GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BERNSTEIN POLİNOMLARI VE ANALİTİK SAYILAR TEORİSİ ÜZERİNDEKİ YANSIMALARI

MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

SERKAN ARACI
OCAK 2013

Bernstein polinomları
ve
Analitik sayılar teorisi üzerindeki yansımaları

Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Doç. Dr. Mehmet Açıkgöz

Serkan Aracı
Ocak 2013

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Bernstein Polinomları ve Analitik Sayılar Teorisi Üzerindeki Yansımaları

Öğrencinin, Adı Soyadı: Serkan ARACI

Tez Savunma Tarihi: 22.01.2013

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Doç. Dr. Metin BEDİR

FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:	İmza
Prof. Dr. Adil KILIÇ	....
Doç. Dr. Eser OLĞAR	....
Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ	....

İlgili tezin akademik ve etik kurallarına uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Serkan ARACI

ÖZET

BERNSTEIN POLİNOMLARI

VE

ANALİTİK SAYILAR TEORİSİ ÜZERİNDEKİ YANSIMALARI

ARACI, Serkan

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Mehmet Açıkgöz

Ocak 2013, 62 Sayfa

Bu tez on üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriştir. ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde sırasıyla, yaklaşım teorisi içerisinde önemli bir yer tutan Bernstein operatörü ve Bernstein polinomları ile analitik sayılar teorisi içerisinde önemli bir yere sahip olan Bernoulli sayıları ve polinomları, Euler sayıları ve polinomları ve Genocchi sayıları ve polinomları tanımlanmış ve temel özellikleri verilmiştir.

Altıncı bölümde, birçok matematikçinin ve diğer bilim insanlarının çalışma alanına giren q-analiz (quantum calculus) den bahsedilmiştir.

Yedinci bölümde, p-adik analizin temel bilgileri, Volkenborn integrali ve özellikleri, Fermionik p-adik integrali ve özellikleri olmak üzere üç ana başlıkta incelenmiştir.

Sekizinci, dokuzuncu, onuncu, onbirinci ve onikinci bölümlerde, sırasıyla Legendre polinomları, Hermite polinomları, Genocchi polinomları, Euler polinomları ve Bernoulli polinomlarının Bernstein polinomları arasındaki bağıntılar verilmiştir. Ayrıca çalışma boyunca elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bernstein operatörü, Bernstein polinomları, özel fonksiyonlar, q-analiz, p-adik analiz, Volkenborn integrali, Fermionik p-adik integral.

ABSTRACT

BERNSTEIN POLYNOMIALS
AND
THEIR REFLECTIONS IN ANALYTIC NUMBERS THEORY

ARACI, Serkan

M. Sc. Thesis, Math. Department

Adviser : Associate Professor Doctor Mehmet ACIKGOZ

January 2013, 62 pages

This thesis is formed from thirteenth sections. First section is introduction. In the second, third, fourth and fifth sections, respectively, Bernstein operator and Bernstein polynomials, Bernoulli numbers and polynomials, Euler numbers and polynomials and Genocchi numbers and polynomials and their properties are given.

In the sixth section, incoming work areas of many mathematicians and other scientists are mentioned from q-analysis (quantum calculus).

In the seventh section, basic information of p-adic analysis, Volkenborn integral and properties and fermionic p-adic integral and properties are examined under three main headings.

In the eighth, nineth, tenth, eleventh and twelfth sections, the links between Legendre polynomials, Hermite polynomials, Genocchi polynomials, Euler polynomials and Bernoulli polynomials with Bernstein polynomials are given, respectively. Additionally, the results obtained throughout the work are given.

Key words : Bernstein operator, Bernstein polynomials, special functions, q-analysis, p-adic analysis, Volkenborn integral, fermionic p-adic integral.

TEŞEKKÜRLER

Bu çalışma süresince, tezimin her sayfasının herbir satırında birçok desteğini ve yardımını esirgemeyen danışmanım Doç. Dr. Mehmet Açıkgöz'e, ders aşamasında bilgilerinden yararlandığım bölüm hocalarımdan Yrd. Doç. Dr. Kuddusi Kayaduman ve Yrd. Doç. Dr. İlkay Arslan'a, tez jüri üyelerine, bu tez süresince destek veren ve birçok döküman sağlayan Prof. Dr. Taekyun Kim'e, Prof. Dr. Jong Jin Seo'ya, Prof. Dr. Yuan He'ye, Dr. Hassan Jolany'e, Dr. Erdoğan Şen ve Araş. Gör. Erkan Ağyüz'e, manevi desteklerini her zaman arkamda hissettiğim aileme ve danışmanımın eşi Nevin Açıkgöz'e ve tüm çalışma arkadaşlarıma tüm içtenliğimle çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER LİSTESİ

$B_n(f:x)$	Bernstein operatörü
$B_{k,n}(x)$	n. dereceden k. Bernstein polinomu
$B_n(x)$	Bernoulli polinomu
B_n	Bernoulli sayısı
$E_n(x)$	Euler polinomu
E_n	Euler sayısı
$G_n(x)$	Genocchi polinomu
G_n	Genocchi sayısı
q	Quantumun baş harfi
$[x]_q$	x in q-benzeri
ord_p	p-adik değer
$:=$	tanım olarak eşittir
$\mu(x+p^nZ_p)$	Haar dağılımı
$\int_{Z_p} d\mu(x)$	Z_p üzerinde p-adik integral
$\int_{Z_p} d\mu_{-1}(x)$	Z_p üzerinde p-adik fermionik integral
$P_n(x)$	Legendre polinomu
$H_n(x)$	Hermite polinomu

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Kapalı aralıkta sürekli bir fonksiyona cebirsel polinomlarla yaklaşıldığında en iyi yaklaşım polinomun bulunması ve yaklaşım hızının hesaplanması yaklaşım teorisi üzerinde çalışılan önemli problemlerden biridir.

1885 yılında K. Weierstrass tarafından kapalı bir aralıkta sürekli fonksiyonlara polinomlarla yaklaşılabileceği gösterildikten sonra bu teoremin birçok değişik ispatı sonraki yıllarda yapılmıştır. Bu ispatlar içerisinde en ilginç olanı 1912 yılında S. Bernstein tarafından verilmiştir.

f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında tanımlı olmak üzere,

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left({}^{k}/_{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlanan f ye bağlı Bernstein operatörü denir. S. Bernstein bu operatörle $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna yaklaşılabileceğini ispatlamıştır. Bu operatöre bağlı n. dereceden Bernstein polinomu

$$B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu tezde özellikle bu polinomlar kullanılarak Bernoulli, Euler, Genocchi, Hermite Laguerre ve Legendre polinomları ile ilgili önemli bağıntılar verilecektir. Bu bağıntılar p-adik analizde ve Analitik sayılar teorisinde kullanıldığından dolayı, bu tezde çok önemli bir yer tutmaktadır. Son zamanlarda birçok matematikçi Bernstein polinomları üzerine çalışmıştır. Bu konu hakkında ayrıntılı bilgiler için [1], [2], [3], [4], [5], [13], [16], [36], [37], [45], [55], [60], [63] nolu referanslardan ulaşılabilir.

Son yıllarda q-analiz birçok matematikçi tarafından çalışılmaktadır. Jackson (1908) q-türev tanımını vermiştir. Sonra bu türev literatüre q-Jackson türev olarak geçmiştir. q-analiz, matematik ve fiziğin birçok alanında kullanılmaktadır. Örneğin matematikte hipergeometrik seriler, teta fonksiyonları, Einstein serileri, Dedekind eta fonksiyonu, Riemann Analitik sayılar teorisi, olasılık, cebir ve grup teorisi, p-adik analiz gibi alanlarda kullanılmaktadır. Fizikte ise Heisenberg cebiri, Kuantum mekanik, Kuantum cisim teorisi, Feynman integrali gibi alanlarda kullanılmaktadır.

Bu tezde kullanışlı olacak temel kavramlar aşağıdaki gibidir:

Tanım 1.1. $A \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı (f_n) fonksiyonlar dizisi verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ sayısı her $x \in A$ ve her $n \geq n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabilirse (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir.

Tanım 1.2. $b, r \in \mathbb{R}$ olmak üzere:

$$b + br + br^2 + \cdots + br^{n-1} = b\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

dir.

Tanım 1.3. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - a)^k = c_0 + c_1(x - a) + \cdots + c_n(x - a)^n + \cdots$

şeklindeki bir seriye kuvvet serisi denir.

Özel olarak $a = 0$ alınırsa:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

elde edilir.

Tanım 1.4. f, $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $y \in (a, b)$ olsun. Eğer

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

limiti varsa f fonksiyonu x noktasında türevlenebilir denir.

Tanım 1.5. f fonksiyonu, a noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun.

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

serisine a noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor serisi adı verilir. Taylor açılımda $x = 0$ ve $f(x) = e^x$ alınırsa:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

serisi elde edilir.

Tanım 1.6. $K \in \mathbb{R}$ için $|t| < K$ bölgesinde

$$C(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa $C(t,x)$ fonksiyonuna $f_n(x)$ fonksiyonunun üreteç fonksiyonu denir.

Tanım 1.7. f, x_0 ın delinmiş komşuluğunda tanımlı olsun ve bir L sayısı verilsin. Eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $0 < |x - x_0| < \varepsilon$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa f nin x_0 daki limiti L dir, denir.

Tanım 1.8. Bir f karmaşık fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0, \delta)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f, z_0 da *analitik*tir.

BÖLÜM 2

2.1. BERNSTEIN OPERATÖRÜ VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 2.1. $f(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında tanımlı olsun ve

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left({}^{k}/_{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

biçiminde tanımlanan ifadeye $f(x)$ fonksiyonuna bağlı n-inci $(n \geq 1)$ Bernstein polinomu denir.

Yukarıdaki tanımdan,

$$B_n(f;0) = f(0) \text{ ve } B_n(f;1) = f(1)$$

elde edilir.

Bazı özel durumlarda Bernstein operatörü dejenere olarak derecesi n den küçük olabilir.

$$B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlanmış Bernstein polinomu; $[0,1]$ aralığında

$$B_{k,n}(x) \geq 0 \text{ ve } \textstyle\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(x) = 1$$

dir. Ayrıca,

$$\int_0^1 B_{k,n}(x)dx = \frac{1}{n+1}$$

dir.

f fonksiyonunun x_0 noktasındaki h-adımlı m-inci sonlu farkı,

$$\Delta_h^m(f(x_0)) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j}\binom{m}{j} f(x_0 + jh)$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 2.1. n-inci Bernstein operatörünün sonlu farklar ile bağıntısı

$$B_n(f;x) = \sum_{t=0}^{n} \binom{n}{t} \Delta^{(t)} f(0) x^t$$

dir.

İspat: $B_n(f;x)$ polinomunda $(1-x)^{n-k} = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j} x^{n-k-j}$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} f(k/n) \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j} x^{n-j}$$

eşitliği elde edilir. Son toplam yeniden düzenlenirse

$$\sum_{t=0}^{n} x^t \sum_{k=0}^{t} f(k/n) \binom{n}{k} \binom{n-k}{k-t} (-1)^{t-k} = \sum_{t=0}^{n} x^t \binom{n}{t} \sum_{k=0}^{t} f(k/n) \binom{t}{k} (-1)^{t-k}$$

$$= \sum_{t=0}^{n} \Delta^{(t)} f(0) \binom{n}{t} x^t$$

dir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Örnek 2.1. $f(x) = 1$ için $\Delta^0 f(0) = 1$, $\Delta^1 f(0) = 0$, $\Delta^2 f(0) = 0, \ldots$ dır. Buna göre,

$$B_n(1,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

elde edilir. Bu durum $1^n = (x + (1-x))^n$ eşitliğinden açıktır.

Örnek 2.2. $f(x) = x$ için $\Delta^0 f(0) = 0$, $\Delta^1 f(0) = \frac{1}{n}$, $\Delta^2 f(0) = 0$, $\Delta^3 f(0) = 0, \ldots$ dır.

