GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MANİFOLD TOPOLOJİSİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇİĞDEM ÇAMANLI

OCAK 2013

Manifoldların Topolojisi

Gaziantep Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK

Çiğdem ÇAMANLI

Ocak 2013

T.C.

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı : Manifold Topolojisi

Öğrencinin, Adı Soyadı: Çiğdem ÇAMANLI

Tez Savunma Tarihi: 25.01.2013

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Doç. Dr. Metin BEDİR

FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri :	**İmzası**
Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK	....
Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN	....
Yrd. Doç. Dr. Recep BİNDAK	....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Çiğdem ÇAMANLI

ÖZ

MANİFOLDLARIN TOPOLOJİSİ

ÇAMANLI, Çiğdem

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK

Ocak - 2013

51 sayfa

Bu tezde, ilk iki bölümde topolojik uzaylarla ilgili bazı bilinen sonuçlar verilmiştir. Üçüncü bölümde manifold topolojisinin tarihçesi ve manifoldlarda yıllar içindeki değişmeler incelenmiştir. 4. bölümde m-boyutlu topolojik ve düzgün manifold kavramı çalışılmıştır. Son bölümde, kompakt topolojik manifoldların bir Öklid uzayına gömülebildiği ve özellikle de 2-boyutlu kompakt topolojik manifoldların bilinen sınıflandırılması; Kahn (1995) da olduğu gibi incelenmiştir.(Bu çalışma için temel kaynaklarımız: Bülbül (2004), Kahn (1995) ve Sabuncuoğlu (2004) dur.)

Anahtar Sözcükler: Topolojik ve düzgün manifold , Kompaktlık , Birimin parçalanışı, Manifoldların gömülmesi, Kompakt yüzeyler…

ABSTRACT

Topology Of Manifolds

ÇAMANLI, Çiğdem

Master of Science Thesis, Department of Mathematics

Thesis Advisor

Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK

January - 2013

51 pages

In this thesis, in the first two chapters, some known facts related to topological spaces are given. In the third chapter, manifold topological's history and the changes in manifold throughout the years. In the fourth chapter, m-dimensional topological and smooth manifolds are studied. In the last chapter, embeddibility of compact manifolds into an Euclidean space and, in particular, the known classification of 2-dimensional compact manifolds is examined as in Kahn (1995). (Our main references for this study are Bülbül (2004), Kahn (1995) and Sabuncuoğlu (2004).)

Key Words: Topological and Smooth Manifold, Compactness, Partitions of Unity, Embedding of Manifolds, Compact Surfaces…

Çok kıymetli aileme…

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, aynı zamanda kişilik olarak da bana çok şey katan Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK' e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim sürecinde benden manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen önce anne ve babam olmak üzere bütün aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Saygılarımla…

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$\mathcal{T}$	: Topolojik yapı
A^0	: A nın içi
$\bar{A}$	: A nın kapanışı
df_X	: f'nin x noktasındaki diferansiyeli
$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$	: f'nin x_i değişkenine göre kısmi türevi
Df_x	: f'nin x noktasındaki Jacobien
$\mathbb{A}$	: tam atlas
$\mathbb{R}^{m+1}$	: $(m+1)$ -boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{S}^m$	: m -boyutlu birim küre yüzeyi
ϕ	: koordinat sistemi
M^m	: m -boyutlu bir manifold
P^m	: m -boyutlu projektif düzlem
T^2	: 2-boyutlu tor yüzeyi
K^2	: 2-boyutlu klein şişesi

BÖLÜM 1

GENEL TANIMLAR

1.1 TOPOLOJİK UZAYLARDA TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1.1 : X boştan farklı bir küme ve $\Im$, X in kuvvet kümesi olan $P(X)$ in bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\Im$ ailesine X üzerinde bir ***topoloji*** (***topolojik yapı***) denir.

i) X ve ø kümeleri $\Im$ ya aittir.

ii) $\Im$'nun herhangi bir alt koleksiyonuna ait kümelerin birleşimi yine $\Im$'ya aittir. (Yani I herhangi bir indis kümesi ve $i \in I$ için $U_i \in \Im$ ise $\bigcup_{i \in I} \in \Im$ dur.)

iii) $\Im$ ya ait iki kümenin kesişimi yine $\Im$ ya aittir. (Yani $U,V \in \Im$, $U \cap V \in \Im$ dur.)

$\Im$, X üzerinde bir topoloji ise (X , $\Im$) ikilisine ***topolojik uzay*** denir. $\Im$'nun elemanlarına da; bu topolojik uzayın "***açık kümeleri***" adı verilir.

Tanım 1.1.2 : (X, $\Im$) bir topolojik uzay, $U \subset X$ ve $x \in X$ olsun. Eğer bir $G \in \Im$ kümesi için $x \in G \subset U$ sağlanıyorsa buna; $U \subset X$ kümesine $x \in X$ noktasının bir komşuluğu denir. (X , $\Im$) bir topolojik uzay $x \in X$ ve $A \subset X$ olsun.

$x \in U \subset A$ olacak şekilde bir U açık kümesi varsa x noktasına A'nın bir iç noktası ya da **A'nın içi** denir ve A^0 ile gösterilir. Yani $A^0 = \{ x \in U : x \in U \subset A$ özelliğinde en az bir $U \in \Im$ vardır $\}$ dır. $x \in U \subset A$ olacak şekilde $\forall$ $U \in \Im$ için $U \cap A \neq \emptyset$ ise **A'nın kapanışı** denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir. Yani $\bar{A} = \{ x \in U : \forall$ $U \in \Im$ için $U \cap A \neq \emptyset$ dir.$\}$ A^0 açık, $\bar{A}$ kapalı bir kümedir.

Tanım 1.1.3 : $(X, \Im)$ bir topolojik uzay olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $G, H \subset X$ açık alt kümeleri, $x \in G$, $y \in H$ ve $G \cap H = \emptyset$ sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa ; $(X, \Im)$ topolojik uzayına bir **Hausdorff Uzayı** veya T_2 **-Uzayı** denir.

Tanım 1.1.4 : $(X, \Im)$ ve $(Y, \Im^*)$ iki topolojik uzay, $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $f(x_0)$ noktasının her açık V komşuluğu için $f(U) \subset V$ olacak şekilde x_0 noktasının en az bir U açık komşuluğu mevcut ise; f fonksiyonuna x_0 **noktasında süreklidir** denir. Eğer f fonksiyonu her $x \in X$ noktasında sürekli ise; bu f fonksiyonuna X **kümesi üzerinde süreklidir** veya kısaca; **süreklidir** denir.

Tanım 1.1.5 : $(X, \Im)$ ve $(Y, \Im^*)$ iki topolojik uzay, $f: X \to Y$ birebir ve örten fonksiyon olsun. Eğer hem f hem de f^{-1} sürekli ise f 'ye bu topolojik uzaylar arasında ***homeomorfizma*** veya ***topolojik eş yapı dönüşümü*** adı verilir. Eğer iki topolojik uzay arasında en az bir homeomorfizma varsa; bu iki uzaya ***homeomorfik*** veya ***topolojik eş yapılı uzaylar*** denir.

Tanım 1.1.6 : $(X, \Im)$ topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. I, indis kümesi olmak üzere, $(U_\lambda)_{\lambda \in I}$, A'nın bir örtümü, yani $A \subset \bigcup_{\lambda \in I} U_\lambda$ olsun. Eğer her $\lambda \in I$ için U_λ açık , yani $U_\lambda \in \Im$ ise $(U_\lambda)_{\lambda \in I}$ ailesine A kümesinin bir ***açık örtüsü*** denir.

Tanım 1.1.7 : X bir küme $A \subset X$ ve $\mathbb{U} = (U_\lambda)_{\lambda \in I}$, A'nın bir örtümü olsun. Eğer bir $I' \subset I$ için $\mathbb{U}' = (U_\lambda)_{\lambda \in I}$ ailesi A'nın yine bir örtüsü oluyorsa U' ne U nun bir ***alt örtüsü*** denir.

Tanım 1.1.8 : $(X, \Im)$ bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A kümesinin $(X, \Im)$ topolojik uzayındaki her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü bulunabiliyorsa A kümesine ***kompakttır*** denir.

Tanım 1.1.9 : $(X, \Im)$ bir topolojik uzay olsun. Eğer X boş olmayan ayrık ve açık iki kümenin birleşimi olarak yazılamıyor ise; bu $(X, \Im)$ topolojik uzayına **bağlantılıdır** denir.

