

GAZIANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUANTUM TOPOLOJİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAHAR KARA

EYLÜL 2013

Kuantum Topoloji

**Gaziantep Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi**

**Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK**

**Bahar KARA
Eylül 2013**

©2013 [Bahar KARA].

T.C.
GAZIANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Kuantum Topoloji

Öğrencinin, Adı Soyadı: Bahar KARA

Tez Savunma Tarihi: 27.09.2013

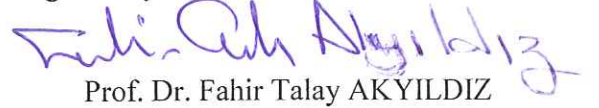
Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı



Doç. Dr. Metin BEDİR

FBE Müdürü

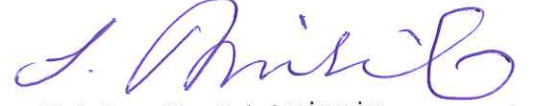
Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylıyorum.



Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımda okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.



Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri :

Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK

Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN

Yrd. Doç. Dr. Güler YILDIRIM

İmzası


İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Bahar KARA

ÖZET

KUANTUM TOPOLOJİ

KARA, Bahar

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Sabri Birlik

Eylül - 2013

68 sayfa

Bu tezde Kuantum topolojisine ve topolojisel kuantum alan teorisine kısa bir giriş yapılmıştır. Burada kuantum ile topoloji arasındaki bazı ilişkiler ele alınmıştır.

İkinci bölümde Önce Kuantum mekaniğinin bazı temel prensiplerinden hareketle topoloji ile kuantum mekaniğinin en kolay ilişkisi olan Dirac'ın ip hilesi ve küresel ayrışımı verildi. Yine kuantum mekaniğinin temel prensiplerinden olan genlik kavramı Dirac parantezleri yolu ile açıklandı ve çemberin genliği verildi. Jordan eğri teoremine göre düzlemde her basit kapalı eğri bir çembere izotop olduğundan çemberin genliği genelleştirilerek topolojik genliğin varlığı gösterildi. Bu topolojik genlik daha ileriye düğüm teorisine taşındı.

Son olarak, Topolojisel Kuantum alan teorisinin bilinen iki tipinden kısaca bahsedildi. Atiyah-Segal aksiyomları verildi. Atiyah'ın TQFT için farklı boyutlarda incelediği örnekler verildi. Böylece fiziğin topoloji ile detaylı bir ilişkisi olduğu ortaya çıktı.

Anahtar Sözcükler: Topolojik Genlik, Düğüm Genlikleri, Düğümlerin Parantez Polinomları, Topolojisel Kuantum Alan Teorisine Kısa Bir Genel Bakış (TQFT), Kategori Teorisi, Atiyah-Segal Aksiyomları.

ABSTRACT

QUANTUM TOPOLOGY

KARA, Bahar

Master of Science Thesis ,Department of Mathematics

Thesis Advisor

Assist. Prof. Dr. Sabri Birlik

September - 2013

68 pages

The study is short introduction to Quantum Topology and a brief overview of Topological Quantum field theory(TQFT). Here, some relations between quantum mechanics and topology have been examined.

Firstly, by some of the fundamental principals of quantum mechanics, has been explained by Dirac brackets, and the amplitude of a circle has been given. As every simple closed curve in the plane is isotop to circle according to Jordan's curve theorem, the existence of the topological amplitude has been shown by generalizing the amplitude of circle. This topological amplitude has been carried to forward, topological quantum field theory.

Finally, Topological Quantum Field Theory of the two known type of briefly mentioned. Atiyah-Segal's axioms was given. Atiyah's of the examined TQFT of the different dimensions of examples were given.

Thus, it came out that there is a relation between topology and physics.

Key Words: Topological Amplitude, Knot Amplitudes, Bracket Polynomial of Knot, A Brief Overview of Topological Quantum Field Theory, Category Theory, The Atiyah-Segal Axioms.

Çok kıymetli aileme...

TEŞEKKÜR

Bu alıőma sűresince tűm bilgilerini benimle paylaőmaktan kaçınmayan, her tűrlű konuda desteęini benden esirgemeyen ve tezimde bűyűk emeęi olan, aynı zamanda kiőilik olarak da bana çok Őey katan Gaziantep Ŭniversitesi űęretim űyelerinden Sayın Yrd. Doç. Dr. Gűler Yıldırım, Sayın Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN ve danıőman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK' e sonsuz minnet ve teőekkűrlerimi sunarım.

Yűksek lisans eęitimim sűrecinde benden manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen űnce anne ve babam olmak űzere bűtűn aileme ve arkadaőlarıma sonsuz teőekkűrlerimi sunarım. Saygılarımla...

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
İTHAF YAZISI.....	vii
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
SİMGELER DİZİNİ.....	xiii
BÖLÜM I. KURAMSAL TEMELLER.....	1
1.1. Düğüm ve Halkalar.....	1
1.2. Örgüler.....	9
1.3. Durum ve Parantez Polinomları.....	13
1.4. Manifoldlar.....	20
1.5. Kategori Teorisi.....	23
1.6. Lie Grupları.....	25
BÖLÜM II. KUANTUM MEKANİĞİNİN BAZI TEMEL PRENSİPLERİ.....	27
2.1. De Broglie Denklemleri.....	27
2.2. Dalga Paketleri.....	27
2.3. Shrodinger Denklemleri.....	29
2.4. Rotasyonlar ve Simetri.....	30

2.5. Temsiller.....	31
2.6. Dirac Parantezleri.....	32
2.7. Kuantum Alan Teorisi İçin Gerekli Tanımlar.....	32
BÖLÜM III. KUANTUM MEKANİĞİ VE TOPOLOJİ.....	35
3.1. Dirac'ın İp Hilesi.....	35
3.2. Küresel Ayrışım	36
3.3.Çemberin Genliği	38
3.4.Topolojik Genlik.....	39
3.5. Düğüm Genlikleri	43
BÖLÜM IV. TOPOLOJİK KUANTUM ALAN TEORİSİ (TQFT).....	46
4.1. Özel Modeller.....	46
4.1.1. Schwarz-tipi TQFT.....	46
4.1.2. Witten-tipi TQFT.....	47
4.2. Atiyah-Segal aksiyomları.....	47
4.2.1. Notasyonlar.....	47
4.2.2. Matematiksel Formülleri.....	47
4.2.3. Fiziksel Yorumlama.....	50
4.2.4. Örnekleri.....	50
BÖLÜM V. DEĞERLENDİRME.....	53
KAYNAKLAR.....	54
ÖZGEÇMİŞ.....	56

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil No</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1. Normal düzlemsel izdüşümleri ile bazı düğümler.....	1
Şekil 1.2. Bazı düğümlerin normal diyagramları.....	3
Şekil 1.3. Kavşak işaretleri.....	3
Şekil 1.4. xyz –düzleminde bir düğümün ayna görüntüsü.....	4
Şekil 1.5. Reidemeister hareketleri.....	4
Şekil 1.6. Sekiz şekilli düğüm.....	5
Şekil 1.7. Yonca yaprağı düğümünün doğurayları.....	8
Şekil 1.8. Bir örgü temsili.....	9
Şekil 1.9. Örgü ve kapanışı.....	9
Şekil 1.10. Örgü grubunun doğurayları.....	10
Şekil 1.11. İki örgünün çarpımı.....	11
Şekil 1.12. Geometrik Markov Hareketi.....	12
Şekil 1.13. Kavşak Durumları.....	14
Şekil 1.14. Durumlara Ayırma İşlemi.....	14
Şekil 1.15. Bölgelerin Belirlenmesi.....	14
Şekil 1.16. Yeniden Yapılandırma.....	15
Şekil 1.17. Yonca Yaprakının Durumları.....	15
Şekil 1.18. Bir Duruma Göre Yeniden Yapılandırma.....	16
Şekil 1.19. Koordinat Değişim Fonksiyonu.....	21
Şekil 2.1. Feynman Diyagramı.....	34
Şekil 3.1. Kemer Burulmaları I.....	35
Şekil 3.2: Kemer Burulmaları II.....	36
Şekil 3.3: Kuaternyon Örneği.....	37

<u>Şekil No</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.4. Çember.....	38
Şekil 3.5. İki Parçacığın Yaradılışı.....	39
Şekil 3.6. İki Parçacığın Yok Oluşu.....	39
Şekil 3.7. Düzlemde Bir Basit Kapalı Eğri.....	40
Şekil 4.1. Bazı Uzayların Birleşimim İle Oluşan Yeni Torlar.....	52

SİMGELER DİZİNİ

$\Delta_K(z)$: Conway Polinomu
Δ	: Alexander Polinomu
V	: Jones Polinomu
p	: İzdüşüm fonksiyonu
$p(K)$: Düzlemsel bir poligon
$p(K - A)$: K düğümünün A kümesine göre normal diyagramı
$SO(3)$: Üç Boyutta Has Dönmeler Grubu
$SU(2)$: İki Boyutta Özel Üniter Grup
$(it)^*$: Analitik İntegral

BÖLÜM I

KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tezde gerekli bazı tanımlar ve teoriler verilecektir.

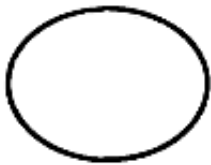
1.1. Düğümler ve Halkalar.

1.1.1. Yerleştirme(Gömülme).

X ve Y iki Hausdorff uzayı olsun. Eğer $f : X \rightarrow f(X)$ bir homeomorfizm ise $f : X \rightarrow Y$ dönüşümüne bir *yerleştirme* (*gömülme*) denir. [1]

1.1.2. Düğüm ve Halka.

Üç boyutlu olan bir küreyi $S^3 = R^3 \cup \{\infty\}$ ile gösterelim. Bu durumda $S^1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ çemberinin S^3 içine yerleştirilmesine (gömülmesine) *düğüm* denir. S^3 üzerinde $n \in N$ için n tane ayrıık düğümün birleşimine de bir *halka* denir[2,3,4].



(a)



(b)



(c)

Şekil 1.1:Normal Düzlemsel İzdüşümleri ile Bazı Düğümler

1.1.3. Poligonal Düğüm.

K , S^3 içinde bir düğüm olsun. Eğer K sonlu sayıda kenarların birleşiminden ibaret ise, K ya *poligonal düğüm* denir[2].

1.1.4. Denk Düğümler.

K ve L , S^3 içinde yönlendirilmiş iki düğüm olsun. Eğer $h(K) = L$ olacak şekilde yönlendirmeyi koruyan bir $h: S^3 \rightarrow S^3$ homeomorfizmi varsa K düğümü L düğümüne *denktir* denir[2,5,6].

1.1.5. Düğüm Tipi.

İki düğümün denklik tanımı; S^3 ün basit kapalı eğrileri kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı verir. Bu bağıntı, söz konusu kümeyi ayrık denklik sınıflarına ayırır. Her denklik sınıfına *düğüm tipi* denir. Denk iki düğüm, aynı düğüm tipindedir. Yönlendirilmiş bir çember ile aynı tipte olan düğümler *düğümlememiş düğümlerdir*[6].

1.1.6. Düğüm Diyagramı.

Bir düğüm şematik olarak 2 – boyutlu bir şekilde yani düzlemsel bir eğriyle temsil edildiği şekle *düğümün diyagramı* denir.

1.1.7. İzdüşüm Fonksiyonu.

$p: S^3 \rightarrow S^3$, $p(x, y, z) = (x, y, 0)$ ile tanımlanan fonksiyona *izdüşüm fonksiyonu* denir.

Eğer K , S^3 içinde bir düğüm ise, K nın p izdüşüm fonksiyonu altındaki görüntüsü $p(K)$; K nın xoy –düzlemindeki izdüşümüdür. Burada K poligonal bir düğüm ise $p(K)$ düzlemde bir poligondur.

1.1.8. Geçit Noktası.

K , S^3 içinde bir düğüm ve p izdüşüm fonksiyonu olsun. $a \in p(K)$ için $p^{-1}(a) \cap K$, n tane ($n > 1$) noktadan ibaret ise, a ya $p(K)$ nın bir *n- katlı noktası* denir.

Eğer $n = 2$ ise, a noktasına *geçit noktası (çift katlı nokta)* denir[3].

1.1.9. Alt ve Üst Geçit Noktaları.

Yukarıdaki tanım uyarınca bir çift nokta K 'ya ait tam iki noktanın resmi olup bu iki noktadan z koordinatı daha büyük olana *üst geçit noktası* ve diğerine *alt geçit noktası* denir[3].

1.1.10. Regüler Pozisyon.

K bir düğüm ve p izdüşüm fonksiyonu olsun. Eğer,

- (i) $p(K)$ nın katlı noktaları sadece sonlu sayıda geçit noktası ise,
- (ii) Hiçbir geçit noktası K ya ait bir köşe noktasının p altındaki görüntüsü değilse,

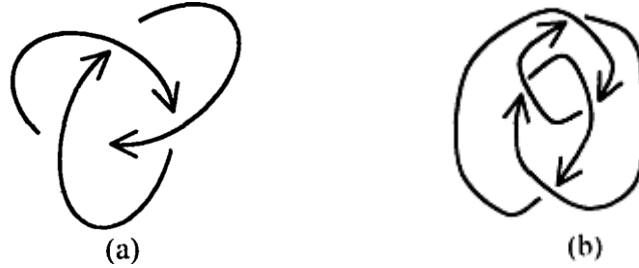
$p(K)$ ya K nın *regüler izdüşümü* denir. Eğer $p(K)$ izdüşümü regüler ise K düğümüne uzayda *regüler pozisyon*dadır denir[3].

Bir düğümün regüler izdüşümüne, o düğümün *regüler diyagramı* da denir. Regüler diyagram; düğümün, uzayın yeteri kadar uzak ve uygun bir noktasından çizilen resmi gibidir[3].

1.1.11. Normal Diyagram.

Regüler pozisyonunda bulunan bir K düğümü ile bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. K 'nın her alt geçit noktasından uzaklığı ε 'dan küçük olan noktaların kümesi A ise $p(K - A)$ kümesine K düğümünün *normal diyagramı* denir[3,2].

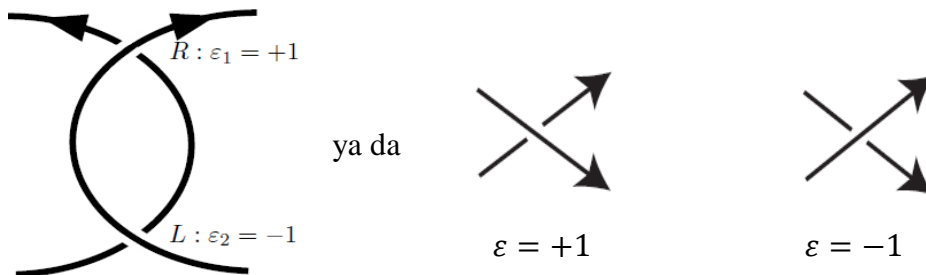
Böylece K düğümünün normal diyagramı ayırık yay parçalarından veya doğru parçalarından oluşur. Şekil(a) yonca yaprağı düğümünün, Şekil(b) (3,2) –Türk düğümünün normal diyagramlarını göstermektedir. Diyagramdaki ok işareti düğümün yönünü belirtir.



Şekil 1.2: Bazı Düğümlerin Normal Diyagramları

1.1.12. Yönlendirilmiş Düğüm.

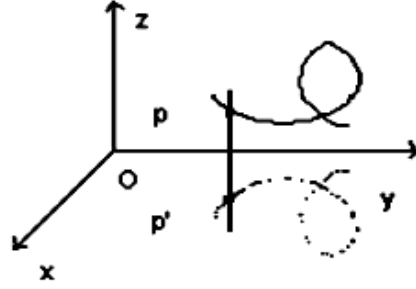
Bir düğüm diyagramı üzerinde hareket yönü belirtilirse, o düğüm *yönlendirilmiş düğüm* olur. Böylece bir düğüm diyagramından yönlendirilmiş iki düğüm diyagramı elde edilir. Yönlendirilmiş kavşaklar aşağıdaki Şekil 1.3 de görüldüğü gibi $+1$ ya da -1 değeri alır.



Şekil 1.3:Kavşak İşaretleri

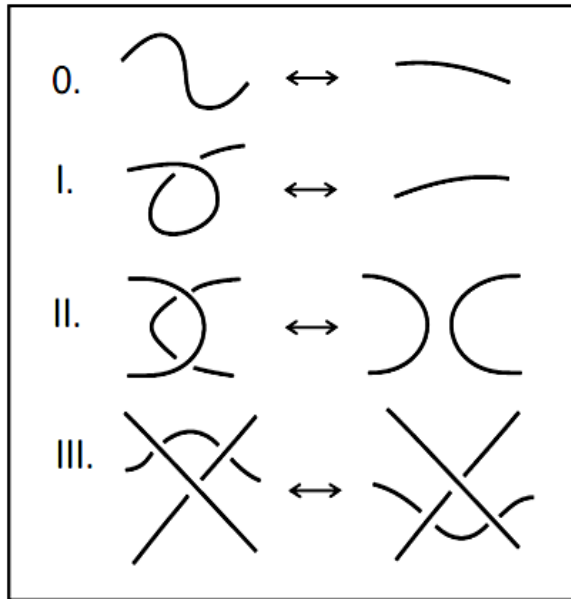
1.1.13. Ayna Görüntüsü.

Bir K düğümünün $s: S^3 \rightarrow S^3$, $r(x, y, z) = (x, y, -z)$ ile tanımlanan yansıma fonksiyonu altındaki görüntüsüne K nın *ayna görüntüsü* denir. Yansıma fonksiyonu, uzayın yönlendirmesini terse çeviren bir homeomorfizmdir[7].



