (G \cup K)$

vi) Kuvvet Alma: $\overline{\overline{G}} = G$

vii) De Morgan Kuralı : $\overline{G \cap T} = \overline{G} \cup \overline{T}$, $\overline{G \cup T} = \overline{G} \cap \overline{T}$

Burada klasik kümelerden farklı olarak bazı özelliklerde U yerine $U \times [0,1]$ kullanılmıştır. (i)-(vii) özellikleri klasik kümelerde olduğu gibidir. Ancak $G \cap \overline{G} = \varnothing$ ve $G \cup \overline{G} = U$ klasik kümeler için geçerli olduğu halde, bulanık kümelerde geçerli değildir. [49]

3. BÖLÜM

KLASİK ÖLÇÜM

Klasik anlamdaki ölçümler toplamsal ölçümler olarak adlandırılırlar. Bu konuda Emile Borel (1871-1956) ve Henri Lebesque (1875-1941)'nin çalışmaları temel kaynaklar olmuştur. Daha sonra Caratheodory $[6]$ bu çalışmaları cebirsel yapıda incelemiş, ölçülebilirlik ve genişleme teoremlerini yazmıştır. Klasik ölçümlerle ilgili olarak $[16]$, $[25]$ ve $[26]$ önemli kaynaklardır. Bu bölüm $[25]$ ve $[26]$ numaralı referanslardan derlenmiştir.

3.1. Klasik Ölçüm

Tanım 3.1.1. $\mathcal{A}$, X kümesinin alt kümeleri üzerinde tanımlı bir cebir ve μ de, $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlanan genişletilmiş reel değerli bir fonksiyon olmak üzere;

i) $\mu(\varnothing)=0$

ii) $\forall \mathrm{A}\in\mathcal{A}$ için $\mu(\mathrm{A})\geq 0$

iii) $\mathcal{A}$ nın ikişer ikişer ayrık her $\{\mathrm{A}_n\}$ dizisi için

$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{A}_n\in\mathcal{A}$ olacak şekilde $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{A}_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\mathrm{A}_n)$ oluyorsa o zaman μ ye, $\mathcal{A}$ üzerinde bir ölçüm (klasik ölçüm) denir.

(iii). özellik μ nün sayılabilir toplamsallığı olarak bilinir. Ayrıca $\mathcal{A}$ nın ikişer ikişer ayrık her $\{\mathrm{A}_n\}$ dizisini $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k}\mathrm{A}_n\right)=\sum_{n=1}^{k}\mu(\mathrm{A}_n)$ şeklinde ifade edersek μ ölçümü sonlu toplamsal ölçüm olarak tanımlanır. $[26]$

Örnek 3.1.1. $\mathcal{A} = P(X) = 2^X$ olsun.

$$\mu(\mathrm{A}) = \begin{cases} \mathrm{A} \text{ } daki \text{ } nokta \text{ } sayısı \text{ }, & Eğer \text{ } \mathrm{A} \text{ } sonlu \text{ } ise \\ \infty \text{ }, & Eğer \text{ } \mathrm{A} \text{ } sonsuz \text{ } ise \end{cases}$$

tarafından tanımlanan μ bir ölçümdür. Gerçekten

i) $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ olmak üzere $\mathrm{A} = \varnothing$ ise $\mu(\mathrm{A}) = \mu(\varnothing) = 0$ dır.

ii) $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ olmak üzere $\mathcal{A} = 2^X$ olduğundan $\mathrm{A} \in 2^X$ dir. O halde eğer $\mathrm{A} = \varnothing$ ise A sayılabilir olduğundan $\mu(\mathrm{A}) = 0$ dır. Eğer $\mathrm{A} \neq \varnothing$ ise

A sonlu ise $s(\mathrm{A}) > 0$ olduğundan $\mu(\mathrm{A}) > 0$ dır.

A sonsuz ise $s(\mathrm{A}) = \infty$ olduğundan $\mu(\mathrm{A}) = \infty \geq 0$ dır.

iii) $(\mathrm{A}_k)_{k=1}^{n} = \mathrm{A}$, $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde ikişer ikişer ayrık olan sonlu bir dizi olsun. Bu durumda $\forall k = 1, 2, ..., n-1$ için $\mathrm{A}_k \cap \mathrm{A}_{k+1} = \varnothing$ dır.

$$s(\mathrm{A}_k \cup \mathrm{A}_{k+1}) = s(\mathrm{A}_k) + s(\mathrm{A}_{k+1}) - s(\mathrm{A}_k \cap \mathrm{A}_{k+1}) = s(\mathrm{A}_k) + s(\mathrm{A}_{k+1}) \text{ olur.}$$

Daha genel olarak

$$s\left(\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} s(\mathrm{A}_k) \text{ olmak üzere } \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(\mathrm{A}_k) \text{ dır.}$$

$(\mathrm{A}_n)_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde ikişer ikişer ayrık olsun. $\mathrm{A}_n \cap \mathrm{A}_{n+1} = \varnothing$ olmak üzere $s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} s(\mathrm{A}_n)$ olduğundan $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\mathrm{A}_n)$ olur ki bu durumda μ bir ölçümdür. [26]

Örnek 3.1.2. X sayılamayan bir küme ve $\mathcal{A} = \{\mathrm{A} \subset X : ya \text{ } \mathrm{A} \text{ } ya\,da \text{ } X - \mathrm{A} \text{ } sayılabilirdir\}$ biçiminde tanımlanan bir sınıf olsun. O zaman $\mathcal{A}$ bir cebirdir. Ve ayrıca

$$\mu(\mathrm{A}) = \begin{cases} 0 \text{ }, & Eğer \text{ } \mathrm{A} \text{ } sayılabilirse \\ 1 \text{ }, & Eğer \text{ } X - \mathrm{A} \text{ } sayılabilirse \end{cases}$$

tarafından tanımlanan μ bir ölçümdür.

Bunun için öncelikle $\mathcal{A}$ nın bir cebir olduğunu gösterelim. $E, F \in \mathcal{A}$ olmak üzere

$E \in \mathcal{A}$ için ya E yada $\overline{E} = X - E$ sayılabilirdir.

$F \in \mathcal{A}$ için ya F yada $\overline{F} = X - F$ sayılabilirdir.

Eğer E ve F (ya da $\overline{E}, \overline{F}$) sayılabilirse, sayılabilir kümelerin birleşimleri de sayılabilir olduğundan $E \cup F \in \mathcal{A}$ (ya da $\overline{E} \cup \overline{F} \in \mathcal{A}$) olur.

Şimdi μ nun bir ölçüm olduğunu gösterelim:

i) $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, $\mathrm{A} = \varnothing$ için $\mu(\mathrm{A}) = 0$ dır.

ii) A ya da $\overline{\mathrm{A}} = X - \mathrm{A}$ sayılabilir olduğundan. Eğer A sayılabilirse $\mu(\mathrm{A}) = 0$ ve $\mu(X - A) = 1$ olur. Eğer $\overline{\mathrm{A}} = X - \mathrm{A}$ sayılabilirse $\mu(X - A) = 0$ ve $\mu(\mathrm{A}) = 1$ olur ki her iki durumda da $\mu(\mathrm{A}) \geq 0$ olur.

iii) $(\mathrm{A}_n)_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{A}$ nın ikişer ikişer ayrık bir dizisi olsun. $n = 1, 2, \ldots$ olmak üzere A_n ler sayılabilir olsun. Bu durumda Cantor'a göre sayılabilir kümelerin birleşimi de sayılabilir olduğundan $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n\right) = 0$ dır. Öyleki A_n ler sayılabilir olduğundan $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\mathrm{A}_n) = 0$ dır. Eğer A_n ler sayılamaz ise bu durumda $X - \mathrm{A}_n$ ler sayılabilirdir. $(X - \mathrm{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi $X - \mathrm{A}_1 \subset X - \mathrm{A}_2 \subset \ldots \subset X - \mathrm{A}_n$ için $\mu(X - \mathrm{A}_n) = 1$ olduğu açıktır. [26]

Örnek 3.1.3. $X = Z^{+}$ olsun. $\mathcal{A} = 2^{X}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif reel sayıların yakınsak bir serisi olsun.

$$\mu(\mathrm{A}) = \begin{cases} \sum_{n \in A} a_n & , \mathrm{A} \neq \varnothing \text{ ve sonlu ise} \\ \infty & , \mathrm{A} \text{ sonsuz ise} \\ 0 & , \mathrm{A} = \varnothing \text{ ise} \end{cases}$$

$\mathcal{A}$ üzerinde tanımlanan μ bir ölçüm değildir. Fakat sonlu toplamsal bir ölçümdür.

Gerçekten

i) $A=\varnothing$, $(A\in\mathcal{A})$ için $\mu(A)=0$

ii) $A=\varnothing$ ise $\mu(\varnothing)=0$

$A\neq\varnothing$ ise $\mu(A)=\sum_{n\in A} a_n>0$, $\sum_{n\in A} a_n$ yakınsak seri olduğu için;

$A=\infty$ ise $\mu(A)=\infty$ olur ki her üç durumda da $\mu\geq 0$ olduğundan (ii) koşulumuz sağlanmış olur.

iii) $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{n\}$ için $\mu(X)=\infty$ olduğu açıktır. Ancak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak bir seri olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\mu\{n\}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n<\infty$ olduğundan μ bir ölçüm değildir. Fakat μ sonlu toplamsal bir ölçümdür. Çünkü $X=\bigcup_{n=1}^{k}\{n\}$ olacak şekilde sonlu seçersek $\mu(X)<\infty$ olacağından $\mu(X)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k}\{n\}\right)=\sum_{n=1}^{k}\mu\{n\}$ olur ki μ sonlu toplamsal bir ölçüm olur. $[26]$

Önerme 3.1.1. $\mathcal{A}$ cebiri üzerinde bir ölçüm μ olsun. O zaman

(a) $A\subset B$, $A\in\mathcal{A}$, $B\in\mathcal{A}$ için $\mu(A)\leq\mu(B)$ dir.

(b) $A_n\in\mathcal{A}$, $1\leq n<\infty$ ve $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$ için $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$ olur. $[26]$

Önerme 3.1.2. μ, $\mathcal{A}$ cebiri üzerinde bir ölçüm olsun.

(a) Eğer $A_n\subset A_{n+1}$,$1\leq n<\infty$ için $A_n\in\mathcal{A}$ ise o zaman $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$ dir.

(b) Eğer $A_n\supset A_{n+1}$, $1\leq n<\infty$ için $A_n\in\mathcal{A}$, $\mu(A_1)<\infty$ ve $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$ ise o zaman

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

Üstelik μ sonlu toplamsal ölçümü, (a) aracılığıyla sayılabilir toplamsaldır.

Eğer $\mu(X)<\infty$ ise X in alt kümelerinin oluşturduğu $\mathcal{A}$ cebiri üzerindeki μ ölçümü sonludur.

Eğer $\mu(X_n)<\infty$ ve $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ ile $\mathcal{A}$ daki kümelerin bir (X_n) dizisi var ise μ ölçümü $\sigma-$sonlu olarak adlandırılır. Önerme 3.1.1 deki (b) ifadesinden ayrık kümeler olarak $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ daima elde edilebilir. Bu sonsuzluk şartına bir ölçüm üzerinde sıkça rastlanır. Genel teoremlerin çoğu kısmı için bu duruma ihtiyaç duyulur. Bunun en önemli örneği $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin bir cebiri üzerindeki $\sigma-$ sonlu ölçümüdür ki buna aralıklar üzerindeki Lebesque ölçümü denir. $[26]$

Örnek 3.1.4. $\mathcal{A}$ cebiri üzerinde sonlu toplamsal bir ölçüm μ olsun. $A, B \in \mathcal{A}$ için

i) $A \subset B$ ise $\mu(A) \leq \mu(B)$

ii) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

iii) Eğer $A \subset B$ ve $\mu(A) < \infty$ ise $\mu(B-A) = \mu(B) - \mu(A)$ dır.

Gerçekten

i) $A, B \in \mathcal{A}$ ve $A \subset B$ olmak üzere $B = A \cup (B-A)$ olarak yazabiliriz $A_1 = A$, $A_2 = B - A$, $n>2$ için $A_n = \varnothing$ ise o zaman μ sayılabilir toplamsal olur ki bu durumda $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B-A)$ ifadesinden $\mu(A) \leq \mu(B)$ elde edilir.

ii) Ölçümün (iii). Özelliği gereğince $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi ikişer ikişer ayrık olacağından toplamsal olarak yazabiliriz ve $k=1,2,...,n-1$ için $A_k \cap A_{k+1} = \varnothing$ dır. $A_1 = A$, $A_2 = B$ olmak üzere $\mu(A_1 \cup A_2) = \sum_{k=1} A_k = \mu(A_1) + \mu(A_2)$ olur. Yani

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \text{ dir.}$$

iii) $A \subset B$ ise $B = A \cup (B-A)$ ve $\mu(A) < \infty$ olmak üzere $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B-A)$ ifadesinden $\mu(B) - \mu(A) = \mu(B-A)$ elde edilir. $[26]$

Örnek 3.1.5 $\mu, \mathcal{A}$ cebiri üzerinde sonlu bir ölçüm olsun. $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$ olmak üzere;

a) $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) - \sum_{i_1 < i_2} \mu\left(A_{i_1} \cap A_{i_2}\right) + ...$

b) $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) - \sum_{i_1 < i_2} \mu\left(A_{i_1} \cap A_{i_2}\right)$.

Gerçekten

a) Tümevarım metodunu uygularsak

$n = 1$ için $\mu(A_1) = \mu(A_1)$

$n = 2$ için $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2)$

$\vdots$

$n = k$ için $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{k} A_k\right) = \sum_{k=1}^{k} \mu(A_k) - \sum_{i_1 < i_2} \mu\left(A_{i_1} \cap A_{i_2}\right)$ olduğunu kabul edelim.

$n = k + 1$ için

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{k+1} A_k\right) = \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{k} A_k\right) \cup (A_{k+1})\right)$$

$$= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \mu(A_{k+1}) - \sum_{i_1 < i_2} \mu(A_k \cap A_{k+1})$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \mu(A_k) + \mu(A_k) - \sum_{i_1 < i_2} \mu\left(A_{i_1} \cap A_{i_2}\right) - \sum_{i_1 < i_2} \mu(A_k \cap A_{k+1})$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \mu(A_k) - \sum_{i_1 < i_2} \mu\left(A_{i_1} \cap A_{i_2}\right) + \mu(A_k) - \sum_{i_1 < i_2} \mu(A_k \cap A_{k+1})$$

$$= \sum_{k=1}^{k+1} \mu(A_{k+1}) - \sum \mu\left(C_{i_1} \cap C_{i_2}\right) + \varepsilon \quad , \quad \varepsilon > 0 \qquad (*) \quad \text{olur. } [26]$$

b) $(*)$ eşitliğinde ε kısmını atarsak;

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{k+1} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{k+1} \mu\left(A_{k+1}\right) - \sum_{i_1 \prec i_2} \mu\left(C_{i_1} \cap C_{i_2}\right) \text{ elde edilir. } [26]$$

3.2 Dış Ölçüm ve Ölçülebilir Kümeler

Tanım 3.2.1. 2^X de tanımlanan genişletilmiş reel değerli μ^* fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, μ^* ye 2^X üzerinde bir dış ölçüm denir.

i) $\mu^*(\varnothing) = 0$

ii) $A \subset B$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

iii) $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$. $[26]$

Örnek 3.2.1. X boş kümeden farklı bir küme ve

$$\mu^*(E) = \begin{cases} 1, & E \neq \varnothing \ ise \\ 0, & E = \varnothing \ ise \end{cases}$$

olmak üzere; eğer X en az iki noktaya sahipse o zaman 2^X üzerinde μ^*, bir ölçüm değildir fakat bir dış ölçümdür. $[26]$

Örnek 3.2.2. X sayılamayan bir küme olsun. μ^*,

$$\mu^*(E) = \begin{cases} 1, & E \ sayılamaz \ ise \\ 0, & E \ sayılabilir \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Bu durumda μ^* bir dış ölçümdür. $[26]$

Önerme 3.2.1. Boş kümeyi de içeren X in alt kümelerinin bir sınıfı $\mathcal{F}$ olsun. Her $A \subset X$ için $\mathcal{F}$ de bir $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi vardır öyleki, $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ dir. $\mathcal{F}$ üzerinde genişletilmiş reel değerli bir fonksiyon $\mathcal{T}$ olsun. Öyleki $A \in \mathcal{F}$ için $\mathcal{T}(\varnothing) = 0$ ve $0 \leq \mathcal{T}(A)$ dır. Bu durumda

$$\mu^*(\mathrm{A}) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}(B_n) : \ B_n \in \mathcal{F}, \ \ \mathrm{A} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right\}$$

tarafından 2^X üzerinde tanımlanan μ^*, bir dış ölçümdür. $[26]$

Örnek 3.2.3 $X = \mathbb{Z}^+$, $\mathcal{F} = \{\{x\} : \ x \in X\} \cup \{\varnothing\}$ için

$$\mathcal{T}(E) = \begin{cases} 0 \ , & E = \varnothing \ \ ise; \\ 1 \ , & E \neq \varnothing \ \ ise; \end{cases}$$ olduğunu varsayalım. O zaman

$$\mu^*(\mathrm{A}) = \begin{cases} \infty & , \ \mathrm{A} \ sonsuz \ \ ise \\ \mathrm{A} \ daki \ noktaların \ sayısı & , \ \mathrm{A} \ sonlu \ \ ise \end{cases} \qquad [26]$$

Örnek 3.2.4. $\mathcal{F} = \{X, \varnothing\}$, $\mathcal{T}(X) = 1$ ve $\mathcal{T}(\varnothing) = 0$ olsun. O zaman

$$\mu^*(\mathrm{A}) = \begin{cases} 1 \ , & \mathrm{A} \neq \varnothing \ \ ise \\ 0 \ , & \mathrm{A} = \varnothing \ \ ise \end{cases}$$ olur. $[26]$

Örnek 3.2.5. (Lebesque Dış Ölçüm) $X = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{F}$ de sağdan kapalı soldan açık olan tüm aralıkların kümesi olsun.
$\{(\infty, a], (a, b] \ yada \ (a, \infty) ... \ gibi \ sonlu \ yada \ sonsuz \ \ aralıklar\}$. Ayrıca $\mathcal{F}$ boş kümeyi de içersin. Her $\mathrm{I} \in \mathcal{F}$ aralığı için $\mathcal{T}(\varnothing) = 0$ ve $\mathcal{T}(\mathrm{I}) = \ell(\mathrm{I})$ olsun. O zaman 2^R de, $\mathcal{T}$ tarafından elde edilen μ^* dış ölçümü, $\mathbb{R}$ üzerinde Lebesque dış ölçümü olarak adlandırılır. Ve

$$\mu^*(\mathrm{A}) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(\mathrm{I}_n) : \ \ \mathrm{A} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{I}_n \ , \ \ \mathrm{I}_n \in \mathcal{F}\right\}$$

şeklinde ifade edilir.