Teorem 1.1.1: (X, $\Im$) bağlantılıdır $\Leftrightarrow$ (X , $\Im$) da $\emptyset$ ve X den başka hem açık ve hem de kapalı küme yoktur (Bülbül, 2004).

Tanım 1.1.10: Bir A kümesi doğal sayılar kümesinin bir alt kümesine denk ise A ya **sayılabilir bir küme** denir. Başka bir deyişle, f: A$\rightarrow$ $\mathbb{N}$ birebir fonksiyonu tanımlana biliyorsa, A kümesine **sayılabilirdir** denir.

Tanım 1.1.11: (X , $\Im$) bir topolojik uzay olsun. Her x $\in$ X noktasının sayılabilir bir yerel tabanı varsa; bu topolojik uzaya **birinci sayılabilir uzay** veya kısaca **A_1 - uzayı** denir.

Tanım 1.1.12 : (X , $\Im$) bir topolojik uzay ve $\mathbb{B} \subset \Im$ olsun. Eğer, her $G \in \Im$ için $\exists$ $\mathbb{B}' \subset \mathbb{B}$ öyle ki $G = \bigcup_{B \in \mathbb{B}'} B$ şeklinde yazılabiliyorsa; bu $\mathbb{B}$ ailesine $\Im$ topolojisi için bir **taban** adı verilir.

Teorem 1.1.2 : X bir küme ve $\mathbb{B} \subset \mathbb{P}(X)$ olsun. $\mathbb{B}$'nin X üzerindeki bir topolojinin tabanı olabilmesi için gerek ve yeter koşul ,

i) $X = \bigcup_{B \in \mathbb{B}'} B$ ve

ii) Her B_1 , $B_2 \in \mathbb{B}$ ve her $x \in B_1 \cap B_2$ için $\exists$ $B_X \in \mathbb{B}$ öyle ki $x \in B_X \subset B_1 \cap B_2$ sağlanmasıdır (Bülbül, 2004).

1.2 ÇARPIM UZAYLARI

Tanım 1.2.1 : (X_1 , $\Im_1$) ve (X_2 , $\Im_2$) iki topolojik uzay ise ;

$$\mathbb{B} = \{ O_1 \times O_2 \mid O_1 \in \Im_1 , O_2 \in \Im_2 \}$$

ailesi $X_1 \times X_2$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde bir topolojinin tabanıdır. Bir tabanı $\mathbb{B}$ ailesi olan topolojiye $\Im_1$ ve $\Im_2$ 'nin **çarpım topolojisi** denir ve $\Im_1 \times \Im_2$ ile gösterilir. ($X_1 \times X_2$, $\Im_1 \times \Im_2$) topolojik uzayına da (X_1 , $\Im_1$) , (X_2 , $\Im_2$) topolojik uzaylarının ***çarpım topolojik uzayı*** denir.

Tanım 1.2.2: $(X , \Im)$ bir topolojik uzay ve $N \subset X$ bir alt küme olsun. Eğer $\overline{N} = X$ ise N alt kümesine $(X , \Im)$ topolojik uzayında ***yoğundur*** denir.

Tanım 1.2.3: Bir topolojik uzayın sayılabilir bir topoloji tabanı varsa, bu topolojik uzaya ***ikinci sayılabilir uzay*** veya kısaca ***A_2 –uzayı*** denir.

Tanım 1.2.4: $(X, \Im)$ bir topolojik uzay ve I = [0,1] kapalı aralığı olmak üzere her f : I → X sürekli fonksiyonuna bu topolojik uzayda bir ***yol*** veya ***eğri*** denir. Eğer f (0) = x ve f (1) = y ise f yolu x ve y noktalarını birleştiriyor denir.

Tanım 1.2.5 : $(X , \Im)$ bir topolojik uzay olsun. Eğer X in her iki noktası bu uzayda bir yol ile birleştirilebiliyorsa; diğer bir ifade ile, her $x,y \in X$ için $\exists$ f : I → X sürekli, f(0) = x ve f(1) = y yazılabiliyorsa, bu $(X , \Im)$ topolojik uzayına ***yol bağlantılıdır*** denir.

Bir alt kümenin yol bağlantılı olması, o küme üzerindeki alt uzayın yol bağlantılı olması ile tanımlanır.

1.3 BÖLÜM UZAYLARI

Tanım 1.3.1 : $(X , \Im)$ bir topolojik uzay, $Y \neq \emptyset$ bir küme ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunu sürekli yapan Y üzerindeki en ince topoloji olan $\Im_f^* = \{ H \in Y \mid f^{-1} (H) \in \Im \}$ topolojisine , f,'nin Y üzerinde ürettiği ***tümel topoloji*** veya ***bitiş topolojisi*** denir.

$(X , \Im)$ bir topolojik uzay ve "$\sim$" X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bir $x \in X$ noktasının denklik sınıfı $[x] : \{ y \in X \mid x \sim y \}$ olmak üzere $X / \sim : \{ [x] \mid x \in X \}$ sınıflar kümesine X' in " $\sim$ " bağıntısına göre **bölüm kümesi** denir.

$(X , \Im)$ topolojik uzay ve " $\sim$ " denklik bağıntısı verildiğinde $f : X \rightarrow X / \sim$, $f (x) = [x]$ fonksiyonu ile $X /\sim$ bölüm kümesi üzerinde üretilen tümel topolojiye

bölüm topolojisi ve bu topoloji ile $X/\sim$ bölüm kümesine yani ($X/\sim$, $\Im_f^*$) topolojik uzayına da (X , $\Im$) topolojik uzayının bir ***bölüm uzayı*** denir. Bu *f* fonksiyonuna da ***bölüm fonksiyonu*** adı verilir.

NOT 1.3.1 : $\Im_f$ nin tanımı gereğince $U \in \Im_f$ ise $f^{-1}(U) \in \Im$ olduğundan f bölüm fonksiyonu süreklidir. Diğer yandan sürekli her fonksiyon bir bölüm fonksiyonu değildir. Açıkça bir $U \subseteq Y$ nin (Y , $\Im_f$) nun bölüm uzayında kapalı olması için gerek ve yeter şart $f^{-1}(U)$ kümesinin (X , $\Im$) uzayında kapalı olmasıdır. Bir bölüm fonksiyonu açık ya da kapalı olmak zorunda değildir.

Teorem 1.3.1 : (X , $\Im$) bir topolojik uzay ve Y boş olmayan bir küme olmak üzere $f : X \to Y$ örten bir fonksiyon olsun f fonksiyonunu sürekli kılan Y kümesi üzerinde en ince topoloji $\Im_f$ bölüm topolojisidir. [8]

İspat: Not 1.3.1 gereğince f fonksiyonu süreklidir. $\wp$ topolojisi f fonksiyonunu sürekli kılan Y topolojisi üzerinde herhangi bir topoloji olsun. Bu durumda $U \in \wp$ ise $f : (X, \Im) \to (Y, \wp)$ fonksiyonu sürekli olduğundan $f^{-1}(U) \in \Im$ dur. Böylece $\Im_f$ nin tanımı gereğince $U \in \Im_f$ dir. O halde $\wp \subseteq \Im_f$ dir.

ÖRNEK 1.3.1 : $X = \{ 0 , 1, 2 \}$ ve $f : [0,1] \to X$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın bu durumda $P(X) = \{ \emptyset , X , \{0\} , \{1\} , \{2\} , \{0,1\} , \{0,2\} , \{1,2\} \}$ dir. Diğer yandan;

$$f^{-1}(\{\emptyset\}) = \emptyset$$
$$f^{-1}(\{X\}) = \mathbb{R}$$
$$f^{-1}(\{0\}) = (0, \infty),$$
$$f^{-1}(\{1\}) = (-\infty , 0)$$
$$f^{-1}(\{0,1\}) = (-\infty , 0) \cup (0,\infty)$$

kümeleri $\mathbb{R}$ de açık ve

$$f^{-1}(\{2\}) = \{0\}$$

$$f^{-1}(\{0,2\}) = \{0\} \cup (0,\infty) = [0, \infty)$$

$$f^{-1}(\{1,2\}) = (-\infty, 0) \cup \{0\} = (-\infty, 0]$$

kümeleri $\mathbb{R}$ de açık olmadığından bölüm topolojisi

$\Im_f = \{\emptyset, X, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \}$ dir.