Şekil 1.4: xyz –Düzleminde Bir Düğümün Ayna Görüntüsü

1.1.14. Reidemeister Hareketleri.



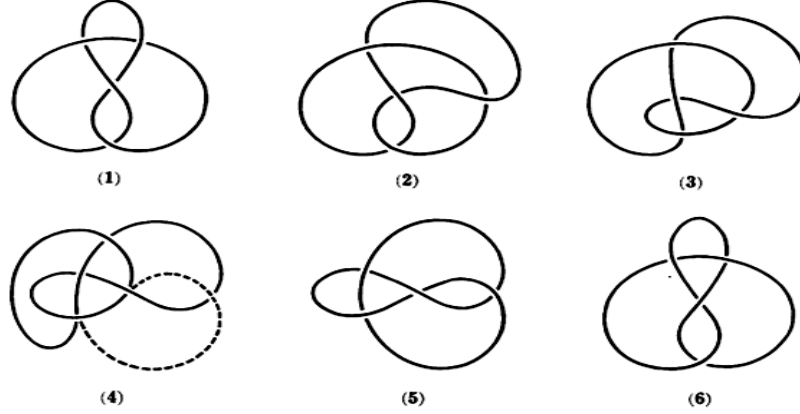
Şekil 1.5: Reidemeister Hareketleri

Sonlu sayıda Reidemeister hareketinin uygulanması ile diyagramları birbirlerine dönüşebilen düğümler aynı tiptendir. Yani birbirlerine denktirler.

O halde, Reidemeister hareketleri ile değişmeyen özellikler, düğüm tipinin özellikleridir[8].

1.1.15. Örnek.

Sekiz şekilli düğüm ayna görüntüsü ile denktir[fox 1963].



Şekil 1.6: Sekiz Şekli Düğüm

1.1.16. Regüler izotopi.

II . ve III . Reidemeister hareketleri ile doğurulan denklik bağıntısına *regüler izotopi* denir[8,9].

1.1.17. Kuşatan izotopi.

Reidemeister hareketlerinin hepsini kullanarak doğurulan diyagramlar üzerindeki denklik bağıntısına *kuşatan izotopi* denir[8,9].

Burada II . ve III . hareketler *regüler izotopi invariantı*; tüm hareketler *kuşatan izotopi invariantıdır*.

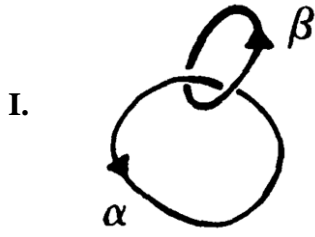
1.1.18. Halkalanma sayısı.

α ve β bir halkanın iki bileşeni olsun. $\alpha \cap \beta$, α ile β geçitlerinin(kendi kendilerini kesme hariç) kümesini ve $\varepsilon(p)$ geçitin işaretini göstermek üzere, $Ik(\alpha, \beta)$ halkalanma sayısı

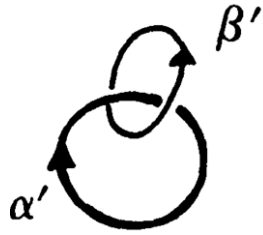
$$Ik(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon(p)$$

formülü ile tanımlanır.[8]

1.1.19. Örnek.



$$Ik(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1.$$



$$II. Ik(\alpha', \beta') = \frac{1}{2}(-1 - 1) = -1 \quad [8].$$

1.1.20. Burulma Sayısı.

K herhangi bir yönlendirilmiş halka diyagramı olsun. $\mathcal{C}(K)$, K diyagramındaki geçitlerin kümesi olmak üzere K nın burulma sayısı

$$w(K) = \sum_{p \in \mathcal{C}(K)} \varepsilon(p)$$

ile tanımlanır. Burada toplam, K nın bütün geçitleri üzerindedir ve $\varepsilon(p)$ ise p geçitinin işaretidir[8].

Dikkat edilirse, $w(K)$ nın bir regüler izotopi invariantı olduğu görülür ve

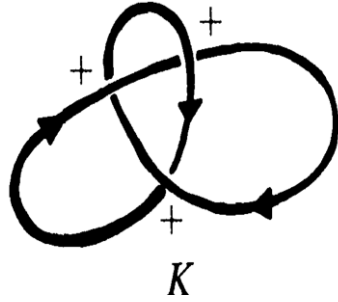
$$\begin{cases} W(\text{↻}) = 1 + W(\text{↷}) \\ W(\text{↺}) = 1 + W(\text{↶}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} W(\text{↻}) = -1 + W(\text{↷}) \\ W(\text{↺}) = -1 + W(\text{↶}) \end{cases}$$

olur.

1.1.21. Örnek.

K yonca yaprağı düğümünü gösterebilirsin. K nın burulma sayısı



$$lk(\alpha, \beta) = w(K) = 3$$

bulunur [8].

1.1.22. Düğüm Grubu.

X bir topolojik uzay, $x_0 \in X$ bir sabit nokta olsun. Taban noktası x_0 olan X içindeki tüm kapalı eğrilerin homotopi sınıfı, çarpma işlemi altında gruptur. Bu gruba *esas grup* denir ve $\pi_0(X, x_0)$ ile gösterilir.

S^3 içinde bir K düğümünün tümleyeninin esas grubu (birinci homotopi grubu) ve ya diğer bir adı *düğüm grubu*

$$G = \pi_1(S^3 - K, p)$$

ile gösterilir.

Düğüm grubun hesaplanması için Dehn ve Wirtinger'e ait iki yöntem vardır. Burada Wirtinger yöntemi kullanılacaktır. Normal izdüşümü $z = 0$ düzlemi üzerinde regüler olacak şekilde K düğümü R^3 uzayı içine yerleştirilsin. K nın düğüm grubunun doğuray ve bağıntıları sırasıyla s_i ve r_j ($i = 1, 2, \dots, n$) ile gösterilsin.

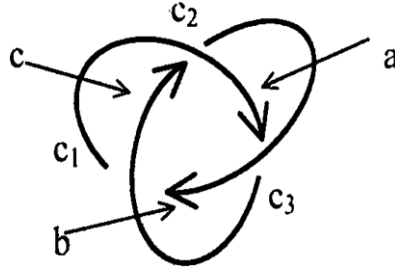
σ_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) bir K düğümünün (veya halkanın) normal izdüşümünün üstten geçen yayları olsun. Bu durumda K nın düğüm grubu,

$$G = \pi_1(S^3 - K) = |s_1, s_2, s_3, \dots, s_n; r_1, \dots, r_n|$$

şeklinde temsil edilir. Burada σ_i yayları s_i doğurayına karşılık gelir[1,2].

1.1.23. Örnek.

Yonca yaprağı düğümünün Wirtinger yöntemi ile grubunun bulunması:



Şekil 1.7: Yonca Yaprağı Düğümünün Doğurayları

Bu düğümün normal diyagramda gösterilen doğurayları a, b, c olsun. Buradan c_1, c_2, c_3 kavşak noktalarına ait bağıntılar sıra ile

$$r_1 = cb\bar{a}\bar{b}$$

$$r_2 = ac\bar{b}\bar{c}$$

$$r_3 = a\bar{c}\bar{a}b$$

dir ($\bar{a} = a^{-1}$). O halde bu düğümün grubu

$$\pi(S^3 - K) = \langle a, b, c : cb\bar{a}\bar{b}, ac\bar{b}\bar{c}, a\bar{c}\bar{a}b \rangle$$

olur. 1.1.23. Lemmaya göre ikinci bağıntı diğer iki bağıntının sonucu olduğundan

$$\pi(S^3 - K) = \langle a, b, c : cb\bar{a}\bar{b}, a\bar{c}\bar{a}b \rangle$$

Bulunur[8].

1.1.25. Alexander-Conway Polinomu.

$\nabla_K(z)$ Alexander-Conway polinomu, $\nabla_K(z) \in Z_Z$, katsayıları tamsayı olan bir Laurent polinomudur. Düğümün (veya halkanın) Alexander polinomu aşağıdaki bağıntıları sağlar.

$$i) \quad \nabla \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} - \nabla \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} = z \nabla \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$ii) \quad \nabla \bigcirc = 1$$

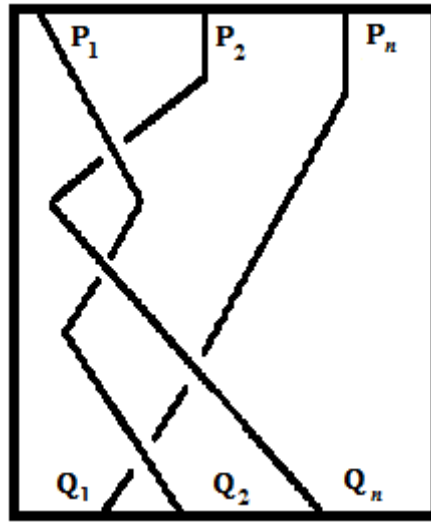
$$iii) \quad K \text{ düğümü } K' \text{ düğümüne kuşatan izotopi ise } \nabla_K(z) = \nabla_{K'}(z)$$

dir[8,10].

1.2. Örgüler.

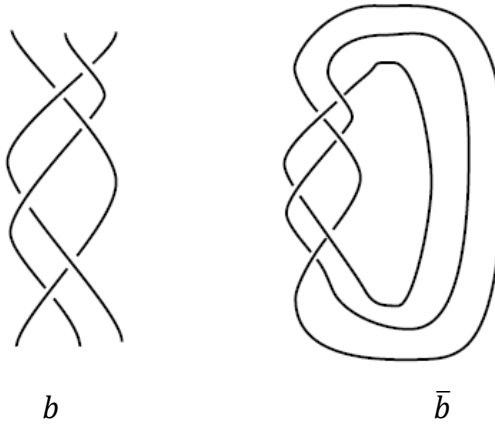
1.2.1. Örgü.

R^3 uzayında bir D dikdörtgeninin karşılıklı kenarları üzerine P_i, Q_i ($i = 1, \dots, n$) noktaları eşit uzaklıkta yerleştirilsin (Şekil 1.8). f_i , P_i de başlayan ve $Q_{\pi(i)}$ de son bulan R^3 içinde n tane ayrık basit poligonal yay olsun. Burada $i \rightarrow p(i)$, $\{1, 2, \dots, n\}$ üzerinde bir permütasyondur. f_i lerin tam olarak aşağıya gitmesi istenir. Yani her bir f_i ; dikdörtgenin yan kenarına dik herhangi bir düzlemi en çok bir defa keser. f_i yaylarının hepsine birden n –örgü denir ve b ile gösterilir. Dikdörtgene b nin iskeleti ve $i \rightarrow p(i)$ ye örgü permütasyonu denir[1,4].



Şekil 1.8: Bir Örgü Temsili

Aşağıdaki diyagramda görüldüğü gibi 3 – ipli bir örgünün kapanışı(kapalı örgü), başlangıç noktalarının paralel iplerinin bir koleksiyonu ile bitiş noktalarını birleştirerek elde edilir[9].



Şekil 1.9: Örgü ve Kapanışı

1.2.2. Teorem.

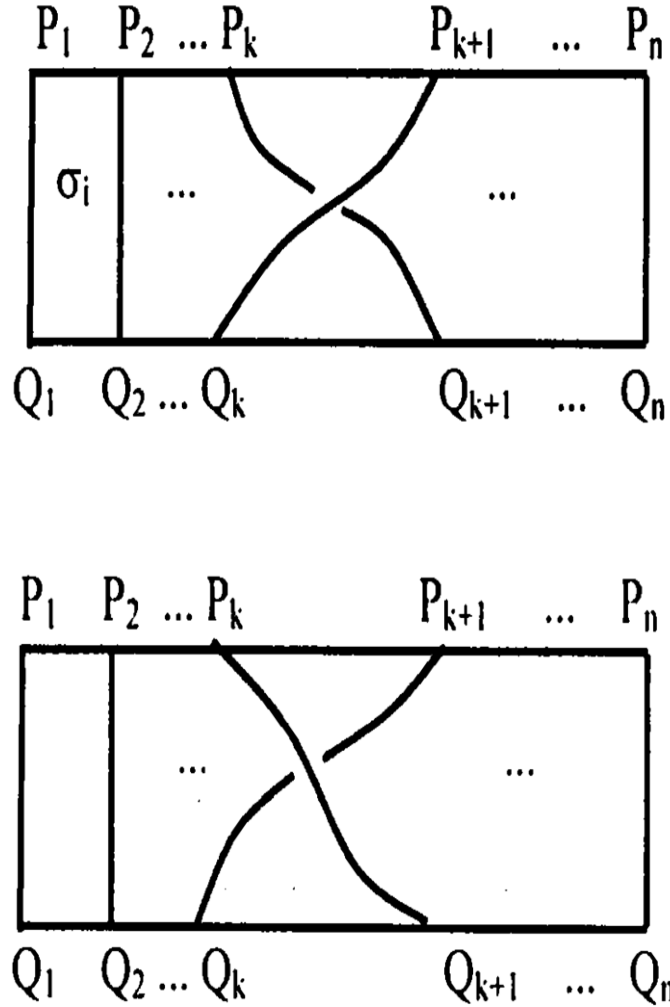
Her K halkası bir kapalı örgü ile temsil edilir[2].

1.2.3. Örgü Grubu.

$n - \text{örgülerin izotopi sınıfları bir grup teşkil eder. Bu gruba } \textit{örgü grubu} \text{ denir ve } B_n \text{ ile gösterilir.}$

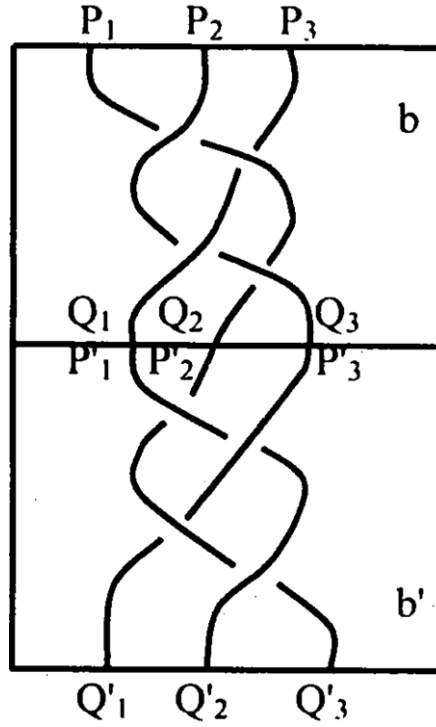
B_n grubu $n - 1$ tane σ_i doğurayı ile doğrulabilir (Şekil 1.10) . b örgüsü, σ_i, σ_i^{-1} örgü elemanlarının bir çarpımı olarak ortaya çıkar. Böylece B_n örgü grubu

$B_n = \langle \sigma_i, \dots, \sigma_{n-1}; \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_j \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1}, 1 \leq i \leq n-2, [\sigma_i, \sigma_k], 1 \leq i \leq k-1 \leq n-2 \rangle$ şeklinde temsil edilir[2].



Şekil 1.10: Örgü Grubunun Doğurayları

b ve b' iki örgü olsun. Bu iki örgünün birleşimi b nin Q_i bitiş noktaları ile b' nün P_i başlangıç noktalarını birleştirerek elde edilir (Şekil 1.11).



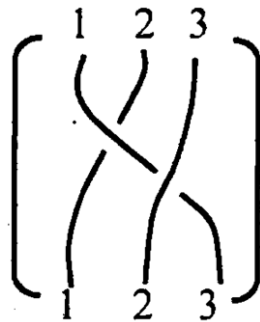
Şekil 1.11: İki Örgünün Çarpımı

1.2.4. Teorem.

B_n örgü grubundan, $\{1,2, \dots, n\}$ kümesi üzerinden S_n permütasyon grubuna bir homeomorfizm vardır[2, 21].

$\pi : B_n \rightarrow S_n$ dönüşümü, örgü ile ortaya çıkan üst sıradaki noktalar ile alt sıradaki noktaların bir permütasyonu olarak tanımlanır.

Mesela,



$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dir. $p: \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3\}$ permütasyonunu gösterir[8].

Eğer bir β örgüsü için $p = \pi(\beta)$ ise, j, i noktasında başlayan örgü ipinin alt noktası olmak üzere $p(i) = j$ dir. Şekil 1.10 da $T_k: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ kabul edilirse, k ve $k + 1$ şöyle tanımlanır.

$$T_k(i) = i, i \neq k, k + 1$$

$$T_k(k) = k + 1$$

$$T_k(k + 1) = k$$

Buna göre

$$S_n = (T_1, \dots, T_{n-1} | T_i^2 = 1, T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1})$$

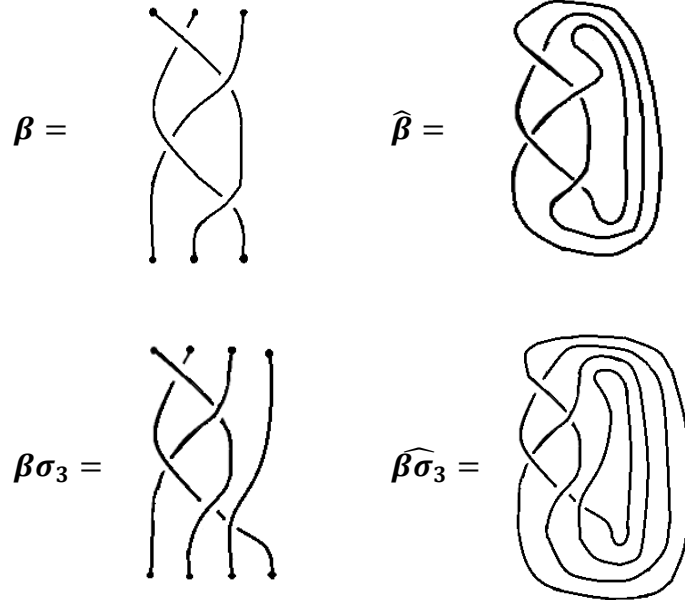
geçişler anlamında teslim edilir.

Permütasyon grubu, B_n örgü grubunun, birime eşit bütün doğuraylarının karelerinin alınmasıyla elde edilen bölüm grubudur[8].

Örgülerin kapanışları, halkalara kuşatan izotop olacak şekilde değiştirmenin bazı kolay yolları vardır. Bunlardan biri Markov hareketidir.