Bu bölümde $\forall \mathrm{I} \in \mathcal{F}$ için $\mu^*(\mathrm{I}) = \ell(\mathrm{I})$ olarak düşüneceğiz. $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin özel bir sınıfı olarak sınırlandırılmış olan μ^*, aralıklar üzerindeki Lebesque ölçümünün genişlemesi olacak şekilde, $\mathbb{R}$ üzerindeki Lebesque ölçümü olarak bilinir.

Dış ölçümün başlangıçtaki en önemli amacı bir $\sigma-$cebir üzerinde bir ölçüm oluşturmaktı. Dış ölçüm genel anlamda 2^X üzerinde bir ölçüm değildir. Örnek olarak Örnek 3.2.1 ve Örnek 3.2.2 gösterilebilir. Ancak $\sigma-$cebir üzerindeki bir ölçümün alt kümelerinin uygun bir sınıfı (yani, ölçülebilir kümeler) sınırlandırıldığı zaman, bir dış ölçüm ortaya çıkar. $[26]$

Tanım 3.2.2. (Lebesque Anlamında Ölçülebilir Kümeler) $E\subset X$ olsun. Eğer her $\mathrm{A}\subset X$ için $\mu^*(\mathrm{A})=\mu^*(\mathrm{A}\cap E)+\mu^*(\mathrm{A}\cap E^C)$ ise E kümesine ölçülebilir denir. Ve $\mathrm{E}\in M$ şeklinde yazılır. Burada M ölçülebilir kümelerin bir sınıfıdır.

Herhangi A ve E kümeleri için daima $\mathrm{A}=(\mathrm{A}\cap E)\cup(\mathrm{A}\cap E^C)$ dır. Şu halde dış ölçümün alt toplamsallık özelliğinden $\mu^*(\mathrm{A})\leq\mu^*(\mathrm{A}\cap E)+\mu^*(\mathrm{A}\cap E^C)$ eşitsizliği mevcuttur. Dolayısıyla bir kümenin ölçülebilir olduğunu aşağıdaki şekilde test etmek yeterlidir.

$\mathrm{E}\in M \Leftrightarrow \forall\mathrm{A}\subseteq X$ için $\mu^*(\mathrm{A})\geq\mu^*(\mathrm{A}\cap E)+\mu^*(\mathrm{A}\cap E^C)$ $[26]$.

Önerme 3.2.2. $n=1,2,...,$ için $\mathrm{E}_n\in M$ ise $E=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\in M$ dır. $[25]$

Tanım 3.2.3. Herhangi bir $\mathrm{E}\in M$ için $\mu^*(E)$ yerine bunun genişlemesi olan $\overline{\mu}(E)$ yazacağız ve $\overline{\mu}(E)$ ye Lebesque ölçüsü diyeceğiz.

Sonuç olarak $\overline{\mu}(E):M\to[0,\infty]$ Lebesque ölçüsü, ölçülebilir M, $\sigma-$cebiri üzerinde tanımlı sayılabilir toplamsal küme fonksiyonudur. $[26]$

Önerme 3.2.3. $\mathrm{A},\mathrm{B}\in M$ olsun.

i) $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$ ise $\overline{\mu}(\mathrm{A})\leq\overline{\mu}(\mathrm{B})$

ii) $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$ ve $\overline{\mu}(\mathrm{A})$ sonlu ise $\overline{\mu}(\mathrm{B}-\mathrm{A})=\overline{\mu}(\mathrm{B})-\overline{\mu}(\mathrm{A})$

iii) $\forall t\in X$ için $\overline{\mu}(\mathrm{A}+t)=\overline{\mu}(\mathrm{A})$ dır.

Ayrıca $\varnothing\in M$ olduğundan ve Tanım 3.2.3 den $\forall i>n$ için $E_i=\varnothing$ olacağından Lebesque ölçüsünün toplamsal olduğu sonucunu çıkartabiliriz. Öyleki $E_i\in M$ ler ikişer ikişer ayrık kümeler ise $\overline{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu}(E_i)$ dir. $[25]$

Teorem 3.2.1. μ^*-ölçülebilir kümelerinin bir M sınıfı, bir $\sigma-$cebirdir. Üstelik, μ^* dan üretilen $\overline{\mu}$, M için bir ölçümdür. $[25]$

Uyarı 3.2.1. $\mu^*(\mathrm{A})=0$ olmak üzere A, μ^* ölçülebilirdir. Sonuç olarak $\overline{\mu}$ ölçümü (M üzerinde μ^* dan üretilen) aşağıdaki özellikleri sağlarsa o zaman $\overline{\mu}$ ölçümüne tam ölçüm denir.

i) $E \in M$ için, $\overline{\mu}(E)=0$

ii) $F \in M$ için, $F \subset E$

$\sigma-$cebir üzerinde her ölçüm tam değildir. Fakat $\sigma-$cebir üzerinde her ölçüm Önerme 3.2.4 ile tamlaştırılabilir. $[25]$

Önerme 3.2.4. Bir $\mathcal{A}$, $\sigma-$cebir üzerinde μ bir ölçüm olsun.

$$\mathcal{A}_0 = \{\mathrm{A} \cup B : \ \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \ B \subset C, \ C \in \mathcal{A} \ ve \ \mu(C)=0\}$$

ve $\mathrm{A} \cup B \in \mathcal{A}_0$ için $\mu_0(\mathrm{A} \cup B) = \mu(\mathrm{A})$

dır. Bu durumda $\mathcal{A}_0$ bir $\sigma-$cebirdir. Öyleki μ_0, $\mathcal{A}_0$ üzerinde bir tam ölçümdür. ($\mu_0 : \mu$ nin bir genişlemesidir.) $[25]$

Örnek 3.2.6. Örnek 3.2.4 deki μ^* dış ölçümünü düşünelim. Eğer X in uygun bir boş olmayan alt kümesi E ve A=X ise o zaman

$$\mu^*(\mathrm{A}) = 1 \neq 2 = \mu^*(\mathrm{A} \cap E) + \mu^*(\mathrm{A} \cap E^C) \quad \text{dir.}$$

Sonuç olarak X in ölçülebilir alt kümelerinin tüm sınıfı $\{\varnothing, X\}$ dir. $[25]$

Tanım 3.2.4 $\mathrm{B} = \bigcap \{F : \ F, tüm\ aralıkları\ içeren\ bir\ \sigma - cebir\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda σ-cebirlerden oluşan bir ailenin elemanlarının arakesiti de bir σ-cebir olduğundan, B de bir σ-cebirdir. B ailesinin elemanlarına Borel kümeleri denir. B ailesi tüm aralıkları içeren en küçük σ-cebirdir. $[25]$

Teorem 3.2.2. (X,d) metrik uzayında her Borel kümesi 2^X üzerindeki bir dış ölçüm ile bağlantılı olarak $\mu^* -$ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart μ^* nın bir dış metrik ölçüm olmasıdır. $[26]$

Teorem 3.2.3. (Carathedory Genişleme Teoremi) μ, $\mathcal{A} \subset 2^X$ cebiri üzerinde bir ölçüm olsun. $E \subset X$ için,

$$\mu^*(E) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \ : \quad E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \ , \quad E_i \in \mathcal{A} \right\}$$

olsun. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) μ^* bir dış ölçümdür.

ii) $E \in \mathcal{A}$ için, $\mu(E) = \mu^*(E)$ dir.

iii) $E \in \mathcal{A}$ için, E , μ^*-ölçülebilirdir.

iv) μ^*-ölçülebilir kümeleri için μ^* dan üretilen $\overline{\mu}$ ölçümü, $\mathcal{A}$ ya dahil olan bir σ-cebiri üzerindeki μ nün bir genişlemesidir.

v) Eğer μ bir σ-sonlu ise o zaman $\overline{\mu}$ ölçümü, μ nun tek genişlemesidir ($\mathcal{A}$ ya dahil olan en küçük σ-cebiri üzerinde). $[26]$

4. BÖLÜM

BULANIK ÖLÇÜM

Bulanık ölçümlerle ilgili şimdiye kadar birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların ışığında birçok tanım ve kavram geliştirilmiştir. Bulanık ölçümle ilgili ilk çalışmalar Sugeno [33,34] tarafından yapılmıştır. Sugeno aynı zamanda λ-bulanık ölçümünü de tanımlamıştır. Daha sonra Z. Wang [50] tarafından benzerlik ölçümü tanımlanmıştır. Shafer [32] tarafından plausibility ve belief ölçümleri geliştirilmiş ve Dempstar [8] bu ölçümleri alt ve üst olasılıklar olarak düzenlemiştir. Bu teorinin bulanık ölçümlere genelleştirilmesi ile ilgili daha sonra Höhle [17], Dubois ve Prade [10], Wang ve Klir[49], Yen[52] birçok çalışma yapmıştır. Ayrıca Shafer [31,32] plausibility ve belief ölçümlerin özel bir hali olan possibility ve necessity ölçümlerini tanımlamıştır ve Zadeh [54] de bulanık küme bağlamında bu ölçümü düzenlemiştir. Ayrıca bu ölçümler olanak teorisi adı altında Dubois ve Prade [11,12,13] de kapsamlı olarak incelenmiştir. Bu bölüm [49] numaralı referanstan derlenmiştir.

4.1. Bulanık Ölçüm ve Yarı Sürekli Bulanık Ölçüm

X, boş olmayan bir küme $\Im$, X kümesinin alt kümelerinin boş olmayan bir sınıfı; $\mu : \Im \to [0, \infty]$, $\Im$ de tanımlı, negatif olmayan, genişletilmiş reel değerli küme fonksiyonu olsun.

Tanım 4.1.1. Aşağıdaki dört şartı sağlayan, (X ,$\Im$) üzerindeki μ küme fonksiyonuna bulanık ölçüm denir.

i) $\emptyset \in \Im$ iken $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $E, F \in \Im$ ve $E \subset F$ ise $\mu(E) \leq \mu(F)$ (monotonluk)

iii) $\{E_n\} \subset \Im$, $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Im$ ise $\lim_{n} \mu(E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$

(alttan süreklilik)

iv) $\{E_n\} \subset \Im$, $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, $\mu(E_1) < \infty$ ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \Im$ ise $\lim_{n} \mu(E_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)$

(üstten süreklilik).

(i), (ii) ve (iii) veya (i), (ii) ve (iv) özelliklerini sağlayan, (X , $\Im$) üzerindeki μ küme fonksiyonuna sırasıyla, alttan yarı sürekli bulanık ölçüm ve üstten yarı sürekli bulanık ölçüm denir. Bunların her ikisine de kısaca yarı sürekli bulanık ölçüm denir. Ayrıca bir μ bulanık ölçümü veya yarı sürekli bulanık ölçümünde $X \in \Im$ için; $\mu(X) = 1$ oluyorsa μ ye düzgün bulanık ölçüm denir.

Genellikle, μ nün tanımlandığı $\Im$ sınıfları için monoton sınıf, yarı halka, halka, cebir, σ-halkası ve σ-cebiri veya kuvvet kümesi üzerinde duracağız. $\mathcal{F}$ ölçülebilir kümelerin bir sınıfı olmak üzere, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ üçlüsüne, bulanık ölçüm uzayı (veya yarı sürekli bulanık ölçüm uzayı) denir. Eğer μ bir bulanık ölçümse (veya yarı sürekli bulanık ölçümse), (X , $\mathcal{F}$) ölçülebilir bir uzaydır. Burada $X \in \mathcal{F}$ olarak dikkate alınacaktır.

Klasik ölçümde bazı sonlu, σ-sonlu gibi, adlandırmalar bulanık ölçümler ve yarı sürekli bulanık ölçümler için de uyarlanabilir. [49]

Örnek 4.1.1 $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $\Im = P(X)$ olsun.

$$\mu(\mathrm{E}) = \left(\frac{|E|}{n} \right)^2$$

için $|E|$, E kümesine ait noktaların sayısını gösteriyorsa, μ bir düzenli ölçümdür. Ayrıca X uzayı sonluyken, süreklilik (alttan ve üstten), kendiliğinden sağlanır. Gerçekten;

i) $\varnothing \in \Im$ için $\mu(\varnothing) = \left(\frac{|\varnothing|}{n}\right)^2 = 0$

ii) $E, F \in \Im$ ve $E \subset F$ olmak üzere $|E| = a$, $|F| = b$ seçersek $a \leq b$ olacağı açıktır.

Öyle ki $\mu(E) = \left(\frac{a}{n}\right)^2 = \frac{a^2}{n^2}$ ve $\mu(F) = \left(\frac{b}{n}\right)^2 = \frac{b^2}{n^2}$ için $a^2 \leq b^2$ olacağından dolayı $\mu(E) \leq \mu(F)$ elde edilir.

iii) $\{E_n\} \subset \Im$, $E_1 \subset E_2 \subset ... \subset E_n$ ve $E_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \Im$ için $|E_1| = 1$, $|E_2| = 2, ..., |E_n| = n$ kümeleri oluşturulabileceğinden dolayı $\lim_n \mu(E_n) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \left(\frac{n}{n}\right)^2 = 1$ dir.

iv) $\{E_n\} \subset \Im$, $E_1 \supset E_2 \supset ... \supset E_n$ için en az bir $\mu(E_1) < \infty$ vardır. Öyleki $\lim_n \mu(E_n) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \left(\frac{\varnothing}{n}\right)^n = 0$ olduğundan μ bir bulanık ölçümdür.

Ayrıca $\mu(X) = \left(\frac{n}{n}\right)^2 = 1$ olduğundan μ düzgün bir bulanık ölçümdür. [49]

Örnek 4.1.2. $X_0 = \{1, 2, \ldots\}$, $X = X_0 \times X_0$ ve $\Im = P(X)$ olsun. Herhangi bir $E \in P(X)$ için**,**

$$\mu\ (E) = |\text{Proj E}|$$

$$\text{Proj E} = \{x: (x, y) \in E\}$$

olarak tanımlanan μ fonksiyonu yarı sürekli (alt yarı sürekli) bulanık ölçümdür. Öyleki μ; (i), (ii) ve (iii) şartlarını sağlar.