Buna göre

$$B_n(x;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \frac{1}{n}\binom{n}{1} x = x.$$

Örnek 2.3. $f(x) = x^2$ için $\Delta^0 f(0) = 0$, $\Delta^1 f(0) = \frac{1}{n^2}$, $\Delta^2 f(0) = \frac{2}{n^2}$, ... dır. Buna göre,

$$B_n(x^2;x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \frac{1}{n^2}\binom{n}{1} x + \frac{2}{n^2}\binom{n}{2} x^2$$

dir. Bazı özel durumlarda $B_n(f;x)$ Bernstein polinomu, $f(x)$ fonksiyonu ile benzer özelliklere sahiptir.

Bernstein operatörlerinin bazı temel özellikleri,

1) $f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$ ise $B_n(f;x) = a_1 B_n(f_1;x) + a_2 B_n(f_2;x)$,
2) $m \leq f(x) \leq M$ ise $m \leq B_n(f;x) \leq M$,
3) $f^{(p)}(x) \geq 0$ ise $B_n^{(p)}(f;x) \geq 0$,
4) $f(x)$ azalmayan ise $B_n(f;x)$ de azalmayandır.
5) $f(x)$ konveks ise $B_n(f;x)$ de konvekstir.

2.2. BERNSTEIN POLİNOMLARI

Bu kısımda Bernsten polinomlarının tanımı ve bu polinomlarla ilgili önemli teoremler verilecektir.

Tanım 2.2.1. $x \in [0,1]$ ve $k = 0,1,2,\cdots,n$ olmak üzere

$$B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlanan polinomlara n. dereceden Bernstein polinomları denir. Burada,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

n. dereceden $(n+1)$ -tane Bernstein polinomu vardır. Matematiksel uygunluk açısından $k < 0$ ve $k > n$ için $B_{k,n}(x) = 0$ olarak kabul edilir ([1], [2], [3], [4], [5], [16], [37], [45], [55], [60]).

Teorem 2.2.1. Bernstein polinomları simetriktir.

$$B_{k,n}(x) = B_{n-k,n}(1-x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Tanım 2.2.1 den;

$$B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \binom{n}{n-k} (1-x)^{n-k} \big(1-(1-x)\big)^{n-(n-k)}$$

$$= B_{n-k,n}(1-x)$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.2.2. n. dereceden Bernstein polinomları $(n-1)$. dereceden iki Bernstein polinomunun lineer birleşimi olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$B_{k,n}(x) = (1-x)B_{k,n-1}(x) + xB_{k-1,n-1}(x).$$

İspat. Tanım 2.2.1 den;

$$B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right] x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= (1-x)\left[\binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k}\right] + x\left[\binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)}\right]$$

$$= (1-x)B_{k,n-1}(x) + xB_{k-1,n-1}(x)$$

elde edilir.

Teorem 2.2.3. Bernstein polinomları pozitif tanımlıdır. $0 \le x \le 1$ için, $B_{k,n}(x) \ge 0$ dir.

İspat. Tanım 2.2.1 deki, $B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ ifadesinin sağ tarafındaki çarpanların hepsi $0 \le x \le 1$ için pozitif veya sıfır olduğundan $B_{k,n}(x) \ge 0$ dır.

Teorem 2.2.4. n. dereceden $(n+1)$-tane Bernstein polinomlarının toplamı, $(n-1)$. dereceden n tane Bernstein polinomlarının toplamına eşittir.

$$\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x)$$

dir.

İspat. Tanım 2.2.2. den;

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \big(x + (1-x)\big)^n = 1^n$$

dir. Burada $1^n = 1^{n-1}$ eşitliği kullanıldığında;

$$1^{n-1} = \big(x + (1-x)\big)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n} B_{k,n-1}(x)$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.2.5. n. dereceden $(n+1)$-tane Bernstein polinomunun toplamı 1 dir. Yani

$$\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(x) = 1$$

dir.

İspat. Bir önceki teoremden, $\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x)$ yazılabilir.

Bu şekilde devam edilirse;

$$\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-2} B_{k,n-2}(x) = \cdots = \sum_{k=0}^{1} B_{k,1}(x) = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.2.6. n. dereceden Bernstein polinomlarının türevi $(n-1)$. dereceden Bernstein polinomlarının lineer birleşimi $k = 0,1,2,\cdots,n$ olmak üzere

$$\frac{d}{dx}B_{k,n}(x) = n\left(B_{k-1,n-1}(x) - B_{k,n-1}(x)\right)$$

şeklinde yazılır.

İspat. Tanım 2.2.1. den;

$$\frac{d}{dx}B_{k,n}(x) = \frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right]$$

$$= k\binom{n}{k}x^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-1-k}$$

$$= n\left[\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)} - \binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k}\right]$$

$$= n\left(B_{k-1,n-1}(x) - B_{k,n-1}(x)\right)$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Üreteç fonksiyonları, polinomlar ile ilgili problemlerin çözümünü yapmak için kullanışlı bir buluştur. 2010 yılına kadar, Bernstein polinomlarının üreteç fonksiyonu bilinmiyordu. 2010 yılında, Bernstein polinomlarının üreteç fonksiyonları Açıkgöz ve Araci ([1]) tarafından verilmiştir. Sonra, bu polinomlar Analitik sayılar teorisi literatüründe yerini almıştır. Daha sonra, bu üreteç fonksiyonu Analitik sayılar teorisi içerisinde çalışan birçok bilim insanının ilgisini çekmiş ve bu üreteç fonksiyonu yardımıyla Bernstein polinomlarının birçok ilginç özellikleri verilmiştir ([45], [55], [60], [63]).

Teorem 2.2.7. (Acikgoz ve Araci [1]) $t \in \mathbb{C}, k = 0,1,2,\cdots,n$ ve $x \in [0,1]$ olmak üzere

$$F_k(x,t) = \frac{(tx)^k}{k!}e^{t(1-x)} = \sum_{n=k}^{\infty} B_{k,n}(x)\frac{t^n}{n!}$$

dir.

İspat. $F_k(x,t)$ fonksiyonunun $e^{t(1-x)}$ çarpanının Taylor açılımı:

$$e^{t(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n \frac{t^n}{n!}$$

dir. Yukarıdaki eşitlik, $F_k(x,t)$ fonksiyonu içerisinde yazıldığında;

$$F_k(x,t) = \frac{(tx)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} x^k (1-x)^n \frac{t^{n+k}}{n!\,k!}$$

elde edilir. Yukdarıdaki bağıntının sağ tarafı, $(n+k)!$ ile çarpıp bölündüğünde:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k (1-x)^n \frac{t^{n+k}}{(n+k)!} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Böylece, arzu edilen eşitlik:

$$F_k(x,t) = \sum_{n=k}^{\infty} B_{k,n}(x) \frac{t^n}{n!} \ ve\ F_k(x,t) = \frac{(tx)^k}{k!} e^{t(1-x)}$$

gösterilmiş olur.

Teorem 2.2.8. (Acikgoz ve Araci [3]) $t \in \mathbb{C}$, $n_1, n_2, \cdots, n_m \in \mathbb{N}$, $k_i = 0,1,2,\cdots,n_i$ ve $i = 0,1,2,\cdots,m$ olmak üzere

$$\sum_{n_1=k_1}^{\infty} \sum_{n_2=k_2}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=k_m}^{\infty} B_{k_1,k_2,\cdots,k_m;n_1,n_2,\cdots,n_m}(x_1,x_2,\cdots,x_m) \prod_{j=1}^{m} \frac{t^{n_j}}{n_j!}$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{m} \frac{(tx_j)^{n_j}}{k_j!} \right) e^{t(m-\sum_{i=1}^{m} x_i)}$$

dir.

Uyarı 2.2.1. Teorem 2.2.8. içerisinde $m = 1$ alındığında Teorem 2.2.7. elde edilir, $m = 2$ ile $x_1 = x$ ve $x_2 = y$ alındığında Acikgoz ve Araci nin iki değişkenli Bernstein polinomlarının üreteç fonksiyonu elde edilir. Bu üreteç fonksiyonu:

$$\sum_{n_1=k_1}^{\infty} \sum_{n_2=k_2}^{\infty} B_{k_1,k_2;n_1,n_2}(x,y) \frac{t^{n_1}}{n_1!} \frac{t^{n_2}}{n_2!} = \frac{(tx)^{k_1}(ty)^{k_2} e^{2t}}{k_1!\, k_2!\, e^{t(x+y)}}$$

şeklinde tanımlanmıştır ([3]).

BÖLÜM 3

BERNOULLI SAYILARI VE POLİNOMLARI

Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonu, $B_n(x)$

$$F(x,t) = \frac{t}{e^t - 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} \tag{3.1}$$

eşitliği ile tanımlıdır. Özel durum olarak denklem (3.1) içerisinde $x = 0$ için $B_n(0) := B_n$ elde edilir ve burada ki B_n Bernoulli sayısı olarak isimlendirilir. Bernoulli sayılarını üreten fonksiyon

$$F(t) = \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \tag{3.2}$$

dir. (3.1) ve (3.2) denklemlerinden

$$F(x,t) = e^{xt} F(t) \tag{3.3}$$

fonksiyonel denklemi bulunur. (3.3) bağıntısından

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \right) \tag{3.4}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \right) \frac{t^n}{n!}$$

Cauchy çarpımı olarak bilinen eşitlik (3.4) te uygulanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} B_k \right) \frac{t^n}{n!} \tag{3.5}$$

serisel eşitlik elde edilir. Burada, $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları eşitlenerek,

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} B_k \tag{3.6}$$

şeklinde Bernoulli polinomunun iyi bilinen açık formulü bulunur.

Teorem 3.1. $n \in N$ için,

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} B_k$$

dir.

Aşağıdaki teorem Bernoulli sayılarını elde etmek için kullanışlı bir yineleme bağıntısıdır.

Teorem 3.2. $n \in N$ için,

$$B_0 = 1,\ (B+1)^n - B_n = \begin{cases} 1, n = 1 \\ 0, n > 1 \end{cases}$$

dir.

İspat. Bernoulli sayıları

$$\frac{t}{e^t - 1} = e^{Bt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \tag{3.7}$$

ifadesi ile tanımlıdır ve burada $B^n := B_n$ dir. (3.7) denkleminde her iki tarafın $t \to 0$ iken limiti alınırsa,

$$\lim_{t \to 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1 = B_0$$

elde edilir. Bu eşitlik Teoremin bir parçasıydı ve kanıtlanmış oldu. (3.7) denkleminden

$$t = e^{(B+1)t} - e^{Bt}$$

ifadesine ulaşılır ve burada eksponensiyel fonksiyonların Taylor açılımı kullanılarak,

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} \{(B+1)^n - B_n\} \frac{t^n}{n!}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte katsayı karşılaştırması yapıldığında istenilen ispat tamamlanmış olur.

Çalışmamızın amaçlarından biri, Bernoulli polinomu ile Bernstein polinomu arasında kullanışlı bir bağıntı vermektir. Bunun için Bernoulli polinomunun simetrik özelliğini bilmek ileriki bölümde kullanışlı olacaktır.

Teorem 3. 3. (Bernoulli polinomunun simetrik özelliği). $n \in N$ için,

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$$

dir.

İspat. Bernoulli polinomunun üreteç fonksiyonu kullanılırsa

$$F(1-x,t) = \frac{t}{e^t - 1} e^{(1-x)t}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(1-x) \frac{t^n}{n!} = \frac{(-t)}{e^{(-t)} - 1} e^{x(-t)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Böylece üreteç fonksiyonu yardımı ile istenilen teorem kanıtlanmış olur.

Teorem 3.4. (Bernoulli polinomları için Raabe Formulü).

$$B_n(dx) = d^{n-1} \sum_{k=0}^{d-1} B_n\left(x + \frac{k}{d}\right)$$

dir.