1.4 TOPOLOJİK UZAYLARDA AYIRMA AKSİYOMLARI

Tanım 1.4.1 : $(X, \Im)$ bir topolojik uzay olsun.

i) Eğer her $x, y \in X$, $x \neq y$ için G ve $H \subset X$ gibi iki açık küme, $(x \in G, y \notin G)$ ve $(x \notin H, y \in H)$ olacak şekilde bulunabiliyorsa, bu $(X, \Im)$ topolojik uzayına bir ***T_1 – uzayı*** denir.

ii) Eğer her kapalı $A \subset X$ ve $x \notin A$ için G ve H açık altkümeleri, $x \in G$, $A \subset H$ ve $G \cap H = \emptyset$ sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa, bu $(X, \Im)$ topolojik uzayına bir ***T_3 – uzayı*** denir.

iii) Hem *T_1 − uzayı* hem de *T_3 − uzayı* olan bir topolojik uzaya ***regüler uzay*** denir.

Teorem 1.4.1 : $(X, \Im)$ topolojik uzayının bir *T_3 − uzayı* olması için gerek ve yeter koşul; her $x \in X$ noktasında kapalı komşuluklardan oluşan bir komşuluk tabanının bulunmasıdır (Bülbül, 2004).

Tanım 1.4.2 : $(X, \Im)$ bir topolojik uzay olsun. Eğer her kapalı $A, B \subset X$ ve $A \cap B = \emptyset$ için G ve H açık altkümeleri, $A \subset H$, $B \subset G$ ve $G \cap H = \emptyset$ sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa; bu $(X, \Im)$ topolojik uzayına bir ***T_4 −uzayı*** denir.

Teorem 1.4.2 (*Urysohn Lemması*): $(X, \Im)$ topolojik uzayı bir *T_4 −uzayıdır* $\Leftrightarrow$ $(X, \Im)$ da kapalı ve ayrık herhangi iki A ve B kümeleri için $f(A) \subset \{0\}$ ve $f(B) \subset \{1\}$

koşullarını sağlayan bir $f : X \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır (Bülbül, 2004).

1.5 $\mathbb{R}^m$ DE TÜREVLENEBİLME

Tanım 1.5.1 : $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ ve $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ şeklinde bir fonksiyon olsun. Eğer *f*'nin her bir değişkene göre *r*. dereceden tüm kısmi türevleri mevcut ve sürekli ise *f* fonksiyonuna ***C^r* sınıfındandır** denir.

Tanım 1.5.2 : $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu C^1 sınıfından olsun. $1 \le i \le n$ ve $1 \le j \le m$ olmak üzere $\left[\frac{\partial f_i}{\partial f_j}(x) \right]_{n \times m}$ matrisine *f* nin *x* noktasındaki ***jacobian matrisi*** denir ve *Df (x)* şeklinde gösterilir.

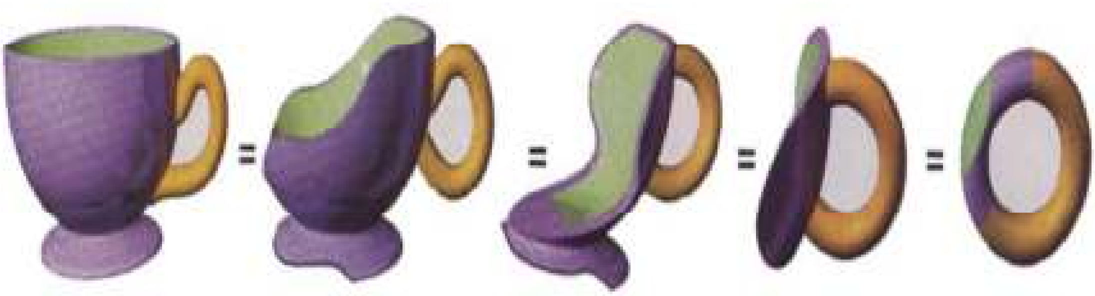
Tanım 1.5.3 : *U* ve *V*, $\mathbb{R}^m$ nin açık alt kümeleri ve $f : U \to V$ fonksiyon olsun. Eğer *f* fonksiyonu bir homeomorfizma ve f , f^{-1} fonksiyonları C^r - sınıfından ise fonksiyonuna ***C^r* - *difeomorfizma*** denir. C^∞ - *difeomorfizma* yerine kısaca ***difeomorfizma*** denir.

BÖLÜM 2

MANİFOLD KAVRAMI

Manifoldları inceleyen matematik bilim dalı topolojidir. Poincare, topolojinin kurucusudur. Topolojide bir nesnenin tıpa tıp şekli veya geometrisi önemli değildir. Sanki her şey oyun hamurundan ya da lastikten yapılmıştır ve germe ,bükme sıkıştırma yoluyla şekillendirilebilir. Ancak; kesme ve yapıştırma yasaktır.

Bu durumda; topolojide tek deliği olan en baştaki fincan en sondaki simite denktir demektir.



Şekil 2.1 Fincanın simit’ e denk olması (Collins G.P. 2004)

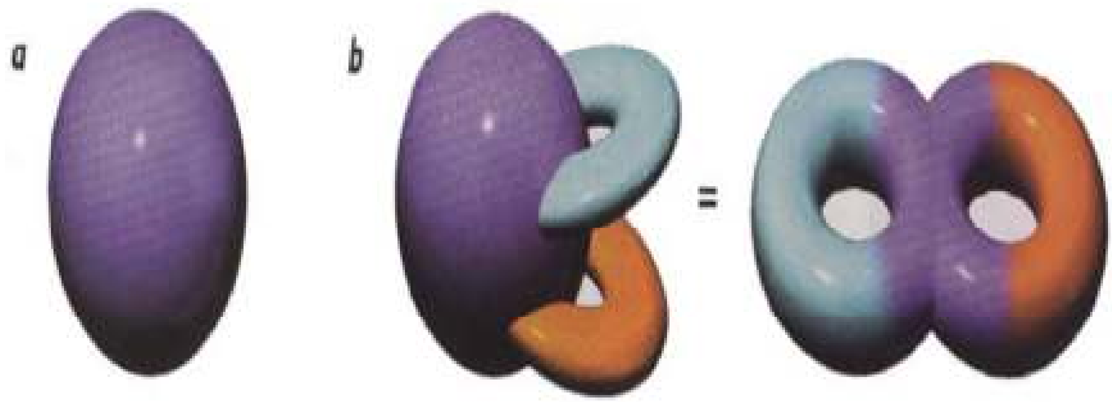
Görüldüğü gibi Topoloji ile uğraşan biri açısından, bir simit ile sapı olan bir kahve fincanının arasında fark yoktur. Aslında bununla anlatılmak istenen, oyun hamurundan yapılmış bir fincana; kesmeden, delik açmadan, ya da parçaları yapıştırmadan, hamuru bastırıp yuvarlayarak simit şekli verebiliyor olmamızdır. Poincare, bu çeşit nesnelere **'manifold'** adını veriyor.

Olabilecek en basit iki boyutlu manifold, bir futbol topu olarak düşünülebilir. Bu, bir topolojiste göre eğilse bükülse bile bir küre ile homeomorfiktir. Hangi şekli alırsa alsın, hiçbir yerinde delik falan yoktur.

Bu yüzden bir topu simit’ e dönüştürmek için ya ortasından delik açmak, ya da onu bir silindir biçiminde uzatıp iki ucu yapıştırmanız gerekir. Bu türden bir kesme ya da yapıştırma gerektirecek olan bu işlemden dolayı; top, topologlara göre bir simitle yani; halka şeklindeki ‘torla’ aynı şey değildir.

Öyleyse; tor (simit) ve küre (top), topolojik bakımdan farklı şeylerdir. Başlangıçta topologlar, topolojik bakımdan farklı kaç varlık bulunduğunu ve bunları ayırt eden nitelikleri aramaya giriştiler. “Yüzey” adı da verilen iki boyutlu nesnelerin nitelikleri, açık ve kesin biçimde, yüzeyin “kulp” sayısıyla belirlendiği kanısına vardılar.

Olanaklı bütün 2-boyutlu manifoldlar ya da yüzeyler, bir küre alıp (a balonu gibi) ona kulplar ekleyerek yapılabilirler. Bir kulpun ilavesiyle “tür-1 yüzeyi”, ya da “tor” oluşur. Bu, bir simidin yüzeyidir. İki kulp ilavesiyle “tür-2 yüzeyi” (b) elde edilir.