Gerçekten;

i) $\varnothing \in \Im$ için $\mu(\varnothing) = |proj\,\varnothing| = 0$ dır.

ii) $E, F \in \Im$ ve $E \subset F$ olmak üzere

$$\mu(E) = |projE| = \left|\{x_i : (x_i, y_i) \in E\}\right| = \left|\{x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}\right| \qquad (i = 1, 2, ..., n-1)$$

$$\mu(F) = |proj\, F| = |\{x_i : (x_i, y_i) \in F\}| = |\{x_1, x_2, ..., x_n\}| \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

olacağında dolayı $\mu(E) \le \mu(F)$ elde edilir.

iii) $E, F \in \Im$, $E_1 \subset E_2 \subset ...$ için $E_1 = \{1 \times \{1\}\}$, $E_2 = \{1 \times \{1, 2\}\}$, $E_3 = \{1 \times \{1, 2, 3\}\}, ...$

kümelerini dikkate alırsak $\lim_n \mu(E_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = |projE_n| = |1 \times \{x_1, x_2, ..., x_n\}| = E_n$

elde edilir.

iv) μ, üstten sürekli değildir. Çünkü E_n ={1 x {n, n+1, n+2, … }} için $E_1 \supset E_2 \supset ...$

ve herhangi bir $n \in N$ için μ(E_n) = 1 olacaktır. Fakat $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing$ ve $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing\right) = 0$

olacaktır. Bu yüzden μ küme fonksiyonu, alt yarı sürekli bulanık ölçümdür. [49]

X ’ in alt kümelerinde bir cebir $\Re$ ve μ, (X , $\Re$) üzerinde düzenli bulanık ölçüm (veya düzenli üst yarı sürekli bulanık ölçüm veya düzenli alt yarı sürekli bulanık ölçüm) olsun. (X , $\Re$) üzerinde tanımlı ν küme fonksiyonu

$$\nu(E) = 1 - \mu(\bar{E})$$

olarak verilsin. ν, aynı zamanda, düzenli bulanık ölçümdür (sırasıyla, düzenli alt yarı sürekli bulanık ölçüm veya düzenli üst yarı sürekli bulanık ölçüm). ν ’ ye μ ’de ikili bulanık ölçüm (sırasıyla, ikili üst yarı sürekli bulanık ölçüm veya ikili alt yarı sürekli bulanık ölçüm) denir. [49]

4.2. λ – Bulanık Ölçümler

Tanım 4.2.1. (λ –kuralı) $\sup \mu = \sup \mu(E)$, $E \in \Im$ ve λ∈ $\left(-\frac{1}{\sup \mu}, \infty\right) \cup \{0\}$

olmak üzere $\forall E, F \in \Im$, $E \cup F \in \Im$ ve $E \cap F = \varnothing$ için

$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F) + \lambda\mu(E) \cdot \mu(F)$ eşitliğine λ–kuralı denir ve μ, $\Im$ üzerinde λ – kuralını sağlar. [49]

Tanım 4.2.2. (sonlu λ –kuralı) λ∈ $\left(-\dfrac{1}{\sup\mu},\infty\right)\cup\{0\}$ olacak şekilde eğer

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}\left\{\prod_{i=1}^{n}[1+\lambda.\mu(E_i)]-1\right\},\lambda\neq 0\\ \sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)\quad ,\qquad \lambda=0\end{cases}$$

ifadesinde $\Im$ nin her sonlu ayrık küme sınıfında olan $\{E_1,E_2,...,E_n\}$ küme sınıfları ve $\bigcup_{i=1}^{n}E_i\in\Im$ için bir λ değeri varsa μ, $\Im$ üzerinde sonlu λ – kuralını sağlar. [49]

Tanım 4.2.3. (σ - λ –kuralı) λ∈ $\left(-\dfrac{1}{\sup\mu},\infty\right)\cup\{0\}$ olacak şekilde eğer

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}\left\{\prod_{i=1}^{\infty}[1+\lambda.\mu(E_i)]-1\right\},\lambda\neq 0\\ \sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i),\lambda=0\end{cases}$$

ifadesinde $\Im$ nin her sonlu ayrık küme sınıfında olan $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ küme sınıfı için ve $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\in\Im$ için bir λ değeri bulunabiliyorsa μ , $\Im$ üzerinde σ - λ –kuralını sağlar.

λ = 0 iken: λ – kuralı toplamsal, sonlu λ - kuralı sonlu toplamsal ve σ - λ - kuralı σ - toplamsaldır. [49]

Teorem 4.2.1. Eğer $\Im=\Re$ bir halkaysa ve μ, λ - kuralını sağlarsa, sonlu λ- kuralını da sağlar. (Bu durum $\Im$ yarı halka olduğu zaman da geçerlidir.) [49]

Örnek 4.2.1. $X=\{a,b\}$ ve $\Im = P(X)$ olsun.

$$\mu(E)=\begin{cases}0 & , \quad E_1=\varnothing \quad ise\\ 0.2 & , \quad E_2=\{a\} \quad ise\\ 0.4 & , \quad E_3=\{b\} \quad ise\\ 1 & , \quad E=X \quad ise\end{cases}$$

olduğunda λ = 5 iken μ, λ - kuralını sağlar. Ayrıca $\Im$ sonlu halka olduğundan, μ sonlu λ - kuralını ve σ - λ - kuralını da sağlar. Gerçekten

$$\mu(\{a\}\cup\{b\})=\mu(\{a\})+\mu(\{b\})+\lambda\mu(\{a\})\cdot\mu(\{b\})$$

$$1=0.2+0.4+\lambda(0.2\times 0.4)$$
$$1=0.6+\lambda\frac{8}{100}$$

eşitliğinden λ = 5 olur ki, λ - kuralı sağlanır. Ayrıca Teorem 4.2.1 gereği μ, λ - kuralını sağlıyorsa sonlu λ- kuralını da sağlar ve aynı zamanda σ – λ- kuralını da sağlar öyleki λ = 5 ve $\mu(E_1)=0,\ \mu(E_2)=0.2,\ \mu(E_3)=0.4$ için

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\frac{1}{\lambda}\left\{\prod_{i=1}^{n}\left[1+\lambda\mu(E_i)\right]-1\right\}$$

$$=\frac{1}{5}\left\{(1+5\mu(E_1))\cdot(1+5\mu(E_2))\cdot(1+5\mu(E_3))-1\right\}$$

$$=\frac{1}{5}[1\cdot 2\cdot 3-1]=1$$

olduğundan hem sonlu λ-kuralını hem de σ – λ- kuralını sağlar. [49]

Tanım 4.2.4. μ, σ-λ- kuralını sağlıyor ve aynı zamanda en az bir $E\in\Im$ için μ(E) < ∞ oluyor ise μ’ ye λ-bulanık ölçüm denir. Genellikle λ-bulanık ölçüm g_λ ile gösterilir. $\Im$ bir σ-cebir ise g_λ(X) = 1 iken g_λ λ-bulanık ölçümü, aynı zamanda Sugeno ölçümü olarak da adlandırılır.

Örnek 4.2.1. deki küme fonksiyonu Sugeno ölçümüdür. [49]

Teorem 4.2.2. g_λ, bir $\Im$ sınıfı üzerinde boş kümeyi de içeren λ - bulanık ölçümse g($\varnothing$) = 0' dır ve g_λ sonlu λ – kuralını sağlar. [49]

Teorem 4.2.3. g_λ, bir S yarı halkası üzerinde λ - bulanık ölçümse g_λ monotondur. [49]

Teorem 4.2.4. $E_1, E_2 \in \Im$ ve $E = E_1 \cup E_2 \in \Im$ iken $\mu(E) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2)$ mevcutsa μ, alt toplamsaldır. $E_1, E_2 \in \Im$ ve $E = E_1 \cup E_2 \in \Im$ iken $\mu(E) \geq \mu(E_1) + \mu(E_2)$ ise μ üst toplamsaldır denir. [49]

Teorem 4.2.5. g_λ, S yarı halkası üzerinde bir λ-bulanık ölçüm olsun. O halde

i) λ < 0 iken g_λ alt toplamsal

ii) λ > 0 iken g_λ üst toplamsal

iii) λ = 0 iken g_λ toplamsaldır. [49]

Teorem 4.2.6. g_λ bir $\Re$ halkası üzerinde, λ - bulanık ölçüm olsun. Her E ∈ $\Re$ ve F ∈ $\Re$ için;

i) $g_\lambda(E - F) = \dfrac{g_\lambda(E) - g_\lambda(E \cap F)}{1 + \lambda . g_\lambda(E \cap F)}$

ii) $g_\lambda(E \cup F) = \dfrac{g_\lambda(E) + g_\lambda(F) + g_\lambda(E \cap F) + \lambda . g_\lambda(E)\, g_\lambda(F)}{1 + \lambda . g_\lambda(E \cap F)}$

ayrıca, eğer $\Re$ bir cebir ve g_λ düzenliyse

iii) $g_\lambda(\bar{E}) = \dfrac{1 - g_\lambda(E)}{1 + \lambda . g_\lambda(E)}$ dir. [49]

Teorem 4.2.7. Yukarıda bahsedilen şartlar altında $1 + \lambda . \mu(X) = \prod_{i=1}^{n} [1 + \lambda . \mu(\{x_i\})]$ eşitliğindeki λ parametrelerine göre aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

(1) λ > 0 iken $\sum_{i=1}^{n} \mu(\{x_i\}) < \mu(X)$

(2) $\lambda = 0$ iken $\sum_{i=1}^{n} \mu(\{x_i\}) = \mu(X)$

(3) $-\frac{1}{\mu(X)} < \lambda < 0$ iken $\sum_{i=1}^{n} \mu(\{x_i\}) > \mu(X)$. [49]

4.3. Benzerlik (Quasi) Ölçümü

Tanım 4.3.1. $a \in [0,\infty)$ olsun. Genişletilmiş bir θ:[0, a] T [0, ∞] fonksiyonu sürekli, kesin artan ve θ(0) = 0, sonlu ya da sonsuz olma durumuna göre $\theta^{-1}(\{\infty\}) = \emptyset$ ya da {∞} ise θ fonksiyonuna T-fonksiyonu denir. [49]

Tanım 4.3.2. Tanım aralığı θ T-fonsiyonu ile aynı olan μ fonksiyonu için $\Im$ üzerinde her bir E ∈ $\Im$ için (θ o μ) (E) = θ (μ(E)) olacak şekilde bir θ o μ toplamsal küme fonksiyonu tanımlanabiliyorsa μ' ye bir quasi – toplamsal denir.

$\Im$ üzerinde θ o μ bir klasik ölçüm olacak şekilde bir θ T-fonsiyonu varsa μ bir quasi-ölçümüdür. θ T-fonksiyonu, μ' nün uygun fonksiyonudur.

Düzgün bir quasi-ölçümüne quasi-olasılığı denir. Açıkçası, her bir klasik ölçüm uygun T-fonksiyonu olarak özdeşlik fonksiyonuyla bir quasi-ölçümüdür. [49]

Örnek 4.3.1. Örnek 4.1.2. ile verilen bulanık ölçüm bir quasi-ölçümüdür. Uygun T-fonksiyonu ise $\theta(y) = \sqrt{y},\ y \in [0,1]$ dir. [49]

Teorem 4.3.1. Bir yarı halka üzerindeki her bir quasi-ölçümü bir quasi toplamsal bulanık ölçümdür. [49]

Teorem 4.3.2. μ bir klasik ölçüm ise her bir θ T-fonksiyonu dizisi μ dizisini içerir ve θ^{-1} o μ, θ'nın uygun T-fonksiyonu ile quasi-ölçümüdür. [49]

Teorem 4.3.3. μ bir $\Re$ halkası üzerinde $\mu(\emptyset) = 0$ olacak şekilde bir quasi toplamsal olsun. μ hem $\Re$ halkası üzerinde alttan sürekli hem de ∅' de üstten sürekli ve sonlu ise; μ, $\Re$ halkası üzerinde quasi-ölçümü olur. [49]

Sonuç 4.3.1. Bir halka üzerinde quasi toplamsal bulanık ölçüm, bir quasi-ölçümüdür. $[49]$

Teorem 4.3.4. $\lambda \neq 0$ olsun. Her bir λ - bulanık ölçümü g_λ, uygun T-fonksiyonu

$$\theta_\lambda(y) = \frac{\ln(1+\lambda y)}{k.\lambda}, \qquad y \in [0, \sup g_\lambda]$$

k keyfi bir sonlu pozitif gerçel sayı olmak üzere

$$\theta_\lambda^{-1}(x) = \frac{e^{k\lambda x} - 1}{k.\lambda}, \qquad x \in [0, \infty]$$

ile θ_λ^{-1} o μ bir bulanık ölçümdür. $[49]$

Örnek 4.3.2. $X = \{a, b\}$, $\mathcal{F} = P(X)$ olsun ve g_λ

$$g_\lambda(E) = \begin{cases} 0 & , \; E_1 = \varnothing \quad ise \\ 0.2 & , \; E_2 = \{a\} \quad ise \\ 0.4 & , \; E_3 = \{b\} \quad ise \\ 1 & , \; E = X \quad ise \end{cases}$$

O halde g_λ bir $\lambda = 5$ parametresiyle λ - bulanık ölçümdür. Eğer

$$\theta_y(y) = \frac{\ln(1+\lambda y)}{\ln(1+\lambda)} = \frac{\ln(1+5y)}{\ln 6}$$

alırsak, o zaman

$$\theta_\lambda \circ g_\lambda(E) = \begin{cases} 0 & , \; E = \varnothing \quad ise \\ 0.387 & , \; E = \{a\} \quad ise \\ 0.613 & , \; E = \{b\} \quad ise \\ 1 & , \; E = X \quad ise \end{cases}$$

olur. θ_λ o g_λ bir olasılık ölçümüdür. $[49]$

Sonuç 4 3.2. Bir yarı halka üzerinde λ - kuralı, sonlu λ - kuralına eşittir. $[49]$

Sonuç 4.3.3. Bir yarı halka üzerinde her bir λ - bulanık ölçüm, süreklidir. [49]

Sonuç 4.3.4. Bir yarı halka üzerinde süreklilik ile λ - kuralı aynı zamanda σ - λ - kuralına eşittir. Böylece bir halka üzerinde λ – kuralını sağlayan bulanık ölçüm bir λ - bulanık ölçümdür. [49]

Sonuç 4.3.5. Bir $\Re$ cebiri üzerinde düzgün bir λ - bulanık ölçüm, g_λ ise o zaman her bir E $\in \Re$ için μ(E) = 1 - g_λ(E), $\Re$' de düzgün bir λ - bulanık ölçümdür ve parametresi $\lambda' = -\dfrac{\lambda}{\lambda+1}$ ' e göredir. [49]

4.4. Belief Ölçümleri ve Plausibility Ölçümler

Tanım 4.4.1. $P\big(P(X)\big)$, $P(X)$'in kuvvet kümesi olsun. Eğer *p*, $\big(P(X), P\big(P(X)\big)\big)$ üzerinde bir ayrık olasılık ölçümü ve $p\big(\{\varnothing\}\big)=0$ ise o zaman $\mu : P(X) \to [0,1]$ küme fonksiyonu, $\forall E \in P(X)$ için $\mu(E) = p\big(\{E\}\big)$ olarak tanımlıdır ve $P(X)$ üzerinde bir basit olasılık ataması diye adlandırılır. [49]

Teorem 4.4.1. Bir küme fonksiyonu olan $\mu : P(X) \to [0,1]$ bir basit olasılık atamasıdır ancak ve ancak $\mu(\varnothing)=0$ ve $\sum_{E\in P(X)} \mu(E) = 1$ dir. [49]

Tanım 4.4.2. Eğer μ, $P(X)$ üzerinde bir basit olasılık ataması ise o zaman

Bel: $P(X)$ → [0, 1] küme fonksiyonu kesindir, her E $\subset P(X)$ için

$$Bel(E) = \sum_{F\subset E} \mu(F)$$

ve $\big(X, P(X)\big)$ üzerinde bir güvenirlik (belief) ölçümüdür. [49]

Not 4.4.1. Sayılabilir bir E kümesinin kardinali |E| ile gösterilir. [49]

Teorem 4.4.2. Eğer Bel, $\big(X, P(X)\big)$ üzerinde bir güvenirlik ölçümü ise o zaman

i) Bel(∅) = 0

ii) Bel(X) = 1

iii) $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$, $P(X)$ ’ in sonlu alt sınıfları olmak üzere

$$Bel\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \geq \sum_{I \subset \{1,...,n\}, I \neq \varnothing} (-1)^{|I|+1} Bel\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right)$$

iv) Bel, üstten süreklidir. $[49]$

Teorem 4.4.3. Her güvenirlik (belief) ölçümü, monotondur ve üst toplamsaldır. $[49]$

Teorem 4.4.4. X , sınırlı olsun. Eğer $m : P(X)$ T $[0, 1]$ küme fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa;

i) m(∅) = 0

ii) m(X) = 1

iii) $m(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \geq \sum_{I \subset \{1,...,n\}, I \neq \varnothing} (-1)^{|I|+1} \mu\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right)$, burada $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$, $P(X)$ ’ in sınırlı alt sınıflarıdır. O zaman, μ küme fonksiyonu

$$\mu(\mathrm{E}) = \sum_{F \subset E} (-1)^{|E-F|} m(F), \text{ (her E} \in P(X) \text{ için)}$$

için kesindir ve bir basit olasılık atamasıdır. m, μ ’ den çıkarılmış güvenirlik ölçümü olmak zorundadır:

$$m(\mathrm{E}) = \mathrm{Bel(E)} = \sum_{F \subset E} \mu(F) \text{ ' dir.} \quad [49]$$