İspat. (3.1) bağıntısından,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(d^{n-1}\sum_{k=0}^{d-1}B_n\left(x+\frac{k}{d}\right)\right)\frac{t^n}{n!}$$

$$=\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}\sum_{n=0}^{\infty}B_n\left(x+\frac{k}{d}\right)\frac{(dt)^n}{n!}$$

$$=\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}\frac{dt}{e^{dt}-1}e^{\left(x+\frac{k}{d}\right)td}$$

$$=\frac{t}{e^{dt}-1}e^{xtd}\sum_{k=0}^{d-1}(e^t)^k$$

$$=\frac{t}{e^{dt}-1}\frac{e^{dt}-1}{e^t-1}e^{dtx}=\frac{t}{e^t-1}e^{dtx}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(dx)\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

BÖLÜM 4

EULER SAYILARI VE POLİNOMLARI

Tezin bu bölümünde, Euler sayıları ve polinomlarının temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.1. Euler polinomları, $E_n(x)$,

$$M(x,t) = \frac{2}{e^t+1}e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!}, \qquad |t| < \pi \tag{4.1}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

(4.1) içerisinde $x = 0$ alınırsa,

$$E_n(0) := E_n$$

elde edilir. Burada E_n Euler sayısı olarak adlandırılır. Euler sayıları

$$M(t) = \frac{2}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n\frac{t^n}{n!}, \qquad |t| < \pi \tag{4.2}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır. (4.1) ve (4.2) bağıntısından,

$$M(x,t) = e^{xt}M(t)$$

bulunur. e^{xt} nin Taylor açılımı ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}E_k\right)\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Euler polinomlarının Euler sayıları cinsinden ifadesi aşağıdaki teoremde verilir.

Teorem 4.1. $n \in N$ için,

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} E_k$$

dir.

Teorem 4.2. $n \in N$ için

$$E_0 = 1,\ (E+1)^n + E_n = \begin{cases} 2, n = 0 \ ise \\ 0, n \geq 0 \ ise \end{cases}$$

dir.

İspat. Sembolik olarak $E^n := E_n$ alındığında

$$\sum_{n=0}^{\infty} E^n \frac{t^n}{n!} = e^{Et} = \frac{2}{e^t + 1}$$

elde edilir. Buradan,

$$e^{(E+1)t} + e^{Et} = 2$$

bulunur. Eksponensiyel fonksiyonların Taylor açılımları kullanıldığında,

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((E+1)^n + E_n) \frac{t^n}{n!} = 2$$

elde edilir. Bu eşitlikten,

$$(E+1)^n + E_n = \begin{cases} 2, n = 0 \\ 0, n > 0 \end{cases}$$

bulunur. Bununla birlikte (4.2) bağıntısında $t \to 0$ iken limit alınırsa,

$$E_0 = \lim_{t \to 0} \frac{2}{e^t + 1} = 1$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.3. (Euler polinomları için simetrik özelliği). $n \in N$ için,

$$E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x)$$

dir.

İspat. Euler polinomlarının üreteç fonksiyonu kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(1-x)\frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t+1}e^{(1-x)t}$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitliğin sağ tarafında bazı elementer işlemler uygulanırsa,

$$= \frac{2}{e^{-t}+1}e^{(-t)x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n E_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

ifadesi bulunur. Bu eşitlikte $\frac{t^n}{n!}$ katsayısı karşılaştırıldığında teoremin istenilen ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.4. (Euler polinomları için Raabe formulü). $d \equiv 1(mod2)$ için,

$$E_n(dx) = d^n \sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k E_n\left(x+\frac{k}{d}\right)$$

dir.

İspat. Euler polinomlarının üreteç fonksiyonundan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(d^n \sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k E_n\left(x+\frac{k}{d}\right)\right)\frac{t^n}{n!}$$

$$= \sum_{k=0}^{d-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} E_n\left(x+\frac{k}{d}\right)\frac{(dt)^n}{n!}\right) = \sum_{k=0}^{d-1}\frac{2}{e^{dt}+1}e^{\left(x+\frac{k}{d}\right)(dt)}$$

$$= \frac{2e^{xdt}}{e^{dt}+1}\sum_{k=0}^{d-1} e^{kt} = \frac{2}{e^t+1}e^{xdt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(dx)\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Burada katsayı karşılaştırması yapıldığında, istenilen sonuç elde edilir.

BÖLÜM 5

GENOCCHI SAYILARI VE POLİNOMLARI

Genocchi polinomları uzun süredir birçok matematikçi tarafından çalışılmasına rağmen günümüze kadar hala gizemliliğini koruyan polinomlardır. Genocchi polinomlarının p-adik açılımları Kim ([42], [50]) tarafından, nümerik integrasyon yapısı Ryoo tarafından ([62]), Genocchi polinomlarının q-benzerleri Araci, Acikgoz ve Qi ([30]) tarafından tanımlanmış ve bu polinomların Bernstein polinomları ile ilişkisi Araci ve Acikgoz [36] tarafından verilmiştir.

Tezin bu kısmında Genocchi sayıları ve polinomları tanımlanacak ve bunların Analitik sayılar teorisindeki önemli teoremleri, ispatları ile birlikte verilecektir.

Tanım 5.1. Genocchi polinomları $(G_n(x))$

$$G(x,t) = \frac{2t}{e^t+1}e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)\frac{t^n}{n!}, \qquad |t| < \pi \tag{5.1}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

(5.1) denkleminde $x = 0$ yazılırsa,

$$G(0,t) := G(t) = \frac{2t}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(0)\frac{t^n}{n!} := \sum_{n=0}^{\infty} G_n\frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi \tag{5.2}$$

elde edilir. Burada G_n, Genocchi sayılarıdır. (5.1) ve (5.2) eşitliklerinden,

$$G(x,t) = e^{xt}G(t) \tag{5.3}$$

fonksiyonel denklemi elde edilir.

Teorem 5.1. $n \in N$ için,

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} G_k$$

dir.

İspat. (5.3) denkleminde e^{xt} nin seri açılımı yerleştirildiğinde,

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \frac{t^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} G_k \right) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Yukarıdaki uygulamalarda ilk ve son eşitliklerde katsayı karşılaştırılması yapıldığında istenilen teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 5.2. $n \in N$ için,

$$E_n(x) = \frac{G_{n+1}(x)}{n+1}$$

dir.

İspat. (4.1) ve (5.1) den,

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^{n+1}}{n!}$$

yazılır. Burada eşit kuvvetlerin katsayıları karşılaştırıldığında teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 5.3. $n \in N$ için

$$\frac{dG_n(x)}{dx} = nG_{n-1}(x)$$

dir.

İspat. (5.1) in her iki tarafına $\frac{d}{dx}$ türev operatörü uygulanırsa,

$$\frac{2t}{e^t+1}\left(\frac{d}{dx}e^{xt}\right)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}G_n(x)\frac{t^n}{n!}\right)$$

elde edilir. Genocchi polinomları düzgün yakınsak olduğundan terim terime türevlenebilme özelliğine sahiptir. Bu nedenle yukarıdaki eşitliğin sağ tarafında türev operatörü ile toplam yer değiştirir. Öyle ki,

$$\frac{2t^2}{e^t+1}e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}G_n(x)\right)\frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Burada

$$\sum_{n=0}^{\infty}G_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}G_n(x)\right)\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. t^{n+1} in katsayıları eşitlendiğinde, teorem ispatlanmış olur.

Teorem 5.4. $n \in N$ için,

$$G_n(1-x)=(-1)^{n+1}G_n(x)$$

dir.

İspat. (5.1) denkleminden,

$$G(1-x,t)=\frac{2t}{e^t+1}e^{(1-x)t}=-\frac{2(-t)}{e^{-t}+1}e^{x(-t)}=-G(x,-t)$$

bağıntısı elde edilir. Yukarıdaki fonksiyonların yerine seri açılımları yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}G_n(1-x)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}G_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikte $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları eşitlendiğinde, teorem ispatlanmış olur.

Teorem 5.5. $n \in N$ için,

$$G_{n+1}(x+1)+G_{n+1}(x)=2(n+1)x^n$$

dir.

İspat. (5.1) bağıntısından,

$$G(x+1,t)+G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\big(G_n(x+1)+G_n(x)\big)\frac{t^n}{n!}$$

yazılır. Buradan,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big(G_n(x+1)+G_n(x)\big)\frac{t^n}{n!}=\frac{2t}{e^t+1}e^{(x+1)t}+\frac{2t}{e^t+1}e^{xt}=2te^{xt}$$

elde edilir. Bu eşitlikte e^{xt} nin seri açılımı yukarıdaki son eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big(G_n(x+1)+G_n(x)\big)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(2x^n)\frac{t^{n+1}}{n!}$$

bulunur. t^{n+1} in katsayıları karşılaştırıldığında, teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 5.6. $n \in N$ için,

$$G_0=0,\ (G+1)^n+G_n=\begin{cases}2, & n=1\ ise\\ 0, & n\neq 1\ ise\end{cases}$$

dir.

İspat. (5.2) eşitliğinde, her iki tarafın $t \to 0$ iken limiti alınırsa,

$$G_0=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{e^t+1}=0$$

olarak bulunur. (5.2) de sembolik olarak $G_n := G^n$ kullanıldığında

$$\sum_{n=0}^{\infty}G^n\frac{t^n}{n!}=e^{Gt}=\frac{2t}{e^t+1}$$

elde edilir. Buradan,

$$e^{(G+1)t}+e^{Gt}=2t$$

ifadesini görmek kolaydır. Yukarıdaki eşitlikte eksponensiyel fonksiyonların seri açılımları kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}((G+1)^n+G_n)\frac{t^n}{n!}=2t$$

eşitliğine ulaşılır. Bu bağıntıda katsayı karşılaştırılması yapılırsa teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Genocchi polinomlarının önemli özelliklerinden bir tanesi de dağılım formulüdür. Bu bağıntı ile, bir ölçü tanımlanabilir ve Genocchi polinomlarının p-adik açılımı inşa edilebilir.

Genocchi polinomlarının dağılım bağıntısı aşağıdaki teoremle verilir:

Teorem 5.7. $d \equiv 1(mod2)$ ve $n \in N$ için

$$G_n(dx)=d^{n-1}\sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k G_n\left(x+\frac{k}{d}\right)$$

dir.

İspat. $d \equiv 1(mod2)$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(d^{-1}\sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k G_n\left(x+\frac{k}{d}\right)\right)\frac{(dt)^n}{n!}$$

$$=\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k\sum_{n=0}^{\infty}G_n\left(x+\frac{k}{d}\right)\frac{(dt)^n}{n!}=\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k\frac{2dt}{e^{dt}+1}e^{\left(x+\frac{k}{d}\right)(dt)}$$

$$=\frac{2t}{e^{dt}+1}e^{xdt}\sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k e^{kt}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(dx)\frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Yukarıda $\frac{t^n}{n!}$ katsayı karşılaştırması yapıldığında, teoremin ispatı tamamlanmış olur.

BÖLÜM 6

q-ANALİZ

q-analiz birçok matematikçinin ve diğer bilim adamlarının çalışma alanına girmiştir. Günümüzde matematiğin birçok alanında kullanılmaya başlanmıştır. Bunlar arasında özellikle kombinatorik, spektral teori, özel fonksiyonlar, Stirling sayıları, Bernoulli sayıları ve polinomları, Euler sayıları ve polinomları, Genocchi sayıları ve polinomları, Frobenius-Euler sayıları ve polinomları, q-ölçüm, q-quantum gruplar sayılabilir.

Bu bölümde $q \in \mathbb{C}$ ise $|q| < 1$ olarak alınacaktır.

Tanım 6.1. x herhangi bir değişken olsun. x in q-açılımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$[x]_q = [x:q] = \frac{q^x-1}{q-1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{x-1}.$$

Uyarı 6.1. $\lim_{q\to 1}[x]_q = x$ dir.

Şimdi $[x]_q$ nun bazı özelliklerini inceleyelim.

1) $[x+y]_q = \frac{q^{x+y}-1}{q-1} = \frac{q^{x+y}-q^x+q^x-1}{q-1} = [x]_q + q^x[y]_q,$
2) $[x]_{q^{-1}} = \frac{q^{-x}-1}{q^{-1}-1} = q^{1-x}\frac{q^x-1}{q-1} = q^{1-x}[x]_q,$
3) $[-x]_q = \frac{q^{-x}-1}{q-1} = -q^{-x}[x]_q,$
4) $[xy]_q = \frac{q^{xy}-1}{q-1} = \frac{q^{xy}-1}{q^x-1}\frac{q^x-1}{q-1} = [x]_q[y]_{q^x},$

1908 de, q-fark operatörü Jackson tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\left(D_q f\right)(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}, \qquad q \in C - \{1\}$$

Eğer f fonksiyonu x noktasında diferansiyellenebiliyorsa

$$\lim_{q \to 1} \left(D_q f \right)(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

dir.

q-Jackson türeve bir uygulama olarak,

$$D_q x^n = \frac{x^n - (qx)^n}{(1-q)x} = [n]_q x^{n-1}.$$

q-analiz ile ilgili ayrıntılı bilgi için [41] incelenebilir.