1.2.5. Markov Hareketi.

β, B_n içinde bir örgü grubu ($\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ ve bunların terslerinden oluşan bir grup) olsun. Öyleyse $\beta, \beta\sigma_n$ ve $\beta\sigma_{n-1}$ örgülerinin üçü de kuşatan izotop kapanışına sahip olmalıdır. Örneğin;



Şekil 1.12: Geometrik Markov Hareketi

Burada $\beta = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1} \in B_3$ ve $\beta \sigma_3 \in B_4$ dür.

Böylelikle β , bir I. Tip Reidemeister ile $\beta\sigma_n^{\mp 1}$ den elde edilir.

Bir örgüyü aynı kapanışla yapmanın diğer bir yolu B_n den herhangi bir g örgüsü seçmek ve $g\beta g^{-1}$ örgüsünün kapanışı alınırsa g örgüsü ve onun tersi olan g^{-1} , kapanış ipleri boyunca yer değiştirerek birbirlerini yok ederler.

1.2.6. Markov Teoremi.

$\beta_n \in B_n$ ve $\beta'_m \in B_m$ sırasıyla B_n ve B_m örgü gruplarında iki örgü olsun. O zaman $L = \overline{\beta_n}$ ve $L' = \overline{\beta'_m}$ halkalarının (β ve β' örgülerinin kapanışları) kuşatan izotop olmaları için gerek ve yeter şart β'_m 'nin β_n den

- (I) Verilen bir örgü grubundan denkliklerle
- (II) Verilen bir örgü grubundan eşlenik alınarak (yani bir örgünün eşleniği ile yer değiştirerek)
- (III) Markov hareketleriyle (bir Markov hareketi $\beta \in B_n$ ile $\beta\sigma_n^{\mp 1} \in B_{n+1}$ i yer değiştirir veya bu işlemin tersi, $\beta\sigma_n^{\mp 1} \in B_{n+1}$ ile $\beta \in B_n$ i yer değiştirir; eğer β, σ_n de yer almıyorsa)

elde edilmesidir.

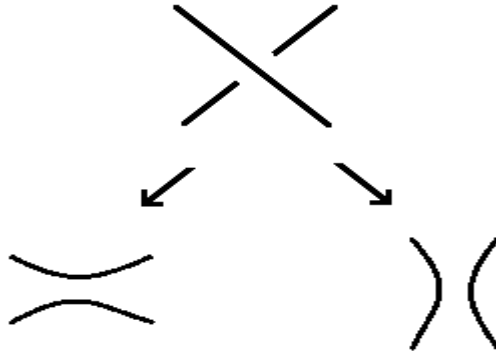
Bu teorem düğüm teorisi ile örgü teorisini birbirine bağlayan temel teoremdir[8].

1.3. Durumlar ve Parantez Polinomları.

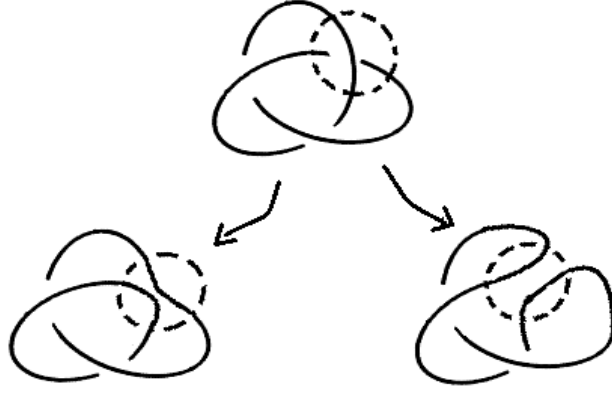
Bir halka diyagramında aşağıdaki gibi bir kavşak göz önüne alınsın:



Aşağıdaki diyagramda görüldüğü gibi bu kavşak iki duruma ayrılabilir.

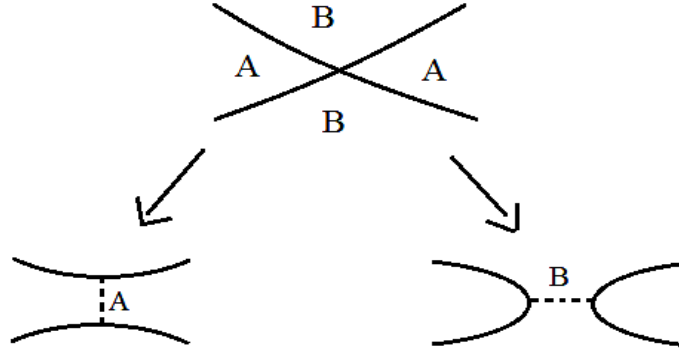


Mesela, yonca yaprağı düğümünü bir kavşağında ayırma işlemi şu şekilde yapılır:



Şekil 1.13:Kavşağın Durumları

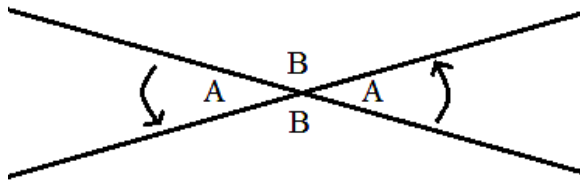
Yapılan bu işlem tekrarlanarak, bir diyagramlar ailesi elde edilebilir. Durumlara ayırma işlemi aşağıdaki yöntemle yapılacaktır:



Şekil:1.14: Durumlara Ayırma İşlemi

Yani, bir durumun A veya B tipinde olması düzenlemeye bağlıdır. Bir A ayrımı, kavşakta A ile gösterilen bölgeleri birleştirir. A ile gösterilen bölgeler, kavşakta yürüyen bir gözlemcinin alt geçitten geçerken solunda kalan bölgedir. B bölgesi bu gözlemciye göre sağda kalır.

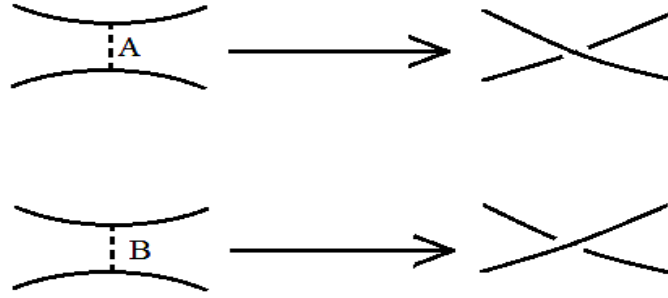
A bölgelerini belirlemenin bir başka yolu da, kavşak saatin tersi yönünde döndürüldüğünde A bölgelerinin taranmasıdır.



Şekil.1.15: Bölgelerin Belirlenmesi

Her durumda, A veya B ile belirtilen bir birleştirme, eski kavşak haline döndürülmek üzere yeniden yapılandırılabilir.

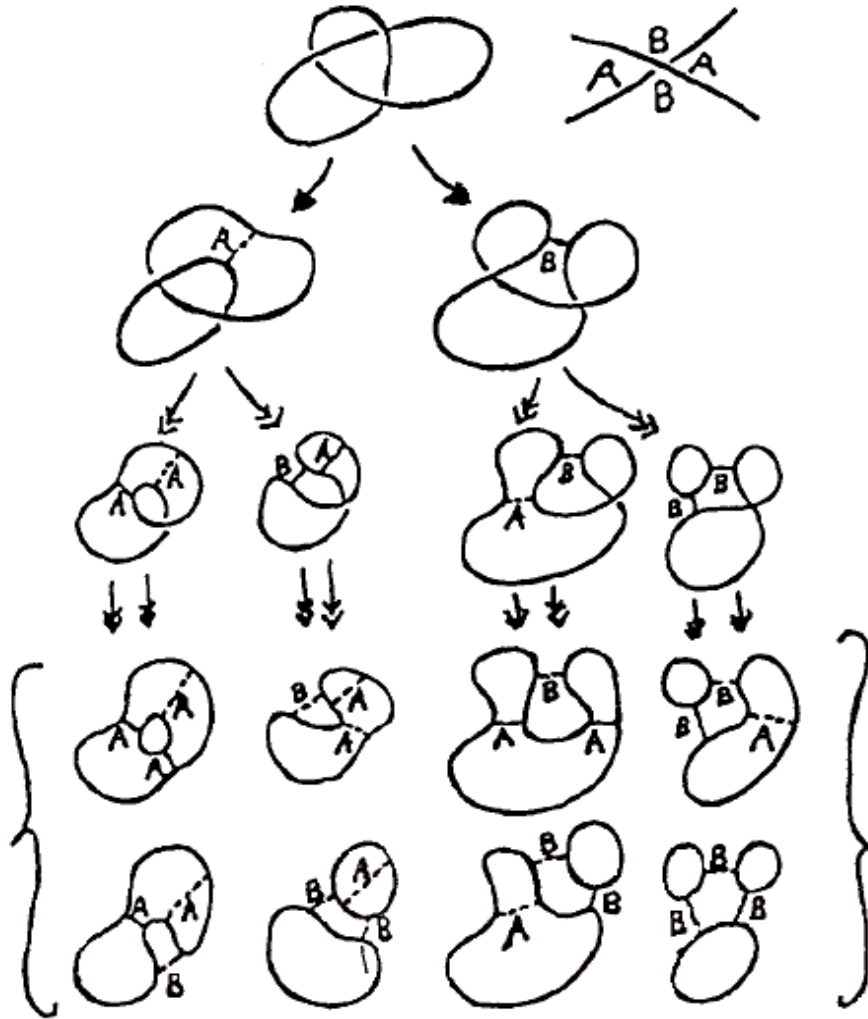
Dolayısıyla, bu A ve B 'leri izleyerek esas kavşak, herhangi bir durumundan yeniden yapılandırılabilir.



Şekil.1.16: Yeniden Yapılandırma

1.3.1. Örnek.

Yonca yaprağı düğümünün durumları:



Şekil 1.17.Yonca Yaprakının Durumları

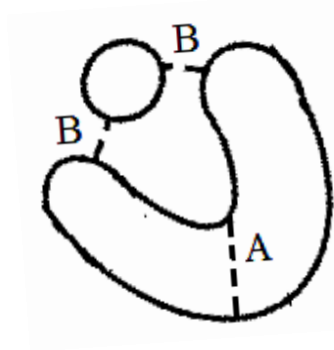
1.3.2. Tanım.

1.3.1. Örnekteki en son ayırmalara, K düğümünün durumları adı verilir. Genel olarak bir K düğümünün $\mathbb{C}(K)$ kavşaklarının kümesinin n tane elemanı varsa, K 'nin 2^n tane durumu vardır.

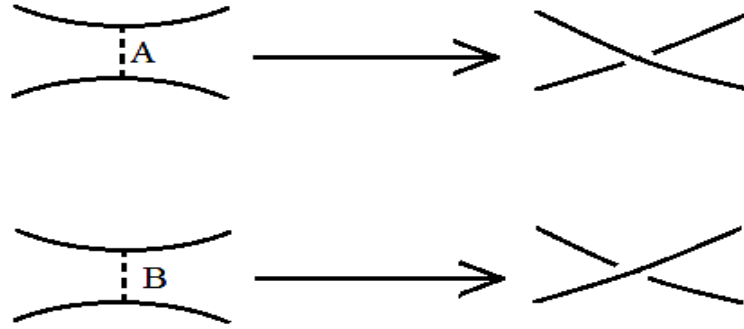
Bu durumların her birinden, yeniden yapılandırma ile K düğümü elde edilir.

1.3.3. Örnek.

Yonca yaprağı düğümünün



göz önüne alınsın. Burada



ifadeleri kullanılırsa, yeniden yapılandırma

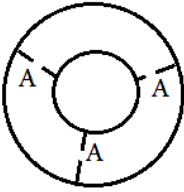


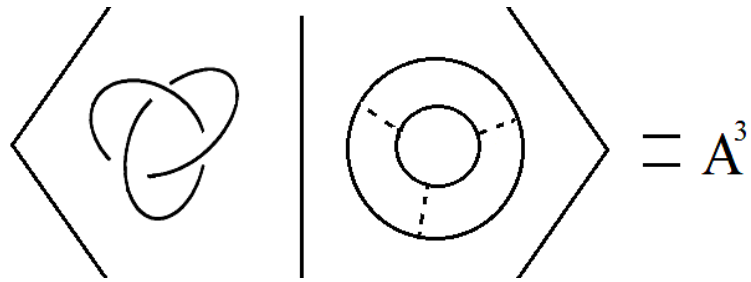
Şekil 1.18. Bir Duruma Göre Yeniden Yapılandırma

şeklinde olur.

1.3.4. Düğüm ve Halka İnvaryantlarının Bulunması.

Bir K düğümünün veya halkasının bütün durumları üzerinden ortalama alınarak düğümün invaryantları bulunacaktır. Ortalamanın özel formu şöyledir: σ , K nın bir durumu olsun. $\langle K | \sigma \rangle$, σ ya bağlı olan etiketlerin(komutatif etiketler) çarpımını gösterebilir[10].

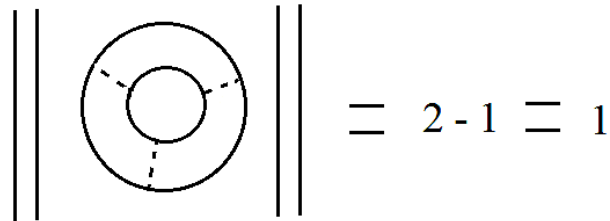
Örneğin,  durumu için



$$= A^3$$

yani $\langle K | \sigma \rangle = A^3$ olur. (Dikkat edilirse, etiketler K 'nın durumlarının yapısından elde edilmektedir.)

$\|\sigma\|$, σ daki ilmek sayısının bir eksiğini gösterebilir. Böylece



$$= 2 - 1 = 1$$

olur.

1.3.5. Tanım.

Bir K düğümünün veya halkasının parantez polinomu

$$\langle K \rangle = \langle K \rangle (A, B, d) = \sum_{\sigma} \langle K | \sigma \rangle d^{|\sigma|}$$

formülüyle tanımlanır. Burada A, B ve d komutatif cebirsel değişkendir, σ ise K nın bütün durumları üzerindedir.

1.3.6. Uyarı.

Parantez durum toplamı, discrete istatistiksel mekanikte bir bölünme fonksiyonuna benzer[11]. Aslında A, B ve d nin uygun seçimleri için; parantez polinomu, Potts modeli için bölünme fonksiyonunu ifade etmede kullanılabilir[8].

1.3.7. Örnek.

Şekil 1.17.den görülebileceği gibi, yonca yaprağı düğümü için parantez polinomu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

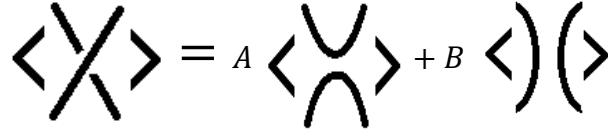
$$\langle K \rangle = A^3 d^{2-1} + A^2 B d^{1-1} + A^2 B d^{1-1} + AB^2 d^{2-1} + A^2 B d^{1-1} + AB^2 d^{2-1} \\ + AB^2 d^{2-1} + B^3 d^{3-1}$$

$$\langle K \rangle = A^3 d^1 + 3A^2 B d^0 + 3AB^2 d^1 + B^3 d^2$$

Bu parantez polinomu, bu haliyle bir topolojik invaryant değildir. Bunun bir topolojik invaryant olması için Reidemeister hareketleri altında nasıl davrandığı incelenmelidir.

1.3.8. Önerme.

Bir kavşağın parantez polinomu aşağıdaki eşitlikle verilir:


$$\langle \text{crossing} \rangle = A \langle \text{crossing with top-right and bottom-left brackets} \rangle + B \langle \text{crossing with top-left and bottom-right brackets} \rangle$$

İspat.

Verilen bir kavşak iki şekilde ayrılabilirdiğinden, bir K diyagramının durumları olan K' ve K'' , K diyagramının bir kavşakta A ve B ayrılmalarının yapılmasıyla K dan elde edilmiştir. Dolayısıyla $\langle K \rangle$ nın tanımından $\langle K \rangle = A \langle K' \rangle + B \langle K'' \rangle$ yazılır. Bu önermenin ispatını tamamlar.

1.3.9. Uyarı.

1.3.8. Önermesindeki ifadede her bir küçük diyagrama bir büyük diyagramın bir parçası olarak bakılabilir. Böylece üç büyük diyagram, önermedeki eşitlik anlamında küçük diyagramlarla gösterilen lokal bölgeler hariç özdeştir. Mesela 1.3.8 önermesinin bir özel durumu

$$\langle \text{link} \rangle = A \langle \text{link} \rangle + B \langle \text{link} \rangle$$

dir. A ve B ifadeleri sırasıyla A ve B ayrılmalarını ifade ederler.

1.3.10. Uyarı.

Yukarıdaki ispat

$$\langle K \rangle = \sum_{\sigma} \langle K | \sigma \rangle \langle \sigma \rangle$$

formundaki daha genel bir paranteze uygulanabilir, burada $\langle \sigma \rangle$ herhangi bir iyi tanımlanmış durum değerlendirmesidir. $\langle \sigma \rangle = d^{||\sigma||}$ olarak alınacaktır.

1.3.11. Uyarı.

Önerme 1.3.8. parantez polinomu hesaplamak için kullanılır. Mesela iki bileşenli

$$\begin{aligned} \langle \text{link} \rangle &= A \langle \text{link} \rangle + B \langle \text{link} \rangle \\ &= A \{ A \langle \text{link} \rangle + B \langle \text{link} \rangle \} + B \{ A \langle \text{link} \rangle + B \langle \text{link} \rangle \} \end{aligned}$$

halka için parantez polinomu

$$= A^2 d^{2-1} + AB d^{1-1} + BA d^{1-1} + B^2 d^{2-1}$$

$$= A^2 d^1 + 2AB d^0 + B^2 d^1$$

şeklinde yazılır.