Tanım 4.4.3. Eğer m, $P(X)$ üzerinde, bir basit olasılık ataması ise o zaman PI: $P(X) \rightarrow [0, 1]$ olarak tanımlı küme fonksiyonu, her E ∈ $P(X)$ için

$$\mathrm{PI(E)} = \sum_{F \cap E \neq \varnothing} \mu(F)$$

$(X, P(X))$ üzerinde makul (plausibility) ölçüm olarak adlandırılır. $[49]$

Teorem 4.4.5. Eğer Bel ve PI basit olasılık atamalarında tanımlı güvenirlik ve makul ölçümleri ise o zaman,

i) Bel(E) = 1 – PI(Ē)

ii) Her E $\subset X$ için Bel(E) ≤ PI(E)' dir. [49]

Teorem 4.4.6. Eğer PI, $(X, P(X))$ üzerinde bir makul ölçüm ise o zaman

i) PI(∅) = 0

ii) PI(X) = 1

iii) PI($\bigcap_{i=1}^{n} E_i$) $\leq \sum_{I\subset\{1,2,\dots,n\}, I\neq\varnothing} (-1)^{|I|+1} PI\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)$, burada $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, $P(X)$' in sınırlı, alt sınıflarıdır.

iv) PI alttan süreklidir. [49]

Teorem 4.4.7. Her makul ölçüm monoton ve alt toplamsaldır. [49]

4.5. Possibility Ölçümleri ve Necessity Ölçümleri

Tanım 4.5.1. μ, $\Im$ üzerinde bulanık toplamsaldır (veya f - toplamsaldır) ancak ve ancak T keyfi bir indeks kümesi ve { E_t | t ∈ T}, $\Im$ üzerinde bir alt sınıf olmak üzere,

$$\mu\left(\bigcup_{i\in T} E_t\right) = \sup_{i\in T} \mu(E_i) .$$

Eğer $\Im$ bir sonlu sınıfsa, μ' nün $\Im$ üzerindeki f - toplamsallığı, $E_1 \in \Im$, $E_2 \in \Im$, $E_1 \cup E_2 \in \Im$ olmak üzere aşağıdakine eşdeğerdir:

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \max\{\mu(E_1), \mu(E_2)\} .[49]$$

Tanım 4.5.2. μ' ye $\Im$ üzerinde genelleştirilmiş olasılık (possibility) ölçümü denir ancak ve ancak ‘‘∘’’(birleşim) işlemi $\Im$ üzerinde f - toplamsaldır ve μ(E) < ∞ olacak şekilde E ∈ $\Im$ vardır.

Genellikle bir genelleştirilmiş olasılık ölçümü π olarak belirtilir. [49]

Tanım 4.5.3. Eğer π, $P(X)$ üzerinde bir genelleştirilmiş olasılık ölçümü olarak tanımlanmışsa, f fonksiyonu X üzerinde her $x \in X$ için şu şekilde tanımlanır:

$$f(x) = \pi(\{x\})$$

bu fonksiyona ise yoğunluk (olasılık) fonksiyonu denir. [49]

Teorem 4.5.1. $\mathfrak{I}$ üzerindeki herhangi bir genelleştirilmiş olasılık ölçümü olan π, $\mathfrak{I}$ üzerinde bir alt yarı sürekli bulanık ölçümdür. [49]

Tanım 4.5.4. $P(X)$ üzerindeki düzgün bir genelleştirilmiş olasılık ölçümü olan π'ye olasılık ölçümü denir[49].

Teorem 4.5.2. Eğer f, bir olasılık ölçümü olan π' de yoğunluk fonksiyonu ise

$$\sup_{x \in X} f(x) = 1 \text{ ' dir.} \qquad (*)$$

Tersine, eğer bir $f : X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu $(*)$ ' i sağlarsa f, bir π olasılık ölçümü üzerinde tek olarak tanımlanabilir ve f, π üzerinde yoğunluk fonksiyonudur [49].

Tanım 4.5.5. Bir basit olasılık ayrışımına uyumludur denir ancak ve ancak ''$\circ$'' işlemi, bir küme üzerinde yoğunlaşır. (Buradaki bir sınıf, tamamen kümelerin birleşim bağıntısı tarafından düzenlenmiştir.) [49]

Teorem 4.5.3. X, sonlu olsun. O zaman herhangi bir olasılık ölçümü bir makul ölçümdür ve yöndeş basit olasılık ayrışımı uyumludur. Diğer taraftan, makul ölçümü uyumludur ve basit olasılık ayrışımı bir olasılık ölçümüdür. [49]

Tanım 4.5.6. Eğer π, $P(X)$ üzerinde bir olasılık ölçümü ise onun çift küme fonksiyonu olan v her E ∈ $P(X)$ için şöyle tanımlanır

$$v(E) = 1 - \pi(\bar{E})$$

ve buna $P(X)$ üzerinde necessity ölçümü denir. [49]

Teorem 4.5.4. Bir küme fonksiyonu olan v: $P(X) \rightarrow [0, 1]$ bir necessity ölçümüdür ancak ve ancak T bir indeks kümesi, $\{E_t \mid t \in T\}$ $P(X)$ ' in bir alt sınıfı ve v(∅) = 0 olmak üzere; $v\left(\bigcap_{t\in T} E_t\right) = \inf_{t\in T} v(E_t)$ şartı sağlanır. [49]

Teorem 4.5.5. Herhangi bir necessity ölçümü, bir üst yarı sürekli bulanık ölçümdür. Bundan başka, eğer X sonlu ise o zaman herhangi bir necessity ölçümü belief ölçümünün özel bir örneğidir ve yöndeş basit olasılık ayrışımı uyumludur. [49]

4.6. Sonlu Bulanık Ölçümlerin Özellikleri

Bu bölümde, bir $\Im$ sınıfı olarak F , σ - halkası alınacaktır.

Teorem 4.6.1. Eğer μ bir sonlu bulanık ölçüm ise o zaman, limiti olan herhangi bir $\{E_n\}$ dizisi ve $\{E_n\} \subset$ F için $\lim_n \mu(E_n) = \mu(\lim_n E_n)$ ’ dir. [49]

Tanım 4.6.1. μ, ayrıntılıdır ancak ve ancak F ’ deki kümelerin herhangi bir ayrık dizisi olan $\{E_n\}$ için; $\lim_n \mu(E_n) = 0$ dır. [49]

Teorem 4.6.2. Eğer μ, bir sonlu üst yarı sürekli bulanık ölçüm ise o zaman μ, ayrıntılıdır. [49]

Sonuç 4.6.1. Ölçülebilir uzay üzerindeki herhangi bir sonlu bulanık ölçüm ayrıntılıdır. [49]

5. BÖLÜM

LATİSLER

Bu bölümde özel türde kısmi sıralama bağıntısıyla elde edilmiş olan latisler hakkında temel tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir $[5,10,15,34,35,53]$. Bu bölüm $[15],[28],[45]$ *ve* $[53]$ numaralı referanslardan derlenmiştir.

Tanım 5.1. Bir $\mathcal{L}$ kısmi sıralı kümesinde $\forall x, y \in \mathcal{L}$ için $\{x, y\}$ kümesinin eküs'ü ve ebas'ı varsa $\mathcal{L}$ ye bir latis denir. Yani $(\mathcal{L}, \leq)$ kısmi sıralı kümesi verildiğinde $\forall x, y \in \mathcal{L}$ için;

$$ek\ddot{u}s\{x, y\} = \sup\{x, y\} = x \vee y \in \mathcal{L}$$

ve

$$ebas\{x, y\} = \inf\{x, y\} = x \wedge y \in \mathcal{L}$$

oluyor ise $\mathcal{L}$ ye latis denir. $[15]$

Genellikle bir latisde $x \vee y = ek\ddot{u}s\{x, y\}$ ve $x \wedge y = ebas\{x, y\}$ kısaltmaları kullanılır.

Bir $\mathcal{L}$ latisinde $\forall x, y, z \in \mathcal{L}$ noktaları için

i) $x \leq x \vee y$, $y \leq x \vee y$

ii) $x \leq y$ ve $z \leq y$ ise $x \vee z \leq y$

iii) $x \wedge y \leq x$, $x \wedge y \leq y$

iv) $x \leq y$ ve $x \leq z$ ise $x \leq y \wedge z$

özelliklerinin doğruluğu tanımdan açıktır. $[15]$

Örnek 5.1. $(\mathbb{Z},\leq)$, $\leq$ sıralama bağıntısıyla $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi bir latistir. [34]

Örnek 5.2. Bir $X \neq \varnothing$ kümesi için $(P(X),\subseteq)$ kümesi bir latistir. Gerçekten $B,C \in P(X)$ için $B \vee C = B \cup C$ ve $B \wedge C = B \cap C$ olduğu açıktır. [15]

Teorem 5.1. Bir $\mathcal{L}$ $(\mathcal{L},\leq)\mathbb{R}\mu:\mathcal{F}\to[-\infty,\infty]$ latisinde $\forall x,y,z \in \mathcal{L}$ noktaları için

i) $x \vee x = x$

ii) $x \wedge x = x$

iii) $x \vee y = y \vee x$

iv) $x \wedge y = y \wedge x$

v) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

vi) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

vii) $(x \vee y) \wedge x = x$

viii) $(x \wedge y) \vee x = x$ dir. [15]

Teorem 5.2. Bir $\mathrm{A} \neq \varnothing$ kümesi üzerinde Teorem 5.1 deki özellikleri gerçekleştiren ve $\wedge, \vee$ ile gösterilen ikili işlemi verilmiş olsun.

Bu durumda $\forall x,y \in \mathrm{A}$ için $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y$ olarak tanımlanan $\leq$ bağıntısı A kümesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı oluşturur ve ayrıca $(\mathrm{A},\leq)$ bir latistir.

Teorem 5.2 bir latisin gerçekte bir cebirsel yapı olduğunu göstermektedir. Bu şekilde verilen tanımlama şekline latisin cebirsel tanımı adı verililir. [15]

Örnek 5.3. Bir kümenin alt kümelerinden oluşan ve $A,B \in \mathcal{L}$ için $A \cap B \in \mathcal{L}$ ve $A \cup B \in \mathcal{L}$ koşullarını gerçekleyen bir $\mathcal{L} \neq \varnothing$ küme takımına kümeler latisi adı verilir. [15]

Bir $\mathcal{L}$ kümeler latisinde $A,B \in \mathcal{L}$ için $\mathrm{A} \vee B = \mathrm{A} \cup B$ ve $\mathrm{A} \wedge B = \mathrm{A} \cap B$ olarak tanımlanan $\vee, \wedge$ ikili bağıntıları Teorem 5.2 nin koşullarını sağlar. O halde

$\mathcal{L}$ üzerinde $A \leq B \Leftrightarrow A \cup B = B$ olarak tanımlanan $\leq$ bağıntısı bir kısmen sıralama bağıntısıdır ve bu işlemle birlikte $\mathcal{L}$ küme takımı bir latis olur. Buradaki $\leq$ bağıntısının gerçekte kapsama bağıntısı olduğu açıktır. [15]

Tanım 5.2. A bir latis ve $\varnothing \neq B \subseteq A$ olsun. Eğer her $x, y \in B$ için; $x \vee y \in B$ ve $x \wedge y \in B$ oluyorsa B' ye A'nın bir alt latisi denir. [15]

Örnek 5.4. $(\mathbb{R}, \leq)$ kısmen sıralı bağıntısı bir latistir. $\mathbb{R}$ nin herhangi bir $B \neq \varnothing$ alt kümesi de $\mathbb{R}$ nin bir alt latisidir. [15]

Örnek 5.5. Bir $X \neq \varnothing$ kümesi için $(P(X), \subseteq)$ latisini ele alalım. Bu durumda X'in alt kümelerinden oluşan herhangi bir kümeler ailesi latisinin, $P(X)$'in bir alt latisi olduğunu göstermemiz kolaydır. [15]

Tanım 5.3. $(\mathcal{L}, \leq)$ bir kısmi sıralı küme olsun. $\forall A \subseteq \mathcal{L}$ için

$$\sup A = \vee A \in \mathcal{L}$$

ve

$$\inf A = \wedge A \in \mathcal{L}$$

oluyorsa $\mathcal{L}$ ye bir tam latis denir. [15]

Teorem 5.3. $(A, \leq)$ bir kısmi sıralı küme ve $B \subseteq C \subseteq A$ olsun. B ve C'nin en büyük öğeleri var ve bunlar sırasıyla b ve c ise $b \leq c$ olur. [45]

Teorem 5.4. $(A, \leq)$ kısmi sıralı kümesinin $B \subseteq C$ olacak şekilde iki alt kümesi verilsin. C'nin her bir üst sınırı B'nin de bir üst sınırıdır. Ayrıca $eküs(B)$ ile $eküs(C)$ varsa $eküs(B) \leq eküs(C)$ dir. [45]

Teorem 5.5. Kısmi sıralı bir A kümesi için aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

i) A'nın boş olmayan ve üstten sınırlı olan her B alt kümesinin eküs'ü vardır.

ii) A'nın boş olmayan ve alttan sınırlı olan her B alt kümesinin ebas'ı vardır. [45]

Teorem 5.6. Bir A kısmi sıralı kümesi en küçük ve en büyük elemanlara sahip olsun. Öyleki aşağıdaki iki koşul birbirine denktir.

i) A nın her alt kümesinin eküs'ü vardır.

ii) A nın her alt kümesinin ebas'ı vardır. [45]

Örnek 5.6. $X \neq \varnothing$ kümesi için $P(X)$ üzerinde $\subseteq$ bağıntısına göre bir latis oluşturduğumuzu Örnek 5.1 den hatırlayalım. B kümesi $P(X)$ in bir alt kümesi ise bu durumda $\bigcap B \in P(X)$ elemanı B' nin en küçük üst sınırı olur. Dolayısıyla $(P(X), \subseteq)$ bir tam latis olmaktadır. [34]

Tanım 5.4. $(\mathcal{L}, \leq)$ bir latis olsun. $\forall x, y \in \mathcal{L}$ için $x \vee (y \wedge x) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ oluyorsa $\mathcal{L}$ ye dağılımlı latis denir. [15]

Tanım 5.5. $(\mathcal{L}, \leq)$ bir latis olsun. $\mathcal{L}$ nin bir en küçük ve bir de en büyük elemanı varsa, bu durumda $\mathcal{L}$ ye sınırlı latis denir. Bu en küçük ve en büyük elemanlar sırasıyla 0 ve I ile gösterilecektir. Bu durumda sınırlı $\mathcal{L}$ latisi $(\mathcal{L}, \leq, 0, \mathrm{I})$ ile gösterilir. [15]

Tanım 5.6. $\mathcal{L}$ bir latis ve $c : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ bir dönüşüm olsun. $\forall a, b \in \mathcal{L}$ için

i) $a^c \wedge a = 0$ ve $a^c \vee a = \mathrm{I}$

ii) $a \leq b$ ise $a^c \geq b^c$

iii) $\left(a^c\right)^c = a$

koşulları sağlanıyor ise c dönüşümüne $\mathcal{L}$' de tümleyen dönüşüm denir [53].

Tanım 5.7. $(\mathcal{L}, \leq, 0, \mathrm{I})$ sınırlı latis olsun. $\forall x \in \mathcal{L}$ ve $\exists y \in \mathcal{L}$ için

$$x \vee y = \mathrm{I} \quad \text{ve} \quad x \wedge y = 0$$

oluyor ise $\mathcal{L}$'ye tümlenebilir (komplementlenebilir) latis ve x'e de tümlenebilir (komplementlenebilir) eleman denir. [15]

Tanım 5.8. $\mathcal{L}$, tümlenebilir (komplementlenebilir) dağılımlı bir latis ise $\mathcal{L}$ latisine Boole latisi ya da Boole Cebiri denir.

Verilen bir $\mathcal{L}$ Boole cebirinde $0 \in \mathcal{L}$ ve $\mathrm{I} \in \mathcal{L}$ elemanları tektir. Burada $y \in \mathcal{L}$' ye, x' in tümleyeni denilecektir $[53]$.