BÖLÜM 7

p-ADİK ANALİZ

Bu bölümde p-adik analizde kullanacağımız bazı temel kavramlar, tanımlar ve teoremleri vereceğiz.

7.1. p-ADİK ANALİZİN TEMEL BİLGİLERİ

Tanım 7.1. p sabit bir asal sayı ve $a \in Z - \{0\}$ olsun. a asal çarpanlarına ayrıldığında p yi içeren en büyük kuvveti "$ord_p a$" ile gösterilir; öyle ki m,

$$a \equiv 0(modp^m)$$

özelliğindeki en büyük tamsayı ise o zaman

$$m = ord_p a$$

dir denir.

$ord_p a$ ile ilgili birkaç uygulamayı aşağıdaki gibi verelim:

$$ord_7 42 = 1,\ ord_2 216 = 3,\ ord_3 91 = 0, \ldots$$

dır. Özel olarak $ord_p 0 = \infty$ alınacaktır.

$$ord_p(a_1 a_2) = ord_p a_1 + ord_p a_2$$

dir. Herhangi bir $x = \frac{a}{b}$ rasyonel sayısı için,

$$ord_p x = ord_p a - ord_p b$$

dir. Q üzerindeki p-adik norm aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$|x|_p = \begin{cases} \dfrac{1}{p^{ord_p x}}, & x \neq 0\ ise \\ 0, & x = 0\ ise. \end{cases}$$

Buna göre, $|6|_3 = |15|_3 = \frac{1}{3}$, $|141|_2 = 1$, $\left|\frac{3}{4}\right|_2 = 4$ tür.

Bu norm klasik normun üçgen eşitsizliğinden dolayı daha güçlü olan (ve güçlü üçgen eşitsizliği diye adlandırılan)

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$$

koşulunu sağlar. Bu koşulu sağlayan norma ise Arşimedyan olmayan norm denir. Bu normun indirgediği metriğe de Arşimedyan olmayan metrik (ultrametrik) denir ([70]).

Z_p, p-adik tamsayıları anlamına gelir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 7.2. p bir asal sayı ve $0 \leq a_i < p, a_i \in Z$, olmak üzere $\sum_{i\geq 0} a_i p^i$ şeklinde ifade edilen sayılara p-adik tamsayı denir.

Tüm p-adik tamsayıların halkası Z_p ile gösterilir.

Q_p, p-adik rasyonel sayıların kümesini gösterir ve p-adik rasyonel sayılar aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 7.3. $Q_p = \{x = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n p^n : 0 \leq a_i \leq p - 1\}$ şeklinde tanımlanır.

Bu tanım içerisinde, yeterince büyük n ler için $a_{-n} = 0$ dır. Yani $x \in Q_p$ ise

$$x = \cdots + a_2 a_1 a_0 a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-k} = \cdots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 + \frac{a_{-1}}{p} + \cdots + \frac{a_{-k}}{p^k}$$

dır. Özel olarak $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = a_{-k} = 0$ ise $x \in Z_p$ dir. Q_p nin cebirsel kapanışı $\overline{Q}_p$ olmak üzere, C_p, $\overline{Q}_p$ cisminin $|.|_p$ normuna göre tamlamasıdır ([70]).

p-adik analizin reel analizden farklılaştığı noktalardan biri: Q_p üzerinde bir serinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul genel terimin limitinin sıfır olmasıdır.

Uyarı 7.1. $|.|_p$ normunu kullanarak, Z_p aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$Z_p = \{x \in Q_p : |x|_p \leq 1\}.$$

Tanım 7.4. Q_p metrik uzayının tüm açık kümeleri $a \in Q_p$ ve $n \in Z$ olmak üzere

$$a + p^n Z_p = \{x \in Q_p : |x - a|_p \leq p^{-n}\}$$

şeklindeki açık aralıkların birleşimidir. Q_p nin açık bir alt kümesinin kompakt olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul açık alt aralıklarının sonlu birleşimi olarak yazılabilmesidir. Bu kümelere kompakt-açık küme denir.

Teorem 7.1. X, Q_p nin kompakt-açık altkümesi olsun. X in açık alt aralıklarından Q_p ye tanımlı her μ dönüşümü $a + p^n Z_p$, X in bir altkümesi olmak üzere

$$\mu(a + p^n Z_p) = \sum_{b=0}^{p-1} \mu(a + bp^n + p^{n+1} Z_p)$$

şartını sağlıyorsa X üzerinde tek bir şekilde p-adik dağılıma genişletilir ([70]).

Şimdi birkaç p-adik dağılımı verelim:

1) **Haar dağılımı:** p-adik Volkenborn integrali inşasında çok önemli bir yere sahip olup, μ_{Haar} ile gösterilir ve

$$\mu_{Haar}(a + p^n Z_p) = \frac{1}{p^n}, \qquad a \in Z_p$$

olarak tanımlanır. Yukarıdaki teoremi kullanarak, μ_{Haar}

$$\sum_{b=0}^{p-1} \mu_{Haar}(a + bp^n + p^{n+1} Z_p) = \sum_{b=0}^{p-1} \frac{1}{p^{n+1}} = \frac{1}{p^n} = \mu(a + p^n Z_p)$$

elde edilir. O halde μ_{Haar}, Z_p üzerinde bir p-adik dağılımdır.

2) **Dirac Dağılımı:** $\alpha \in Z_p$ ve U, Q_p nin kompakt açık bir alt kümesi olmak üzere

$$\mu_\alpha(U) = \begin{cases} 1, & \alpha \in U \ ise \\ 0, & \alpha \notin U \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

3) **Mazur Dağılımı:** $a \in Z$ ve $0 < a < p^n - 1$ olmak üzere

$$\mu_{Mazur}(a+p^nZ_p)=\frac{a}{p^n}-\frac{1}{2}$$

şeklinde tanımlanır.

4) **Bernoulli Dağılımı:** Bernoulli dağılımlarının p-adik analizde ve olasılık teorisinde oldukça önemli uygulamaları olduğundan, bu dağılım kısaca incelenecektir:

$0 \leq a \leq p^n - 1$ ve $k \in Z^+$ olmak üzere $a + p^nZ_p$ aralıkları üzerinde Bernoulli dağılımı:

$$\mu_{B,k}(a+p^nZ_p)=p^{n(k-1)}B_k\left(\frac{a}{p^n}\right).$$

şeklinde tanımlanır. Burada $B_k\left(\frac{a}{p^n}\right)$ Bernoulli polinomlarıdır. $\mu_{B,k}$, Z_p üzerinde bir dağılımdır. Özel olarak $k=0$ için

$$\mu_{B,0}(a+p^nZ_p)=p^{-n}B_0\left(\frac{a}{p^n}\right)=\frac{1}{p^n}$$

elde edilir. Yani $\mu_{B,0}=\mu_{Haar}$ dır. $k=1$ için

$$\mu_{B,1}(a+p^nZ_p)=B_1\left(\frac{a}{p^n}\right)=\frac{a}{p^n}-\frac{1}{2}$$

elde edilir. Yani $\mu_{B,1}=\mu_{Mazur}$ dur. $k=2$ için

$$\mu_{B,3}(a+p^nZ_p)=p^n\left(\frac{a^2}{p^{2n}}-\frac{a}{p^n}+\frac{1}{6}\right)$$

olur.

Tanım 7.5. μ , X üzerinde bir p-adik dağılım olsun. Her $U \subset X$ kompakt-açık altkümesi için $|\mu(U)|_p \leq B$ olacak şekilde $B \in R$ varsa μ ye p-adik ölçüm denir ([70]).

Yukarıdaki p-adik dağılımlardan sadece Dirac dağılımı bir ölçümdür. Çünkü her U kompakt-açık altkümesi için $0 \leq \mu_{\alpha}(U) \leq 1$ dir. Diğer dağılımlar sınırlı olmadıklarında ölçüm değildir.

Verilen sınırsız bir p-adik dağılımı p-adik ölçüme çevirmek için bu dağılım üzerinde bazı uygun değişiklikler yapmak gerekir. Örneğin, Bernoulli dağılımları

$$\mu_{k,\alpha}(U) = \mu_{B,k}(U) - \alpha^{-k}\mu_{B,k}(\alpha U)$$

şeklinde tanımlanırsa ölçüm olur.

Burada $\alpha \in Z, \alpha \neq 1, p \nmid \alpha$ ve U kompakt-açık, $U \subset Z_p$ dir. $k = 1$ için

$$\left|\mu_{1,\alpha}(U)\right|_p \leq 1$$

dir.

μ sınırsız bir p-adik dağılım olsun. f yerel olarak sabit bir fonksiyon ise $\int f d\mu$ tanımlanabilir. Fakat sürekli fonksiyonların integralinde Riemann toplamının limiti sorun teşkil edebilir. Örneğin, $f: Z_p \to Z_p$, $f(x) = x$ fonksiyonunun Riemann toplamını oluşturalım:

$\mu = \mu_{Haar}$ olsun. $x_{a,N}$,

$$Z_p = \cup_{a=0}^{p^n-1} (a + p^n Z_p)$$

parçalanışındaki a. aralıkta keyfi bir nokta olsun. $\{x_{a,N}\}$ parçalanışına karşılık gelen N. Riemann toplamı,

$$S_{N,\{x_{a,N}\}}(f) = \sum_{a=0}^{p^n-1} f(x_{a,N})\, \mu(a + p^n Z_p) = \sum_{a=0}^{p^n-1} \frac{x_{a,N}}{p^N}$$

dır. Özel olarak $x_{a,N} = a$ ise

$$S_{N,\{a\}}(f) = \sum_{a=0}^{p^N-1} \frac{a}{p^N} = \frac{p^N - 1}{2}$$

bulunur. Buradan

$$\lim_{N\to\infty} S_{N,\{a\}}(f) = -\frac{1}{2}$$

elde edilir. Burada p-adik anlamda limit, $\lim_{N\to\infty} p^N = 0$ dır. Fakat $x_{a,N} = a \in a + p^N Z_p$ yerine her N için $a_0 \in Z_p$ olmak üzere

$$x_{a,N} = a + a_0 p^N \in a + p^N Z_p$$

olarak seçilirse Riemann toplamı

$$S_{N,\{x_{a,N}\}}(f) = \sum_{a=0}^{p^N-1} f(x_{a,N})\mu(a + p^N Z_p) = \sum_{a=0}^{p^N-1} \frac{a + a_0 p^N}{p^N} = \frac{p^N - 1}{2} + a_0$$

olur. Buradan

$$\lim_{N\to\infty} S_{N,\{a+a_0p^N\}}(f) = -\frac{1}{2} + a_0$$

elde edilir. Bu limitin değeri aralıkta seçilen noktaya bağlıdır. Dolayısıyla nokta değiştikçe toplamın limiti farklı sayılar olacağından, Riemann toplamının limiti yoktur ([70]).

Tanım 7.6. μ, Q_p nin kompakt-açık bir X alt kümesi üzerinde tanımlı bir ölçüm ve $f: X \to Q_p$ sürekli bir fonksiyon ve $a + p^N Z_p$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun Riemann toplamı

$$S_{N,\{x_{a,N}\}}(f) = \sum_{a=0}^{p^N-1} f(x_{a,N})\, \mu(a + p^N Z_p)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $a \in a + p^N Z_p \subset X$ için $x_{a,N}, a + p^N Z_p$ aralığından seçilmiştir. Q_p üzerinden $N \to \infty$ için $S_{N,\{x_{a,N}\}}(f)$ bir limite yakınsar. Bu limit $\{x_{a,N}\}$ seçiminden bağımsızdır ([70]).

Tanım 7.7. $f: X \to Q_p$ sürekli bir fonksiyon ve μ, X üzerinde bir ölçüm ise o zaman f nin μ ölçümüne göre integrali

$$\lim_{N\to\infty} S_{N,\{x_{a,N}\}}(f) = \int f\mu$$

olarak tanımlanır.