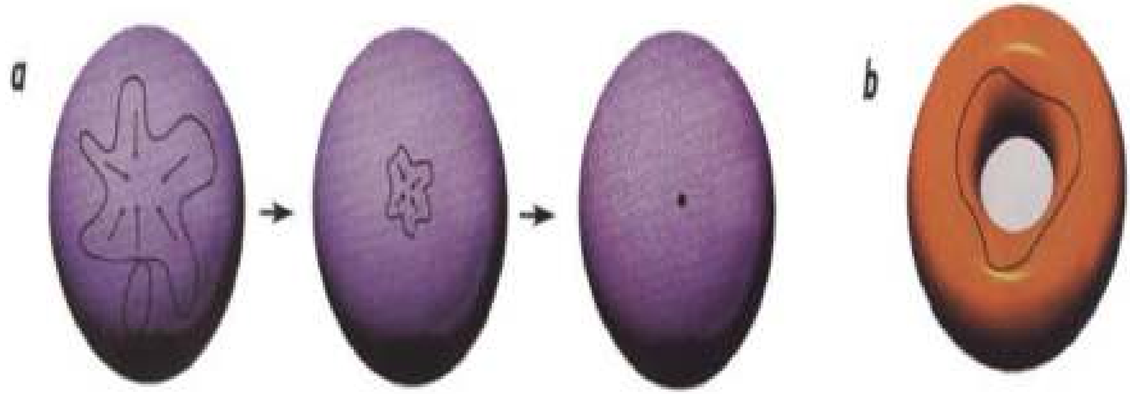


Şekil 2.2 Küreye kulp eklenmesi (Collins G.P. 2004)

2-küre, yüzeyler arasında benzersizdir; üzerine gömülen kapalı bir ilmek, bir nokta (a) oluncaya kadar küçültülebilir. Buna karşın tor üstündeki bir ilmek, ortadaki delik çevresinde yakalanabilir (b).

2-küre dışındaki her yüzeyde ilmeğin yakalanabileceği kulplar vardır. Poincare savı, bütün üç boyutlu manifoldlar arasında 3-kürenin tek olduğunu söyler: Üstündeki herhangi bir ilmek, bir nokta oluncaya kadar küçültülebilir; ama başka herhangi bir 3-manifoldda ilmek yakalanabilir; yani bir noktaya büzülmesi olanaksızdır.

Aşağıdaki şekilde bunu açık olarak görebiliriz :



Şekil 2.3 Manifolda ilmek atıp bir noktada büzüştürme

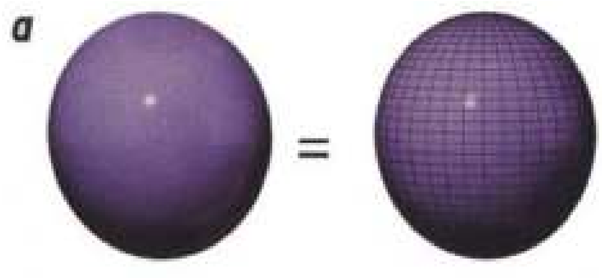
BÖLÜM 3

GEOMETRİKLEŞTİRME

3.1 GEOMETRİKLEŞTİRME

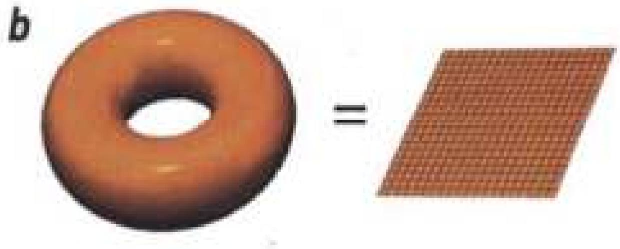
2-manifoldlar “ tek biçimleştirilerek ” ya da “geometrikleştirilerek”, yani onlara belirli bir geometri, ya da katı bir biçim tahsis edilerek sınıflandırılabilirler. Her biri, eğriliği düzgün biçimde dağılmış bir şekle dönüşebilir.

Küre (a) her noktada sabit **pozitif eğriliği** olan; yani her noktada bir tepenin üst bölümü gibi eğrilmiş yegane biçimdir.



Şekil 3.1 Küre yüzeyinin pozitif eğriliğinin olması (Collins G.P. 2004)

Tor (simit) (b) düz, yani her noktada **eğriliği sıfır** olan şekle getirilebilir. Bunu görmek için torun kesilip silindir şeklinde uzatıldığını düşünün. Bu durumda da silindir, boylu boyunca kesilerek bir dikdörtgen düzlem parçasına dönüştürülebilir.



Şekil 3.2 Torun sıfır eğriliğinin olması (Collins G.P. 2004)

Tür-2 ve daha yüksek türlere (c) sabit **negatif eğrilik** verilebilir. Kulp sayısına bağlı olarak başka ayrıntılar da vardır. Burada sabit negatif eğrilik eyer şekliyle gösterilmiştir.

Şekil 3.3 Yüksek mertebeden türlerin negatif eğriliği olması (Collins G.P. 2004)

3.2 MANİFOLD KAVRAMININ TARİHÇESİ

İki boyutlu manifoldlar 19. yüzyılda her yanıyla incelendi ve keşfedildi. Poincare, 1904 yılında, eğer bir birleşik 3-manifold üzerindeki her basit kapalı eğri, sürekli şekil değişikliğine uğratılarak tek bir noktaya indirgenebiliyorsa, bu 3-manifoldun 3-küre ile homeomorfık olup olmadığını soruyordu.

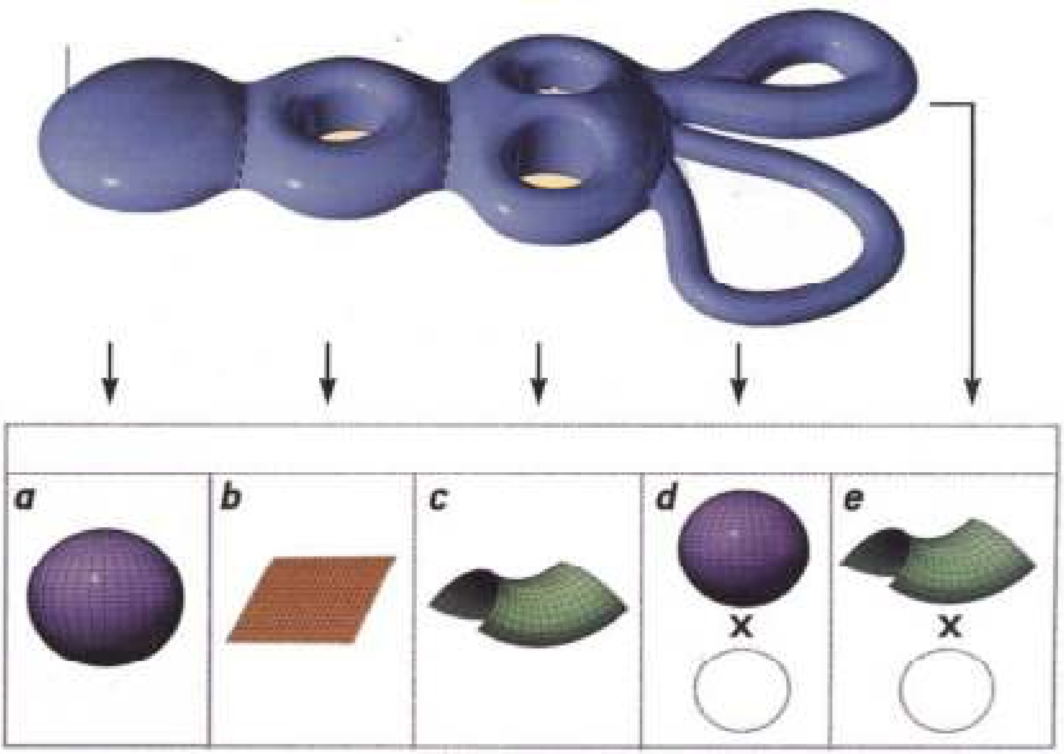
İşte bu, birleşik 3-manifoldların 3-küre ile homeomorfik olduğu kestirimi, **Poincare Kestirimi** olarak anılmaya başlandı. Poincare Kestirimi 1982’ de, 3-manifoldlar hariç, bütün boyutlarda ispatlandı.

2000 yılında da Amerika'daki Clay Matematik Enstitüsü, altı diğer problemle birlikte Poincare varsayımını **'milenyum problemleri'** olarak adlandırdı ve her problem için ilk çözene 1 milyon dolar ödül koydu.

1995'te Hamilton, Perelman ismindeki Rus bir matematikçi Poincare varsayımıyla ilgili bir makale yayımladı. Pek çok matematikçi makaleyi görür görmez önemini kavradı. Perelman, Poincare savını çözmenin ilk adımını atmıştı. Daha sonra yayınladığı diğer makalelerle Poincare varsayımını ispatlamış olduğu kesinleşti.