1.3.12. Önerme.

$$\text{a) } \langle \text{link} \rangle = AB \langle \text{link} \rangle + AB \langle \text{link} \rangle + (A^2 + B^2) \langle \text{link} \rangle$$

$$\text{b) } \langle \text{link} \rangle = (Ad + B) \langle \text{link} \rangle$$

$$\langle \text{link} \rangle = (A + Bd) \langle \text{link} \rangle$$

İspat.(a)

$$\begin{aligned}
 \langle \text{X} \rangle &= A \langle \text{Y} \rangle + B \langle \text{Z} \rangle \\
 &= A \{ A \langle \text{A} \rangle + B \langle \text{B} \rangle \} + B \{ A \langle \text{C} \rangle + B \langle \text{D} \rangle \} \\
 &= AB \langle \text{A} \rangle + AB \langle \text{B} \rangle + (A^2 + B^2) \langle \text{C} \rangle.
 \end{aligned}$$

(b) şıkkı da benzer şekilde ispatlanır. Dikkat edilirse, $\langle \text{O} \rangle = d \langle \text{~} \rangle$ ve genel olarak, $\langle OK \rangle = d \langle K \rangle$ dir. Burada OK , K diyagramına ayrı bir çember eklenmesini ifade eder. Böylece

$$\langle \text{O} \rangle = d \langle \text{~} \rangle$$

yazılır.

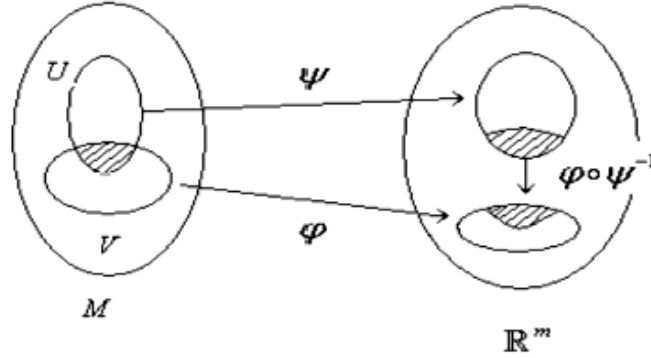
1.4. Manifolddar.

Manifoldları inceleyen matematik bilim dalı topolojidir. Poincare, topolojinin kurucusudur. Topolojide bir nesnenin şekli önemli değildir. Sanki her şey oyun hamurundan ya da lastikten yapılmış gibi kesme ve yapıştırma yapmadan germe, bükme sıkıştırma yoluyla şekillendirilebilir. Topoloji ile uğraşan biri açısından, bir simit ile sapı olan bir kahve fincanının arasında fark yoktur. Poincare, bu çeşit nesnelere ‘manifold’ adını verir[12,13].

1.4.1. Tanım.

M herhangi bir topolojik uzay ve $U \subset M$ açık olsun. $\psi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonu bir homeomorfizma ise ψ ye M de m -boyutlu koordinat sistemi denir. M deki m – boyutlu koordinat sistemlerinin bir ailesi \mathcal{A} olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise \mathcal{A} ya M üzerinde C^∞ – atlas denir.

- i) \mathcal{A} daki koordinat sistemi fonksiyonlarının tanım kümelerinin birleşimi M ye eşit olmalı
- ii) $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ve $\phi: V \rightarrow \mathbb{R}^m$, M üzerinde, $U \cap V \neq \emptyset$ olan \mathcal{A} 'nın iki elemanı için *koordinat değişimi* (*change of coordinats*) olarak isimlendirilen; $\phi \circ \psi^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonu bir C^∞ difeomorfizma olmalıdır.



Şekil 1.19. Koordinat Değişim Fonksiyonu

Eğer bu tanımda sadece (i) şartı sağlanıyorsa yani $\forall x \in M$ için bu noktanın \mathbb{R}^m ye homeomorfik olan bir açık komşuluğu bulunabiliyorsa; bu manifoldta *topolojik manifold* denir[12].

M Hausdorff topolojik uzayı üzerinde bir \mathcal{A} , C^∞ - tam atlası bulunabiliyorsa; M kümesine *m – boyutlu türevlenebilir manifold* veya *düzgün manifold* denir ve (M^m, \mathcal{A}) veya kısaca M^m ile gösterilir.

Açıkça her türevlenebilir manifold bir topolojik manifolddur[17].

1.4.2. Örnek.

Her $m \geq 1$ doğal sayısı için;

$$\mathbb{R}^m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid \forall 1 \leq i \leq m \text{ için } x_i \in \mathbb{R}\}$$

m – boyutlu Öklid uzayı düzgün bir manifolddur. Ayrıca;

$$B^m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 < 1\}$$

açık birim dairesi de *m – boyutlu* düzgün bir manifolddur.

1.4.3. Tanım.

f fonksiyonu p noktasında diferansiyellenebilir ise, p noktasındaki her $\eta: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ koordinat sistemi için, $f \circ \eta^{-1}: \eta(V) \rightarrow \mathbb{R}^m$ koordinat gösterimi, $\eta(p)$ noktasında diferansiyellenebilirdir.

1.4.4.Tanım.

$f: M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu M manifoldunun her p noktasında düzgün ise; f fonksiyonu M üstünde düzgündür (diferansiyellenebilirdir) denir[13].

1.4.5.Tanım.

$\varphi: M^m \rightarrow N^n$ bir fonksiyon olsun. p noktasında en az bir $\xi: U \rightarrow \xi(U)$ ve $\varphi(p)$ noktasında en az bir $\mu: V \rightarrow \mu(V)$ koordinat sistemi $\mu \circ \varphi \circ \xi^{-1}$ dönüşümü, $\xi(p)$ noktasında düzgün (diferansiyellenebilir) olacak biçimde bulunabiliyorsa; φ dönüşümü, p noktasında *düzgündür (diferansiyellenebilirdir)* denir. $\varphi: M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonları için $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ koordinat sistemleri birim dönüşüm alınır.

1.4.6.Tanım.

$\varphi: M^m \rightarrow N^n$ fonksiyonu düzgün dönüşüm ise süreklidir.

1.4.7.Tanım.

$\varphi: M^m \rightarrow N^n$ düzgün dönüşümünün tersi varsa ve tersi de düzgün ise; φ dönüşümüne bir *difeomorfizma* adı verilir. M ve N manifoldları verildiğinde, M 'den N 'ye giden bir difeomorfizma varsa, M manifoldu, N manifolduna *difeomorfiktir* denir.

1.4.8.Tanım.

(X, \mathfrak{S}) ve (Y, \mathfrak{S}^*) iki topolojik uzay olsun. Eğer bir $f: X \rightarrow f(X) \subset Y$ fonksiyonu bire-bir, sürekli ve $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$ ters fonksiyonu da sürekli ise, diğer bir ifade ile f, X ile $f(X)$ görüntüsü arasında bir homeomorfizma ise; bu f fonksiyonuna, (X, \mathfrak{S}) dan (Y, \mathfrak{S}^*) içine bir *gömme fonksiyonu* denir. Burada $f(X)$ alt uzay topolojisi ile göz önüne alınmaktadır.

Böyle bir f fonksiyonu varsa X, f ile Y içine *gömülmüştür* denir. Buna göre, eğer $(X, \mathfrak{S}), (Y, \mathfrak{S}^*)$ in bir alt uzayına homeomorf ise; X, Y içine gömülmüş olur.

1.4.9. Tanım.

$f \in \mathfrak{S}(p)$ ye aşağıdaki şartları sağlayan $v(f) \in \mathbb{R}$ sayısı karşılık gelirse $v: \mathfrak{S}(p) \rightarrow \mathbb{R}$ gösterimine M nin p deki *tanjant vektörü* denir.

$f, g \in \mathfrak{S}(p); \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için

$$v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$$

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$$

v ve v' , M nin p noktasında tanımlanmış tanjant vektörü olsunlar. $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$(v + v')(f) = v(f) + v'(f) \quad , \quad (\lambda v)(f) = \lambda (v(f)) \quad (f \in \mathfrak{S}(p))$$

vektör uzayı yapısına sağlıyorsa buna manifoldun p noktasındaki *tanjant uzayı* denir.

1.5. Kategori Teorisi.

Kısaca alan teorisi için gerekli kategori teorisinin temel özellikleri verilecektir (kapsamlı bilgi için [14] e bakın). Alan teorisi için kullanılacak olan cebirsel topolojide geçerli olan kategori teorisinin iyi bir tanımı şöyledir:

1.5.1. Kategori.

ε bir sınıf olsun. ε nun *kategori* olması için ε daki tüm nesnelerin (objeler) sınıfının bu sınıf üzerinde tanımlanan ve birim eleman özelliği ile birleşme özelliğini sağlayan kısmi bir işlemden oluşmalıdır. Daha ayrıntılı bir şekilde ifade edilecek olursa; ε daki tüm objelerin sınıfı $obj(\varepsilon)$ ve $\forall A, B \in obj(\varepsilon)$ ayrık çifti için A dan B ye tüm morfizmaların sınıfı $\varepsilon(A, B) = Hom(A, B) = \{f \mid f : A \rightarrow B\}$ şeklinde tanımlansın. Her $A, B, C \in obj\varepsilon$ için iki morfizmin bileşkesi şeklinde gösterilen

$$\begin{aligned} \circ : Hom(A, B) \times Hom(B, C) &\rightarrow Hom(A, C) \\ (f, g) &\rightarrow g \circ f \end{aligned}$$

aşağıdaki aksiyomları da sağlamalıdır[15].

- i) $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow D$ olmak üzere bileşke işlemi birleşme özelliğine sahiptir. Yani

$$h(g \circ f) = (h \circ g)f$$

$$h(gf) = (hg)f$$

sağlanmalıdır. Bunu diyagram ile gösterelim:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h(gf)=(hg)f} & D \\ f \downarrow & \begin{array}{c} \nearrow h\bar{g} \\ \searrow g\bar{f} \end{array} & \uparrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

- ii) ε daki her A nesnesi için $1_A \in Hom(A, A) = \{1_A : A \rightarrow A\}$ şeklinde verilen bir özdeşlik dönüşümü vardır öyle ki her $f \in Hom(B, A)$ için $1_A \circ f = f$ ve her $g \in Hom(A, C)$ için $g \circ 1_A = g$ olmalıdır. Bunu diyagram ile gösterelim:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ 1_A \downarrow & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \downarrow 1_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

1.5.1.2. Örnek.

Objeleri cümleler, morfizmleri fonksiyonlar olan sınıf bir kategoridir ve bu kategoriye *cümlelerin kategorisi* denir ve kısaca *SET* ile gösterilir [15].

1.5.1.3. Örnek.

Objeleri tüm topolojik uzaylar, morfizmleri topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlar ve kısmi işlem ise sürekli fonksiyonların bileşkesi alınarak elde edilen sınıf bir kategoridir ve bu kategoriye *topolojik uzayların kategorisi* denir ve kısaca *TOP* ile gösterilir [15].

1.5.1.4. Fanktor.

\mathcal{C} ve \mathcal{D} iki kategori olsun. Bu kategorilerdeki nesnelere nesnelere, okları oklara taşıyan F dönüşümüne bir *fanktor* denir ($F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$).

Fanktorun bir başka tanımı ise;

$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ kategoriler olmak üzere $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ dönüşümü,

- (i) $F(1_A) = 1_{FA}$
- (ii) $F(gf) = F(g)F(f)$

özelliklerini sağlayan F dönüşümüne bir *fanktor* denir.

1.5.1.5. Örnek.

$F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ olsun. $A \in Ob(\mathcal{C})$ ise $FA = A \in Ob(\mathcal{C})$ ve

$$f: A \rightarrow B$$

\mathcal{C} de bir morfizm ise

$$Ff = f: FA = A \rightarrow FB = B$$

\mathcal{C} de bir morfizmdir.

- i) $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, \mathcal{C}$ de morfizmler ise, $F(gf) = gf = FgFf$;
- ii) Her $A \in Ob(\mathcal{C})$ için $F(1_A) = 1_A = 1_{FA}$

olur. O halde $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ fanktorüne birim fanktor denir.

1.5.1.6. Tanım.

Bir \mathcal{C} uzayında $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ kategorisi fanktor belirtiyor ise bu kategoriye monoidal ya da tensör kategori denir.

1.5.2.Kobordizm(Cobordism).

M, N $d -$ boyutlu bir odaklı manifold olsun. N^* , N nin tersi olmak üzere $(d + 1) -$ boyutlu bir B uzayı $\partial B = M \cup N^*$ eşitliğini sağlıyorsa B ye kobordizm (*cobordism*), M, N ye ise *kobordant (cobordant)* denir[16].

Kobordizm bir denlik sınıfı olup genelleştirilerek hem homeomorfizm hem de difeomorfizm olduğu söylenebilir. Kobordizmler tarafından bir zincir oluşturulduğunda bir grupoid (monoid grup) elde edilir.

Kobordizm teorisi RenéThom's tarafından ortaya atılmış ve kobordizm grubunu inşa etmiştir. Bu gruplar *boyut* ≥ 4 olduğu yerlerde hesaplanamazlar. Buna rağmen Louis Clane topolojik kuantum alan teorisinde kullanılacak kobordizmler için *boyut* ≥ 1 olduğu yerlere boyutu önemsemeden çalışmalar yapmıştır.

1.6. Lie Grupları.

TQFT için Lie gruplarının bilinmesi gerekmektedir. Bu bölümde kısaca kompakt Lie grupları üzerinde odaklanarak temel sonucu kapsayacak tanımlar verilecektir.

1.5.1. Tanım.

G diferansiyellenebilir bir manifold ve grup yapısına sahip olmak üzere $G \times G \rightarrow G$ tasfiri $(\sigma, \tau) \rightarrow \sigma\tau^{-1} \in C^\infty$ ise G ye bir *Lie grubu* denir[17].

Genel lineer grup $G = GL(n, \mathbb{R})$ reel $n \times n$ lik tersinir matrislerin oluşturduğu gruptur[18].

1.5.2. Örnek.

Lie grubunun bir örneği $SU(2, \mathbb{C})$ dir. Bu 2×2 lik kompleks matrislerin bir düzeni olan matris grubudur.

$$SU(2) = \{A: \bar{A}^t = A^{-1} \text{ ve } \det A = 1\}$$

1.5.3. Tanım.

g , bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere

$$\begin{aligned} g \times g &\rightarrow g \\ (X, Y) &\rightarrow [X, Y] \end{aligned}$$

tasfiri aşağıdaki şartları sağlıyor ise g ye *Lie cebiri* denir[17].

- i. K üzerinde bilinear ($[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y] = \alpha_1 [X_1, Y] + \alpha_2 [X_2, Y]$)
- ii. Ters simetrik ($[X, Y] = -[Y, X]$)
- iii. Jacobi özelliğine $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

1.5.4. Tanım.

G kompakt diferansiyellenebilir manifold ve grup yapısına sahip olmak üzere $G \times G$ den G ye gösterimi $(g, h) \rightarrow gh^{-1} \in C^\infty$ ise G ye *kompakt Lie grubu* denir.

Buna göre herhangi bir Lie grubu $GL(n, \mathbb{C})$ için $n \times n$ kompleks matrislerin bazı alt grupları tarafından gösterilebilir (tanjant uzayı $n \times n$ matrisi olarak tarif edilebilir. Bu nedenle kendi başına bir grup yapısına sahiptir.).

1.5.5. Teorem.

V herhangi bir vektör uzayı ve bir Lie grubunun temsili olan G için $Aut(V) = GL(V)$ gösterimi homeomorfiktir ($[X, Y] = XY - YX$ desteği ile).

Lie cebirinde tüm $n \times n$ boyutundaki matrisler kümesi $gl(n)$ de, tıpkı $GL(n)$ gibi Lie cebiridir. $GL(n)$ ye gömülü bir kompakt Lie cebiri düşünülün ($gl(n)$ gömülü cebiri gibi). Bu standart bir temsildir.

Standart temsilden bahsedilirken gömülme alanı unutulacak ve sadece $GL(n)$ nin bir alt grubu olan G işlenecektir.

$g \rightarrow d(ghg^{-1})$ Lie cebiri üzerindeki bir Lie grubunun $G \rightarrow g$ ye ek temsili olarak verilir. Burada diferansiyel eşleştirmedeki her grup elemanı otomorfizm içindedir. Tanımlara bakıldığında görülür ki X tanjant vektörü üzerindeki $Ad(g): X \rightarrow gxg^{-1}$ eylemi diferansiyellenebilirdir.

Lie cebiri üzerindeki bir ek temsilin diferansiyeli yine kendi ek temsili verir. $GL(n, \mathbb{C})$ kompakt Lie grubu için X tanjant vektörüne

$$ad(X): Y \rightarrow \frac{d}{dt}(Ad(\exp(tX))Y)|_{t=0}$$

temsili altında işlem yapılır.

$X \in g$ elemanını düşünün. Orada $\gamma_x(0)$ eşit kimliği ile benzersiz bir jeodezik $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$ ye vardır ve $\gamma_x(0) = X$ olduğu bilinmektedir. Bu $g \rightarrow G$ ye haritalama $X \rightarrow \gamma(1)$ üzerinde üstel haritalamadır. Bu difeomorfik ve onun bir cebir üzerindeki Lie grubu ile ilişkilendirmek için bir kural verir[16].

BÖLÜM II

KUANTUM MEKANIĞİNİN BAZI TEMEL PRENSİPLERİ

Kuantum mekaniğinin bazı prensiplerinden kısaca bahsedilecektir.

2.1. De Broglie Denklemleri.

$\hbar = h/2\pi$ ve h ($h = 6,625 \times 10^{-27}$ erg.sn veya $h = 6,626 \times 10^{-34}$ joul.sn ise

Plancet Sabiti olmak üzere

$$E = \hbar\omega \quad \text{ve} \quad P = \hbar k$$

De Broglie'nin temel denklemdir.

Bu denklemlerde ω ve k sırasıyla parçacığa iliştirilen bir düzlem dalgasının frekansını ve dalga sayısını göstermek üzere E , bir elektronun enerjisini gösterir ve P de momentumudur.

De Broglie'nin iddiasına göre, bir hidrojen atomundaki elektronların yörüngelerinin discrete enerji seviyeleri, elektronun hareketine iliştirilen dalgaların titreşim metotları üzerindeki kısıtlamalar ile açıklanabilir. De Broglie, dalga ile ilişkili enerji ve momentum seçimlerini keyfi yapmaz. Bunlar, “dalga veya dalga paketinin elektron boyunca hareket ettiği” fikrine uygun olacak şekilde düzenlenmiştir. Bunun nasıl olduğunu göstermek için bir dalga paketi kavramı izah edilecektir[8,19].