Tanım 5.9. $(\mathcal{L}, \leq, 0, \mathrm{I})$ sınırlı latis ve $c: \mathcal{L} \to \mathcal{L},\ c(a) = a^c$ fonksiyonu verilsin. $\forall a, b \in \mathcal{L}$ için

$$\left(a^c\right)^c = a \quad \text{ve} \quad (a \wedge b)^c = a^c \vee b^c$$

oluyorsa $\mathcal{L}$ 'ye De Morgan Cebiri denir. $[15]$

Tanım 5.10. $(\mathcal{L}, \subseteq)$ bir tam latis olsun. $\forall \{x_i : i \in \mathrm{I}\} \subseteq \mathcal{L}$ ve $y \in \mathcal{L}$ için

$$\bigvee_{i \in \mathrm{I}} \left(x_i \wedge y\right) = \left(\bigvee_{i \in \mathrm{I}} x_i\right) \wedge y$$

oluyorsa $\mathcal{L}$ dağılımlı tam latisine, Tam Heyting Cebir denir $[28]$.

Tanım 5.11. $(\mathcal{L}, \leq)$ bir latis olsun. Bu durumda $\mathcal{L}$ kümesindeki $a, b \in \mathcal{L}$ ve $a \leq b$ için $\{x \in \mathcal{L} : x \leq b \ ve\ a \leq x\}$ kümesine $\mathcal{L}$ deki bir aralık denir ve $[a, b]$ şeklinde gösterilir. $[35]$

6.BÖLÜM

6.1 LATİS DEĞERLİ BULANIK ÖLÇÜM FONKSİYONLARI

Bu bölümde, latis teorisi, latis genişlemeleri ve özellikleri incelenecektir. $[5,15,41,42,43,44,49]$. $(\mathcal{L},\wedge,\vee)$ sistemi ya da daha basit bir gösterimle $\mathcal{L}$; eğer $\wedge,\vee$ işlemleri altında kapalı ise bir latis olarak adlandırılır. İki tane latis ailesi $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{L}^*$ olsun. Eğer $\mathcal{L}$ den $\mathcal{L}^*$ ne tanımlanan dönüşüm birebir ise latis işlemleri altında izomorfizmlikten bahsedebiliriz. Eğer $\mathcal{L}$ den $\mathcal{L}^*$ ne bir izomorfiklik varsa $\mathcal{L}$ ye, $\mathcal{L}^*$ ile latis-izomorftur denir ve $\mathcal{L}\cong\mathcal{L}^*$ yazılır. Eğer $x\wedge y=x$ ise $x\leq y$ yazarız veya buna benzer olarak eğer $x\wedge y=y$ ise $y\leq x$ yazarız. Eğer $\mathcal{L}$ nin her A alt kümesi supremum $\vee A$ ve infimum $\wedge A$ yı içeriyorsa, $\mathcal{L}$ ye bir tam latis denir. Bir $\mathcal{L}$ tam latisi maksimum ve minimum elemanları içeren bir latis ailesidir. Ve bu bölümde maksimum ve minimum elemanlar, sırasıyla L_1 ve L_0 ile gösterilecektir.

Bu kısımda kullanılacak X kümesi, aksi belirtilmedikçe bir tam küme olarak alınacaktır ve $\mathcal{L}$ de, X in alt kümelerinin oluşturduğu bir latisler ailesi olarak kabul edilecektir. Bu bölüm $[26],[35],[41]$ *ve* $[49]$ numaralı referanslardan derlenmiştir.

Tanım 6.1.1 Eğer bir $\mathcal{L}$ latisler ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir latis $\sigma-$cebiri olarak adlandırılır:

i-) $\forall f\in\mathcal{L}$ için $f^c\in\mathcal{L}$

ii-) Eğer $n=1,2,3,...$ için $f_n\in\mathcal{L}$ ise o zaman $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\vee}} f_n\in\mathcal{L}$ dir. $[35]$

$\mathcal{L}$ tarafından üretilen latis $\sigma-$cebiri $\sigma(\mathcal{L})$ şeklinde gösterilir.

Bu kısım boyunca kullanacağımız latisler, tam latisler olacaktır ve μ de, X in bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonu olarak kabul edilecektir.

Tanım 6.1.2 Eğer $m:\sigma(\mathcal{L})\to R\cup\{\infty\}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, m ye , $\sigma(\mathcal{L})$ latis $\sigma-$cebiri üzerinde bir latis değerli ölçüm adı verilir.

i-) $m(\varnothing)=L_0$

ii-) $\forall f,g\in\sigma(\mathcal{L})$ için $m(f),m(g)\geq L_0: f\leq g\Rightarrow m(f)\leq m(g)$.

iii-) $\forall f,g\in\sigma(\mathcal{L}): m(f\vee g)+m(f\wedge g)=m(f)+m(g)$.

iv-) Eğer $f_n\subset\sigma(\mathcal{L}), n\in\mathbb{N}$ ve $f_1\leq f_2\leq....\leq f_n\leq...$ ise o zaman $m\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\vee}} f_n\right)=\lim\limits_{n} m(f_n)$ dir. [41]

Uyarı 6.1.1 m_1 ve m_2 aynı latis $\sigma-$cebiri üzerinde tanımlı latis değerli ölçümler olsunlar. Eğer bunlardan birisi sonlu ise;

$$m(E)=m_1(E)-m_2(E),\ E\in\sigma(\mathcal{L})$$

fonksiyonu iyi tanımlıdır ve $\sigma(\mathcal{L})$ üzerinde sayılabilir toplamsaldır. [41]

Tanım 6.1.3 Eğer X üzerindeki üyelik fonksiyonlarının $\sigma(\mathcal{L})$ latisler ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa latis değerli fuzzy (bulanık) $\sigma-$cebir olarak adlandırılır.

i-) $\forall\alpha\in\mathcal{L}$ için α sabit olmak üzere; $\alpha\in\sigma(\mathcal{L})$

ii-) $\forall\mu\in\sigma(\mathcal{L})$ için $1-\mu\in\sigma(\mathcal{L})$ dir.

iii-) Eğer $(\mu_n)\in\sigma(\mathcal{L})$ ise $\sup(\mu_n)\in\sigma(\mathcal{L}), n\in\mathbb{N}$ dir. [41]

Tanım 6.1.4 Eğer $m:\sigma(\mathcal{L})\to R\cup\{\infty\}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, m ye latis değerli bulanık ölçüm denir.

i-) $m(\varnothing)=L_0$

ii-) $\forall \mu_1, \mu_2 \in \sigma(\mathcal{L}), m(\mu_1), m(\mu_2) \geq L_0;\ \mu_1 \leq \mu_2 \Rightarrow m(\mu_1) \leq m(\mu_2).$

iii-) $\forall \mu_1, \mu_2 \in \sigma(\mathcal{L}),\ m(\mu_1 \vee \mu_2) + m(\mu_1 \wedge \mu_2) = m(\mu_1) + m(\mu_2).$

iv-) $(\mu_n) \in \sigma(\mathcal{L}), n \in \mathbb{N},\ \mu_1 \leq \mu_2 ... \leq \mu_n \leq ...;\ \sup(\mu_n) = \mu \Rightarrow m(\mu) = \lim_n m(\mu_n).$ [41]

Tanım 6.1.5 m^* ile gösterilen bir latis değerli bulanık dış ölçüm, $\mathcal{L}^X$ üzerinde tanımlı latis değerli küme fonksiyonlarının bir genişlemesidir ve aşağıdaki özellikleri sağlar.

i-) $m^*(\varnothing) = L_0$

ii-) $m^*(\mu_1) \leq m^*(\mu_2)$ için $\mu_1 \leq \mu_2$.

iii-) $m^*\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} \mu_{E_i}\right) \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} m^*(\mu_{E_i}).$ [41]

Örnek 6.1.1 Aşağıdaki örneği inceleyelim:

$$m^* = \begin{cases} L_0, \mu_E = \varnothing \\ L_1, \mu_E \neq \varnothing \end{cases}$$

(Burada L_0 latis kümelerinden oluşan ailelerin minimum elemanı ve L_1 ise maksimum elemanıdır.)

Eğer X en az iki eleman içerirse m^* latis değerli bulanık dış ölçüm olur fakat aksi halde $\mathcal{L}^X$ üzerinde bir latis değerli bulanık ölçüm olmaz. [41]

Önerme 6.1.1 F, X in L_0 ı içeren bulanık alt latis kümelerinin bir sınıfı öyleki her $\mu_A \leq \mu_X$ için F de $(\mu_{B_n})_{n=1}^{\infty}$ dizisi mevcuttur ve $\mu_A \leq (\mu_{B_n})_{n=1}^{\infty}$ dır. ψ, F üzerindeki latis değerli fonksiyonların bir genişlemesi olsun öyleki $\mu_A \in F$ için $\psi(\varnothing) = L_0$ ve $\psi(\mu_A) \geq L_0$ dir. O zaman m^*, $\mathcal{L}^X$ üzerinde

$$m^*(\mu_A) = \inf\left\{\psi(\mu_{B_n})_{n=1}^{\infty} : \mu_{B_n} \in F, \mu_A \leq \mu_{B_n}\right\}$$

ile tanımlı bir bulanık dış ölçüm olur. $[41]$

Teorem 6.1.1 m^* bulanık ölçülebilir kümelerin sınıfı olan B, bir $\sigma-$ cebirdir. Aynı zamanda m^* nün B ye kısıtlanışı olan $\overline{m}$, bir latis değerli bulanık ölçümdür. $[41]$

Teorem 6.1.2 (Genelleştirilmiş Carathedory Genişleme Teoremi) m , $\sigma(\mathcal{L}) \leq \mathcal{L}^X$ $\sigma-$cebiri üzerinde bir latis değerli bulanık ölçüm olsun. Ve $\mu_E \leq \mu_X$ için $m^*(\mu_E) = \inf \left\{ m\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\vee}} \mu_{E_n} \right) : \mu_{E_n} \in \sigma(\mathcal{L}), \mu_E \leq \overset{\infty}{\underset{n=1}{\vee}} \mu_{E_n} \right\}$ olsun. O zaman aşağıdaki özellikler geçerlidir:

i-) m^*, bir latis değerli bulanık dış ölçümdür.

ii-) $\mu_E \in \sigma(\mathcal{L})$ iken $m(\mu_E) = m^*(\mu_E)$ dir.

iii-) $\mu_E \in \sigma(\mathcal{L})$ iken μ_E, m^* latis değerli bulanık ölçülebilirdir.

iv-) $\overline{m}$, m^* nin m^*- latis değerli bulanık ölçülebilir kümelere daraltılmışı, $\sigma(\mathcal{L})$ yi içeren bir bulanık $\sigma-$cebiri üzerinde bir latis değerli bulanık ölçüme, m nin bir genişlemesidir.

v-) Eğer m latis değerli bulanık ölçümü $\sigma-$sonlu ise, $\overline{m}$ latis değerli bulanık ölçümü ($\sigma(\mathcal{L})$ yi içeren en küçük bulanık $\sigma-$cebiri üzerinde) m nin bir genişlemesidir ve tektir. $[41]$

6.2. Sıfır – Toplamsallık

Bu kısımda $\mathcal{F}$, $P(X)$ in alt kümelerinin bir $\sigma-$cebiri ve $\mu:\mathcal{F}\to[-\infty,\infty]$ ise genişletilmiş reel değerli bir ölçüm fonksiyonu olarak alınacaktır.

Tanım 6.2.1. $\mu:\mathcal{F}\to[-\infty,\infty]$ fonksiyonu $E,F\in\mathcal{F}$, $E\cap F=\varnothing$ ve $\mu(F)=0$ için;

$$\mu(E\cup F)=\mu(E)$$

koşulunu sağlıyorsa μ ye sıfır-toplamsaldır denir. [49]

Teorem 6.2.1. Boş olmayan herhangi bir $F\in\mathcal{F}$ için $\mu(F)=0$ ise μ sıfır-toplamsaldır. [49]

Teorem 6.2.2 Eğer $\mu:F\to[0,\infty]$ azalmayan bir küme fonksiyonu ise aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) μ sıfır toplamsaldır.

(2) $E,F\in\mathcal{F}$ ve $\mu(F)=0$ için $\mu(E\cup F)=\mu(E)$ dir.

(3) $E,F\in\mathcal{F}$, $F\subset E$ ve $\mu(F)=0$ için $\mu(E-F)=\mu(E)$ dir.

(4) $E,F\in\mathcal{F}$ ve $\mu(F)=0$ için $\mu(E-F)=\mu(E)$ dir.

(5) $E,F\in\mathcal{F}$ ve $\mu(F)=0$ için $\mu(E\vartriangle F)=\mu(E)$ dir. [49]

Örnek 6.2.1 $X=\{a,b\}$, $\mathcal{F}=P(X)$ ve

$$\mu(E)=\begin{cases}1, & E=X\\ 0, & E\neq X\end{cases} \quad \text{ise} \qquad [49]$$

Teorem 6.2.3. μ sıfır-toplamsal bir fuzzy-ölçümü ve $E\subset\mathcal{F}$ olsun. $\mathcal{F}$ de $\lim_n \mu(F_n)=0$ olacak şekilde herhangi bir azalan küme dizisi için,

$$\lim_n \mu\left(E \cup F_n\right) = \mu\left(E\right) \text{ ve diğer yandan}$$

$\mu\left(E\right) < \infty$ iken $\mu(E \cup F_{n_0}) < \infty$ koşulunu sağlayan en küçük bir pozitif n_0 sayısı vardır. [49]

Teorem 6.2.4. $E \in \mathcal{F}$ ve μ sıfır-toplamsal bir bulanık ölçüm olsun. $\mathcal{F}$ deki $\lim_n \mu\left(F_n\right) = 0$ olan herhangi bir azalan $\left\{F_n\right\}$ dizisi için $\lim_n \mu\left(E - F_n\right) = \mu\left(E\right)$ dir. [49]

6.3 Oto-Süreklilik (Auto-continuity)

Tanım 6.3.1 $\mu : \mathcal{F} \to \left[-\infty, \infty\right]$ fonksiyonu $n = 1, 2, 3, .., E \in \mathcal{F}$, $F_n \in \mathcal{F}$, $E \cap F_n \neq \varnothing$ (ya da $F_n \subset E$) ve $\lim_n \mu\left(F_n\right) = 0$ iken

$$\lim_n \mu\left(E \cup F_n\right) = \mu\left(E\right) \qquad \left[\lim_n \mu\left(E - F_n\right) = \mu\left(E\right)\right]$$

koşulu sağlanıyorsa μ ' ye üstten (ya da alttan) oto-süreklidir denir. Eğer μ hem üstten hem de alttan oto-sürekli ise μ ' ye oto-süreklidir denir. [49]

Teorem 6.3.1 $\mu : \mathcal{F} \to \left[-\infty, \infty\right]$ genişletilmiş reel değerli küme fonksiyonu olsun. Herhangi bir $E \in \mathcal{F}$ ve $E \neq \varnothing$ için

$$\left|\mu\left(E\right)\right| \geq \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir $\varepsilon > 0$ sayısı bulunabiliyorsa μ oto-süreklidir. [49]

Teorem 6.3.2 μ : $\mathcal{F}$ →[−∞,∞] fonksiyonu üstten ya da alttan oto-sürekli ise μ sıfır-toplamsaldır. [49]

Sıradaki iki teoremde negatif olmayan küme fonksiyonlarının sürekliliği ile oto-süreklilik arasındaki ilişki incelenecektir.

Teorem 6.3.3 $\mu : \mathcal{F} \to [0,\infty]$, $\varnothing$ üzerinde üstten sürekli ve üstten (ya da alttan) oto-sürekli ise μ üstten (ya da alttan) süreklidir. [49]

Teorem 6.3.4 $\mu : \mathcal{F} \to [0,\infty]$, $\varnothing$ üzerinde azalmayan üstten sürekli bir fonksiyon ve üstten oto-sürekli ise o zaman μ üstten süreklidir. [49]

Teorem 6.3.5 $\mu : \mathcal{F} \to [0,\infty]$ aşağı yarı-sürekli fuzzy ölçüsü olsun. μ , üstten oto-sürekli ise , $\lim_n \mu(E_n) = 0$ koşulunu sağlayan $\mathcal{F}$ ‘ nin bir $\{E_n\}$ dizisinin,

$$\mu\left(\overline{\lim_n} E_{n_i}\right) = 0$$

olacak şekilde bir $\{E_{n_i}\}$ alt dizisi bulunabilir.

Bu durumun tersi , μ sonlu sıfır-toplamsal olduğu zaman yine doğrudur. [49]

Teorem 6.3.6 $\mu : \mathcal{F} \to [0,\infty]$ sınırlı bir fuzzy ölçüsü olsun.