3-manifoldların sınıflandırılması da 2-manifoldlarınkine benzer; ama çok daha karmaşıktır. Bu sınıflandırma, Perelman'ın çalışmasıyla tamamlanmış bulunuyor. Genel olarak, bir 3-manifoldun parçalara ayrılması, bu parçalardan her birine de, üç boyutlu sekiz doğal geometriden birinin şeklinin verilebilmesi gerekir.

Aşağıda verilen mavi renkli örnek beş tanesine denk olan geometrilerden oluşuyor : Sabit pozitif (a), sıfır (b),negatif (c) eğrilikleri olan 3-geometriler, ayrıca 2-küre ile çember "çarpımı" (d) ve negatif eğriliği olan yüzeyle çember çarpımı (e)



Şekil 3.4 3 boyutlu manifold (Collins G.P. 2004).

BÖLÜM 4

MANİFOLD KAVRAMININ TERİMSEL İNCELENMESİ

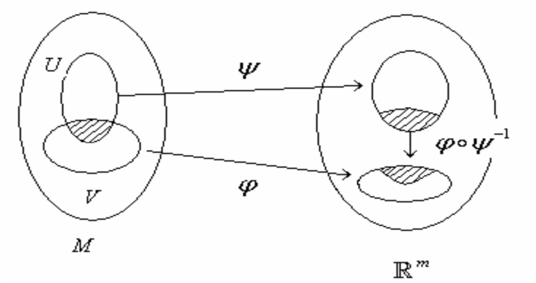
Bu bölümde topolojik ve düzgün manifold tanımları verilerek; daha çok düzgün manifoldlar ile ilgili bazı sonuçlar, Sabuncuoğlu (2004) ndan yararlanılarak çalışılacaktır.

4.1 MANİFOLDLAR

Tanım 4.1.1: M herhangi bir topolojik uzay ve $U \subset M$ açık olsun. $\psi: U \subset M \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu bir homeomorfizma ise ψ ye M üzerinde ***m-boyutlu koordinat sistemi (m - dimensional chart)*** denir. M üzerindeki m-boyutlu koordinat sistemlerinin bir ailesi $\mathscr{A}$ olsun.

i) Eğer $\mathscr{A}$ da ki koordinat sistemi fonksiyonlarının tanım kümelerinin birleşim M ye eşit oluyor ve

ii) $\psi: U \to \mathbb{R}^m$ ve $\varphi: V \to \mathbb{R}^m$, M üzerinde, $U \cap V \neq \emptyset$ olan $\mathscr{A}$'nın iki elemanı için ***koordinat değişimi (change of coordinats)*** olarak isimlendirilen; $\varphi \circ \psi^{-1}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu bir C^∞ difeomorfizma oluyor ise $\mathscr{A}$ ya M üzerinde **C^∞ *atlas*** denir (Şekil 4.1' e bakınız).



Şekil 4.1 Koordinat değişim fonksiyonu (I.M Singer).

Eğer yukardaki tanımda sadece *i)* şartını alırsak yani; $\forall x \in M$ için bu noktanın $\mathbb{R}^m$ ye homeomorfik olan bir açık komşuluğu bulunabiliyorsa; bu manifolda ***topolojik manifold*** denir.

Bir küme üzerinde birden fazla atlas tanımlanabilir. $\mathscr{A}$, *M* Hausdorff topolojik uzayı üzerinde bir atlas olsun. $\mathscr{A}$'nın elemanlarıyla düzgün örtüşen her koordinat sistemi, yine $\mathscr{A}$' nın elemanı oluyorsa, $\mathscr{A}$ *ya M* üzerinde bir ***tam atlas*** denir.

$\mathscr{A}$, *M* topolojik uzayı üzerinde bir atlas ise $\mathscr{A}$ atlasını kapsayan bir ve yalnız bir tam atlas olduğu (Sabuncuoglu,2004) ispatlanmıştır.

M Hausdorff topolojik uzayı üzerinde bir $\mathscr{A}$, C^∞ - tam atlası bulunabiliyorsa; *M* kümesine *m* -boyutlu ***türevlenebilir manifold*** veya ***düzgün manifold*** denir ve (M^m, $\mathscr{A}$) veya kısaca; M^m ile gösterilir.

M üzerinde verilen herhangi bir atlası kapsayan tek bir tam atlas bulunabildiğinden, *M* bu atlasla birlikte düzgün manifold olur.

Açıkça her türevlenebilir manifold bir **topolojik manifold**dur.

Örnek 4.1.1 : Her $m \geq 1$ doğal sayısı için ;

$$\mathbb{R}^m = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots \ldots .., x_m) | \forall\ 1 \leq i \leq m \text{ için } x_i \in \mathbb{R}\}$$

m - boyutlu Öklid uzayı düzgün bir manifolddur. Ayrıca;

$$B^m = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots \ldots .., x_m) \in \mathbb{R}: x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 < 1\}$$

açık birim dairesi de *m*-boyutlu düzgün bir manifolddur.

Örnek 4.1.2 :

$$\mathbf{S^m} = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots \ldots .., x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$$

birim küresi *m*- boyutlu düzgün bir manifolddur.

Gerçekten, her $1 < i < m$ için ;

$U_i^+ := \{x \in \mathbf{S}^m | x = (x_1, x_2, x_3, \dots\dots.., x_{m+1}), x_i > 0 \}$ ve

$U_i^- := \{x \in \mathbf{S}^m | x = (x_1, x_2, x_3, \dots\dots.., x_{m+1}), x_i < 0 \}$

olarak tanımlanırsa ve $\varphi_i^\pm U_i^\pm \to (D^m)^\circ \subset \mathbb{R}^m$,

$$\varphi_i^\pm (x_1, x_2, x_3, \dots\dots.., x_{m+1}) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots.., x_{m+1})$$

ile verilirse; bu dönüşümlerin tersleri de

$$(\varphi_i^\pm)^{-1}(y) = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \|y\|^2}, y_i, y_m) \text{ olup}$$

$(\varphi_i^\pm)^\circ(\varphi_i^\pm)^{-1}$ fonksiyonları düzgün örtüşürler. Dolayısıyla A= $\{(\varphi_i^\pm, U_i^\pm)\}_{1 \le i \le m}$ ailesi S^m için düzgün atlas olup S^m bir düzgün manifolddur.

Örnek 4.1.3 : *M* ve *N* sırasıyla *m* ve *n* boyutlu iki düzgün manifold olsun. Bu durumda *M x N* kümesi doğal çarpım topolojisi ile birlikte bir topolojik uzaydır. Bu topolojik uzaya, *M* ve *N* topolojik uzaylarının çarpım uzayı denildiğini biliyoruz.

M ve *N* Hausdorff uzayı olduğundan *M x N* de Hausdorff uzayıdır. *M x N* nin (*m*+ *n*) boyutlu bir düzgün manifold olduğu (Sabuncuoğlu, 2004) gösterilmiştir.

Tanım 4.1.2 : $\mathbb{R}^m$ de üst yarı uzay denilen

$$\mathbb{R}^m_+ = \{(x_1, x_2, x_3, \dots\dots.., x_m) \in \mathbb{R}^m | \, x_m \ge 0\}$$

ile tanımlanır.

$$\partial\mathbb{R}^m_+ = \{(x_1, x_2, x_3, \dots\dots.., x_{m-1}, 0) | \forall\, 1 < i < m \text{ için} : x_i \in \mathbb{R}\}$$

olacaktır. Eğer düzgün manifold tanımındaki $\varphi: U \to U'$ koordinat sistemlerinde $U' \subset \mathbb{R}^m$ açık yerine $U' \subset \mathbb{R}^m_+$ açık olarak alınırsa ***sınırı olan manifold*** kavramına ulaşılır. Sınırı olan *M* manifoldunun sınırı ∂M ile gösterilir ve *M'*nin atlasına ait koordinat sistemleri altında görüntüsü $\partial\mathbb{R}^m_+$ de olan *M'*nin tüm noktalarından oluşur. Açıkça; $\partial M \subset M$ dir.

Eğer $\partial M = \emptyset$ ise *M* ye ***sınırı olmayan manifold*** denir. ∂M nin (*m*-1) boyutlu, sınırı olmayan düzgün bir manifold olduğu gösterilebilir. (Burns & Gidea, 2005).