2.2. Dalga Paketleri.

ω ve k yukarıdaki gibi tanımlanmak, λ dalga boyunu ve c de dalganın hızını göstermek üzere

$$f(x, t) = \sin(kx - \omega t) = \sin((2\pi/\lambda)(x - ct))$$

bir boyutta bir düzlem dalgası denklemdir.

Frekans farkları az olan olan iki veya daha çok dalganın lineer kombinasyonu, kendi hızıyla hareket eden bir dalga paketi oluşturur. Bu olayın aslını görmek için,

$$g(x, t) = \sin(kx - wt) = \sin(k'x - w't)$$

denklemini göz önüne alınsın.

$$\sin(X + Y) + \sin(X - Y) = 2 \sin(X) \cos(Y)$$

eşitliğinden

$$g(x, t) = \left(\cos\left(\frac{k - k'}{2}x - \left(\frac{w - w'}{2}t\right)\right) \sin\left(\left(\frac{k + k'}{2}x - \left(\frac{w + w'}{2}t\right)\right)\right)$$

olduğu sonucuna varılır.

Böylece k , k' ne ; w , w' ne çok yakın ise $(k + k')/2$, k ya ve $(w + w')/2$, w ya yaklaştırılabilir ve

$$\delta k = (k - k') \quad , \quad \delta w = (w - w')$$

yazılabilir.

Sonuçta;

$$g(x, t) = \left(\cos(\delta k/2) \right) x - (\delta w/2)t \sin(kx - wt)$$

ile gösterilir.

$$(\cos(\delta k/2) x - (\delta w/2)t)$$

şeklindeki dalga denklemi, kendi hızı ve frekansı ile hareket eden bir paketidir. Bu nedenle dalga paketinin hızı (grup hızı diye de adlandırılır)

$$V_g = dw/dk$$

formülü elde edilir.

Şimdi, momentumu p ve hızı v olan klasik bir parçacıktan bahsedildiği farz edilsin. m parçacığının kütlesi olmak üzere $p = mv$ ve $E = (1/2)mv^2$ dir. Bu durumda

$$V_g = dE/dp = v$$

dir.

Yani grup hızı klasik hıza eşittir. $E = \hbar\omega$, $p = \hbar k$ De Broglie eşitliklerinin ışığında verilen bu dalga paketi hızı ile modellenilebildiği fikri ile uyuşmaktadır[8].

2.3. Schrodinger Denklemi.

$$\psi = \psi(x, t) = \exp(i(kx - \omega t))$$

Dalga yukardaki gibi kompleks formunda yazılırsa De Broglie'nin enerji ve momentumunun diferansiyelleme ile çıkarılabileceği görülür:

$$i \hbar \partial \psi / \partial t = E \psi \quad \text{ve} \quad -i \hbar \partial \psi / \partial x = p \psi$$

Bu Schrodinger'in "dinamik değişkenlerin operatörler ile özdeşlenmesi" postülatına dayanmaktadır. Şöyle ki, ikinci eşitlik bir operatör olarak momentumun geldiğinde:

$$p \longleftrightarrow i \hbar \partial / \partial x$$

ilk denklem,

$$i \hbar \partial \psi / \partial t = E \psi$$

bir hareket denklemi statüsünü alır. Bu formülde konum operatörü x in kendisidir. Bu yöntemle, klasik formülde momentum operatörünün enerjinin yerine geçmesi gibi burada da enerji bir operatör halini almaktadır.

$$E = (1/2) m V^2 + V$$

$$E = p^2 / 2m + V \longleftrightarrow E = -(\hbar^2 / 2m) \partial^2 / \partial x^2 + V$$

E için bu operatör tanımı ile Schrodinger denklemi, zamanın birinci türevi ve yolun ikinci türevine bağlı bir denklemdir (V potansiyel enerjidir ve ona karşılık gelen operatör uygulamanın detaylarına bağlıdır.). Bu formdaki teoride diferansiyel denklemin genel çözümleri göz önünde bulundurulur ve buna karşılık binlerce uygulamada mükemmel sonuçlar elde edilir.

Gözlem, karşılık gelen operatörlerin özdeğerleri (eigenvalue) kavramı ile modelleşir. Bir gözlemin matematiksel modeli; dalga fonksiyonunun özkonuma izdüşümüdür. Bir $\{E_k\}$ enerji spektrumu, Schrodinger denklemini sağlayan ψ dalga fonksiyonuna karşılık gelir. Öyle ki, $E \psi = E_k \psi$ ile E_k sabitleri vardır. Bir E gözleniri, dalga denkleminin Hilbert uzayı üzerindeki bir Hermityen operatörleri reel özdeğerlere sahip olduğundan, bu sabitler kuantum teorisi için ölçümlü halkayı gösterir.

Dikkat edilirse, momentum ve konum operatörü $xp - px = \hbar i$ denklemini sağlarlar.

Bu direkt olarak Heisenberg'in elde ettiği denkleme karşılık gelir. Bu durumda değişkenlerin komutatif olmaları gerekmediği göz önüne alınmış olur. Bu yolla De Broglie, Schrodinger ve Heisenberg'in görüşleri birleşmiş ve kuantum mekaniği doğmuştur[8].

Bu gelişmeler esnasında, yorumlar da geniş anlamda değişiklikler göstermiştir. Neticede fizikçiler, dalga fonksiyonunu bir genelleştirilmiş dalga paketi olarak değil de, mümkün gözlemlerle ilgili bir bilgi taşıyıcısı olarak görmüşlerdir. Bu düşünce ile $\psi^*\psi$ (ψ^*, ψ nin kompleks eşleniğini gösterir) parçacığın (kütlenin)(burada parçacık lokal uzaysal karakteristiğe sahip bir gözlenirdir-observable) uzay-zamanda verilen bir noktada bulunma olasılığını temsil ederken, ψ nin kendisi matematiksel olarak kullanılabilir.

2.4. Rotasyonlar ve Simetri.

Üç boyutlu uzayda, kuantum teorisi matematiğinin rotasyonel simetriye nasıl karşılık geldiği görülebilir. Açısal momentum göz önünde bulundursun.

Açısal momentumu bulmak için klasik formül

$$L = r \times p$$

dir.

(burada r ve p sırasıyla parçacığın konum ve momentum vektörleridir. x ise üç boyutta vektörel çarpımı gösterir.)

p ye karşılık gelen kuantum operatörü yerine p nin kendisi alınır

$$p \longleftrightarrow i\hbar(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$$

elde edilir. Bu da, açısal momentum operatörlerinin (L_x, L_y, L_z) vektörüne ulaşılmasını sağlar.

$$L_x = -i\hbar(y \partial/\partial z - z \partial/\partial y)$$

$$L_y = i\hbar(x \partial/\partial z - z \partial/\partial x)$$

$$L_z = -i\hbar(x \partial/\partial y - y \partial/\partial x)$$

Böylece

$$[L_x, L_y] = L_x L_y - L_y L_x = -i\hbar L_z$$

olduğu görülebilir (x, y, z nin devirli permutasyonu için de benzer eşitlik yazılabilir). Bu gösterir ki, açısal momentum operatörleri aynı örnek üzerinde $SU(2)$ grubunun Lie cebiri için tam olarak doğuray gibi hareket ederler.

Daha kesin olarak, aşağıda gösterilen J_1, J_2, J_3 matrisleri ele alınsın.

$$J_1 = (1/2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = (1/2) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = (1/2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

O zaman $[J_1, J_2] = iJ_3$ (ve onun devirli permütasyonları) dır . Dolayısıyla $[J_r, J_s] = i \varepsilon_{rst} J_t$ yazılabilir. Burada ε_{rst} epsilon sembolüdür ve rst , 123 ün devirli permütasyonu olduğunda değeri 1 , devirli olmayan permütasyonu olduğunda değeri -1 ve rst nin bir tekrarlanması varsa değeri 0 dır. J_k matrisleri, izi sıfır olan Hermityen matrislerin kümesinin lineer doğuraydır.

Eğer a, b, c gerçel sayılar olmak üzere $H = aJ_1 + bJ_2 + cJ_3$ ise o zaman

$$\exp(iH) \exp(-iH^*) = \exp(i(H - H^*)) = \exp(0) = 1$$

ve

$$\det(\exp(iH)) = \exp(iz(iH)) = \exp(0) = 1$$

dir.

Böylece $\exp(iH)$, $U^* = U^{-1}$ ve determinanı 1 olan U matrisinin özel birim grubu olan $SU(2)$ ye aittir (U^*, U nun transpozunun eşleniğidir). H matrisi $SU(2)$ nin cebiri ile özdeşlenebilir.

Böylece, açısal momentum operatörlerinin (\hbar çarpımı farkıyla) $SU(2)$ Lie cebirinin temsilini verdiği görülür. Üç boyutlu uzayda rotasyonlar ile direkt ilişkisi, $SU(2)$ nin $SO(3)$ rotasyon grubunun iki katlı örtü uzayı olduğu ve rotasyonların, $\psi(x, y, z, t)$ dalga fonksiyonu üzerine $\psi^* \psi$ yi koruyan birim dönüşümlerle etki etmesi gerçeğinden ileri gelmektedir.

Lie cebirinin açısal momentum elemanlarıyla bu ilişkisi, kuantum mekaniğindeki gözlemcilerin içinde bulunduğu bir birim gruplu Lie cebiri prensibini açıklar. Bu ise, U birim ve H Hermityen olmak üzere $\exp(iH) = U$ gerçeğinin bir tekrarıdır(yeniden hesaplanmasıdır).

Az önce de belirtildiği gibi bir birim dönüşüm, kuantum mekaniğindeki bir simetri formundadır. Gözlemciler, simetrilerin Lie cebirleri içinde de yer alırlar.

2.5 Temsiller.

Açısal momentum kuantizasyonu, $SU(2)$ nin Lie cebirinin temsillerine bağlıdır. En basit örnek, $u = (1,0)^t$ ve $d = (0,1)^t$ (t transpozunu gösterir) ile üretilen $(1/2)$ spinli iki boyutlu temsildir.

O zaman $J_3 u = (1/2)u$ ve $J_3 d = (-1/2)d$ dir. Bu temsil, z -ekseni üzerindeki gözlemleyen rotasyonu için özdeğerleri üretir. u ların ve d lerin tensör çarpımlarının simetrize edilmiş toplamlarını alarak iki boyutlu temsillerin, yüksek boyutlu temsiller elde edilir. Bu, çalışmayı topoloji ile kuantum mekaniğinin en zayıf ilişkisine götürür (Dirac'ın ip hilesi). Bu, sonraki bölümde incelenecektir.

2.6 Dirac Parantezleri.

Dirac rotasyonu $\langle a | b \rangle$ biçimindedir. Bu rotasyonda $\langle a |$ ve $| b \rangle$ sırasıyla vektör ve kovektörlerdir. $\langle a | b \rangle$, $\langle a |$ nin $| b \rangle$ vasıtası ile değerlendirilmesidir. Böylece $\langle a | b \rangle$ bir skalerdir ve kuantum mekaniğinde bir kompleks sayıdır. Bu, a da başlayan ve b de biten bir durumun genliği olarak göz önüne alınabilir[14]. Yani a durumundan b durumuna bir geçişe aracılık edebilen bir proses vardır. Genliğin kompleks değerli olduğu gerçeği hariç onlar olasılığın bilinen kurallarına uyarlar. Burada kastedilen şudur:

Eğer proses c_1, c_2, \dots, c_n orta durumlarının kümesine ayrılırsa bu durumda $a \rightarrow c_i \rightarrow b$ proseslerinin kümesine sahip olunur. $a \rightarrow b$ genliği, $a \rightarrow c_i$ ve $c_i \rightarrow b$ alt konfigürasyon genliklerinin çarpımıdır. Formül olarak

$$\langle a | b \rangle = \sum_i \langle a | c_i \rangle \langle c_i | b \rangle$$

elde edilir. Burada toplam, $i = 1, 2, \dots, n$ orta durumlarının tamamı üzerindedir. Genelde, karşılıklı olarak ayrık proseslerin bir konfigürasyonunun genliği, onların bireysel genliklerinin çarpımıdır.

Genliklerin bra $\langle a |$ ve ket $| b \rangle$ ye bölünmelerine Dirac bölünmeleri adı verilir. Matematiksel olarak "bra" bir V vektör uzayının (Hilbert uzayı, sonlu boyutlu olabilir) bir eleman gibi alınabilir. Böylece $\langle a |$, V ye ve $| b \rangle$, V^* dual uzayına aittir öyle ki $| b \rangle : V \rightarrow \mathbb{C}$ bir lineer dönüşümdür. Bir V vektör uzayının bir elemanının, kompleks sayılardan Hilbert uzayına bir dönüşüm olarak alınabildiği göz önüne tutularak $\langle a | b \rangle$ genliği yeniden düzenlenebilir. $\langle a | : \mathbb{C} \rightarrow V$ verilsin. V nin karşılık gelen elemanı bu dönüşüm altında $1_{\mathbb{C}}$ in görüntüsüdür. Diğer bir ifade ile $\langle a | (1)$, V nin bir elemanıdır. $| b \rangle : V \rightarrow \mathbb{C}$ olsun. $\langle a | \cdot | b \rangle = \langle a | b \rangle : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ birleşimi, $\langle a | b \rangle (1)$ ile \mathbb{C} nin bir elemanı olarak bakılabilir.

2.7. Kuantum Alan Teorisinden Gerekli Tanımlar.

2.7.1. Korelasyon Fonksiyonu.

Kuantum alan teorisi olarak, (gerçek boşluk) n –noktası korelasyon fonksiyonunun farklı pozisyonlarda n alan operatörleri bir ürünün fonksiyonel ortalama (fonksiyonel beklenti değeri) değeri olarak tanımlanır.

$$C_n(x_1, x_2, \dots, x_n) := \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n) \rangle = \frac{\int D\phi e^{-S[\phi]}\phi(x_1)\dots\phi(x_n)}{\int D\phi e^{-S[\phi]}}$$

Zamana bağılı korelasyon fonksiyonlarına, zaman sıralama operatörü T de dahildir. Korelasyon fonksiyonları, aynı zamanda korelatörler olarak da anılır[20].

2.7.2.Fonksiyonel İntegral.

Kuantum alan teorisinde korelasyon fonksiyonları üreten Z fonksiyoneli ve bu değerde bölüm işlevi aşağıda gösterilen fonksiyonel integrali ile ifade edilir:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i(S[\phi] + \int d^d x J(x)\phi(x))}$$

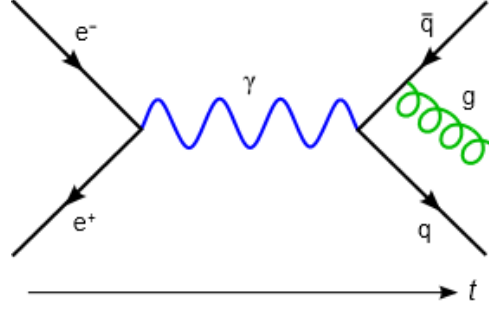
Burada S işlev fonksiyonudur.

Kuantum alan teorisinde bölüm işlevi, matematiksel bölüm işlevinin özel bir durumdur ve istatistiksel mekanik olarak anılan kavram istatistiksel bölüm işlevi ile ilgilidir. Buradaki temel fark bu basit bölüm işlevleri tanımı ile görülen rastgele değişkenlerin sayılabilir toplama bir alan olan G üzerinde fonksiyonel integral kullanımı gerektiren, bir sayılamayan set yerini almasıdır. Bölüm fonksiyonunun prototipi olarak kullanılan yardımcı fonksiyon J farklılaştırarak Feynman genliği elde edilmektedir. Bu durumda, örneğin: Green fonksiyonunun uzayında x_1 ve x_2 noktaları arasında kalan alan ϕ korelasyon fonksiyonudur[21].

$$\langle G(x_1, x_2) \rangle = - \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \log Z[J] \Big|_{J=0}$$

2.7.3.Feynman Diyagramı.

Fizikte teorik olarak, atomaltı parçacıkların davranışını düzenleyen matematiksel ifadelerin resimsel olarak sunulmasına *Feynman diyagramları* denir. Atom altı parçacıkların etkileşimini sezgisel olarak anlamaya çalışmak karmaşık ve zor olabilir. Bunu kolaylaştırmak için Nobel ödüllü Feynman tarafından 1948 yılında ortaya atılmış olan bu diyagram; soyut kavramları formülize ederek anlaşılabilir bir görüntü elde edilmesini sağlamıştır[22,23].



Şekil 2.1: Feynman Diyagramı

2.7.4. *BF* Modeli.

BF modeli, bir topolojik alan teorisi iken niceleşmiş zamana aktarıldığında bir topolojik kuantum alan teorisi halini alır. *BF* alan arka plan anlamına gelir. 4-boyutlu türevlenebilir M manifoldu, B iki formlu dinamik alanlar, G ölçü grubunda ek temsili değerler olarak G de şöyle bir bağıntı formu oluşturur. Bu eylem

$$S = \int_M K[\mathbf{B} \wedge \mathbf{F}]$$

g iki çizgili formu üzerinde değişime uğramayan bir K invariantsı ve F eğrilik formunu belirtir ve şu şekilde gösterilir:

$$\mathbf{F} \equiv d\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}$$

Bu eylem diferansiyellebilir (diffeomorphically)invariantsın göstergesidir. Onun Euler-Lagrange denklemleri

$$\mathbf{F} = 0 \quad (\text{eğri olmayan})$$

ve

$$d_{\mathbf{A}}B = 0_{\mathbf{V}} \quad (B \text{ kovaryant dış türev sıfırdır})$$

bulunmaktadır.

Aslında, bu uzay krallığında herhangi bir yerel derece uzaklığı ölçmek her zaman mümkündür. Bu da bu gösterime topolojik alan teorisi denmesine sebep olur[24].