Tanım 7.8. X , C_p nin ayrık noktası olmayan bir alt kümesi olsun. $f: X \to C_p$ fonksiyonu ve $x, y \in X, x \neq y$ için

$$F_f(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

olarak tanımlanan iki değişkenli $F_f(x,y)$ fonksiyonu için

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} F_f(x,y)$$

mevcut ise f fonksiyonuna $a \in X$ noktasında sürekli (düzgün) diferansiyellenebilir denir. X in her noktasında sürekli diferansiyellenebilen bir f fonksiyonuna da sürekli diferansiyellenebilir fonksiyon denir. Bütün sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi

$$C^1(X \to C_p) = \{f \mid f: X \to C_p, f \text{ sürekli diferansiyellenebilir}\}$$

ile gösterilir ([70]).

Tanım 7.9. $f \in C(Z_p, C_p) = \{f \mid f: X \to C_p, f \text{ sürekli}\}$ olsun. f nin belirsiz toplamı Sf ile gösterilir ve

$$Sf(n) = \sum_{j=0}^{n} f(j), \qquad n \in N$$

olarak tanımlanır. $f \in C^1(Z_p \to C_p)$ ise $Sf \in C^1(Z_p \to C_p)$ dir ([70]).

7.2. VOLKENBORN İNTEGRALİ VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 7.1.1. $f \in C^1(Z_p \to C_p)$ olsun. f nin Volkenbrn integrali

$$\int_{Z_p} f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^n} \sum_{x=0}^{p^n-1} f(x)$$

şeklinde tanımlanır ([46], [47], [48], [51], [52], [56], [66], [67], [68], [69], [70]).

Teorem 7.1.1. $d\mu(x) = \mu_{Haar}\left(x + p^n Z_p\right) = \frac{1}{p^n}$ olsun.

1) $\int_{Z_p} f(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{Sf(p^n)-Sf(0)}{p^n} = (Sf)'(0)$.

Burada

$$(Sf)'(x) = \frac{d\left(Sf(x)\right)}{dx}$$

dir.

2) $\int_{Z_p} f(x) d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(0)+f(1)+\cdots+f(p^n-1)}{p^n}$

dir.

3) $\int_{Z_p} \left(f(x+1) - f(x)\right) d\mu(x) = f'(0)$

dir.

4) $\int_{Z_p} \left(f(x+n) - f(x)\right) d\mu(x) = \sum_{l=0}^{n-1} f'(l)$

dir ([70]).

Volkenborn integralleri kullanılarak birçok özel sayı tipinin üreteç fonksiyonu bulunabilir. Örneğin, Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonu için aşağıdaki uygulamayı verelim:

Yukarıdaki teoremin (3). şıkkında $f(x) = e^{xt}$ olarak alındığında,

$$\int_{Z_p} \left(e^{(x+1)t} - e^{xt}\right) d\mu(x) = t$$

bulunur. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra,

$$\int_{Z_p} e^{xt} d\mu(x) = \frac{t}{e^t - 1}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitliğin sol tarafı Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonunu verir. Bu nedenle,

$$\int_{Z_p} e^{xt} d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

eşitliği yazılabilir. e^{xt} nin Taylor açılımı yukarıdaki eşitlikte yerleştirildiğinde,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{Z_p} x^n d\mu(x) \right) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

dir. $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları karşılaştırıldığında,

$$B_n = \int_{Z_p} x^n d\mu(x)$$

elde edilir.

7.3. FERMİONİK p-ADİK İNTEGRALİ VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 7.2.1. $f \in C(Z_p \to C_p)$ olsun ve p tek doğal sayı olsun. f nin fermionik p-adik integrali

$$\int_{Z_p} f(x)\, d\mu_{-1}(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{p^n-1} (-1)^x f(x)$$

şeklinde tanımlanır ([44], [48], [49], [53]).

Teorem 7.2.1. $d\mu_{-1}(x) = \mu_{-1}(x + p^n Z_p) = (-1)^x$ olsun.

1) $\int_{Z_p} f(x)\, d\mu_{-1}(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{p^n-1} (-1)^l f(l)$

dir.

2) $\int_{Z_p} (f(x+1) + f(x)) d\mu_{-1}(x) = 2f(0)$

dir.

3) $\int_{Z_p}\left(f(x+n)+(-1)^{n-1}f(x)\right)d\mu_{-1}(x) = 2\sum_{l=0}^{p^n-1} f(l)$

dir ([44], [48], [49], [53]).

Fermionik p-adik integraller kullanılarak hem Euler tipli sayıların hem de Genocchi tipli sayıların ve polinomlarının üreteç fonkisyonları bulunabilir.

Yukarıdaki teoremin (2). şıkkında $f(x) = e^{xt}$ alınırsa,

$$\int_{Z_p}\left(e^{(x+1)t}+e^{xt}\right)d\mu_{-1}(x) = 2$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikten,

$$\int_{Z_p} e^{xt}d\mu_{-1}(x) = \frac{2}{e^t+1}$$

bulunur. Bu eşitliğin sağ tarafı Euler sayılarının üreteç fonksiyonudur. e^{xt} nin Taylor açılımı bu eşitlikte yerine yazıldığında,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{Z_p} x^n d\mu_{-1}(x)\right)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Katsayı karşılaştırılması yapıldığında,

$$E_n = \int_{Z_p} x^n d\mu_{-1}(x)$$

elde edilir. Teorem 5.2 den biliniyor ki,

$$E_n(x) = \frac{G_{n+1}(x)}{n+1}$$

dir. Burada $x = 0$ alındığında,

$$E_n = \frac{G_{n+1}}{n+1}$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{G_{n+1}}{n+1} = \int_{Z_p} x^n d\mu_{-1}(x)$$

olduğu görülür ([30]). Fermionik p-adik integral ilk olarak Güney Koreli Profesör Taekyun Kim tarafından tanımlanmış ve birçok uygulamasını vermiştir. Son zamanlarda fermionik p-adik integral, Euler, Genocchi ve Frobenius-Euler tipli sayıların ve polinomların üreteç fonksiyonlarını tanımlamada kullanılmıştır.

BÖLÜM 8

LEGENDRE POLİNOMLARI VE BERNSTEIN POLİNOMLARI

$$(1-x^2)y'' + 2xy' + n(n+1)y = 0 \tag{8.1}$$

denklemine n. dereceden Legendre deklemi denir. Burada n herhangi bir pozitif reel sayıdır. (8.1) denklemi

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{n(n+1)}{1-x^2}y = 0$$

şeklinde yazılırsa $x = 1$ ve $x = -1$ noktaları düzgün tekil noktalar olacaktır. Ayrıca $s = \frac{1}{x}$ dönüşümü yapıldığında, (8.1) denklemi

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \left[\frac{2}{s} - \frac{2}{s(s-1)(s+1)}\right]\frac{dy}{ds} + \frac{n(n+1)}{s^2(s^2-1)} = 0$$

şeklinde olur. Böylece, diferansiyel denklem sonsuzda da bir düzgün singüleriteye sahiptir. Öyle ise bu noktalar dışında,

$$P_1(x) = \frac{2x}{1-x^2} \text{ ve } P_2(x) = \frac{n(n+1)}{1-x^2}$$

fonksiyonları analitik fonksiyonlardır. Bu nedenle, $x = 0$ noktası komşuluğunda $|x| < 1$ aralığında (8.1) denkleminin

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

şeklinde bir çözümü bulunabilir ve buradan

$$y = P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}x^{n-2k}$$

elde edilir.

Tanım 8.1. Legendre polinomunun üreteç fonksiyonu:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

bağıntısı ile tanımlanır.

Üreteç fonksiyonunda $x = 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-t)^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

elde edilir. Bu eşitlikte t^n katsayıları karşılaştırıldığında, $n \in N$ için

$$P_n(1) = 1,$$

elde edilir.

Legendre polinomu için Rodrigues formülü

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

şeklindedir. Bu bağıntıdan,

$n = 0$ için $P_0(x) = 1$,

$n = 1$ için $P_1(x) = x$,

$n = 2$ için $P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$

⋮

polinomları elde edilir.

Legendre polinomu

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1}, & m = n \ ise \\ 0, & m \neq n \ ise, \end{cases}$$

şeklindeki ortogonallik özelliğine sahiptir.

Tezin bu kısmında, ortogonallik özelliği kullanılarak, Legendre polinomunun Bernstein polinomu arasındaki ilişki verilecektir.

$\mathbf{P_n} = \{q(x) \in Q[x] \mid derp(x) \leq n\}$ olsun. İç çarpım

$$\langle q_1(x), q_2(x) \rangle = \int_{-1}^{1} q_1(x) q_2(x) dx, (q_1(x), q_2(x) \in \mathbf{P_n})$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{P_0(x), P_1(x), \cdots, P_n(x)\}$, $\mathbf{P_n}$ için ortogonal bazdır. Şimdi, $q(x) \in \mathbf{P_n}$ olarak alındığında

$$q(x) = C_0 P_0(x) + C_1 P_1(x) + \cdots + C_n P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k P_k(x)$$

yazılır ve burada C_k,

$$C_k = \langle q(x), P_k(x) \rangle = \int_{-1}^{1} P_k(x)\, q(x) dx = \frac{1}{k!\, 2^k} \int_{-1}^{1} \left(\frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k \right) q(x) dx$$

şeklindedir. $q(x) = x^n \in \mathbf{P_n}$ olarak alındığında,

$$C_k = -\frac{n!}{k!\, 2^k} \int_{-1}^{1} \left(\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} (x^2 - 1)^k \right) x^{n-1} dx$$

$$= (-1)^2 \frac{n(n-1)}{k!\, 2^k} \int_{-1}^{1} \left(\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}} (x^2 - 1)^k \right) x^{n-2} dx$$

$$= \cdots$$

$$= (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{2^k k!} \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^k x^{n-k} dx$$

elde edilir. $\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^k x^{n-k} dx$ integrali

$$\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^k x^{n-k} dx$$

$$= -\frac{2k}{n-k+1}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{k-1}x^{n-k+2}dx$$

$$= (-1)^2\frac{2^2k(k-1)}{(n-k+1)(n-k+3)}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{k-2}x^{n-k+4}dx$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{(-1)^k 2^k k!}{(n-k+1)(n-k+3)\cdots(n+k-1)}\left\{\frac{1-(-1)^{n+k+1}}{n+k+1}\right\}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(-1)^k 2^k k!}{(n-k+1)(n-k+3)\cdots(n+k-1)}, & (n+k)\ \textit{çift ise} \\ 0, & (n+k)\ \textit{tek ise} \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Yukarıdaki uygulamalardan aşağıdaki teoreme ulaşılır.

Teorem 8.1. $n \in N$ olduğunda

$$x^n = 2\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}k!}{\prod_{m=1}^{k+1}(n-k+2m-1)}P_k(x)$$

dir.

Burada $q(x) = B_{j,n}(x) \in \mathbf{P_n}$ alındığında, Bernstein polinomu

$$B_{j,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k P_k(x).$$

şeklinde yazılır. Burada C_k katsayısı

$$C_k = \langle B_{j,n}(x), P_k(x)\rangle = \frac{1}{2^k k!}\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k\right)B_{j,n}(x)dx$$

$$= \frac{1}{2^k k!}\binom{n}{j}\sum_{l=0}^{n-j}\binom{n-j}{l}(-1)^l\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k\right)x^{l+j}dx$$

olarak elde edilir.

Teorem 8.2. Her bir $n \in N$ ve $j \in \{0,1,2,\cdots,n\}$ için

$$B_{j,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} 2^{1-k} \sum_{l=0, l+j\equiv 0 (mod 2)}^{n-j} \frac{\binom{n}{n-j-l,l,j}}{\prod_{m=1}^{k+1}(l+j-k+2m-1)} (-1)^l P_k(x)$$

dır. Burada

$$\binom{n}{a,b,c} = \frac{n!}{a!b!c!} \text{ ve } n = a+b+c$$

dir.

BÖLÜM 9

HERMITE POLİNOMLARI VE BERNSTEIN POLİNOMLARI

Hermite polinom sistemi cebir ve sayılar teorisindeki çalışmalarıyla tanınan Fransız matematikçi Charles Hermite (1822-1901) tarafından tanımlanmıştır.

n bir parametre olmak üzere,

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

diferansiyel denklemine Hermite denklemi adı verilir. Bu denklemin çözümü:

$$y = H_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{n!}{k!\,(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

fonksiyonu ile tanımlanır ve Hermite polinomu olarak bilinir.