Topolojik anlamdaki sınır tanımı ile manifoldun sınır tanımı genel olarak farklıdırlar. Örneğin, $B^2 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ açık birim dairesinin $\mathbb{R}^2$ nin bir alt kümesi olarak sınırı $\mathbf{s^1}$ birim çemberidir; ancak manifold olarak sınırı $\partial(B^2) = \emptyset$ dir. *Int*(*M*)= $M / \partial M$ ile tanımlanır.

Örnek 4.1.4 : $\mathbb{R}^m$ de *m*-boyutlu kapalı *birim daire,*

$$D^m = \{(x_1, x_2, x_3, \dots\dots.., x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_m^2 \leq 1\}$$

olarak tanımlanır. Bu birim daire**,** *m* - boyutlu sınırı olan bir manifolddur ve sınırı (*m*-1) boyutlu $\mathbf{S^{m-1}} = \{(x_1, x_2, x_3, \dots\dots.., x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_m^2 = 1\}$ birim küresidir. Yani; $\partial D^m = \mathbf{S^{m-1}}$ dir. Ayrıca $\partial(D^m)^0 = \emptyset$

4.2 DİFERANSİYELLENEBİLİR DÖNÜŞÜMLER

Tanım 4.2.1 : *M* , *m*– boyutlu bir manifold olmak üzere;

i) $f: M \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\xi : \cup \to \xi(\cup)$, M^m içinde bir koordinat sistemi olmak üzere, $f \circ \xi^{-1} : \xi(\cup) \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna, f nin ξ ye bağlı bir ***koordinat gösterimi*** denir.

ii) $f: M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve *M* nin bir *p* noktası verilsin. *p* noktasındaki en az bir $\xi : \cup \to \xi(\cup)$ koordinat sistemi için $\xi : \xi(\cup) \to \mathbb{R}$ koordinat gösterimi $\xi(p)$ noktasında diferansiyellenebilir ise; *f* fonksiyonu *p* noktasında **diferansiyellenebilirdir (düzgündür)** denir.

Uyarı 4.2.1: Bu tanım ilk başta $\xi : \cup \to \xi(\cup)$ koordinat sistemine bağlıymış gibi görünüyor. Gerçekte öyle değildir. Daha açık olarak ifade edersek, *f* fonksiyonu *p* noktasında diferansiyellenebilir ise, *p* noktasındaki her $\eta : V \to \eta(V)$ koordinat sistemi için, $f \circ \eta^{-1} : \eta(V) \to \mathbb{R}$ koordinat gösterimi, $\eta(p)$ noktasında **diferansiyellenebilirdir.**

Şimdi bunu göstereceğiz :

ξ ve η düzgün örtüştüğünden,

$$\xi \circ \eta^{-1} : \eta\,(U \cap V) \rightarrow \xi\,(U \cap V)$$

dönüşümü, $\eta\,(p)$ noktasında diferansiyellenbilir.

$$f \circ \xi^{-1} : \xi\,(U) \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu da $\xi\,(p)$ noktasında diferansiyellenebilir olduğundan, zincir kuralına göre;

$$(f \circ \xi^{-1}) \circ (\xi \circ \eta^{-1})$$

fonksiyonu $\eta\,(p)$ noktasında düzgündür.

$$(f \circ \xi^{-1}) \circ (\xi \circ \eta^{-1}) = f \circ \eta^{-1}$$

olduğundan, $f \circ \eta^{-1}$ fonksiyonu, $\eta\,(p)$ noktasında diferansiyellenbilirdir.

Tanım 4.2.2 : $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu *M* manifoldunun her *p* noktasında düzgün ise; *f* fonksiyonu *M* üstünde **düzgündür** (**diferansiyellenebilirdir**) denir.

Teorem 4.2.1 : $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun *M* üstünde düzgün olması için gerek ve yeter koşul, *M* içindeki her $\eta : V \rightarrow \eta\,(V)$ koordinat sistemi için, $f \circ \eta^{-1} : \eta\,(V) \rightarrow \mathbb{R}$ koordinat gösteriminin düzgün olmasıdır. [2]

İspat : $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu *M* üstünde düzgün olsun. *M* içindeki bir $\eta : V \rightarrow \eta\,(V)$ koordinat sistemini göz önüne alalım. Her $p \in V$ için, *f* fonksiyonu *p* noktasında düzgün olduğundan, uyarı 4.2.1 göz önüne alınarak, $f \circ \eta^{-1} : \eta\,(V) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun, V her $\eta\,(p)$ düzgün olduğu anlaşılır. Bu durum, $f \circ \eta^{-1} : \eta\,(V) \rightarrow \mathbb{R}$ gösteriminin düzgün olduğunu gösterir.

Karşıt olarak; *M* içindeki her bir $\eta : V \rightarrow \eta\,(V)$ koordinat sistemi için, $f \circ \eta^{-1} : \eta\,(V) \rightarrow \mathbb{R}$ gösteriminin düzgün olduğunu varsayalım. $p \in M$ olsun. *p* noktasında alınan her bir $\xi : U \rightarrow \xi\,(U)$ koordinat sistemi için, $f \circ \xi^{-1} : \xi\,(U) \rightarrow \mathbb{R}$ koordinat gösterimi $\xi\,(p)$ noktasında düzgün olur. Tanım 4.2.1 e göre, *f* fonksiyonu *p* noktasında düzgündür.

Teorem 4.2.2 : $f: M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Tanım bölgeleri M yi örtecek çoklukta ξ koordinat sistemleri için, $f \circ \xi^{-1} : \xi(\cup) \to \mathbb{R}$ koordinat gösterimleri düzgün ise; f fonksiyonu M üstünde düzgün fonksiyondur.[1]

İspat: Tanım bölgeleri M yi örtecek çoklukta ξ koordinat sistemleri için, $f \circ \xi^{-1} : \xi(\cup) \to \mathbb{R}$ koordinat gösterimleri düzgün olsun. M içinde $\eta : V \to \eta(V)$ bir koordinat sistemini göz önüne alalım. $f \circ \eta^{-1} : \eta(V) \to \mathbb{R}$ fonksiyonun da düzgün olduğunu göstereceğiz.

$q \in \eta(V)$ olsun. $q = \eta(p)$ olacak biçimde, V kümesinde bir ve yalnız bir p noktası vardır. $p \in \cup$ ve $f \circ \xi^{-1} : \xi(\cup) \to \mathbb{R}$ koordinat gösterimi düzgün olacak biçimde en az bir $\xi : \cup \to \xi(\cup)$ koordinat sistemi vardır. ξ ve η örtüştüğünden, $f \circ \eta^{-1}$ fonksiyonu da düzgündür. Buna göre, $(f \circ \xi^{-1}) \circ \xi \circ \eta^{-1}$ fonksiyonu da düzgündür. $(f \circ \xi^{-1}) \circ \xi \circ \eta^{-1} = f \circ \eta^{-1}$ olduğundan, $f \circ \eta^{-1} : \eta(V) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu q noktasında düzgündür.

Bu yolla, $f \circ \eta^{-1}$ fonksiyonunun $\eta(V)$ kümesinin her q noktasında düzgün olduğu görülür. M den $\mathbb{R}$ ye giden düzgün fonksiyonların kümesini, $\mathscr{A}(M)$ ile göstereceğiz.

$f, g \in \mathscr{A}(M)$ olmak üzere, her $p \in M$ için, $(f+g)(p) = f(p) + g(p)$ eşitliği ile tanımlı $f+g$ fonksiyonu da düzgün fonksiyondur. Gerçekten, M üstündeki her ξ koordinat sistemi için, $(f+g) \circ \xi^{-1} = f \circ \xi^{-1} + g \circ \xi^{-1}$ yazılabilir. $f \circ \xi^{-1}$ ve $g \circ \xi^{-1}$ fonksiyonları da düzgün olduğundan toplamları da düzgündür.

$f, g \in \mathscr{A}(M)$ olmak üzere, her $p \in M$ için, $(f.g)(p) = f(p).g(p)$ eşitliğiyle tanımlı $f.g$ fonksiyonu da düzgün fonksiyondur. Gerçekten, M üstündeki her ξ koordinat sistemi için $(f.g) \circ \xi^{-1} = (f \circ \xi^{-1}) . (g \circ \xi^{-1})$ yazılabilir. $f \circ \xi^{-1}$ ve $g \circ \xi^{-1}$ fonksiyonları da düzgün olduğundan çarpımları da düzgündür.

c$\in \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{A}(M)$ olmak üzere; her $p \in M$ için, $(c.f)(p) = c.f(p)$ eşitliğiyle tanımlı $c.f$ fonksiyonu da düzgün fonksiyondur. Gerçekten; M üstündeki her ξ koordinat sistemi için $(c.f)\circ \xi^{-1} = c\,.(f\circ \xi^{-1})$ yazılabilir. $f\circ \xi^{-1}$ fonksiyonu düzgün olduğundan bu fonksiyonun bir sayı ile çarpımı da düzgündür.