μ alttan oto-süreklidir $\Leftrightarrow$ μ sıfır-toplamsaldır ve herhangi bir $A \in \mathcal{F}$, $\{E_n\}$ alt dizisi vardır öyleki,

$$\mu\left(A - \overline{\lim_n} E_{n_i}\right) = \mu(A) \text{ dır. } [49]$$

Teorem 6.3.7 $\mu : \mathcal{F} \to [0,\infty]$ fuzzy ölçüsü olsun. Eğer μ üstten oto-sürekli ise alttan oto-süreklidir. Dahası , μ sonlu ise alttan oto-süreklilik üstten oto-sürekliliği verir ve böylece oto-süreklilik, üstten oto-süreklilik ve alttan oto-süreklilik denktir. [49]

Tanım 6.3.2 $\mu : \mathcal{F} \to [-\infty,\infty]$ üstten (alttan) düzgün oto-süreklidir $\Leftrightarrow$ $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki ;

$$\mu(E) - \varepsilon \le \mu(E \cup F) \le \mu(E) + \varepsilon \qquad \left[\mu(E) - \varepsilon \le \mu(E - F) \le \mu(E) + \varepsilon\right]$$

$E \in \mathcal{F}$, $F \in \mathcal{F}$, $E \cap F = \varnothing$ (ya da $E \subset F$) ve $|\mu(F)| < \delta$ dır.

μ hem alttan hem de üstten düzgün oto-sürekli ise μ ye düzgün oto-süreklidir denir. [49]

Teorem 6.3.8 Eğer $\mu : \mathcal{F} \to [-\infty, \infty]$ fonksiyonu üstten düzgün oto-sürekli ise (alttan) o zaman üstten oto-süreklidir (alttan). Böylece düzgün oto-süreklilik oto-sürekliliği verir. [49]

Teorem 6.3.9 $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ fonksiyonu azalmayan ise aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) μ , düzgün oto-süreklidir.

(2) μ, üstten düzgün oto-süreklidir.

(3) μ , alttan düzgün oto-süreklidir.

(4) $E \in \mathcal{F}$, $F \in \mathcal{F}$ ve $\mu(F) \leq \infty$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır ki ;

$$\mu(E) - \varepsilon \leq \mu(E \vartriangle F) \leq \mu(E) + \varepsilon \quad \text{dir.} \qquad [49]$$

Buraya kadar verilen oto-süreklilik, düzgün oto-süreklilik, üstten düzgün oto-süreklilik ve alttan düzgün oto-süreklilik kavramları klasik analizde ve klasik ölçümde ölçülebilir fonksiyonların yakınsaklıklarının belirlenmesinde önemli bir yere sahiptir. Aşağıda ispatıyla verilen Egoroff teoremi ile ispatsız verilen Lusin Teoremi yardımıyla, ölçülebilir kümeler üzerindeki ölçülebilir fonksiyonlar dizilerinin, ölçülebilir fonksiyonlara hangi şartlar altında düzgün yakınsak, hangi şartlar altında hemen hemen düzgün yakınsak olduğu ifade edilmeye çalışılmıştır. [26]

Teorem 6.3.10 (Egoroff Teorem) $\mu(X) < \infty$ ve (f_n), hemen hemen her yerde reel değerli ölçülebilir fonksiyonları, hemen hemen her yerde düzgün yakınsak olan f, reel değerli ölçülebilir fonksiyona dönüştüren, hemen hemen her yerde reel değerli ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. O zaman f_n, f ye hemen hemen düzgün yakınsaktır. [26]

İspat: Genelliği bozmaksızın f_n ve f nin hemen hemen her yerde reel değerli olduklarını varsayalım. Her k pozitif tamsayısı için,

$$A_{n,k} = \bigcap_{m=n}^{\infty} \left\{ x : \left| f_m(x) - f(x) < \frac{1}{k} \right| \right\} \quad \text{olsun.}$$

Hemen hemen her yerde $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ olduğundan,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,k}\right) = \mu(X) \quad \text{yazabiliriz.}$$

$A_{n,k} \subset A_{n+1,k}$ olduğundan, $\lim_{n\to\infty} \mu(A_{n,k}) = \mu(X)$ olur. $\varepsilon > 0$ verilsin. Her k pozitif tamsayısı için n_k vardır öyleki, $n \geq n_k$ için,

$$\mu(X - A_{n,k}) < \frac{\varepsilon}{2^k} \quad \text{dir.}$$

$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_k,k}$ olsun. O zaman $\mu(X - A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X - A_{n_k,k}) < \varepsilon$ olur. Buradan da f_n nin f ye hemen hemen düzgün yakınsak olduğu kolayca görülür. [26]

Teorem 6.3.10 (Lusin's Teorem) f, R üzerinde, bir reel değerli ölçülebilir fonksiyon olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. O halde, R üzerinde sürekli bir g fonksiyonu vardır öyleki;

$$m\{x \in R : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon \quad \text{dir. [26]}$$

İspat: (G_i), $\mathbb{R}$ deki açık kümelerin bir sayılabilir tabanı olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Ayrıca $G^{(i)}$, $f^{-1}(G_i)$ yi içeren açık bir küme olsun öyleki, $m\left(G^{(i)} - f^{-1}(G_i)\right) < \frac{\varepsilon}{2^i}$

olsun. Ayrıca;

$$F_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{\infty} G^{(i)} - f^{-1}(G_i) \ ve\ g = f | R - F_\varepsilon$$

olarak alırsak buradan $g^{-1}(G_i) = G^{(i)} \cap [R - F_\varepsilon]$ olarak bulunur. [26]

Örnek 6.3.1 f, R üzerinde, reel değerli bir fonksiyon ve her $a,b \in R$ için $f(a+b) = f(a) + f(b)$ olsun. O zaman f sürekliyse sadece bir noktada süreklidir. [26]

7.BÖLÜM

BULANIK ÖLÇÜM UZAYLARINDA ÖLÇÜLEBİLİR FONKSİYONLAR

Bu bölümde, $(X,\mathcal{F})$ ölçülebilir uzay $\mu:\mathcal{F}\to[0,\infty]$ fuzzy ölçümü (veya yarı sürekli fuzzy ölçümü) ve $\mathcal{B}\subset(-\infty,\infty)$ üzerinde Borel cisim olarak alınacaktır. Bu kısım $[49]$ numaralı referanstan derlenmiştir.

7.1. Ölçülebilir Fonksiyonlar

Tanım 7.1.1 Herhangi bir $B\in\mathcal{B}$ Borel kümesi için

$$f^{-1}(B)=\{x: f(x)\in\mathcal{B}\}\in\mathcal{F}$$

ise X üzerinde bir gerçel değerli $f:X\to(-\infty,\infty)$ fonksiyonu $\mathcal{F}$-ölçülebilirdir denir (ya da kısaca ölçülebilir). $[49]$

Teorem 7.1.1 Eğer $f:X\to(-\infty,\infty)$ fonksiyonu gerçel değerli bir fonksiyon ise aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) f ölçülebilirdir.

(2) Herhangi bir $\alpha\in(-\infty,\infty)$ için; $\{x: f(x)\geq\alpha\}\in\mathcal{F}$

(3) Herhangi bir $\alpha\in(-\infty,\infty)$ için; $\{x: f(x)>\alpha\}\in\mathcal{F}$

(4) Herhangi bir $\alpha\in(-\infty,\infty)$ için; $\{x: f(x)\leq\alpha\}\in\mathcal{F}$

(5) Herhangi bir $\alpha\in(-\infty,\infty)$ için $\{x: f(x)<\alpha\}\in\mathcal{F}$ $[49]$

Sonuç 7.1.1 f ölçülebilir bir fonksiyon ise herhangi bir $\alpha \in (-\infty, \infty)$ için $\{x : f(x) = \alpha\} \in \mathcal{F}$ 'dir. [49]

Tanım 7.1.2 $R = (-\infty, \infty)$, $R^n = R \times R \times R \times \ldots \times R$ $n-$boyutlu çarpım uzayı olsun. Şimdi;

$$L^{(n)} = \left\{ \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i) : -\infty < a_i \le b_i < \infty, i = 1, 2, \ldots, n \right\} \text{ alalım. } B^{(n)} = \mathcal{F}\left(L^{(n)}\right)$$

$\sigma-$ cebirine R^n üzerinde Borel cisim denir ve $B^{(n)}$ içindeki kümeler (n-boyutlu) Borel kümeleri olarak adlandırılırlar. $f : R^n \to R$ fonksiyonu $\left(R^{(n)}, B^{(n)}\right)$ ölçülebilir uzayında ölçülebilir bir fonksiyonsa bu fonksiyona (n-ary) Borel fonksiyonu denir. [49]

Teorem 7.1.2 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları ölçülebilir fonksiyonlar olsunlar. Eğer $g : R^n \to R$ bir Borel fonksiyon ise $g(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ ölçülebilir bir fonksiyondur. [49]

Teorem 7.1.3 Herhangi bir $x \in X$ için, $\{f_n\}$ ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ve

$$h(x) = \sup_n \{f_n(x)\} \text{ ve } g(x) = \inf_n \{f_n(x)\} \text{ ise } h \text{ ve } g \text{ ölçülebilirdir. } [49]$$

Sonuç 7.1.2 $\{f_n\}$ ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ve

$$\overline{f}(x) = \overline{\lim_n} f_n(x) \text{ ve } \underline{f}(x) = \underline{\lim_n} f_n(x) \text{ ise, } \overline{f} \text{ ve } \underline{f} \text{ ölçülebilirdir.}$$

Ayrıca $\lim_n f_n$ varsa o da ölçülebilirdir. [49]

Bundan sonra sadece negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar incelenecek ve $f, f_1, f_2, ..., f_n$ sembolleri negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonları göstermek için kullanacaktır. Bütün negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{F}$ ile gösterildi. Bundan sonraki birçok sonuç için genelleme yapılırsa, herhangi bir güçlük olmaksızın, ölçülebilir fonksiyonlar, gerçel değerli olarak genişletilebilir. [49]

7.2 Hemen Hemen ve Pseudo-Hemen Hemen

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ fuzzy ölçüm (veya yarı-sürekli fuzzy ölçüm) uzayı üzerinde ölçülebilir fonksiyon tanımı, klasik ölçüm teorisiyle özdeştir, sonuç olarak bu μ küme fonksiyonuyla bağlantılı değildir, fakat ölçülebilir fonksiyonların özellikleri söz konusu olduğunda küme fonksiyonu görüşleri incelenmelidir. Örneğin, eğer f fonksiyonu sonlu fuzzy ölçüm uzayında ölçülebilir bir fonksiyon ise, “ f hemen hemen her yerde sıfıra eşittir” ifadesinin anlamı nedir? [49]

Olasılık teoreminde “rasgele bir değişken ζ ,1 olasılık ile 0’a eşittir” ifadesi “rasgele bir değişken ζ ,0 olasılıkla 0’a eşit değildir” ifadesine denktir, çünkü olasılık ölçümleri toplanabilirlik özelliğine sahiptir. Şöyleki, eğer ρ olasılık ölçümü ise herhangi bir E olayı için,

$$\rho(E) + \rho(\overline{E}) = \rho(E \cup \overline{E}) = 1$$

dir. Fuzzy ölçümlerinde genellikle toplanabilirlik özelliği kaybolduğu için, aşağıdaki tanımda belirtildiği gibi “hemen hemen her yerde” ifadesi, “hemen hemen her yerde” ve “pseudo hemen hemen her yerde” diye ikiye ayrılmaktadır. [49]

Tanım 7.2.1 $A \in \mathcal{F}$ olsun ve P, A nın içindeki noktalara göre bir önerme olsun. P, $A - E$ üzerinde doğru olacak şekilde $E \in \mathcal{F}$ ve $\mu(E) = 0$ varsa, “P, hemen hemen her yerde A üzerinde doğrudur” deriz. P, $A - F$ üzerinde doğru olacak şekilde $F \in \mathcal{F}$ ve $\mu(A - F) = \mu(A)$ varsa, “P, pseudo hemen hemen her yerde A üzerinde doğrudur” deriz. [49]

“Hemen hemen her yerde” ve “pseudo-hemen hemen her yerde” ifadelerini sırasıyla “h.h.h.” ve “p.h.h.h.” ile göstereceğiz ve “$\{f_n\}$ h.h.h. f ’ e yakınsar (veya “ $\{f_n\}$ p.h.h.h. f ’ e yakınsar”) ifadelerini de sırasıyla “ $f_n \xrightarrow{h.h.h} f$ ” (veya “ $f_n \xrightarrow{p.h.h.h} f$ ”) ile göstereceğiz. [49]

Örnek 7.2.1 Herhangi bir $E \in \mathcal{F}$ için, $X = \{0,1\}$, $\mathcal{F} = P(X)$ ve

$$\mu(E) = \begin{cases} 1; & E = X \\ 0; & E \neq X \end{cases} \qquad \text{olsun.}$$

Verilen bu ölçülebilir fonksiyon dizisi için $f_n \xrightarrow{h.h.h} 0$ ve $f_n \xrightarrow{h.h.h} 1$ olur, fakat asla $f_n \xrightarrow{p.h.h.h} 0$ veya $f_n \xrightarrow{p.h.h.h} 1$ olamaz.

Örnekten de anlaşılacağı gibi, bu durumun klasik ölçüm teorisinden çok farklı olduğunu görüyoruz. Eğer $f_n \xrightarrow{h.h.h} f$ ve $f_n \xrightarrow{h.h.h} f'$ koşullarının her ikisi de gerçekleşiyorsa, h.h.h. $f = f'$ dür. [49]

Şunu da belirtelim ki, “h.h.h.” ve “p.h.h.h.” durumları tamamen birbirine simetrik durumlar değildir. Gerçekte, eğer P önermesi $A \in \mathcal{F}$ üzerinde h.h.h. doğru ise o zaman bu önerme A nın $\mathcal{F}$ ’ye bağlı herhangi bir alt kümesi içinde doğrudur; fakat burada “h.h.h.” yerine “p.h.h.h.” olsaydı bu ifademiz doğru olmayacaktı. Bu durum aşağıdaki örnekte açıklanmıştır. [49]

Örnek 7.2.2 Herhangi bir $E \in \mathcal{F}$ için, $X = \{a,b,c\}$, $\mathcal{F} = P(X)$ olsun. μ ise aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\mu(E) = \begin{cases} |E| \; ; & E \neq \{a,b\} \\ 3 \; ; & E = \{a,b\} \end{cases} \qquad \text{ve}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 \; ; & x \in \{a,b\} \\ 1 \; ; & x = c \end{cases}$$ olsun. μ nün fuzzy ölçüm olduğu ve

$\mu(\{x: f(x)=0, x\in X\}) = \mu(\{a,b\}) = 3 = \mu(X)$ olduğu kolayca ispatlanabilir.

Böylece, X üzerinde p.h.h.h $f=0$ dır. Fakat;

$\mu(\{x: f(x)=0, x\in\{a,c\}\}) = \mu(\{a\}) = 1 \neq \mu(\{a,c\}) = 2$ dir. Sonuç olarak "$\{a,c\}$ üzerinde "p.h.h.h. $f=0$" ifadesi doğru değildir. [49]

Bu konuyla ilgili "hemen hemen düzgün yakınsama" ve "ölçümde yakınsama" kavramları ölçülebilir fonksiyon dizileri içindir ve fuzzy ölçüm uzayı (ya da yarı-sürekli fuzzy ölçüm uzayı) üzerine dağılırlar. [49]

Tanım 7.2.2 $A\in\mathcal{F}$, $f\in\mathcal{F}$, $\{f_n\}\subset\mathcal{F}$ olsun. Herhangi bir $k=1,2,\ldots$ sabiti için $\{f_n\}$, $A-E_k$ üzerinde f e düzgün yakınsayacak şekilde $\lim_k \mu(E_k)=0$ ile $\{E_k\}\subset\mathcal{F}$ varsa, $\{f_n\}$, A üzerinde f ye hemen hemen düzgün yakınsar denir ve $f_n \xrightarrow{h.h.d} f$ ile gösterilir.