Tanım 9.1. Hermite polinomunun üreteç fonksiyonu

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}, \ |t| < \infty, |x| < \infty$$

şeklinde tanımlanır.

Hermite polinomları için Rodrigues formulü

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$$

şeklindedir.

Kim ve ark. ([59]) Hermite polinomlarının uygulamasını ve Bernoulli ile Euler sayılarını içeren Hermite polinomları ile ilişkisini verdi. Şimdi bu tezde kullanışlı olacak ve [59] içerisinde tanımlanan bazı kavramları vereceğiz.

$\mathbf{P_n} = \{p \in Q[x] \mid derp(x) \leq n\}$, Q üzerinde $(n+1)$-boyutlu vektör uzayı olsun. Bu uzayın en temel bazı $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ dir. Fakat $\{H_0(x), H_1(x), \cdots, H_n(x)\}$ de $\mathbf{P_n}$ uzayı için iyi bir bazdır.

Hermite polinomları

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = \begin{cases} 2^n n! \sqrt{\pi}, & n = m \; ise \\ 0, & n \neq m \; ise \end{cases}$$

ortogonallik özelliğine sahiptir.

Kim ve ark. ([59])

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^l\, dx = \begin{cases} 0, & l \equiv 1 (mod 2) \\ \dfrac{l! \sqrt{\pi}}{2^l \left(\frac{l}{2}\right)!}, & l \equiv 0 (mod 2), \end{cases}$$

eşitliğini verdiler. Bu bağıntıdan yola çıkarak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\right) x^m dx = \begin{cases} 0, & n > m \; veya \; n \leq m \; ile \; n - m \equiv 1 (mod 2) \\ \dfrac{m! (-1)^n \sqrt{\pi}}{2^{m-n} \left(\frac{m-n}{2}\right)!}, & n \leq m \; ile \; n - m \equiv 0 (mod 2) \end{cases}$$

ifadesini elde ettiler.

$H_0(x), H_1(x), \cdots, H_n(x)$, $\mathbf{P_n}$ uzayı için

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} p(x) q(x)\, dx$$

iç çarpımı ile ortogonal bazdır.

$p(x) \in \mathbf{P_n}$ için, $p(x)$ polinomu

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k H_k(x)$$

şeklinde verilmiştir. Burada C_k katsayısı

$$C_k = \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \langle p(x), H_k(x) \rangle$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2} \right) p(x) dx$$

dir.

Araci ve Acikgoz ([33]), $p(x)$ i

$$B_{l,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k H_k(x)$$

olarak yazdılar. Burada C_k katsayısını

$$C_k = \frac{(-1)^k}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^k e^{-x^2}}{dx^k} \right) B_{l,n}(x) dx$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^k k! \sqrt{\pi}} \frac{n!}{l!\,(n-l)!} \left[\sum_{j=0}^{n-l} \frac{(n-l)!}{l!\,(n-l-j)!} (-1)^j \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2} \right) x^{l+j} dx \right\} \right]$$

$$= \frac{n!}{k!} \sum_{j=0 \; ve \; k-l-j \equiv 0 (mod 2)}^{n-l} \binom{l+j}{l} \frac{(-1)^j}{(n-l-j)!\, 2^{l+j} \left(\frac{l+j-k}{2} \right)!}$$

şeklinde elde ettiler.

Teorem (Araci ve Acikgoz [33]): $n \in N$ ve $l \in \{0,1,2,\cdots,n\}$ ile $k-l-j \equiv 0 \ (mod 2)$ olsun. Bu durumda

$$B_{l,n}(x) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-l} \binom{l+j}{l} \frac{(-1)^j}{(n-l-j)!\, 2^{l+j} \left(\frac{l+j-k}{2} \right)!} H_k(x)$$

dir.

BÖLÜM 10

GENOCCHI POLİNOMLARI VE BERNSTEIN POLİNOMLARI

Bu kısımda, Bernstein polinomunun fermionik p-adik integral içerisindeki yansımasının Genocchi sayısı olduğu verilecek ve bu yansımalardan Genocchi sayıları ile ilgili eşitlikler verilecektir.

$n > 1$ için;

$$\begin{aligned}
G_n(2) &= (G+2)^n = (G+1+1)^n \\
&= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (G+1)^l = n(G+1)^1 + \sum_{l=2}^{n} \binom{n}{l} (G+1)^l \\
&= n(2-G_1) - \sum_{l=2}^{n} \binom{n}{l} G_l = 2n - \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} G_l = 2n - \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} G_l \\
&= 2n - (G+1)^n = 2n + G_n
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 10.1. $n > 1$ olduğunda

$$G_n(2) = 2n + G_n$$

dir.

$n > 0$ için,

$$\int_{Z_p} (1-x)^n d\mu_{-1}(x) =$$

$$= (-1)^n \int_{Z_p} (1-x)^n d\mu_{-1}(x) = (-1)^n \frac{G_{n+1}(-1)}{n+1} = \frac{G_{n+1}(2)}{n+1}$$

dir.

Teorem 10.2 (Araci, Acikgoz ve Qi [30]). $n > 0$ için,

$$\int_{Z_p} (1-x)^n d\mu_{-1}(x) = \frac{G_{n+1}(2)}{n+1} = 2 + \frac{G_{n+1}}{n+1}.$$

Yukarıdaki teoremlerden,

$$\int_{Z_p} (1-x)^n d\mu_{-1}(x) = \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^{k-l} \int_{Z_p} (1-x)^{n-l} d\mu_{-1}(x)$$

$$= \binom{n}{l} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^{k-l} \left(2 + \frac{G_{n-l+1}}{n-l+1}\right)$$

elde edilir. Bernstein polinomunun simetri özelliğinden,

$$\int_{Z_p} B_{k,n}(x) d\mu_{-1}(x) = \int_{Z_p} B_{n-k,n}(1-x)\, d\mu_{-1}(x)$$

$$= \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} (-1)^l \int_{Z_p} x^{l+k} d\mu_{-1}(x)$$

$$= \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} (-1)^l \frac{G_{l+k+1}}{l+k+1}$$

bulunur.

Teorem 10.2 (Araci, Acikgoz ve Qi [30]). $n \in N$ ve $k = 0,1,2,\cdots,n$ için,

$$\int_{Z_p} B_{k,n}(x) d\mu_{-1}(x) = \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^{k-l} \left(2 + \frac{G_{n-l+1}}{n-l+1}\right)$$

dir. Ayrıca,

$$\sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} (-1)^l \frac{G_{l+k+1}}{l+k+1} = \begin{cases} 2 + \dfrac{G_{n+1}}{n+1}, & k = 0 \; ise \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^{k-l} \left(2 + \frac{G_{n-l+1}}{n-l+1}\right), & k \neq 0 \; ise \end{cases}$$

dir.

Yukarıdaki teoremin bir genellemesi olarak dereceleri birbirinden farklı s-tane Bernstein polinomunun çarpımı fermionik p-adik integral içerisine yerleştirildiğinde,

$$\int_{Z_p} B_{k,n_1}(x)\cdots B_{k,n_s}(x)d\mu_{-1}(x) = \prod_{j=1}^{s}\binom{n_j}{k}\int_{Z_p} x^{ks}(1-x)^{n_1+n_2+\cdots+n_s-ks}\,d\mu_{-1}(x)$$

$$=\prod_{j=1}^{s}\binom{n_j}{k}\sum_{l=0}^{ks}\binom{ks}{l}(-1)^{ks-l}\int_{Z_p}(1-x)^{n_1+n_2+\cdots+n_s-l}d\mu_{-1}(x)$$

$$=\prod_{j=1}^{s}\binom{n_j}{k}\sum_{l=0}^{ks}\binom{ks}{l}(-1)^{ks-l}\left(2+\frac{G_{n_1+n_2+\cdots+n_s-l+1}}{n_1+n_2+\cdots+n_s-l+1}\right).$$

elde edilir. Diğer taraftan, farklı derecedeki Bernstein polinomlarının ayrı ayrı simetrik özellikleri p-adik tamsayılar üzerinde integrali alındığında,

$$\int_{Z_p}\left(\prod_{j=1}^{s}B_{k,n_j}(x)\right)d\mu_{-1}(x)$$

$$=\prod_{l=1}^{s}\binom{n_l}{k}\sum_{l=0}^{n_1+n_2+\cdots+n_s-ks}\binom{n_1+n_2+\cdots+n_s-ks}{l}(-1)^l\int_{Z_p}x^{l+ks}d\mu_{-1}(x)$$

$$=\prod_{l=1}^{s}\binom{n_l}{k}\sum_{l=0}^{n_1+n_2+\cdots+n_s-ks}\binom{n_1+n_2+\cdots+n_s-ks}{l}(-1)^l\frac{G_{l+ks+1}}{l+ks+1}$$

bulunur.

Teorem 10.3 (Araci, Acikgoz ve Qi [30]).

$$\int_{Z_p}\left(\prod_{m=0}^{s}B_{k,n_m}(x)\right)d\mu_{-1}(x)$$

$$=\prod_{j=1}^{s}\binom{n_j}{k}\sum_{l=0}^{ks}\binom{ks}{l}(-1)^{ks-l}\left(2+\frac{G_{n_1+\cdots+n_s-l+1}}{n_1+\cdots+n_s-l+1}\right)$$

dir. Ayrıca

$$\sum_{l=0}^{n_1+n_2+\cdots+n_s-ks} \binom{n_1+n_2+\cdots+n_s-ks}{l} (-1)^l \frac{G_{l+ks+1}}{l+ks+1}$$

$$= \begin{cases} 2+\dfrac{G_{n_1+n_2+\cdots+n_s+1}}{n_1+n_2+\cdots+n_s+1}, k=0 \; ise \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{ks} \binom{ks}{l} (-1)^{ks-l} \left(2+\frac{G_{n_1+n_2+\cdots+n_s-l+1}}{n_1+n_2+\cdots+n_s-l+1}\right), k \neq 0 \end{cases}$$

dir.

BÖLÜM 11

EULER POLİNOMLARI VE BERNSTEIN POLİNOMLARI

p-adik Euler polinomları ilk olarak Güney Koreli Profesör Taekyun Kim tarafından verildi. Fermionik p-adik integrali kullanarak, Euler tipli polinomları elde etti. Bunlar: q-Euler polinomları, genelleştirilmiş q-Euler polinomları, Dirichlet karakterine bağlı q-Euler tipli polinomları elde etti ve onların üreteç fonksiyonunu kullanarak polinomların farklı özelliklerini gösterdi. Profesör Kim'in çalışmaları içerisinde, Mellin dönüşümünü polinomların üreteç fonksiyonlarına uygulayarak, Euler tipli polinomların her birine ait Zeta-tipli fonksiyonlar elde etti. Daha sonra, Zeta-tipli fonksiyonların negatif değerlerde polinomlarını interpole ettiğini gösterdi. Ayrıca, fermionik p-adik integralin ölçü teorisinde kullanışlı olan Lebesgue-Radon-Nikodym tipi teorem ile olan ilişkisini verdi.

Euler polinomları, Euler'in zamanından günümüze kadar bu polinomlar çalışılmakta ve bu polinomlar gizemliliğini korumaya devam etmektedir.

Tezin bu bölümünde, Euler polinomları ile Bernstein polinomları arasındaki bağıntılar verilecektir. Bu bağıntılardan Euler polinomlarının ilginç eşitliği gösterilecektir.

$n > 0$ için;

$$E_n(2) = (E+2)^n = (E+1+1)^n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (E+1)^l$$

$$= (2 - E_0) + \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} (E+1)^l = 1 - \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} E_l$$

$$= 2 - \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} E_l = 2 - (E+1)^n = 2 + E_n$$

yazılır.

Teorem 11.1(Araci, Acikgoz ve Jolany [29]). $n > 0$ olduğunda,

$$E_n(2) = 2 + E_n$$

elde edilir.

$n \geq 0$ için,

$$\int_{Z_p} (1-x)^n d\mu_{-1}(x) = (-1)^n \int_{Z_p} (x-1)^n d\mu_{-1}(x) = (-1)^n E_n(-1) = E_n(2).$$

bulunur.

Sonuç 11.1(Araci, Acikgoz ve Jolany [29]). $n \geq 0$ olduğunda,

$$\int_{Z_p} (1-x)^n d\mu_{-1}(x) = E_n(2) = 2 + E_n$$

dir.