Tanım 4.2.3 : $\phi : M^m \to N^n$ bir fonksiyon olsun. p noktasında en az bir $\xi : U \to \xi(U)$ ve $\phi(p)$ noktasında en az bir $\mu : V \to \mu(V)$ koordinat sistemi $\mu \circ \phi \circ \xi^{-1}$ dönüşümü, $\xi(p)$ noktasında düzgün (diferansiyellenebilir) olacak biçimde bulunabiliyorsa; ϕ dönüşümü, p noktasında **düzgündür (diferansiyellenebilirdir)** denir. $\phi: M^m \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonları için $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ koordinat sistemleri birim dönüşüm alınır.

Uyarı 4.2.2 : $\mu \circ \phi \circ \xi^{-1}$ dönüşümünün tanım kümesi, $\phi(\phi(U) \cap V)$ kümesinin, ξ deki görüntüsüdür.

Teorem 4.2.3 : ϕ, M^m manifoldundan N^n manifolduna giden bir fonksiyon olsun. ϕ dönüşümünün, M^m üstünde düzgün olması için gerek ve yeter koşul, M^m üstündeki her $\xi : U \to \xi(U)$ koordinat sistemi ve N^n üstündeki her $\mu: V \to \mu(V)$ koordinat sistemi için $\mu \circ \phi \circ \xi^{-1}$ dönüşümlerinin düzgün olmasıdır. Bu teoremin ispatı; 4.2.1 teoremin ispatına benzer biçimde kolayca yapılabilir.[12]

Teorem 4.2.4 : $\phi : M^m \to N^n$ fonksiyonu verilsin. Tanım bölgeleri M ve N yi örtecek çoklukta ξ ve μ koordinat sistemleri için $\mu \circ \phi \circ \xi^{-1}$ dönüşümleri düzgün ise ϕ dönüşümü M üstünde düzgün fonksiyondur.[9]

İspat : Tanım bölgeleri M ve N yi örtecek çoklukta ξ ve μ koordinat sistemleri için $\mu \circ \phi \circ \xi^{-1}$ dönüşümleri düzgün olsun. M ve N için de sırası ile ; ξ_1 ve μ_1 koordinat sistemlerini göz önüne alalım. Bunun için, $\mu_1 \circ \phi \circ (\xi_1)^{-1}$ dönüşümünün düzgün olduğunu göstereceğiz.

Bunun için, $\mu_1 \circ \phi \circ (\xi_1)^{-1}$ dönüşümünün tanım bölgesinde bir $\xi_1(p)$ noktası alalım. p noktasında en az bir ξ , $\phi\,(p)$ noktasında en az bir μ koordinat sistemi için $\mu \circ \phi \circ \xi^{-1}$ dönüşümü, $\xi\,(p)$ noktasında düzgündür. ξ_1 ile ξ , μ_1 ile μ düzgün örtüştüklerinden,

$$\xi \circ \xi^{-1} : \xi_1 (U \cap U_1) \to \xi (U \cap U_1) ,$$

$$\mu_1 \circ \mu^{-1} : \mu_1 (V \cap V_1) \to \mu \;\; (V \cap V_1)$$

dönüşümleri düzgündür. Zincir kuralından dolayı;

$$(\mu_1 \circ \mu^{-1}) \circ (\mu_1 \circ \phi \circ \;\xi_1^{-1}) \circ (\xi \circ \xi_1^{-1})$$

dönüşümü, $\xi_1(p)$ noktasında düzgündür. Bu dönüşümün, $\mu_1 \circ \phi \circ (\xi_1)^{-1}$ dönüşümüne eşit olduğu hemen görülebilir.

Sonuç 4.2.1 : ϕ: $M^m \to N^n$ fonksiyonu düzgün dönüşüm ise **süreklidir**.

Sonuç 4.2.2 : ϕ: $M^m \to N^n$ fonksiyonu düzgün dönüşüm ise; bu dönüşümün, M'nin her açık alt manifolduna kısıtlanışı da **düzgündür.**

Tanım 4.2.5 : $\phi : M^m \to N^n$ düzgün dönüşümünün tersi varsa ve tersi de düzgün ise; ϕ dönüşümüne bir ***difeomorfizma*** adı verilir. M ve N manifoldları verildiğinde, M den N'ye giden bir difeomorfizma varsa, M manifoldu, N manifolduna **difeomorfiktir** denir.

BÖLÜM 5

MANİFOLDLARIN TOPOLOJİSİ VE İKİ BOYUTLU KOMPAKT MANİFOLDLAR

Bu bölümde; $m-$ boyutlu herhangi bir M manifoldunun $(m+k)-$boyutlu bir Öklid uzayına gömülebileceği ve 2-boyutlu manifoldların sınıflandırılması üzerine sonuçlar, Kahn (1995) kaynağından yararlanılarak incelenecektir.

5.1 MANİFOLDLARIN GÖMÜLMESİ

Tanım 5.1.1: $(X, \Im)$ ve $(Y, \Im^*)$ iki topolojik uzay olsun. Eğer bir $f: X \to f(X) \subset Y$ fonksiyonu bire-bir , sürekli ve $f^{-1}: f(X) \to X$ ters fonksiyonu da sürekli ise, diğer bir ifade ile; f , X ile $f(X)$ görüntüsü arasında bir homeomorfizma ise; bu f fonksiyonuna, $(X, \Im)$ dan $(Y, \Im^*)$ içine bir ***gömme fonksiyonu*** denir. Burada $f(X)$ alt uzay topolojisi ile göz önüne alınmaktadır.

Böyle bir f fonksiyonu varsa; X, f ile Y içine ***gömülmüştür*** denir. Buna göre, eğer $(X, \Im)$, $(Y, \Im^*)$ ın bir alt uzayına homeomorf ise; X, Y içine gömülmüş olur.

Teorem 5.1.1: M, $m-$ boyutlu kompakt bir manifold olsun. Bu durumda n yeterince büyük alınırsa bir $\phi : M \to \mathbb{R}^n$ sürekli ve 1-1 fonksiyonu vardır (Bu durumda M kompakt olduğundan $\phi : M \to \phi(M) \subset \mathbb{R}^n$ bir homeomorfizmadır). [7]

İspat: $\{ U_i \}$, M nin bir açık örtüsü ve $1 \leq i \leq k$ için $\{ f_i \}$, bu açık örtüme karşılık gelen birimin parçalanışı olsun.

$n = (m+1)k$ alalım ve

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}^{m+1} \text{x}\, \mathbb{R}^{m+1} \text{ x} \ldots \text{x}\, \mathbb{R}^{m+1}}_{\text{k-tane}} \text{ olsun.}$$

Her bir $\mathbb{R}^{m+1}$ için D^m ile $\mathbb{R}^m$ başlangıç merkezli 1 yarıçaplı daire, yani

$$D^m = \{\, x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| \leq 1 \ ve \ x_{m+1} = 0 \,\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$$

C^{m+1} de D^m üzerine kurulan ve tepe noktası (0 , 0 , … , 0 , 1) olan koni olsun.

$$\phi_i : M \to C^{m+1} \subseteq \mathbb{R}^{m+1} \ , \ \phi_i(x) = \begin{cases} (f_i(x).x, 1 - f_i(x)), x \in U_i \\ (0,0,0,\ldots\ldots,0,0,1), x \notin U_i \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada U_i ler $U_i = (D^m)^0 \subset \mathbb{R}^m$ olarak alınabilir ve $f_i(x).x$ iç çarpımı göstermektedir. Bu anlamlıdır; çünkü $x \in U_i$ ise x , D^m nin bir noktası olacağından bir sıralı $m-$ lidir. Bu ϕ_i ler süreklidir. Çünkü $x \in \partial U_i$ ve $x_1 \to x$ ise $f_i(x_1) \to 0$ olup , $\phi_i(x_1) \to (0,0,\ldots\ldots,0,1)$ dir.

$$\phi : M \to \mathbb{R}^n \ , \ \phi(x) = (\phi_1(x), \ \phi_2(x), \ldots\ldots, \ \phi_k(x)) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{(m+1)k}$$

olarak tanımlarsak, her bir ϕ_i sürekli olduğundan ϕ süreklidir.