BÖLÜM III

TOPOLOJİ ve KUANTUM MEKANİĞİ

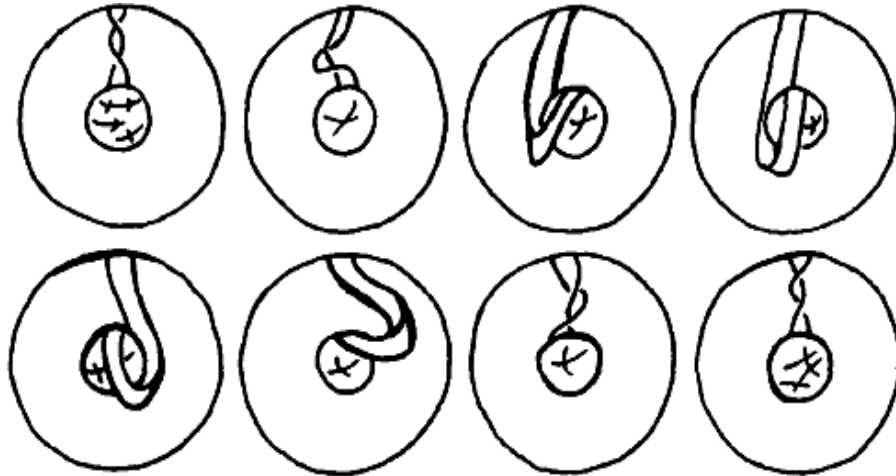
Bu bölümde, topoloji ile kuantum kavramları arasındaki ilişki incelenecektir. İlk incelenecek ilişki Dirac'ın ip hilesidir.

3.1.Dirac'ın İp Hilesi.

Sürekli bir çember içinde, bir elektronun etrafında yürüyen bir gözlemci düşünölsün. Gözlemci ve ona yakınlştırılan deney aygıtı, üç boyutlu uzayda bir rotasyon oluşturduğunda bu durumu tanımlayan vektör değerli dalga fonksiyonu birim dönüşümlü olmalıdır. Böylece $SO(3)$ uzayından $SU(2)$ uzayına tanımlanmış olur. Böyle bir gösterim çok değerlidir. Gözlemci tam bir çember etrafında hareket ettiğinden, $SU(2)$ de karşılık gelen eleman işaret değıştirmelidir.

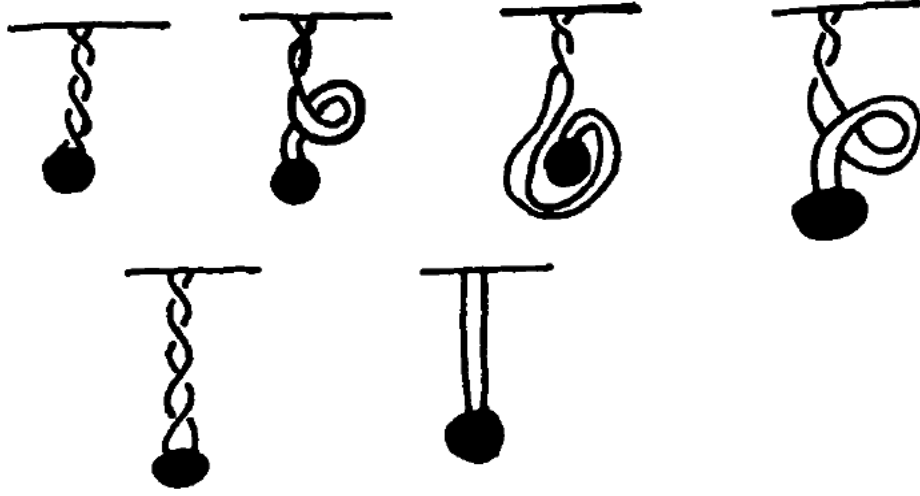
Dalga fonksiyonu, işaret değıştirdiğı için tam bir devirden sonra orijinal durumuna geri dönemez. İki tam dönüşten sonra orijinal durumuna geri dönebilir. Böylece şu sonuca varılır: sürekli 360° dönen bir fiziksel, orijinal(kuantum) durumuna tam olarak dönemez. Dirac, bu durumun topolojik tefsirini yapmıştır[8].

Şöyle ki; merkezleri aynı olan iki küre arasında gerilmiş bir kemer olsun. Kemer hem iç küre hem de dış küre üzerinde sabit fakat küreler arasındaki 3-boyutlu halka uzayında serbestçe hareket etsin. Bu durumda, kendi etrafında 360° burulan bir kemer, yine kendi etrafında -360° derece burulmuş bir kemere deforme edilebilir. Bu aşğıdaki örnekte görölebilir.



Şekil 3.1: Kemer Burulması I

Bunun bir sonucu olarak, kendi etrafında 720^0 lik bir burulma yapan kemer hiç burulmamış bir kemere dönüşebilir.

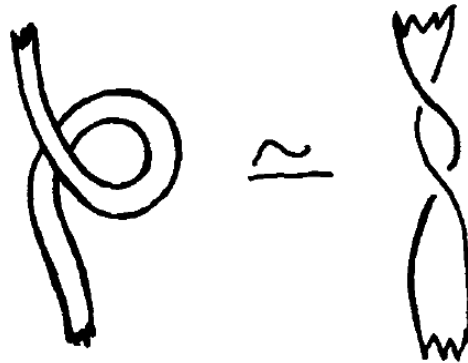


Şekil 3.2: Kemer Burulması II

3.2.Küresel Ayrışım.

Kemer bu hareketi, $SU(2)$ ve $SO(3)$ topolojisi ve aynı zamanda $SU(2)$ nin $SO(3)$ ün iki katlı örtü uzayı olduğu gerçeği ile yakından ilgilidir. Görülebilir ki, topolojik deformasyonlar daha fazla teknik ayrıntı olmadan da, uzaysal rotasyonların bir düzenlemesi ile elde edilir.

Ortak merkezli iki küre arasındaki 3 – boyutlu bölge; $[0,1]$ aralığından sürekli parametre haline getirilmiş iki boyutlu kürelerin bir kümesi olarak düşünölsün. t seviyesindeki küreye t – kabuk adı verilsin. İçteki küre 0 –kabuk ve dıştaki küre 1 –kabuk şeklinde adlandırılır. Bu kürelerin arasına bir B kemeri yerleştirilsin ve küreler üzerine sabitlensin. Burada merkezi kürenin orijininde olmak üzere bir V – rotasyon ekseni çizilsin. t –kabuk V – rotasyon ekseni etrafında $2\pi t$ döndürölünce oluşan B –kemerinin görüntüsü $V(B)$ ile gösterilirse kemere paralel bir durumdan başlayarak V nin 180^0 derece dönmesi ile $V(B)$ görüntü kümesi oluşur.



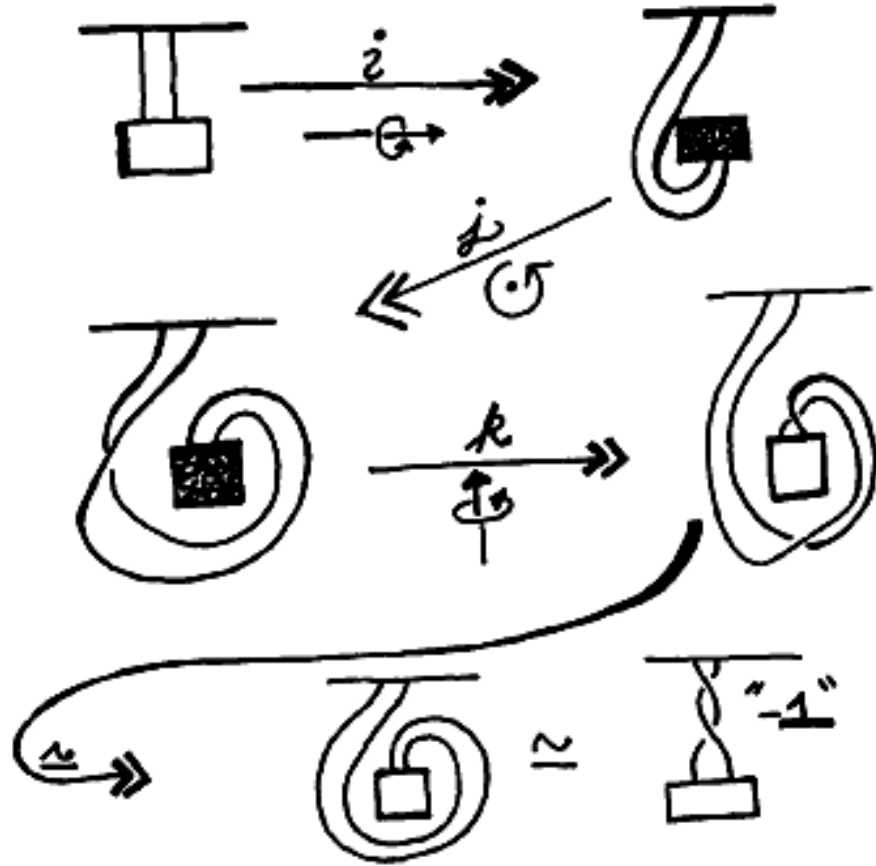
Bu $+360^\circ$ burulmuş bir kemeri, -360° burulmuş kemere çeviren en basit kemer hilesidir.

720° lik bir burulmanın orijinal durumuna döndürülmesi, kemere paralel eksen etrafındaki sabit rotasyonlu düzenlemenin bir birleşimi olarak yapılır.

$SU(2)$ birim kuaternyonlarıdır. Yani $SU(2); a + bi + cj + dk$ elemanlarının kümesi olsun. Burada (a, b, c, d) reel sayılar vektörü, 4 – boyutlu öklid uzayında birim vektör ve i, j, k cebirsel doğruları Hamilton kuaternyonlarının

$ii = jj = kk = ijk = -1$ temel eşitliğini sağlar.

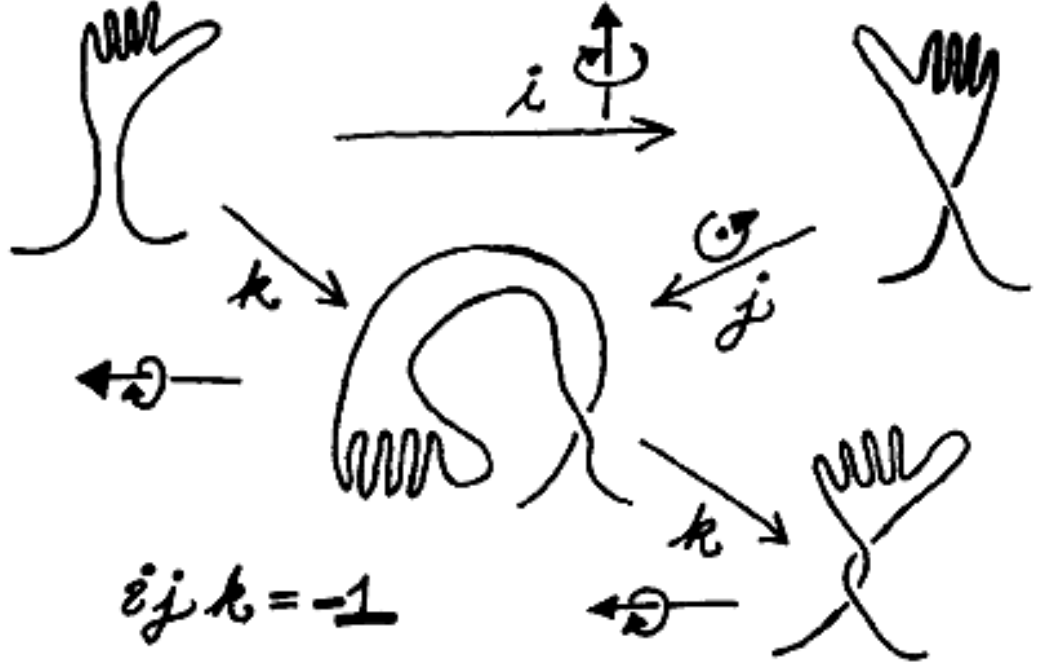
Kemer hilesi, kuaternyon grubu için topolojik(mekanik) bir yapı gösterir. Bir kemer sabit bir duvar ve hareketli bir kart arasına bağlansın. i, j, k da üç boyutlu uzayda birbirine dik eksenler arasında kartın 180° lik dönüşlerinin temsil etsin. Böyle dönüşlerden sonra, uçları duvar ve karta sabitlenmiş kemer hilesini kullanarak kemerin durumu normale döner(kemer kartın etrafında kartı döndürmeden hareket ettirilebilir.). Aşağıdaki örnekler, kuaternyon bağıntılarının bu tanımından direkt olarak nasıl meydana geldiğini gösterir.



Şekil 3.3: Kuaternyon Örneği

3.2.1. Örnek.

Kendi kolunuzu da aşağıdaki gibi çizgi film formunda kullanabilirsiniz. Bu kuaternyonik kol tasarımcı Eddie Oshins'in keşfidir[8].



Topolojik invariantlar ve kuantum gruplarına doğru ilerlendiğinde, simetri konusunun içeriğindeki değişim daha radikaldir. Bu değişimin ilk tohumları kuantum mekaniğinin ilk çalışmalarında görülmüştür.

3.3. Çemberin Genliği.

Düşey ekseni zamanı temsil eden bir düzlemde çember düşünölsün.



Şekil 3.4: Çember

Çember, iki parçacığın yaradılışını ve onların yok oluşunu içeren vacuum-vacuum prosesi temsil eder[8].



Şekil 3.5 : İki Parçacığın Yaradılışı



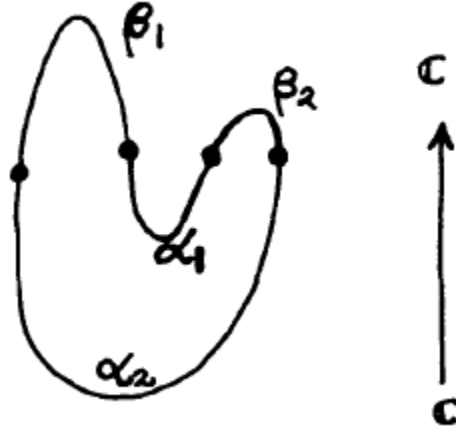
Şekil 3.6: İki Parçacığın Yok Oluşu

Önceki tanıma uygun olarak çember böyle iki parçaya bölünebilir (yaradılış ve yokoluş) ve $\langle a|b \rangle$ genliği düşünülebilir. İki parçacığın yaradılış ve yok oluşu için diyagram iki ayrı noktada sona erdiği için $V \otimes V$ formunda bir vektör uzayını bra için değer bölgesi ve ket için tanım kümesi olarak almak doğaldır. Böylece yaratılan bra bir $\alpha = \langle a | : \mathbb{C} \rightarrow V \otimes V$ dönüşümü ve yok edilen ket bir $\beta = |b \rangle : V \otimes V \rightarrow \mathbb{C}$ dönüşümüdür. Böylece genlik $\langle a|b \rangle : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bir dönüşüm olur.

Bu noktada kuantum mekaniği daha ileriye, düğüm teorisine taşınacaktır.

3. 4. Topolojik genlik.

Düzlemde α ve β lara ayrışan daha karmaşık basit kapalı eğrilerin çizilmesinin mümkün olduğu düşünülürse, akla hemen topolojinin ilk ipuçları gelir. Gerçekten, kendi kendini kesmeyen herhangi bir diferansiyellenebilir eğri, dikey eksene göre genel pozisyonda oluncaya kadar döndürülebilir. Bu durumda eğrinin minimum ve maksimuma ayrışabileceği görülecektir. Böyle bir eğri \mathbb{C} den \mathbb{C} ye dönüşüm olarak tanımlandığında, eğriye bir genlik olarak bakılabilir. Şekil 3.5 ve Şekil 3.6 dan da görüleceği gibi eğrinin ayrışımı aşağıdaki gibi dönüşümlerin bileşimine uygun olarak yapılabilir.



Şekil 3.7: Düzlemde Bir Basit Kapalı Eğri

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\xrightarrow{\alpha_1} V \otimes V = V \otimes \mathbb{C} \otimes V \xrightarrow{\alpha_2} V \otimes (V \otimes V) \otimes V \\ &= (V \otimes V) \otimes (V \otimes V) \xrightarrow{\beta_1} \mathbb{C} \otimes V \otimes V = V \otimes \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Böylece her bir basit kapalı eğri bir genliğe karşılık gelir. Jordan eğri teoremine göre, düzlemde herhangi bir basit kapalı eğri bir çembere izotop olduğu için topolojik genlik varsa, bu durumda bu genlik çember için orijinal genliğe eşittir.

Burada akla gelen şudur; yaradılış ve yok oluş üzerindeki hangi şartlar topolojik genliklerin varlığını garanti edecektir?

Bu sorunun cevabı, basit kapalı eğrilerinin bütün izotopileri, aşağıdaki diyagramda görüldüğü gibi, bitişik maksimum ve minimumların yok edilmesi ile elde edilir, gerçeğinden çıkar.



Bu diyagramlardan görülür ki, $(\beta \otimes 1)(1 \otimes \alpha)$ ve $(\alpha \otimes 1)(1 \otimes \beta)$ bileşkelerinin her biri V üzerinde özdeşliktir.

$$V = V \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\alpha} V \otimes (V \otimes V) = (V \otimes V) \otimes V \xrightarrow{\beta} \mathbb{C} \otimes V = V$$

Bu şart, birbirine karşılık gelen operatörler için bir matris temsili alınması ile çok basitleşir.

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, V için bir taban olsun. $e_{ab} = e_a \otimes e_b$, $V \otimes V$ için tensör tabanın elemanlarını gösterebiliriz. Bu durumda M_{ab} ve M^{ab} matrisleri vardır. Böylece a ve b den 1 den n ye kadar olan bütün değerleri üzerinde alınan toplam ile

$$\alpha(1) = \sum M_{ab} e_{ab}$$

olur. Buna benzer olarak

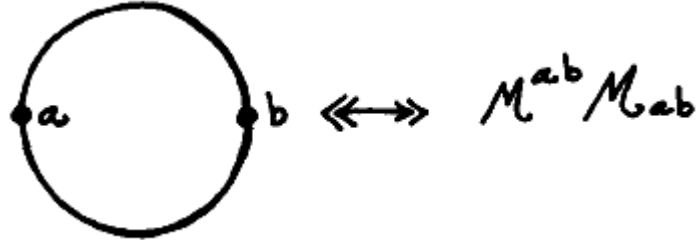
$$\beta(e_{ab}) = M^{ab}$$

şeklinde tanımlanır.