Herhangi $k=1,2,\ldots$ sabiti için, $\{f_n\}$, $A-F_k$ üzerinde f e düzgün yakınsayacak şekilde $\lim_k \mu(A-F_k)=\mu(A)$ ile $\{F_k\}\subset\mathcal{F}$ varsa, $\{f_n\}$, A üzerinde f e pseudo-hemen hemen düzgün yakınsar denir ve $f_n \xrightarrow{p.h.h.d} f$ ile gösterilir. [49]

Tanım 7.2.3 $A\in\mathcal{F}$, $f\in\mathcal{F}$ ve $\{f_n\}\subset\mathcal{F}$ olsun. Verilen herhangi bir $\varepsilon>0$ için,

$$\lim_n \mu(\{x: |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}\cap A)=0$$

ise $\{f_n\}$, μ içinde, A üzerinde f e yakınsar (veya ölçüm içinde yakınsar, eğer bir karışıklık yoksa) denir ve A üzerinde $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ile gösterilir. Verilen herhangi bir $\varepsilon>0$ için,

$$\lim_{n} \mu\left(\left\{x : \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon\right\} \cap A\right) = \mu(A)$$

ise $\{f_n\}$, μ içinde, A üzerinde f e pseudo-yakınsar (veya ölçüm içinde pseudo-yakınsar) denir ve A üzerinde $f_n \xrightarrow{p.\mu} f$ ile gösterilir. $[49]$

Örnek 7.2.3 $X = [0,\infty)$, $\mathcal{F} = B$ ve μ Lebesgue ölçümü olsun, öyleki, $B_+, [0,\infty)$ içindeki bütün Borel kümelerinden oluşan sınıfı temsil etsin. Herhangi bir $x \in X$ için $f_n(x) = \dfrac{x}{n}, n = 1, 2, ...$ ve $f(x) = 0$ alırsak,

$$f_n \xrightarrow{p.h.h.d} f$$

elde ederiz. Fakat $\{f_n\}$, X üzerinde f e hemen hemen düzgün yakınsamaz. Hatta,

$f_n \xrightarrow{p.\mu} f$ olur, fakat $\{f_n\}$, μ içinde X üzerinde f e yakınsamaz. $[49]$

7.3 Ölçülebilir Fonksiyon Dizisilerinin Yakınsamaları Arasındaki İlişki

Bu kısımda klasik analizde önemli bir yere sahip olan fonksiyon yakınsamalarının, bulanık ölçüm uzayı üzerinde ne anlama geldiği hakkında bilgi verilecektir. Bu kısım $[21]$ ve $[49]$ numaralı referanstan derlenmiştir.

Teorem 7.3.1 Herhangi bir $A \in \mathcal{F}$ ve A içindeki noktalara göre herhangi bir P önermesi için P, A üzerinde hemen hemen doğruysa P, A üzerinde p.h.h.h. doğrudur $\Leftrightarrow \mu$ sıfır-toplamsaldır. $[49]$

Sonuç 7.3.1 $A \in \mathcal{F}$, $f \in \mathcal{F}$ ve $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ ve μ sıfır toplamsal olsun. Eğer A üzerinde $f_n \xrightarrow{h.h.h} f$ ise, A üzerinde $f_n \xrightarrow{p.h.h.h} f$ olur. $[49]$

Teorem 7.3.2 $A \in \mathcal{F}$, $f \in \mathcal{F}$ ve $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ ve μ alttan otosürekli olsun. Eğer A üzerinde $f_n \xrightarrow{h.h.d} f$ ise, A üzerinde $f_n \xrightarrow{p.h.h.d} f$ olur. $[49]$

Teorem 7.3.3 Herhangi bir $A \in \mathcal{F}$ ve herhangi bir $f \in \mathcal{F}$ ve $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ için, A üzerinde $f_n \xrightarrow{\mu} f$ olduğunda, A üzerinde $f_n \xrightarrow{p.\mu} f \Leftrightarrow \mu$ alttan otosüreklidir. $[49]$

Aşağıdaki teorem, Egoroff'un klasik ölçüm uzayından fuzzy ölçüm uzayına yaptığı genellemedir.

Teorem 7.3.4 (Egoroff teoremi) μ fuzzy ölçüm, $A \in \mathcal{F}$ ve $\mu(A) < \infty$ olsun. Eğer A nın her yerinde $f_n \to f$ ise, A üzerinde $f_n \xrightarrow{h.h.d} f$ ve $f_n \xrightarrow{p.h.h.d} f$ dir. $[21]$

İspat: $A = X$ ve μ sonlu olsun demekle herhangi bir kaybımız olmayacaktır. Eğer herhangi bir $m = 1, 2, ...$ için

$$E_n^m = \bigcap_{i=n}^{\infty} \left\{ x : \left| f_i(x) - f(x) \right| < \frac{1}{m} \right\}$$ şeklinde tanımlarsak,

$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m$ dir. Eğer her yerde $f_n \to f$ ise, herhangi bir $m = 1, 2, ...$ için $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m = X$ dir. Yani, $n \to \infty$ iken $E_n^m \nearrow X$ ve bu nedenle herhangi bir sabit $m = 1, 2, ...$ için $n \to \infty$ iken $\overline{E_n^m} \searrow \varnothing$. Keyfi verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için, üstten süreklilik ve μ nün sonluluğu kullanılarak, $\mu\left(\overline{E_{n_1}^1}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde n_1 bulunur; bu n_1 için, $\mu\left(\overline{E_{n_1}^1} \cup \overline{E_{n_2}^2}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} = \frac{3}{4}\varepsilon$ olacak şekilde n_2 bulunur.

Genel olarak, $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} \overline{E_{n_i}^i}\right) < \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon}{2^i} = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\varepsilon < \varepsilon$ olacak şekilde $n_1, n_2, ... n_k$ vardır. Buradan $\{n_i\}$ sayı dizisini ve $\left\{\overline{E_{n_i}^i}\right\}$ küme dizisini elde ederiz. μ nün alttan sürekliliğini kullanarak,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{E_{n_i}^{i}}\right)\leq\varepsilon \quad \text{buluruz.}$$

Şimdi $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_{n_i}^{i}$ üzerinde $\{f_n\}$ nin f ye düzgün yakınsadığını göstermeliyiz. Verilen herhangi bir $\delta > 0$ için, $i_0 > \frac{1}{\delta}$ alalım. Eğer $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} E_{n_i}^{i}$ ise $x \in E_{n_{i_0}}^{i_0}$ olduğundan, $i > n_{i_0}$ olduğunda

$$\left| f_i(x) - f(x) \right| < \frac{1}{i_0} < \delta \quad \text{olur.}$$

Buradan $f_n \xrightarrow{h.h.d} f$ olduğunu ispatlamış oluruz. Benzer yolla, A üzerinde $f_n \xrightarrow{p.h.h.d} f$ olduğunu da ispatlayabiliriz. [21]

Teorem 7.3.5 (Lusin Teoremi) $\mu, \mathcal{F}$ üzerinde zayıf sıfır toplamsal bulanık ölçüm olsun. Eğer f, X üzerinde reel değerli ölçülebilir fonksiyon ise, her $\varepsilon > 0$ için, bir $F_\varepsilon \in \mathcal{F}$ kapalı alt kümesi vardır, öyleki f, F_ε üzerinde süreklidir ve $\mu(X - F_\varepsilon) < \varepsilon$ dir. [20]

Sonuç 7.3.2 μ, fuzzy ölçüm olsun, $A \in \mathcal{F}$, $\mu(A) < \infty$ ve μ sıfır toplamsal olsun. Eğer A üzerinde $f_n \xrightarrow{h.h.h} f$ ise, buradan A üzerinde, hem $f_n \xrightarrow{h.h.d} f$ hem de $f_n \xrightarrow{p.h.h.d} f$ dir. [49]

8.BÖLÜM

EGOROFF VE LUSİN TEOREMLERİNİN BULANIK ÖLÇÜM UZAYI ÜZERİNDE LATİSLERLE İFADESİ

Klasik ölçüm uzayı üzerindeki Lusin ve Egoroff teoremleri bulanık ölçüm uzayı üzerine, sırasıyla $[20]$ ve $[21]$ deki çalışmalarla genelleştirilmiştir. $[22]$ de ise Lusin ve Egoroff teoremleri latis değerli bulanık ölçüm uzayı üzerine, küme işlemleri $(\cup, \cap)$ kullanılarak genelleştirilmiştir. Bu kısımda $[22]$ den farklı olarak, bulanık ölçüm uzayı üzerindeki Lusin ve Egoroff teoremleri latis değerli bulanık ölçüm uzayı üzerine, latis opeatörleri $(\wedge, \vee)$ kullanılarak genişletilecektir.

Bu kısımda bulanık ölçüm uzayı üzerindeki Egoroff ve Lusin teoremlerini, latis aileleri ve latis opeatörleri $(\wedge, \vee)$ yardımıyla ifade ve ispat etmeye çalışacağız ve aksi belirtilmediği müddetçe, kullanacağımız fonksiyonlar latis değerli bulanık ölçüm fonksiyonları olarak alınacaktır.

Teorem 8.1 (Genelleştirilmiş Egoroff Teoremi): m latis değerli bulanık ölçüm, $\mu_A \in \mathcal{L}$, $m(\mu_A) < \infty$ olsun. O zaman μ_A üzerinde

$$\ell_n \xrightarrow{h.h.h} \ell \Rightarrow \ell_n \xrightarrow{h.h.d} \ell \text{ dir.}$$

İspat: μ_K, μ_A latis kümesi içerisindeki x noktalarını içeren bir latis olsun ve $\{\ell_n(x)\}$, $\ell(x)$ e yakınsak olmasın. O zaman;

$$K = \bigvee_{m=1}^{\infty} \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{i=n}^{\infty} \left\{ x \in \mu_A : \left| \ell_i(x) - \ell(x) \right| \geq \frac{1}{r} \right\}$$ yazılır ve buradan da

μ_A üzerinde $m(\mu_K) = \mathrm{L}_0$ iken $\ell_n \xrightarrow{h.h.h} \ell$ olur. Dolayısıyla buradan her $r = 1, 2, ...,$ için;

$$m\left(\mathop{\wedge}_{n=1}^{\infty}\mathop{\vee}_{i=n}^{\infty}\left\{x\in\mu_A : \left|\ell_i(x)-\ell(x)\right|\geq\frac{1}{r}\right\}\right)=\mathrm{L}_o \quad \text{yazabiliriz.}$$

Eğer her $r=1,2,....,$ için;

$\mu_{B_n}{}^{(r)}=\mathop{\vee}_{i=n}^{+\infty}\left\{x\in\mu_A : \left|\ell_i(x)-\ell(x)\right|\geq\frac{1}{r}\right\}$ ve $\mu_B{}^{(r)}=\mathop{\wedge}_{n=1}^{\infty}\mu_{B_n}{}^{(r)}$, yazarsak o zaman her $r=1,2,....,$ için; $\mu_B{}^{(r)}\subset\mu_K$, $m\left(\mu_{B_n}{}^{(r)}\right)=\mathrm{L}_0$ ve $n\to\infty$ için $\mu_{B_n}{}^{(r)}\searrow\mu_B{}^{(r)}$ olur. Dolayısıyla her $r=1,2,....$ ve $n\to\infty$ için;

$$\mu_{B_n}{}^{(r)}\vee\mu_K\searrow\mu_B{}^{(r)}\vee\mu_K=\mu_K \text{ olur.}$$

$\mathcal{E}>0$ verilsin. Latis değerli bulanık ölçümlerin üstten sürekliliğini kullanarak;

$\lim\limits_{n\to+\infty}m\left(\mu_{B_n}{}^{(1)}\vee\mu_K\right)=m\left(\mu_K\right)=\mathrm{L}_0$, buradan her $n\geq n_1$ için bir n_1 vardır öyleki $m\left(\mu_{B_n}{}^{(1)}\vee\mu_K\right)<\frac{\mathcal{E}}{2}$ dir. Bu şekildeki n_1 için; $n\to\infty$ iken

$\left(\mu_{B_{n_1}}{}^{(1)}\vee\mu_{B_n}{}^{(2)}\right)\vee\mu_K\searrow\left(\mu_{B_{n_1}}{}^{(1)}\vee\mu_B{}^{(2)}\right)\vee\mu_K=\mu_{B_{n_1}}{}^{(1)}\vee\mu_K$ yazılır. Dolayısıyla m nin üstten sürekliliğinden

$$\lim_{n\to+\infty}m\left(\left(\mu_{B_{n_1}}{}^{(1)}\vee\mu_{B_n}{}^{(2)}\right)\vee\mu_K\right)=m\left(\mu_{B_{n_1}}{}^{(1)}\vee\mu_K\right) \text{ yazılır.}$$

Dolayısıyla her $n\geq n_2$ için $n_2\left(>n_1\right)$ vardır öyleki;

$$m\left(\left(\mu_{B_{n_1}}{}^{(1)}\vee\mu_{B_n}{}^{(2)}\right)\vee\mu_K\right)<\frac{\mathcal{E}}{2} \text{ dir.}$$

Benzer olarak; n_1,n_2 için ve $n\to\infty$ iken

$$\left(\mu_{B_{n_1}}{}^{(1)}\vee\mu_{B_{n_2}}{}^{(2)}\vee\mu_{B_n}{}^{(3)}\right)\vee\mu_K\searrow\left(\mu_{B_{n_1}}{}^{(1)}\vee\mu_{B_{n_2}}{}^{(2)}\vee\mu_B{}^{(3)}\right)\vee\mu_K=\mu_{B_{n_1}}{}^{(1)}\vee\mu_{B_{n_2}}{}^{(2)}\vee\mu_K$$

yazılır ve buradan da her $n\geq n_3$ için $n_3\left(>n_2\right)$, vardır öyleki

$$m\left(\left(\mu_{B_{n_1}}{}^{(1)}\vee\mu_{B_{n_2}}{}^{(2)}\vee\mu_{B_n}{}^{(3)}\right)\vee\mu_K\right)<\frac{\mathcal{E}}{2} \text{ dır.}$$

Genelliği bozmaksızın her $n \geq n_r$ için $n_1, n_2, ..., n_r \left(n_r > n_{r-1}\right)$, vardır öyleki

$$m\left(\left(\mu_{B_{n_1}}{}^{(1)} \vee \mu_{B_{n_2}}{}^{(2)} \vee ..... \vee \mu_{B_n}{}^{(r)}\right) \vee \mu_K\right) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dir.}$$

Bunun bir sonucu olarak, bir $\left\{n_r\right\}_{r=1}^{\infty}$ sayı dizisi ve bir $\left\{\mu_{B_{n_r}}{}^{(r)}\right\}$ latis dizisini

alalım. m nin monotonluğunu ve alttan sürekliliğini kullanarak;

$$m\left(\bigvee_{r=1}^{+\infty} \mu_{B_{n_r}}{}^{(r)}\right) \leq m\left(\left(\bigvee_{r=1}^{+\infty} \mu_{B_{n_r}}{}^{(r)}\right) \vee \mu_K\right) < \varepsilon \text{ yazılır.}$$

$\mu_{E_\varepsilon} = \mu_A - \bigvee_{r=1}^{+\infty} \mu_{B_{n_r}}{}^{(r)}$ olsun. O zaman $\mu_{E_\varepsilon} \in \mathcal{L}$ ve $m\left(\mu_A - \mu_{E_\varepsilon}\right) = m\left(\bigvee_{r=1}^{+\infty} \mu_{B_{n_r}}{}^{(r)}\right) < \varepsilon$ dir.

Şimdi μ_{E_ε} üzerinde $\left\{\ell_n\right\}$ nin ℓ ye düzgün yakınsak olduğunu göstermeye ihtiyacımız vardır. Dolayısıyla

$$\mu_{E_\varepsilon} = \bigwedge_{r=1}^{+\infty} \bigwedge_{i=n_r}^{+\infty} \left\{x \in \mu_A : \left|\ell_i(x) - \ell(x)\right| < \frac{1}{r}\right\} \text{ olduğundan her } r = 1, 2, ..., \text{ için}$$

$$\mu_{E_\varepsilon} \subseteq \bigwedge_{i=n_r}^{+\infty} \left\{x \in \mu_A : \left|\ell_i(x) - \ell(x)\right| < \frac{1}{r}\right\} \text{ olur. Bu yüzden her } x \in \mu_{E_\varepsilon} \text{ için}$$

$i \geq n_r$ olmak üzere;

$\left|\ell_i(x) - \ell(x)\right| < \frac{1}{r}$ yazılır. Bu ise μ_{E_ε} üzerinde $\left\{\ell_n\right\}$ nin ℓ ye düzgün yakınsak olduğunu gösterir. Ve bu şekilde teorem ispatlanmış olur.

Benzer yolla aşağıdaki teoremi de ispatlayabiliriz:

Teorem 8.2 m latis değerli bulanık ölçüm ve $\mu_A \in \mathcal{L}$, $m\left(\mu_A\right) < \infty$ olsun. O zaman μ_A üzerinde;

$$\ell_n \xrightarrow{p.h.h.h} \ell \Rightarrow \ell_n \xrightarrow{p.h.h.d} \ell \text{ dir.}$$

Tanım 8.1 Eğer her $\mu_E \in \mathcal{L}$, $\mu_F \in \mathcal{L}$ için

$$m(\mu_E)=m(\mu_F)=\mathrm{L}_0 \Rightarrow m(\mu_E \vee \mu_F)=\mathrm{L}_0$$

ise m ye latis değerli zayıf sıfır toplamsaldır denir.

Buradan açıkça görülüyor ki m latis değerli sıfır toplamsal iken; aynı zamanda latis değerli zayıf sıfır toplamsaldır. Eğer m latis değerli üstten oto-sürekli bulanık ölçüm ise aynı zamanda m latis değerli sıfır toplamsaldır ve dolayısıyla m, latis değerli zayıf sıfır toplamsaldır.