Teorem 11.2 (Araci, Acikgoz ve Jolany [29]). $n \geq 0$ ve $k \in \{0,1,2,\cdots,n\}$ için,

$$\int_{Z_p} B_{k,n}(x) d\mu_{-1}(x) = \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^{k-l}(2 + E_{n-l})$$

ve

$$\sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} (-1)^l E_{l+k} = \begin{cases} 2 + E_n, & k = 0 \; ise \\ \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^{k-l}(2 + E_{n-l}), & k \neq 0 \; ise \end{cases}$$

dir.

İspat. Fermionik p-adik integral içerisinde bir Bernstein polinomu yerleştirildiğinde,

$$I_1 = \int_{Z_p} B_{k,n}(x) d\mu_{-1}(x) = \binom{n}{k} \int_{Z_p} x^k (1-x)^{n-k} d\mu_{-1}(x)$$

$$=\binom{n}{k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(-1)^{k-l}\int_{Z_p}(1-x)^{n-l}d\mu_{-1}(x)$$

$$=\binom{n}{k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(-1)^{k-l}(2+E_{n-l}).$$

elde edilir. Bernstein polinomların simetri özelliğinden

$$I_2=\int_{Z_p}B_{k,n}(x)d\mu_{-1}(x)=\int_{Z_p}B_{n-k,n}(1-x)\,d\mu_{-1}(x)$$

$$=\binom{n}{k}\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n-k}{l}(-1)^{l}\int_{Z_p}x^{l+k}d\mu_{-1}(x)$$

$$=\binom{n}{k}\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n-k}{l}(-1)^{l}E_{l+k}$$

bulunur. $I_1=I_2$ olduğundan, teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 11.3 (Araci, Acikgoz ve Jolany [29]).

$$\int_{Z_p}\left(\prod_{i=1}^{s}B_{k,n_i}(x)\right)d\mu_{-1}(x)=\prod_{l=1}^{s}\binom{n_l}{k}\sum_{l=0}^{ks}\binom{ks}{l}(-1)^{ks-l}\left(2+E_{n_1+n_2+\cdots+n_s-ks}\right)$$

ve

$$\sum_{y=0}^{n_1+n_2+\cdots+n_s-ks}\binom{n_1+n_2+\cdots+n_s-ks}{y}(-1)^{y}E_{y+ks}$$

$$=\begin{cases}2+E_{n_1+n_2+\cdots+n_s}, & k=0\\ \sum_{l=0}^{ks}\binom{ks}{l}(-1)^{ks-l}\left(2+E_{n_1+n_2+\cdots+n_s-ks}\right), & k\neq 0\end{cases}$$

dir.

İspat. Fermionik p-adik integral içerisinde dereceleri birbirinden farklı s-tane Bernstein polinomlarının çarpımı yerleştirildiğinde,

$$I_3 = \int_{Z_p} B_{k,n_1}(x) B_{k,n_2}(x) \cdots B_{k,n_s}(x) dx$$

$$= \prod_{l=1}^{s} \binom{n_l}{ks} (-1)^{ks-l} \int_{Z_p} (1-x)^{n_1+n_2+\cdots+n_s-ks} d\mu_{-1}(x)$$

$$= \prod_{l=1}^{s} \binom{n_l}{k} \sum_{l=0}^{ks} \binom{ks}{l} (-1)^{ks-l} \left(2 + E_{n_1+\cdots+n_s-ks}\right)$$

bulunur. Bernstein polinomlarının simetri özelliği kullanılarak,

$$I_4 = \int_{Z_p} \left(\prod_{j=1}^{s} B_{k,n_j}(x) \right) d\mu_{-1}(x)$$

$$= \prod_{l=1}^{s} \binom{n_l}{k} \sum_{y=0}^{n_1+\cdots+n_s-ks} \binom{n_1+\cdots+n_s-ks}{l} (-1)^y \int_{Z_p} x^{y+ks} d\mu_{-1}(x)$$

$$= \prod_{l=1}^{s} \binom{n_l}{k} \sum_{y=0}^{n_1+\cdots+n_s-ks} \binom{n_1+\cdots+n_s-ks}{y} (-1)^y E_{y+ks}$$

elde edilir. $I_3 = I_4$ eşitlendiğinde teoremin ispatı tamamlanmış olur.

BÖLÜM 12

BERNOULLI POLİNOMLARI VE BERNSTEIN POLİNOMLARI

Tezin bu son bölümünde ise, analitik sayıları teorisi, kombinatorik, kompleks analiz gibi alanlarda etkili bir konuma sahip "Bernoulli polinomları" ile yaklaşım teorisi ve diferansiyel denklemlerin çözümünde etkili bir konuma sahip olan "Bernstein polinomu" arasındaki bağıntılar verilecektir.

$n > 1$ için,

$$B_n(2) = (B+2)^n = (B+1+1)^n$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (B+1)^l = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \left(\delta_{1,l} + B_l\right) = n + \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} B_l$$

$$= n + (B+1)^n = n + \left(\delta_{1,n} + B_n\right) = n + B_n$$

elde edilir.

$n > 0$ olduğunda,

$$\int_{Z_p} (1-x)^n d\mu(x) = (-1)^n \int_{Z_p} (x-1)^n d\mu(x) = (-1)^n B_n(-1) = B_n(2)$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikten aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 12.1.

$$\int_{Z_p} (1-x)^n d\mu(x) = B_n(2) = n + B_n$$

dir.

Teorem 12.1. $n > 0$ için,

$$\int_{Z_p} B_{k,n}(x)\, d\mu(x) = \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^l (n - l + B_{n-l})$$

dir.

İspat. Volkenborn integrali kullanılırsa,

$$\int_{Z_p} B_{k,n}(x) d\mu_{-1}(x) = \binom{n}{k} \int_{Z_p} x^k (1-x)^{n-k} d\mu(x)$$

$$= \binom{n}{k} \int_{Z_p} \left(1 - (1-x)\right)^k (1-x)^{n-k} d\mu(x)$$

$$= \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^l \int_{Z_p} (1-x)^{n-l} d\mu(x)$$

$$= \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^l (n - l + B_{n-l})$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 12.2.

$$\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^l (n - l + B_{n-l}) = \sum_{l=0}^{k} \binom{n-k}{l} (-1)^l B_{l+k}$$

dir.

Teorem 12.2.

$$\int_{Z_p} \left(\prod_{l=1}^{s} B_{k,n_l}(x) \right) d\mu(x)$$

$$= \prod_{j=1}^{s} \binom{n_j}{k} \sum_{l=0}^{ks} \binom{ks}{l} \left(n_1 + n_2 + \cdots + n_s - l + B_{n_1+n_2+\cdots+n_s-l}\right)$$

ve

$$\sum_{l=0}^{n_1+n_2+\cdots+n_s-ks} \binom{n_1+n_2+\cdots+n_s-ks}{l} (-1)^l B_{l+ks}$$

$$= \begin{cases} n_1+n_2+\cdots+n_s+B_{n_1+n_2+\cdots+n_s}, & k=0 \; ise \\ \sum_{l=0}^{ks} \binom{ks}{l} \left(n_1+n_2+\cdots+n-l+B_{n_1+n_2+\cdots+n-l}\right), k \neq 0 \end{cases}$$

dır.

İspat. s-tane farklı dereceden Bernstein polinomlarının p-adik integral içerisindeki yansıması aşağıdaki gibidir:

$$I_5 = \int_{Z_p} B_{k,n_1}(x)\cdots B_{k,n_s}(x) d\mu(x) = \prod_{l=1}^{s} \binom{n_l}{k} \int_{Z_p} x^{ks}(1-x)^{n_1+n_2+\cdots+n_s-sk} d\mu(x)$$

$$= \prod_{l=1}^{s} \binom{n_l}{k} \sum_{l=0}^{ks} \binom{ks}{l} \int_{Z_p} (1-x)^{n_1+\cdots+n_s-l} d\mu(x)$$

$$= \prod_{l=1}^{s} \binom{n_l}{k} \sum_{l=0}^{ks} \binom{ks}{l} \left(n_1+n_2+\cdots+n_s-l+B_{n_1+\cdots+n_s-l}\right)$$

elde edilir. Bernstein polinomlarının simetri özelliği kullanılırsa,

$$I_6 = \int_{Z_p} B_{n_1-k,n_1}(1-x)\cdots B_{n_s-k,n_s}(1-x) d\mu(x)$$

$$= \prod_{l=1}^{s} \binom{n_l}{k} \sum_{j=0}^{n_1+\cdots+n_s-ks} \binom{n_1+\cdots+n_s-ks}{j} (-1)^j \int_{Z_p} x^{l+ks} d\mu(x)$$

$$= \prod_{l=1}^{s} \binom{n_l}{k} \sum_{j=0}^{n_1+\cdots+n_s-ks} \binom{n_1+\cdots+n_s-ks}{j} (-1)^j B_{l+ks}$$

bulunur. $I_5 = I_6$ olduğundan teoremin ispatı tamamlanmış olur.

BÖLÜM 13

SONUÇLAR ve BULGULAR

Bu tez süresince Analitik sayılar teorisi içerisinde birçok metod, önermeler ve teoremler elde edildi. Çalışmalarımızın bir sonucu olarak, sonuçlarımız ve aldığımız atıflar google scholar sitesine göre aşağıdaki gibidir:

1) Bernstein poliomlarının üreteç fonksiyonları tanımlandı ve üreteç fonksiyonunu kullanarak ilginç sonuçlar elde edildi, ([1]). Atıf sayısı : 22.
2) Farklı dereceden Bernstein polinomlarının çarpımlarının 0 dan 1'e integrali verildi. Bu çarpımın gama ve beta fonksiyonları ile eşitliği verildi, ([4]). Atıf sayısı: 28.
3) Fermionic p-adik integrali kullanarak, Genocchi tipli polinom ile Euler tipli polinomlar aynı üreteç fonksiyonu ile birleştirildi ve onların zeta tipli fonksiyonları elde edildi, ([9]). Atıf sayısı: 11.
4) Genocchi ve Euler tipli polinomlar genelleştirildi ve onların p-adik log gamma fonksiyonu ile ilişkili olduğu gösterildi, ([8]). Atıf sayısı: 8.
5) q-Euler polinomlarının pek çok açık formüller verildi ve onları fermionik p-adik integral üzerindeki yansımaları incelendi, ([7]). Atıf sayısı: 5.
6) Farklı dereceden Bernstein polinomlarının çarpımı fermionik p-adik integrali üzerindeki yansımasının Frobenius-Euler polinomları olduğu elde edildi, ([13]). Atıf sayısı: 6.
7) Genocchi polinomları, q-Genocchi polinomları, twisted q-Genocchi polinomları gibi polinomlar ailesi tek bir üreteç fonksiyonu altında birleştirildi ve q-analiz içerisinde hem yeni hemde ilginç sonuçlar elde edildi, ([15]). Atıf sayısı: 4.
8) Ağırlıklı Genocchi sayıları ve polinomları adı altında yeni bir polinom ailesi elde edildi ve onların interpolasyon fonksiyonu türetildi, ([31]). Atıf sayısı: 11.

KAYNAKLAR

[1] Açıkgöz, M., ve Araci, S., (2010), On the generating function for Bernstein polynomials, *Numerical Analysis and Applied Mathematics*, International Conference 2010, pp. 1141-1143.

[2] Açıkgöz, M., ve Araci, S., (2010), The relations between Bernoulli, Bernstein and Euler polynomials, *Numerical Analysis and Applied Mathematics*, International Conference 2010, pp. 1144-1147.

[3] Açıkgöz, M., ve Araci, S., (2010), New generating function of Bernstein type polynomials for two variables, *Numerical Analysis and Applied Mathematics*, International Conference 2010, pp. 1133-1136.

[4] Açıkgöz, M., ve Araci, S., (2010), A study on the integral of the product of several type Bernstein polynomials, *IST Transactions of Applied Mathematics-Modeling and Simulation*, Vol. 1, No. 1 (2), pp. 10-14.

[5] Açıkgöz, M., Erdal, D., ve Araci, S. (2010), A new approach to q-Bernoulli numbers and q-Bernoulli polynomials related to q-Bernstein polynomials, *Advances in Difference Equations*, Volume 2010, Article ID 951764, 9 pages.