Böylece çember için genlik

$$\beta\alpha(1) = \beta \sum M_{ab} e_{ab} = \sum M_{ab} \beta(e_{ab}) = \sum_{a,b} M_{ab} M^{ab}$$

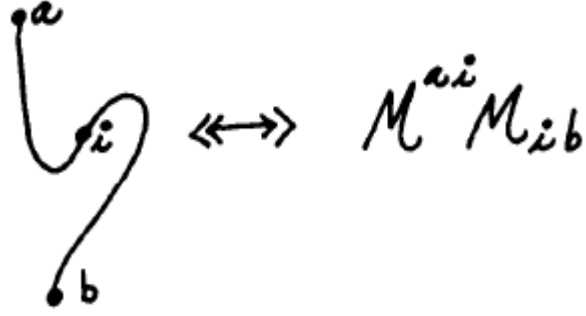
olur.



Eğer topolojik şart göz önüne alınırsa,

$$\sum M_{ai} M^{bi} = I_b^a \quad \text{ve} \quad \sum M^{ai} M_{bi} = I_b^a$$

Özdeşlik matrisleri olacak şekilde biri diğerinin tersi olan M_{ab} ve M^{cd} matrislerinin var olduğu görülür.



Böylece topolojik genliğin varlık problemi düzlemdeki basit kapalı eğriler için çok kolay çözülür.

3.4.1. $\sum M_{ab} M^{ab}$ Matrislerinin Hesabı.

Şimdi kolaylık olsun diye $SU(2)$ grubundan

$$M = \begin{pmatrix} 0 & iA \\ -iA^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde bir genel matris alınsın. Burada $\text{iz}(M) = 0$, M nin determinantı $|M| = 1$, M nin tersi kendisi yani $MM = I$ ve $M_{ab} = M^{ab} = M$ olsun.

$$\begin{aligned} M_{ab} M^{ab} &= M \otimes M = \begin{bmatrix} 0 & iA \\ -iA^{-1} & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & iA \\ -iA^{-1} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -A^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur. Buradan

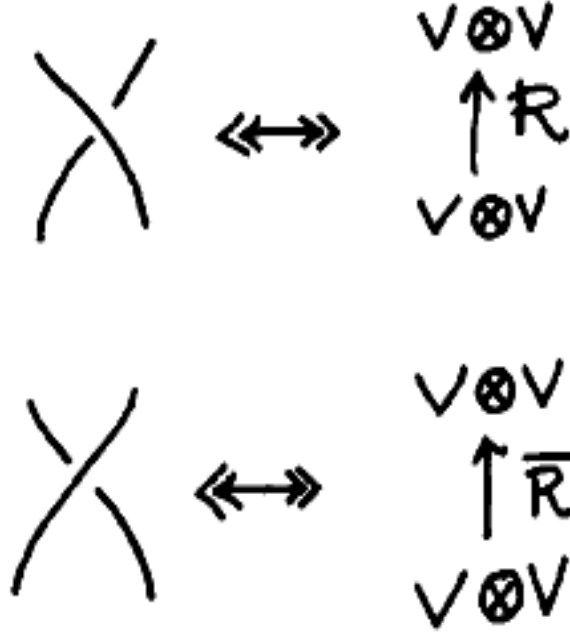
$$\beta\alpha(1) = \sum_{a,b} M_{ab} M^{ab} = -A^2 - A^{-2}$$

bulunur.

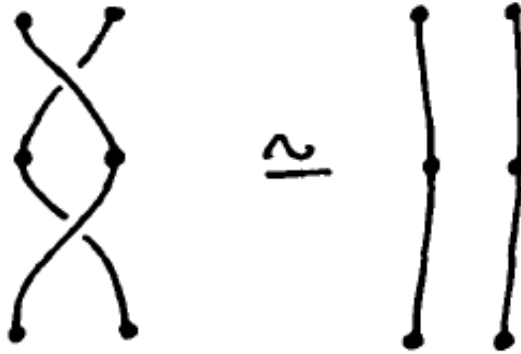
$A = 1$ için çemberin genliği $\beta\alpha(1) = -2$ olur. Çemberin bu genliği d ile gösterilecek ve $d = -A^2 - A^{-2}$ ifadesine ilmek değeri denilecektir.

3.5. Düğüm Genlikleri.

Şimdi topolojik genlikler, düğüm ve halkalar için genelleştirilecektir. Herhangi bir düğüm veya halka düzlemde düşey eksene göre genel pozisyonda olacak şekilde bir diyagramla temsil edilebileceğinden diyagram, minimal (yaradılışlar), maksimal (yok edilişler) ve aşağıda gösterilen iki tip kavşağa ayrılacaktır[8].



Bu kavşakların birinin diğerinin tersi olduğu aşağıda gösterildiği gibi II.Reidemeister hareketinden çıkar.



Böylece her bir kavşak için $V \otimes V$ den kendisine dönüşümler R ve R^{-1} (kısaca \bar{R}) ile gösterilirse $R\bar{R} = I$ olduğu diğer bir deyişle R ile \bar{R} nin birbirinin tersi olduğu yukarıdaki izotopiden çıkar. Şu halde $\alpha, \beta, R, \bar{R}$ dönüşümleri elde edilir. Herhangi bir düğüm bu dönüşümlerin bir bileşimi şeklinde yazılabilir ve sonuçta böyle dönüşümlerin seçimi düğüm veya halkalar için bir genlik belirler. Bu dönüşümler uygun matris temsilleri alınırsa, aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

3.5.1. Teorem.

$$R_{cd}^{ab} = AM^{ab}M_{cd} + A^{-1}I_c^a I_d^b$$

$$\bar{R}_{cd}^{ab} = A^{-1}M^{ab}M_{cd} + AI_c^a I_d^b$$

İspat. Bu eşitliklerin doğru olması için $R\bar{R} = 1$ olduğu gösterilmelidir. Diğer bir ifade ile II. tip hareket altında bu eşitliklerin invaryant olması gerekir. Şimdi bu gösterilsin:

$$R_{cd}^{ab} = AM^{ab}M_{cd} + A^{-1}I_c^a I_d^b \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \mathbf{c} \quad \mathbf{d} \end{array} = A \begin{array}{c} \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \\ \cup \quad \cup \\ \mathbf{c} \quad \mathbf{d} \end{array} + A^{-1} \begin{array}{c} \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \\ \rangle \quad \langle \\ \mathbf{c} \quad \mathbf{d} \end{array}$$

veya genel olarak

$$\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} = A \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + A^{-1} \begin{array}{c} \rangle \quad \langle \\ \rangle \quad \langle \end{array}$$

ya da

$$\langle \diagdown \quad \diagup \rangle = A \langle \begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \rangle + A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle$$

olur. Benzer şekilde

$$\langle \diagup \quad \diagdown \rangle = A^{-1} \langle \begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \rangle + A \langle \rangle \langle \rangle$$

yazılabilir.

Böylece II. tip harekete bu eşitlikler uygulanabilir.

$$\langle \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \rangle = A \langle \begin{array}{c} \cup \\ \cup \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \rangle + A^{-1} \langle \diagdown \quad \diagup \rangle$$

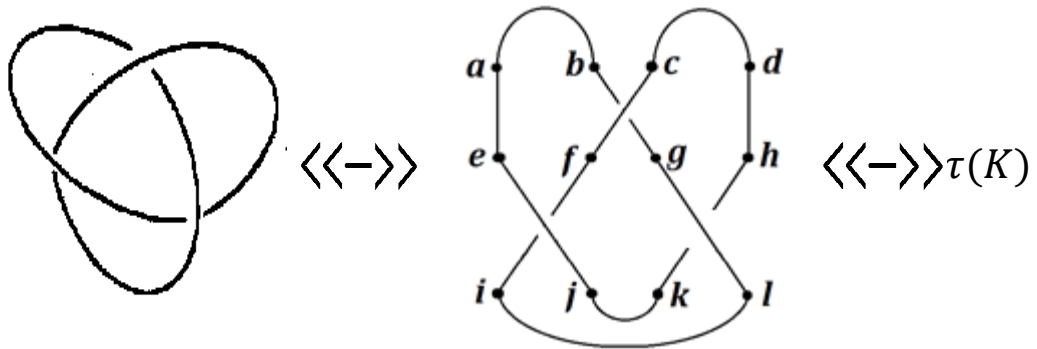
$$\begin{aligned}
&= A[A^{-1} \langle \text{circle with dot} \rangle + A \langle \text{crossing} \rangle] + A^{-1}[A^{-1} \langle \text{crossing} \rangle + A \langle \text{cup} \rangle \langle \text{cap} \rangle] \\
&= (-A^2 - A^{-2}) \langle \text{crossing} \rangle + A^2 \langle \text{crossing} \rangle + A^{-2} \langle \text{crossing} \rangle + \langle \text{cup} \rangle \langle \text{cap} \rangle \\
&= (-A^2 - A^{-2} + A^{-2} + A^2) \langle \text{crossing} \rangle + \langle \text{cup} \rangle \langle \text{cap} \rangle \\
&= \langle \text{cup} \rangle \langle \text{cap} \rangle
\end{aligned}$$

Böylece (I) eşitlikleri $(-A^2 - A^{-2})$ ilmek değeri ile birlikte, genlik hesaplamaları için tekrarlanan bir algoritma olarak göz önüne alınır.

(I) eşitliğinin doğruluğu, bir önceki kısımda $SU(2)$ grubundan alınan M matrisi kullanılarak da görülebilir[8].

3.5.2. Örnek.

Yonca yaprağı düğümü ve onun düşey eksene göre maksimum ve minimumlara ayrışımı göz önüne alınırsa



$$\tau(K) = M_{ab} M_{cd} I_e^a I_h^d \bar{R}_{fg}^{bc} R_{ij}^{ef} R_{kl}^{gh} M^{il} M^{jk}$$

olur.

BÖLÜM IV

TOPOLOJİKSEL KUANTUM ALAN TEORİSİ

4.1. Özel Modeller.

Bilinen topolojik alan teorileri iki genel sınıfa ayrılır: Schwarz-tipi TQFT ve Witten-tipi TQFT. Witten tipi TQFT bazen chomological alan teorisi olarak da adlandırılır.

Şimdi de bu teorileri inceleyelim.

4.1.1. Schwarz-tipi TQFT.

Schwarz-tipi TQFT de korelasyon fonksiyonu (correlation functions) veya bölüm fonksiyonları (partition functions) metrik sisteminde bağımsız fonksiyonel eylemin yol integrali ile hesaplanır. Örneğin; BF modeli içinde, iki boyutlu bir manifold uzayı olan M , gözlemlenebilir bir ikili form F , yardımcı sabit olan B ve bunların türevleri yardımı ile inşa edilir

$$S = \int_M BF.$$

Bu eylem (yol integrali ile belirlenir.) açıkça topolojik invariant olarak metrik uzayların hiçbir teorisinde görülmemektedir.1977 de A. Schwarz tarafından ortaya çıkan ilk fonksiyonel eylem örneği şöyledir:

$$\int_M A \wedge dA.$$

Bu tip TQFT nin bir başka daha çok bilinen örneği Chern-Simons teorisinde düğüm invariantını hesaplamak için kullanılır. Genel olarak bölüm fonksiyonları bağımlı metriklerdir fakat yukarıdaki örneklerde bağımsız metrik oldukları gösterilmiştir.

4.1.2. Witten-tipi TQFT.

Witten tipi topolojik alan teorisinin ilk örneği 1988 yılında Witten'in çalışma kâğıdında bulunan dört boyutlu topolojik Yang- Mills teorisidir. Bu teoride eylem fonksiyonları belirlenen topolojik dönüşüm sonrasında $g_{\alpha\beta}$ metrik fonksiyonlarını içerir. Bu dönüşümler metrik cebirin dışında oluşan bağımsız dönüşümlerdir. BRST-operatörünün kapalı olup olmaması bağımsız $T^{\alpha\beta}$ gerilme-enerji tensörünün metrik üzerindeki sistemine bağlıdır. Witten'in örnekleri incelenirse birçok örnekte sicim teorisi bulunur[25,26].

4.2. Atiyah-Segal Aksiyomları.

Bu bölümde söylenebilir ki (daha çok matematiksel olarak) Atiyah'ın verdiği aksiyomlar, Graeme Segal tarafından ortaya atılan konformal teorisi aksiyomlarına dayanmaktadır[16,27].

4.2.1. Notasyonlar.

Λ önceden belirlenmiş bir temel alan olsun, örneğin \mathbb{R} veya \mathbb{C} gibi (Λ burada değişmeli halkadır). \mathcal{V}_Λ lineer operatör morfizmleri ile Λ daki tüm vektör uzaylarının kategorisi şeklinde tanımlanır. \mathcal{V}_Λ^* ise Λ üzerindeki vektör uzaylarının esas noktalı (basepoint) kategorisi şeklinde tanımlanır (burada esas nokta dediğimiz kavramı sadece bazı özel vektör uzaylarındaki sıfır vektörünü temsil etmez. Morfizmler esas noktayı korumaktadır)[16].

Bu kategoriler tensör kategorileri ile ikili vektör tensörlerinin çarpımı \otimes ve vektör ikilileridir.

\mathcal{M}^d şeklinde tanımlanan kategorideki nesnelere d -boyutlu manifoldlar ve diffeomorfizmde dönüşümleri korunan morfizmlerdir. Bunlar tensör kategori altındaki ayrık sınıflar ve ters dönüşüm ikilileridir.

M nin sınırlı kümelerinin manifoldu \mathcal{M}^{d+1} olsun. Öyleyse her $M \in \mathcal{M}^d$ için $\mathcal{B}(M)$ M nin bordizmleridir.

Örneğin; $\mathcal{B}(\otimes)(d+1)$ - boyutlu manifoldlarda kapalı bir kümedir.

4.2.2. Matematiksel Formülleri.

$Z^d : \mathcal{M}^d \rightarrow \mathcal{V}_\Lambda$ ve $Z^{d+1} : \mathcal{M}^{d+1} \rightarrow \mathcal{V}_\Lambda^*$ fonktörleri aşağıdaki (sadece Λ ve manifoldları) Atiyah -Segal aksiyomlarının sağlıyor ise bunlara d -boyutlu *topolojik alan teoremi* denir[16, 27].

I. $M \in \mathcal{M}^d, B \in \mathfrak{B}(M)$ olacak şekilde $Z^d(M) = Z^{d+1}(B)$ uzayı vardır. Öyleyse bundan böyle burada $Z^{d+1}(B)$ in temel nokta olduğu düşünülür ve de $f: M \rightarrow M'$ morfizmi için B ve B' sırayla M ve M' nün bordizmleri ise $\tilde{f}: B \rightarrow B'$ olacak şekilde $Z^{d+1}(B)$ yi $Z^{d+1}(B')$ ne taşıyan bir $Z^{d+1}(\tilde{f})$ yazılabilir.

II. Z^d ve Z^{d+1} ' in çarpma ile ilgili tensörleri şöyle tanımlanır:

(a) $\dot{\cup}$ şeklinde tanımlanan ayrık birleşimi

$$Z^{d+1}(B_1 \dot{\cup} B_2) = Z^{d+1}(B_1) \otimes Z^{d+1}(B_2)$$

şeklinde gösterilir. Bu eşitlik benzer şekilde temel noktalar (basepoint) için de yazılabilir:

$$Z^d(M_1 \dot{\cup} M_2) = Z^d(M_1) \otimes Z^d(M_2).$$

Burada $B \in \mathcal{M}^{d+1}, M_1^*$ ve M_2 ayrıştırılmış sınırların iki birimi ise

$$Z^{d+1}(B) \in Z^d(M_1^*) \otimes Z^d(M_2) = \text{Hom}(Z^d(M_1), Z^d(M_2))$$

eşitliği önemli bir sonuçtur[18].

Burada $\text{Hom}(X, Y)$ X 'den Y 'ye lineer operatörlerin sınıfını ifade eder. (İkinci eşitliğin kanıtı temsil teorisi üzerine yazılmış herhangi bir metinde bulunabilir, örneğin [28,29]).

Bu açıkça gösterir ki bu teoremden \mathcal{M}^d üzerindeki M_1 ve M_2 manifoldları arasındaki herhangi bir kobordizm lineer dönüşüm olarak tanımlanır.

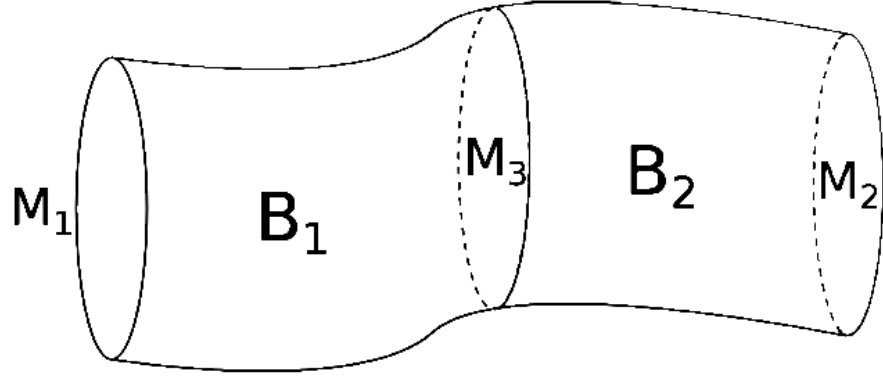
(b) Ayrıca Λ nın elemanlarının daralmasıyla $u \otimes u^*$ formunda herhangi bir tensör oluşturulabilir. M_1 ve M_2 manifoldları arasındaki B_1 ve B_2 kobordizmlerinin aynı sınırlar boyunca birleştirilmesi ile oluşan $B = B_1 \cup B_2$ birleşimi ile

$$Z^d(M_1) \otimes Z^d(M_3)^* \otimes Z^d(M_3) \otimes Z^d(M_2)$$

gösterimini

$$Z^d(M_1) \otimes Z^d(M_2)$$

gösterimine dönüştüren $\langle \cdot, \cdot \rangle$ şeklinde gösterilen daralma haritası yardımı ile $(\partial B_1 = M_1 \cup M_3^*$ ve $\partial B_2 = M_3 \cup M_2$ eşitlikleri kullanılarak)



$$Z^{d+1}(B) = \langle Z^{d+1}(B_1), Z^{d+1}(B_2) \rangle$$

eşitliği yazılır. Bu aksiyom TQFT' nin geçişlilik aksiyomudur.