Teorem 8.3 (Genelleştirilmiş Lusin Teoremi) m latis değerli zayıf sıfır toplamsal bulanık ölçümdür ancak ve ancak her $\varepsilon > 0$ ve $\mu_{A_n}{}^{(k)} \searrow \mu_{D_n}$ $(k \to \infty)$ koşulunu sağlayan her $\left\{\mu_{A_n}{}^{(k)} : k \geq 1, n \geq 1\right\} \subseteq \mathcal{L}$ latis dizisi için $m\left(\mu_{D_n}\right)=\mathrm{L}_0, n=1,2,....$ olacak şekilde $\left\{\mu_{A_n}{}^{(k)} : k \geq 1, n \geq 1\right\}$ nin bir $\left\{\mu_{A_n}{}^{(k_n)}\right\}$ latis alt dizisi vardır öyleki;

$$m\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} \mu_{A_n}{}^{(k_n)}\right) < \varepsilon, \ (k_1 < k_2 < ......) \text{ dir.}$$

İspat: (Gereklilik): Kabul edelim ki m latis değerli zayıf sıfır toplamsal bulanık ölçüm olsun. Ve $\mu_D = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mu_{D_n}$ olarak alalım. O zaman m nin üstten sürekliliğini kullanarak, $m(\mu_D)=\mathrm{L}_0$ ve $\mu_{D_n} \subseteq \mu_D$ $(n=1,2,...)$ yazarız. Her $n=1,2,....$ ve $k \to \infty$ iken $\mu_{A_n}{}^{(k)} \searrow \mu_{D_n}$ olduğundan, her $n=1,2,....$ için

$$\mu_{A_n}{}^{(k)} \vee \mu_D \searrow \mu_{D_n} \vee \mu_D = \mu_D \quad (k \to \infty) \text{ yazarız.}$$

$\varepsilon > 0$ verilsin. Latis değerli bulanık ölçümlerin üstten sürekliliğini kullanarak;

$\lim_{k\to\infty} m\left(\mu_{A_1}{}^{(k)} \vee \mu_D\right) = m(\mu_D) = \mathrm{L}_0$ yazarız. Ayrıca $m\left(\mu_{A_1}{}^{(k_1)} \vee \mu_D\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde k_1 vardır öyleki bu k_1 ve $k \to \infty$ için

$\left(\mu_{A_1}{}^{(k_1)} \vee \mu_{A_2}{}^{(k)}\right) \vee \mu_D \searrow \left(\mu_{A_1}{}^{(k_1)} \vee \mu_{D_2}\right) \vee \mu_D = \mu_{A_1}{}^{(k_1)} \vee \mu_D$ olur. Dolayısıyla m nin üstten sürekliliğinden;

$$\lim_{k\to\infty} m\left(\left(\mu_{A_1}{}^{(k_1)} \vee \mu_{A_2}{}^{(k)}\right) \vee \mu_D\right) = m\left(\mu_{A_1}{}^{(k_1)} \vee \mu_D\right) \text{ olarak bulunur.}$$

Buradan da $k_2(>k_1)$ vardır öyleki;

$$m\left(\left(\mu_{A_1}{}^{(k_1)} \vee \mu_{A_2}{}^{(k_2)}\right) \vee \mu_D\right) < \frac{\mathcal{E}}{2} \text{ dir.}$$

Genelliği bozmaksızın $k_1, k_2, ...$ vardır öyleki;

$$m\left(\left(\mu_{A_1}{}^{(k_1)} \vee \mu_{A_2}{}^{(k_2)} \vee ..... \vee \mu_{A_t}{}^{(k_t)}\right) \vee \mu_D\right) < \frac{\mathcal{E}}{2} \text{ dir.}$$

Bunun bir sonucu olarak bir $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ sayı dizisi ve bir $\left\{\mu_{A_n}{}^{(k_n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ latis dizisi alalım. m nin monotonluğunu ve alttan sürekliliğini kullanarak;

$$m\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} \mu_{A_n}{}^{(k_n)}\right) \le m\left(\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} \mu_{A_n}{}^{(k_n)}\right) \vee \mu_D\right) \le \frac{\mathcal{E}}{2} < \mathcal{E} \text{ yazarız.}$$

(Yeterlilik): $\mu_E \in \mathcal{L}, \mu_F \in \mathcal{L}$ ve $m(\mu_E) = m(\mu_F) = \mathrm{L}_0$ olsun. Ve aşağıdaki koşulları sağlayan latislerin bir $\left\{\mu_{A_n}{}^{(k)} : k \ge 1, n \ge 1\right\}$ dizisini tanımlayalım:

$\mu_{A_1}{}^{(k)} = \mu_E$, $\mu_{A_2}{}^{(k)} = \mu_F$, $\mu_{A_3}{}^{(k)} = \mu_{A_4}{}^{(k)} = ... = \varnothing, \ \forall k \ge 3$ ve
$\mu_{D_1} = \mu_E$, $\mu_{D_2} = \mu_F$, $\mu_{D_n} = \varnothing, \ \forall n \ge 3$ olsun.

O zaman her $\mathcal{E} > 0$ için ve hipotezimizi kullanırsak, bir $\mu_{A_n}^{(k_n)}$ alt dizisi vardır öyleki, $m\left(\mu_{A_n}{}^{(k_n)}\right) < \mathcal{E}$ ve buradan da $m(\mu_E \vee \mu_F) < \mathcal{E}$ olur. Dolayısıyla da $m(\mu_E \vee \mu_F) = \mathrm{L}_0$ olur. Bu ise m nin latis değerli zayıf sıfır toplamsal olduğunu gösterir.

Hatırlatma 8.1 Bir latis değerli zayıf sıfır toplamsal bulanık ölçüm, latis değerli sıfır toplamsal bulanık ölçüm olmayabilir. Aşağıdaki örnek, latis değerli zayıf sıfır toplamsal bulanık ölçümün, gerçekten de üstten otosüreklilik ve sıfır toplamsallıktan daha zayıf olduğunu göstermektedir.

Örnek 8.1 $X = \{L_a, L_b\}$ ve $\mathcal{L} = P(X)$. Ve

$$m(\mu_E) = \begin{cases} L_1, & \textit{eğer} \;\; \mu_E = X \\ L_0, & \textit{eğer} \;\; \mu_E = \{L_a\} \;\; \textit{ya da} \;\; \mu_E = \varnothing \end{cases}$$ olsun.

Buradan görülüyor ki m latis değerli zayıf sıfır toplamsal bulanık ölçümdür. Fakat m latis değerli sıfır toplamsal değildir. Bu yüzden de üstten oto sürekli değildir. Gerçekten de

$$m(\{L_a\}) = L_0 \text{ fakat } m(\{L_a\} \vee \{L_b\}) = L_1 \neq m(\{L_b\}) \text{ dir.}$$

SONUÇLAR

Bu çalışmada, klasik ölçüm, bulanık ölçüm ve latis değerli ölçüm arasındaki ilişki ayrıntılı olarak ortaya konmuş ve klasik ölçümde yapılmış olan birçok tanım ve teorem, bulanık kümeler, latis kümeleri, latis aileleri ve latis işlemleri yardımıyla bulanık ölçüm ve latis-değerli ölçüme taşınabildiğine yer verilmiştir.

Ayrıca bu çalışmada, klasik analizde önemli bir yere sahip olan yakınsaklık, süreklilik, düzgün yakınsaklık gibi kavramlar, bulanık ölçüm uzayı üzerine, latis aileleri ve latis işlemleri yardımıyla, latis değerli Egoroff ve latis değerli Lusin teoremleri kullanılarak genelleştirilebilmiştir.

Bu çalışmayla, klasik analizdeki bazı kavramların (özellikle süreklilik ve yakınsaklık) ve uygulamaların, bulanık ölçüm uzayı üzerine taşınabildiğine ve burada da kendine uygulama alanı bulabildiğine dair kaynaklar incelenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Atanassov,K.T. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*. **20**, 87-96.

[2] Atanassov,K.T. (1989). More on intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*. **33**, 37-45.

[3] Atanassov,K.T. (1994). New operations defined over the intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*. **61**, 137-142.

[4] Atanassov,K.T.,Gargov,G. (1989). Interval valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*. **31**, 343-349

[5] Birkhoff, G. (1967). Lattice Theory. 3rd ed.,(*AMS colloquim publications, providence, RI)*

[6] Caratheodory, C. (1963), Algebraic Theory of Measure and Integration. New York, *Chelsea Publishing*

[7] Delgado,M. and Moral,S. (1987). On the concept of possibility-probability consistency, *Fuzzy Sets and Systems* . **21,** 311-318

[8] Dempster, A.P. (1967), Upper and lower probablities induced by multi-valued mapping . *Annals of Mathematical Stasistics*, **38**, 325-339

[9] Dubois, D. and Prade, H. (1980), Groups Operating on Fuzzy Sets, *Fuzzy Sets and Systems*, **120**, 543-548.

[10] Dubois, D. and Prade, H. (1985), Evidence measures based on fuzzy information, *Automatica*, **21**, 547-562

[11] Dubois, D. and Prade, H.(1988), Possibility Theory. New York *: Plenum Press*.

[12] Dubois, D. and Prade, H. (1990), Constant appraximations of belief functions. *International Journal of Approximate Reasoning*, **4**, 419-449.

[13] Dubois, D. and Prade, H. (1992), When upper probabilities are posibility measures. *Fuzzy Sets and Systems*, **49**, 65-74

[14] Goguen, J.A. (1967), L - Fuzzy Sets*: J. Math. Anal. Appl.*, **18**, 145-174.

[15] Gratzer G. (1987), General Lattice Theory, *Academıc Press*, London.

[16] Halmos, P.R. (1967), Measure Theory. New York, Van Nostrand.

[17] Höhle, U. (1984), Fuzzy sets and Decision Analysis. In: Zimmerman, Zadeh and Gainess (Eds.). Fuzzy probably measures. New York: North Holland, 83-96.

[18] Klement, E.P. and Schwyhla, W. (1982) , Correspondance Between Fuzzy Measures and Classical Measures, *Fuzzy Sets and Syistem*,**7**,57-70.

[19] Larbani,M.,Huang,Chi-Yo and Tzeng, Gwo-Hshiung, (2010). A Novel Method for Fuzzy Measure Identification, *International Journal of Fuzzy Systems*, 24-34

[20] Li, J. and Yasuda,M. (2004) . Lusin's theorem on fuzzy measur space, *Fuzzy Sets and Systems* **146** ,121-133.

[21] Li, J. (2003) . On Egoroff's theorems on fuzzy measure spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, **135** ,367-375.

[22] Lui, X. and Zhang (1994), G.,Lattice-valued fuzzy measure and lattice-valued fuzzy integral, *Fuzzy Sets and Systems* **62**, 319-332 North-Holland.

[23] Ma,X.,Zhan,J. and Jun,Y.B., Introduced interval valued fuzzy ideals of pseudo-MV algebras, *International Journal of Fuzzy Systems*, Vol. **10**, No.2, June 2008.

[24] Mesiar, R. and Piasecki, K., Caratheodory's measuribility of fuzzy events. http://www.univsavoie.fr/Portail/Groupes/LISTIC/busefal/Papers/56.zip/56_06.pdf.Electronic busefal, 56.

[25] Mısırlıoğlu, T., Real Analysis. http://udes.iku.edu.tr. , 09.01.2011.

[26] Mukherjea,A. and Pathoven,K. (1984), Real And Functional Analysis Part A Real Analysis. (2^{th} ed.). University of Florida, Florida: *Plenum Press*- New York and London.

[27] Nakajima, N. (1989), Generalized Fuzzy Sets, *Fuzzy Sets and Syistem*, **32**,307-314.

[28] Nakajima, N. (1989), Measurability,Measures and Probability in Fuzzy Sets Theory, *Math. Japonica* No:**4**, **34**, 607-618.

[29] Qiao,Z. (1990). Fuzzy integrals on $\mathcal{L}$-fuzzy sets, *Fuzzy sets and systems* **38** ,61-79

[30] Qiao,Z. (1990). On fuzzy measure and fuzzy integralon fuzzy sets,*Fuzzy sets and systems* **37** ,77-92

[31] Shafer, G. (1976), A Matematical Theory of Evidence. New Jersey, Princeton: *Princeton Universty Press*.

[32] Shafer, G. (1987), Analysis of fuzzy information, 3 volumes. In: Bezdek. Belief function and possibility measues. Florida: *CRC Press*, 51-83.

[33] Sugeno, M. (1977), Fuzzy measure and fuzzy integrals: A survey. In: M.M. Gupta, G.N. Saridis, B.R. Gaines (Eds.), Fuzzy Automata and Decision Processes. North-Holland, Amsterdam and New York, 89-102.

[34] Sugeno, M. (1974), Theory of Fuzzy Integrals and its aplications. Ph. D. dissertation. Tokyo: Institute of Technology.

[35] Şahin, M. (2004), Generalized σ-algebras and generalized fuzzy measure, Ph. D. Thesis 1-76, Trabzon, Turkey.

[36] Şahin, M. (2007), On Caratheodory Extension Theorem on Fuzzy Measure Spaces, *Far East J Math Sci* 26(2) pp 311-317.

[37] Şahin,M. and Karakus,A.(2012). Generalized Egoroff's Theorem with Lattice Family on Lattice-Valued Fuzzy Measures Space, *Journal of Function Spaces and Applications* (submitted)

[38] Şahin,M. and Karakus,A.(2012). Generalized Lusin's Theorem with Lattice Family on Lattice-Valued Fuzzy Measures Space, *Abstract and Applied Analysis* (submitted)

[39] Şahin,M. and Demir,M.(2012). Lattice-valued Carathedory Extension Theorem,*Archives Des Sciences* 2012, **65(7),** 89-106

[40] Şahin,M., Olgun,N. and Karakuş,A.(2012). Null-additivity of lattice valued fuzzy measure on lattice valued σ- algebra,*Archives Des Sciences*,**65(7),** 134-143

[41] Şahin,M.,Olgun,N.,Akyıldız F.T. and Karakuş,A.(2012). Generalized Carathedory Extension Theorem on Fuzzy Measure Spaces, *Abstract and Applied Analysis* Volume(2012). Article ID 260457,11 pages

[42] Tanaka, J. (10 Ocak 2008), fuzzy signed measure, *2000 Mathematics Subject Classification.* www.arXiv.org:0806.0033v1 [math.LO] 30 May 2008

[43] Tanaka,J. and Mcoughlin F.P.(2010). Construction of a lattice on the completion space of an algebra and an isomorphism to its Carathedory Extension,*Far East J. Math. Sci. (FJMS)* **43 (2)** ,153-164.

[44] Tanaka,J. (2008). Hahn Decomposition Theorem of Signed Fuzzy Measure,*Advanced in Fuzzy Sets and Systems*, **3 (3)** ,315-323

[45] Taş, K. and Çoker, D. (1989), Özer, O., Soyut Matematik, İnönü Üniversitesi Basımevi, Malatya.

[46] Ting-Yu,C.(2007). Remarks on the Subtraction and Division Operations over Intuitionistic Fuzzy Sets and Interval-Valued Fuzzy Sets, *International Journal of Fuzzy Systems*, Vol. **9**, No. **3**, 169-172

[47] Uysal G. (2007). Fuzzy Cebirsel Yapıların Üyelik Fonksiyonları, Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi.

[48] Wang,Z. (1985). Asymptotic structural characterictics of fuzzy measures and their applications,*Fuzzy sets and systems* **16** ,277-290

[49] Wang, Z. and Klir. G.J. (1992) ,Fuzzy measure theory. New York , *Plentum Press.*

[50] Wang, Z.(1981),Une class de measure flous-les quasi-measures. *Busefal*,**6**,28-37.

[51] Xueceheng,L. and Guangquan, Z.(1994). Lattice valued fuzzy measure and lattice valued fuzzy integral,*Fuzzy sets and systems*, **(62)**,319-332

[52] Yen, J. (1990), Generalising the Dempster-Shafer theory to fuzzy sets. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetic*, **20**, 559-570.

[53] Ying-ming, L. and Mao-Kang L. (1997), Fuzzy Topology, Sichuan Union University, Chine.

[54] Zadeh, L. A. (1965), Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-353.

[55] Zadeh, L. A. (1978), Fuzzy Sets a basis for theory of posibility. *Fuzzy sets and syistem*, **4**, 3-28.

[56] Zhang, G., Fuzzy number valued fuzzy measure and Fuzzy number valued fuzzy integral, *Fuzzy sets and systems* (to appear)

[57] Zhang, G. (1991). Fuzzy number valued fuzzy measure and Fuzzy number valued fuzzy integral on the $\mathcal{L}$-fuzzy sets, *Quaterly of Mathematics* **2** ,74-95

[58] Zhang, G.,Some theorems on fuzzy number valued fuzzy measure and fuzzy number valued fuzzy measure space,*Proc. Of the 5th Conference of fuzzy Mathematics and system society of China* (Chengdu,1990). 78-81.