[6] Açıkgöz, M., Aslan, N., ve Araci, S. (2009), p-adic approach to linear 2-normed spaces, *Mathematica Moravica*, Vol. 13-2, 7-22.

[7] Araci, S., Acikgoz, M., ve Seo, J.J.(2012), Explicit formulas involving q-Euler numbers and polynomials, *Abstract and Applied Analysis*, Vol. 2012, Article ID 298531, 11 pages.

[8] Araci, S., Acikgoz, M., ve Park, K. H.(2013), A note on the q-Analogue of Kim's p-adic log Gamma-type-functions associated with q-extension of Genocchi and Euler numbers with weight alpha, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, Vol. 50 (2013). (Baskıda).

[9] Araci, S., Acikgoz, M., Park, K. H., ve Jolany, H., On the unification of two families of multiple twisted type polynomials associated with p-adic q-integral on Z_p at $q=-1$, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences and Society*, (Baskıda).

[10] Araci, S., Acikgoz, M., Qi, F., ve Jolany, H., A note on the modified q-Genocchi numbers and polynomials with weight alpha and beta and their interpolation functions at negative integers, *Fasc. Math. Journal*, (Baskıda).

[11] Araci, S., ve Acikgoz, M., q-analogue of p-adic log gamma type functions associated with modified q-extension of Genocchi numbers with weight alpha and beta, *Journal of Applied Mathematics and Informatics*, (Baskıda).

[12] Araci, S., Acikgoz, M., ve Gürsul, A., Analytic continuation of weighted q-Genocchi numbers and polynomials, *Communications of the Korean Mathematical Society*, (Yayına kabul edildi.)

[13] Araci, S., ve Acikgoz, M. (2012), A note on the Frobenius-Euler numbers and polynomials associated with Bernstein polynomials, *Adv. Stud. Cont. Math.* (2012), vol. 22, no. 3, 399-406.

[14] Araci, S., Gao, D., ve Acikgoz, M. (2012), The Frobenius-Euler function and its applications, *Korean Annals of Math.* 29, No.1, pp. 47-55.

[15] Araci, S., Acikgoz, M., Jolany, H., ve Seo, J. J. (2012), A unified generating function of the q-Genocchi polynomials with their interpolation functions, *Proc. Jang. Math. Soc.* 15, no. 2, 227-233.

[16] Acikgoz, M., Araci, S., ve Cangul, I. N. (2011), A note on the modified q-Bernstein polynomials for functions of several variables and their reflections on q-Volkenborn integration, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, no. 3, 707-712.

[17] Jolany, H., Araci, S., Acikgoz, M., ve Seo, J. J. (2013), A note on the Generalized q-Genocchi measures with weight alpha, *Bol. Soc. Paran. Math. Vol.* 31 (1), 17-27.

[18] Araci, S., Acikgoz, M., ve Şen, E., Some new identities of Genocchi numbers and polynomials involving Bernoulli and Euler polynomials, *dergiye sunuldu.*

[19] Araci, S., Acikgoz, M., ve Şen, E., Extended fermionic p-adic q-integrals on Z_p in connection with applications of Umbral Calculus, arXiv: 1211.6978v1 [math.NT].

[20] Araci, S., Kong, X.-X., Acikgoz, M., ve Şen, E., A new approach to multivarite q-Euler polynomials by using Umbral Calculus, arXiv: 1211.4062v1 [math.NT].

[21] Araci, S., Acikgoz, M., ve Esi, A., A note on the q-Dedekind-type Daehee-Changhee sums with weight alpha arising from modified q-Genocchi polynomials with weight alpha, *Journal of ASSAM Math. Soc.* (Baskıda).

[22] Araci, S., Acikgoz, M., Jolany, H., ve He, Y., Identities involving q-Genocchi numbers and polynomials, arXiv: 1210.0847v1 [math.NT].

[23] Araci, S., Acikgoz, M., ve Şen, E., New generalization of Eulerian polynomials and their applications, arXiv: 1208.1271v2 [math.NT].

[24] Araci, S., ve Acikgoz, M., Dirichlet's type of twisted Eulerian polynomials in connection with twisted Eulerian-L-function, arXiv: 1208.0589v1 [math.NT].

[25] Araci, S., Acikgoz, M., ve Gao, D., On the Dirichlet's type of Eulerian polynomials, arXiv: 1207.1834v1 [math.NT].

[26] Araci, S., ve Acikgoz, M., A note on the weighted q-Hardy-littlewood-type maximal operator with respect to q-Volkenborn integral in the p-adic integer ring, *Journal of Applied Math. and Inform*. Vol. 31, No.3-4 (May, 2013), (Baskıda).

[27] Araci, S., Acikgoz, M., ve Şen, E., A note on the modified q-Dedekind sums, arXiv:1212.5837v1 [math.NT].

[28] Araci, S., Cetin, E., Acikgoz, M., ve Cangul, I.N., Some new identities on the (h,q)-Genocchi numbers and polynomials with weight alpha, arXiv: 1206.5461v1 [math.NT].

[29] Araci, S., Acikgoz, M., ve Jolany, H., On the families of q-Euler polynomials and their applications, arXiv: 1206.5433v1 [math.NT].

[30] Araci, S., Acikgoz, M., ve Qi, F., On the q-Genocchi numbers and polynomials with weight zero and their applications, arXiv: 1202.2643v1 [math.NT].

[31] Araci, S., Acikgoz, M ve Seo, J.J, A note on the weighted q-Genocchi numbers and polynomials with their interpolation function, *Honam Math. Journal* 34 (2012), No.1. pp. 11-18.

[32] Araci, S., ve Acikgoz, M., Extended q-Dedekind-type Daehee-Changhee sums associated with Extended q-Euler polynomials, arXiv:1211.1233v1 [math.NT].

[33] Araci, S., Seo, J. J., ve Acikgoz, M., Hermite polynomials related to Genocchi, Euler and Bernstein polynomials, arXiv: 1205.6547v1 [math.NT]

[34] Acikgoz, M., ve Araci, S., A new approach to modified q-Bernstein polynomials for functions of two variables with their generating and interpolation functions, arXiv: 1205.4192v1 [math.NT].

[35] Araci, S., Acikgoz, M., ve Jolany, H., p-adic interpolating function associated with modified Dirichlet's type of twisted q-Euler numbers and polynomials with weight alpha, arXiv: 1201.5490v1 [math.NT].

[36] Araci, S., ve Acikgoz, M., A note on the values of the weighted q-Bernstein polynomials and modified q-Genocchi numbers with weight alpha and beta via the p-adic q-integral on Z_p, arXiv: 1201.3669v1 [math.NT].

[37] Acikgoz, M., Araci, S., ve Jolany, H., The properties of modified q-Bernstein polynomials for functions of several variables with their generating function and and interpolation function, arXiv: 1111.4849v1 [math.NT].

[38] Araci, S., Acikgoz, M., ve Şen, E., Extended fermionic p-adic q-integrals on Z_p in connection with applications of Umbral Calculus, arXiv: 1211.6978v1 [math.NT].

[39] Cetin, E., Acikgoz, M., Cangul, I. N., ve Araci, S., A note on the (*h*,*q*)-Zeta-type function with weight alpha, arXiv:1206.5299v1 [math.NT].

[40] Qi, F., Araci, S., ve Acikgoz, M., Extended fermionic *p*-adic integrals on Z_p, *dergiye sunuldu.*

[41] Kac, V., ve Cheung, P. (2002), Quantum Calculus, *Universitext, Springer-Verlag*, New York.
[42] Kim, T. (2008), On the multiple *q*-Genocchi and Euler numbers, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol. 15, 481-486.

[43] Kim, T. (2010), New approach to *q*-Euler polynomials of higher order, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol. 17, No. 2, 218-225.

[44] Kim, T. (2009), Some identities on the *q*-Euler polynomials of higher order and *q*-Stirling numbers by the fermionic *p*-adic integral on Z_p, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.16, 484-491.

[45] Kim, T. (2011), A note on *q*-Bernstein polynomials, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol. 18, No. 2, 41-50.

[46] Kim, T. (2002), *q*-Volkenborn integration, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol. 9, 288-299.

[47] Kim, T. (2008), *q*-Bernoulli numbers and polynomials associated with Gaussian Binomial coefficients, *Russ. J. Math. Phys.* Vol. 15, 51-57.

[48] Kim, T. (2008), An invariant *p*-adic *q*-integrals on Z_p, *Applied Mathematics Letters*, Vol. 21, 105-108.

[49] Kim, T. (2007), *q*-Euler numbers and polynomials associated with *p*-adic *q*-integrals, *J. Nonlinear Math. Phys.*, Vol. 14, No. 1, 15-27.

[50] Kim, T. (2007), On the *q*-extension of Euler and Genocchi numbers, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 326, 1458-1465.

[51] Kim, T. (2004), *p*-adic *q*-integrals associated with Changhee-Barnes' *q*-Bernoulli polynomials, *Integral Transforms and Special Functions*, Vol. 15, 415-420.

[52] Kim, T. (1999), On a *q*-analogue of the *p*-adic log gamma functions and related integrals, *J. Number Theory*, Vol. 76, 320-329.

[53] Kim, T. (2008), On *p*-adic interpolating function for *q*-Euler numbers and its derivatives, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 339, 598-608.

[54] Kim, T. (2012), Identities involving Frobenius-Euler polynomials arising from non-linear differential equations, *J. Number Theory*, Vol. 32, 2854-2865.

[55] Kim, T. (2011), Some identities on the q-integral representation of the product of several q-Bernstein-type polynomials, *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2011, Article ID 634675, 11 pages.

[56] Kim, D. S., ve Kim, T. (2012), Applications of Umbral Calculus associated with p-adic invariant integrals on Z_p, *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2012, Article ID 865721, 12 pages.

[57] Kim, T., ve Kim, D. S. (2012), Extended Laguerre polynomials associated with Hermite, Bernoulli and Euler numbers and polynomials, *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2012, Article ID 957350, 15 pages.

[58] Kim, T., Kim, D. S., ve Dolgy, D.V. (2012), Some identities on Bernoulli and Hermite polynomials associated with Jacobi polynomials, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Volume 2012, Article ID 584643, 11 pages.

[59] Kim, D.S., Kim, T., Rim, S.-H., ve Lee. S.-H. (2012), Hermite polynomials and their applications associated with Bernoulli and Euler numbers, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Volume 2012, Article ID 974632, 13 pages.

[60] Lee, H. Y., Jung, N. S., ve Ryoo, C. S. (2011), Some identities of the Genocchi numbers and polynomials associated with Bernstein polynomials, *J. Appl. Math. & Informatics*, Vol. 29, No. 5-6, 1221-1228.

[61] Roman, S. (2005), The Umbral Calculus, *Dover Publ. Inc.* New York.

[62] Ryoo, C.S. (2008), A numerical computation on the structure of the roots of q-extension of Genocchi polynomials, *Applied Mathematics Letters*, Vol.21, 348-354.

[63] Simsek, Y., ve Acikgoz, M. (2010), A new generating function of (q-) Bernstein-type polynomials and their interpolation function, *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2010, Article ID 769095, 12 pages.

[64] Simsek, Y. (2005), q-analogue of twisted l-series and q-twisted Euler numbers, *J. Number Theory* 110 (2), 267–278.

[65] Simsek, Y. (2006), Twisted (h,q)-Bernoulli numbers and polynomials related to twisted (h, q)-zeta function and L-function, *J. Math. Anal. Appl.* 324 (2006) 790–804.

[66] Simsek, Y. (2006), On p-adic twisted q-L-functions related to generalized twisted Bernoulli numbers, *Russ. J. Math. Phys.* 13 (3), 340–348.

[67] Simsek, Y. (2007), On twisted q-Hurwitz zeta function and q-two-variable L-function, *Appl. Math. Comput.* 187, 466–473.

[68] Srivastava, H. M., Kim, T., ve Simsek, Y. (2005), q-Bernoulli numbers and polynomials associated with multiple q-zeta functions and basic L-series, *Russ. J. Math. Phys.* 12, 241–268.

[69] Schikhof, W. H. (1984), Ultrametric Calculus: An Introduction to p-adic Analysis, *Cambrige Univ Pr.*