III. Bir önceki aksiyom gerektirir ki $M \in \mathcal{M}^d$ ya da $M \in \mathcal{M}^{d+1}$ olacak şekilde $M \otimes \emptyset = M$ olur. Burada $Z^d(\emptyset)$ ve $Z^{d+1}(\emptyset)$ aynı güçlü olmalıdır.

$Z^{d+1}(\mathfrak{B}(M))$ alanı üzerindeki özdeşlikler de $Z^d(M)$ nin altuzaylarıdır. Bazı küçük teorileri kapsamayacak şekilde söylenebilir ki $Z^d(M)$ ve kendisi arasındaki linner operatör düşünülerek oluşturulan $Z^{d+1}(M \times I)$ da verilen kobordizmde geçişlilikler

$$Z^d(\emptyset) = \Lambda Z^{d+1}(\emptyset) = 1_\Lambda$$

olarak verilir.

Başka bir deyişle $Z^d(M)$ alt uzayı

$$Z^{d+1}(M \times I) = \text{Id}_{Z^d(M)}$$

şeklinde gösterilebilir.

Bu aksiyomlar hızlı ve yararlı bazı sonuçlar bulunmasını sağlar.

1. $M \in \mathcal{M}^d$ olacak şekilde bir torus şekilli M için $M \times S^1$ in eşit derecede $M \cup M^*$ veya \emptyset sınırları olsun. Öyleyse çarpma aksiyomu şöyle tanımlanır:

$$\Lambda = Z^d(\emptyset) = Z^d(M \cup M^*) = Z^d(M) \otimes Z^d(M^*)$$

$Z^d(M)^*, Z^d(M)$ de ikili vektör uzayı olduğunda $Z^d(M^*) = Z^d(M)^*$ olur.

Genel olarak $Z^{d+1}(B^*)$ ın $Z^{d+1}(B)^*$ a eşit olmayabilir.

2. Eğer $M \times S^1$ i sonlu birimli $M \times I$ silindiri üzerine inşa edersek $Z^d(M)$ üzerinde $Z^{d+1}(M \times S^1) = \text{Tr}(\text{Id}) = \dim(Z^d(M))$ daralması elde edilir.

Aslında sonlu $M \times I$ de belirlenen herhangi f difeomorfizmi kullanılarak torus-tipi M_f elde edilir ve $Z^{d+1}(M_f) = \text{Tr}(Z^d(f))$ eşitliği yazılır[16].

4.2.3. Fiziksel Yorumlama.

Evrenin mekansal boyutu d kabul edilirse $(d + 1)$ boyutunu içerisine alan bir zamana ihtiyaç vardır. Fiziksel sistemde zaman \mathcal{M}^d içindeki manifoldlar, kobordizmler ile \mathcal{M}^{d+1} boyutuna transfer edilir. $Z^d(M)$ vektör uzayının Hilbert uzayı ile H Hamiltonian için $M \times I$ (M ile hayali zaman) in özel kobordizmi e^{-itH} şeklinde gösterilen zaman-boyut operatörüne neden olacaktır.

Eğer $H \equiv 0$ ise hiçbir zaman yüzeysel eylem yoktur; gerçekten de tercih edilen bazı zaman kavramın $H \equiv 0$ da varolması engellenmelidir. Bu izafiyet ile bağdaşmamaktadır. Aslında ilginçtir ki bu davranış $M \times I$ dışındaki kobordizmler için oluşabilir. Bu kobordizmlerde topolojik-invaryant yolu ile fiziksel süreç (büyük olasılıkla sıfırdan farklı genliklerle) tamamlanabilir[16].

4.2.4. Örnekleri.

Atiyah örneklerini sıfır boyutlu teorilerinden başlayarak kolaydan karmaşığa doğru anlatmaya başlar. Oradan Wilson döngüleri ile ilgili değişmezlere dayalı Chern-Simons teorisi hakkında üstünkörü bilgi verir. Bunlar boyutu dörtten az olan yapılarda inşa edilmiştir. Ancak $d = 4$ için tatmin edici bir teori yoktur. Daha sonra Crane'nin "*boyut merdiveni*" ile yüksek boyutlu teorileri düşük boyutlu olanlarla açıklamak için verilmiştir. Burada sadece sıfır boyutlu olan Borel- Weil teoremi verilecektir[Daha fazla bilgi için 16,27].

4.2.4.1. Sıfır Boyutlu Teorisi.

Bu durumda, \mathcal{M}^d deki manifoldlar tek noktalı ve difeomorfizm grupları ise simetrik gruplardır. Kompakt Lie gruplarının temsil teorisi (simetrik eylem ile Lie cebiri ağırlıklı alanlar üzerinde eşlenik eylemler var gibi görünenler ile) TQFT açısından tanımlanabilir. Bu temsil teorisinin kısa bir özeti verilecektir.

Özellikle Z^0 fanktoru V vektör uzayının her noktasında ayrık kümeli haritaların n noktasını içine alan $V^{\otimes n} = V \otimes V \otimes \dots \otimes V$ n tane V uzayını işleme alarak oluşan tensör uzayını belirtmektedir (aynı vektör uzayının n tane kopyası ile oluşturulan S^n simetri grubu geçişlidir). Bu nedenle kobordizmlerin tüm difeomorfizmleri S^n 'nin içindedir (Atiyah'ın söylemi ile ilginç topoloji yoktur.).

V vektör uzayı bazı simplektik manifoldların (diğer bir deyişle kapalı, dejenere olmayan 2-formuna sahip) sayısal olarak belirtilmesi (nicelenmesi) ile bir Hilbert uzayı olabilir. Bu manifoldun örnekleri de bu aşamadaki klasik ve kuantum Hamiltonian teorisinin bazı uzaylarıdır [29].

Alternatif olarak, cebirsel-geometri metodu kullanılarak bir Lie grubu ile başlayan simplektik manifoldu oluşturmak için uygun grup yapısı pek yoktur. Bu yüzden Borel-Weil teoremini nicelemek için tamamen fiziksel yoruma dayalı matematiksel sonuçlar verecek bir yöntem olduğu bulunacak ve gerekli teoriler [18.kaynak kitabı Ders 23] özetlenerek anlatılmaya başlanacaktır.

1. $GL(n, \mathbb{C})$ deki kapalı üniter alt izomorfizmalarının kompakt Lie grupları olduğu iyi bilmektedir; bu daha sonra Cartan alt gruplarının maksimal teorisi olacaktır [9, theorems 3.28, 2.15]. (Bazı Lie gruplarında $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ den $(S^1)^k$ ye izomorfik toruslar vardır. Burada kompakt Lie grupları kompleks linner uzaylar ele alınarak torusların gerçek olduğuna dikkat edilmelidir.) \mathfrak{g} cebirinden bir G Lie grubu seçilsin. T, G 'de t altcebi ile bir maksimal torus olsun. \mathbb{R} de ele alınan tensör çarpımları $t \otimes \mathbb{C}$ de $t_{\mathbb{C}}$ komplikasyonları yazılabilir. Tüm Lie cebiri yapısı \mathbb{C} -doğrusal formundan $t_{\mathbb{C}}$ ye genişletilebilir.
2. V' M de herhangi bir temsil ve her $Xv = \lambda(X)v$ eşitliğindeki her $v \in V_{\lambda}$ olacak şekilde V' temsili için

$$V' = \bigoplus_{\lambda \in \Delta(V')} V_{\lambda}$$

yazılabiliyorsa $\Delta(V') \subset t_{\mathbb{C}}^*$ sonlu kümesine (*weight*) *ağırlık* adı verilir. Bu ayrıştırma benzersizdir. Eşlenik temsilinde (*weight*) ağırlığa *kök* denir ve buna karşılık gelen ağırlık uzaylarına (*weight spaces*) da *kök uzayları* denir. Unutulmamalıdır ki 'sıfır' her zaman köktür ve $t_{\mathbb{C}}$ kök uzayıdır.

Φ^+ içinde $\pm\lambda$ yer alacak şekilde $\lambda, \gamma \in \Phi^+$ ve $\lambda + \gamma$ bir kök ise o zaman $\lambda + \gamma \in \Phi^+$ şartını sağlayacak her λ kökü için herhangi bir Φ^+ pozitif kökler kategorisi seçilebilir.

\mathfrak{g} de (\cdot, \cdot) ikilisi Killing formu olmak üzere her γ pozitif kökü için

$$(\Lambda, \gamma) \geq 0$$

olacak şekilde öyle bir Λ vardır ki bu Λ ya *baskın ağırlık (dominant weight)* denir.

3. $t_{\mathbb{C}}^*$ doğrusal olarak tanımlanır ve t nin bir birine benzer iki kopyası için

$$t_{\mathbb{C}}^* \simeq t^* \simeq (it)^*$$

denkliği yazılabilir. Bu düşünce ile $X \in t$ ile $\exp(X)$ eşit kimlikleri için $\lambda(X) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ oluyorsa $\lambda \in (it)^*$ a *analitik integral* denir.

$(it)^*$ elemanların analitik integral olduğu söylenebilir ancak ve ancak $\xi_{\lambda}: T \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için

$$\xi_{\lambda}(\exp(H)) = e^{\lambda(H)}$$

karşılıyan $H \in t$ olmalıdır.

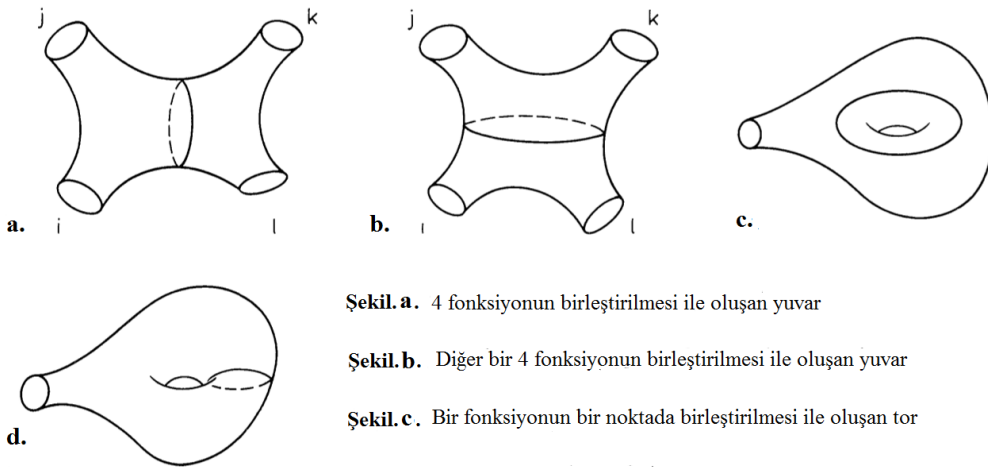
4. Burada analitik integral içinde herhangi bir λ ağırlık seçilsin. Öyleyse ξ_{λ} deki \mathbb{C} uzayından alınan T tek boyutlu bir temsil verir. Bu temsil \mathbb{C}_{λ} şeklinde gösterilir ve

$$L_{\lambda} = (G \times \mathbb{C}_{\lambda}) / \sim (gh, v) \sim (g, hv)$$

dir. Bu G/T den $(g, z) \rightarrow gT$ içine yansıtılabilir ve G tarafından $g(g', z) = (gg', z)$ eşitliği ile hareket ettirilebilir. Bu onun G tarafından homojen üzerinde hareket etmesini sağlayabilir. L_{λ} nin alan küresel bölümünden G/T nin holomorfik bir çizgi paket olduğu gösterilebilir[26].

4.2.4.3. Borel- Weil Teoremi.

G indirgenemez üniter temsiller L_{λ} nin genel uzayında tam da λ baskın ağırlığına karşılık gelir. Ayrıca buradaki her λ en yüksek ağırlık temsilidir[26].



Şekil.a. 4 fonksiyonun birleştirilmesi ile oluşan yuvar

Şekil.b. Diğer bir 4 fonksiyonun birleştirilmesi ile oluşan yuvar

Şekil.c. Bir fonksiyonun bir noktada birleştirilmesi ile oluşan tor

Şekil.d. Bir fonksiyonun bir noktada birleşmesi ile oluşan diğer bir tor

Şekil 4.1: Bazı uzayların birleşimim ile oluşan yeni torlar

BÖLÜM V

DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada kuantum mekaniğinin prensiplerinden yararlanarak bazı düğüm invariantlarını göstermek adına bazı modeller verildi. Bazı düğümlerin parantez polinomları bu modelle ortaya konarak $(2,n)$ -tor düğümlerinin parantez polinomları formülize edildi.

Ayrıca bu çalışma 3 –boyutlu manifoldlara taşındı ve topolojik kuantum alan teorisine giriş yapıldı. Topolojik kuantum alan teorisinin 4 ve üzeri boyutlarda incelenemediğini, bunun yerine daha küçük boyutlara indirildiği gösterildi.

Böylece kuantum ve topoloji arasında güçlü bir bağ olduğu gösterilmiş oldu.

Aynı teorem daha genişletilerek ‘boyut merdiveni ’ kavramı incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Altıntaş, İ. , (1993). Üç Boyutlu Manifoldların Yapısı Üzerine, Doktora Tezi, Yüzüncüyıl Ün., Van.
- [2] Burde, G. And Zieschang, H. , (1985). Knots, Walter De Gruyter, New York.
- [3] Fox, R. H. , (1962). A Quick Trip Through Knot Theory, Topology Of 3-Manifold, Proc. Top. Ins. , Prentice Hall.
- [4] Rolfsen , (1976). Knot And Links, Mathematics Lectures Series 7, Boston.
- [5] Dirac, P.A.M. , (1958). The Principles Of Quantum Mechanics, Fourth Edition, Oxford At The Clarendon Press.
- [6] Ocampo, H. , (2010). Partiguan E., Paycha S., Geometric And Topological Methods For Quantum Field Theory, Cambridge University Press.
- [7] Altın, Y. , (1979). Çoban Düğümleri Ve Bazı Örtü Uzayları, Doktora Tezi Atatürk Ün. Erzurum .
- [8] Kauffman, L.H. , (1993). Baadhio R.A., Quantum Topology, World Scientific Publ.
- [9] Kauffman, L.H. ., (1991). Knots And Physics, World Scientific Pub.
- [10] Alexander, J.W. ,(1928). Topological Invariants Of Knots And Links, *Trans Amer. Math. Soc.* 30,275-306.
- [11] Baxter , R.J. , (1989). Exactly Solved Models In Statistical Mechanics, Akademik Pres New York.
- [12] Jaco , W. , (1977). Lectures On Three - Manifold Topology Conference, Board Of The Mathematical Sciences CBMS, (Number 53), P.(30-50).
- [13] Sabuncuoğlu, A. , (2004). Diferensiyel Geometri, Nobel Yayın Dağıtım, P.593. Thom, R., 1954, Quelques Propriétés Globales Des Variétés Différentiables, *Comment. Math. Helv.* 28, 17–86.
- [14] Mac Lane, S. , (1998). Categories For The Working Mathematician, 2nd Ed., *Graduate Texts In Mathematics*, Vol. 5, Springer-Verlag.
- [15] Strecker G. E., (1973). Category Theory, Allyn And Bacon Inc. Boston, 101,236, 242.

- [16] Poelstra, A. , (2013). A Brief Overview Of Topological Quantum Field Theory.
- [17] Carter, R. Vs. , (1995). Lectures On Lie Groups And Lie Algebras, Cambridge Univ. , London.
- [18] Fulton, W. And Harris , J. ,(1991). Representation Theory. A First Course, Graduate Texts In Mathematics, *Readings In Mathematics*, Vol. 129, Springer-Verlag, New York.
- [19] Atkinson D, Hounkonnou M. N, (2001). Quantum Mechanics A Self-Contained Course Volume I, Rington Press.
- [20] Altland, A. , Ben Simons, (2006). Condensed Matter Field Theory Cambridge University Press.
- [21] Kleinert, H. , (2004). Path Integrals In Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, And Financial Markets, 4th Edition, World Scientific ISBN 981-238-107-4.
- [22] Witten, E., (1989). Quantum Field Theory And The Jones Polynomial, *Common Math. Phys.* 121,351-359.
- [23] Roger, B. , Copeland, E., (2010). "Feynman Diagrams". Sixty Symbols Brady Haran For The University Of Nottingham.
- [24] http://en.wikipedia.org/wiki/BF_model
- [25] Witten, Edward , (1988b). "Topolojik Sigma Modelleri" , Matematiksel Fizik 118(3).
- [26] Witten, E., (1988). Topological Quantum Field Theory, *Common Math. Phys.*, 117, 353-386.
- [27] Atiyah, M. F. , (1988). Topological Quantum Field Theory, *Publications Mathematiques De L'Institut des Hautes Etudes Scientifiques*, 68, 175-186.
- [28] Kauffman, L.H., (1987). On Knots, *Annals Of Mathematics Studies Number 115*, Princeton Univ.
- [29] Cohn, H. Why Symplectic Geometry Is The Natural Setting For Classical Mechanics
<http://research.microsoft.com/en-us/um/people/cohn/thoughts/symplectic.html>

Bahar KARA,1987 yılında Mersin'in Tarsus ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğretimini aynı şehirde tamamladı. Tarsus Cengiz Topel Lisesi'nden mezun olduktan sonra; Gaziantep Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdi ve 2010 yılında mezun oldu. 2010 yılında itibaren Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans programına devam etmektedir.

ADRES BİLGİLERİ

Adres: Anıt Mahallesi 0321 Sokak Karamehmetler Sitesi E Blok Kat:3 No:10

Tarsus/ MERSİN

Ev Tel: : 0 (324) 626 52 31

Tel : 0 (505) 902 70 69

E-Posta : bahar.kara@hotmail.com.tr