Şimdi ϕ nin 1- 1 ve kapalı fonksiyon yani kapalı kümeyi kapalı kümeye götüreceğini gösterelim.

$x, y \in M$ olsun. Bir i için , $x, y \in U_i$ olduğunu kabul edelim. Eğer $f_i(x) \neq f_i(y)$ ise $\phi_i(x) \neq \phi_i(y)$ olup , $\phi(x) \neq \phi(y)$ olacağı açıktır. Eğer $f_i(x) = f_i(y)$ ve $\phi(x) = \phi(y)$ ise ilgili koordinatların eşitliği yazılırsa, $f_i(x).x = f_i(y).y$ olur ve buradan $f_i(x) = f_i(y)$ olduğundan $x=y$ çıkar. Burada $f_i(x) \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz.

Diğer taraftan herhangi bir $x \in M$ için $\exists\, 1 \leq i \leq k$ öyle ki $f_i(x) > 0$ yani $x \in U_i$ dir. Eğer $y \notin U_i$ ise $f_i(y) = 0$ olur ve buradan kolayca $\phi(x) \neq \phi(y)$ elde edilir. O halde ϕ , 1-1 dir. M kompakt ve ϕ sürekli olduğundan $\phi(M) \subset \mathbb{R}^n$ kompakttır.

Böylece $\phi : M \rightarrow \phi(M) \subset \mathbb{R}^n$ kompakt Hausdorff bir uzaydan yine kompakt Hausdorff bir uzaya giden sürekli ve 1-1 bir fonksiyon olur.

Eğer $K \subset M$ kapalı ise; K kompakttır. O halde $\phi(K) \subset \phi(M)$ kompakt olup kapalı olmak zorundadır. O halde ϕ kapalı kümeyi kapalı kümeye götüren 1-1 bir fonksiyondur. Böylece ϕ homeomorfizmadır.

Sonuç 5.1.1: Kompakt bir manifold bir metrik uzaydır, hatta $\mathbb{R}^n$ nin bir kapalı alt topolojik uzayıdır.

5.2 İKİ BOYUTLU TOPOLOJİK MANİFOLD ÖRNEKLERİ

Aşağıdaki örnekte Projektif uzay olarak bilinen m-boyutlu bir manifold örneğini inceleyeceğiz. Bu örnek m=2 için Projektif düzlem olarak bilinir ve 2 -boyutlu olmasına rağmen $\mathbb{R}^3$ ün herhangi bir alt uzayına homeomorfik değildir; ancak $\mathbb{R}^4$ ün bir alt uzayına homeomorfiktir.

Örnek 5.2.1 : $\mathbf{S^m} := \{ x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| = 1 \}$

standart birim küre yüzeyi olmak üzere, $\mathbf{S^m}$ üzerinde

$$x \sim y :\Leftrightarrow x = y \text{ veya } x = -y$$

şeklinde bir bağıntı tanımlayalım. Bu bağıntının bir denklik bağıntısı olduğu açıktır ve $\forall\, x \in \mathbf{S^m}$ için $[\,x\,] = \{ x, -x \}$ dir. **$-x$, x in karşı (antipodal) noktası** denir.

P^m, $\mathbf{S^m}$ in $\sim$ bağıntısına göre bölüm uzayı yani, $P^m = \mathbf{S}^m / \sim$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $p : \mathrm{S^m} \rightarrow P^m$, $p(\mathrm{x}) = [\,\mathrm{x}\,]$ fonksiyonu örten olup ayrıca bölüm uzayı topolojisi gereğince süreklidir.

Teorem 5.2.1: P^m kompakt, bağlantılı ve m -boyutlu manifolddur. [6]

İspat: $\mathbf{S^m}$ kompakt ve bağlantılıdır. O halde p sürekli olduğundan $p(\mathrm{S^m}) = P^m$ kompakt ve bağlantılıdır.

Şimdi de P^m nin m -boyutlu bir topolojik manifold olduğunu gösterelim. Bir $x \in S^m$ için $p (x) = [x] \in P^m$ olsun. $x \in O \subset \mathbf{S^m}$ açık ve O daki her noktanın x ile yaptığı açı $\frac{\pi}{2}$ den kesin küçük olsun.

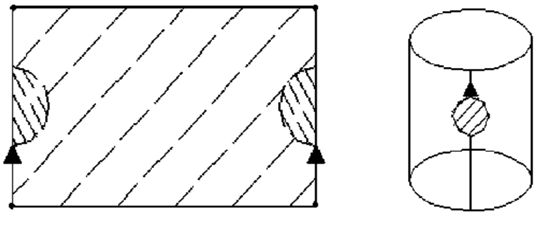
O da birbirinin karşı noktası olmadığından p, O'yu 1-1 olarak $p (O)$ ya götürür ve $[x] \in p (O)$ dır. Fakat, bölüm uzayı tanımı gereğince, P^m nin bir alt kümesi açıktır; ancak ve ancak o kümenin p ye göre ters resmi açıktır. p nin O ya kısıtlanışı 1-1 olduğundan $p^{-1} (p (O)) = O \cup \{ -x : x \in O \}$ olacaktır. O halde yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı açık iki kümenin birleşimi olarak açıktır ve dolayısıyla $p (O) \subset P^m$ açıktır. Benzer şekilde p , O nun açık alt kümelerini $p (O)$ nun açık alt kümelerine götürür. O halde $p : O \to p (O)$ bir homeomorfizmadır. S^m manifold olduğundan O kümesi $\mathbb{R}^m$'ye homemorfik olarak seçilebilir.

Bunun sonucu olarak herhangi bir $[x] \in P^n$ noktasının $p (O)$ ile gösterdiğimiz ve $\mathbb{R}^n$'ye homeomorfik olan açık bir komşuluğu bulunmaktadır. Böylece P^m, m-boyutlu bir topolojik manifolddur.

Aşağıda bazı 2-boyutlu topolojik manifold örnekleri bölüm uzayı şeklinde sıralanmıştır.

Örnek 5.2.2:

Şekil 5.1'deki dikdörtgeni düşünelim. Oklar hangi kenarın, hangi kenar ile özdeşleşeceğini göstermektedir. Bu özdeşleşme sonunda oluşacak uzay, kesik silindire homeomorfiktir

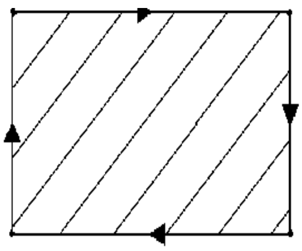


Şekil 5.1 Kesik silindirin oluşumu.

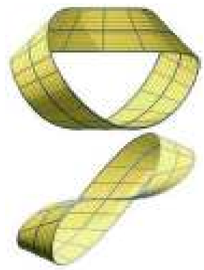
Örnek 5.2.3:

Şekil 5.2 ’deki dikdörtgeni düşünelim. Okun yönü özdeşleşen kenarları ve özdeşleşme yönünü göstermek üzere bu özdeşleşme sonunda oluşan bölüm uzayı **Möbius şeridine** homeomorfiktir.

Möbius şeridi bir tek yüzü, bir tek kenarı bulunan yüzeydir. Dikdörtgen şeklindeki bir kağıt şeridinin, bir kısa kenarını bir tam devir yaptırıp, diğer kenarıyla birleştirilince tek yüzlü Mobius Şeridi elde edilir. Mobius Şeridi; kenarı düğüm yapmayan ve sürekli biçim değiştirerek çember haline gelebilen bir eğridir.



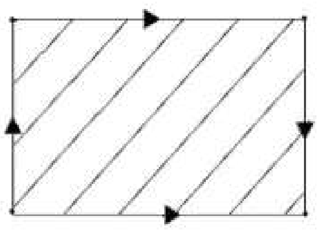
Şekil 5.2 Möbius şeridinin oluşumu.



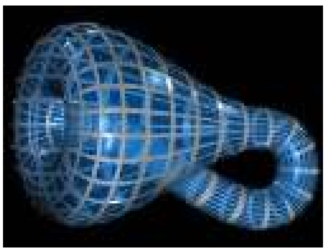
Şekil 5.3 Möbius şeridinin üç boyutlu hali

Örnek 5.2.4 :

Klein şişesi, ünlü Matematikçi Klein tarafından keşfedilmiştir. Klein şişesi, dışı olan; ama içi olmayan bir şişedir. Kendisinin içinden geçer. Su konulmaya çalışılsa konulan yerden geri dökülür.



Şekil 5.4 Klein şişesinin oluşumu



Şekil 5.5 Klein Şişesinin Üç Boyutlu Hali

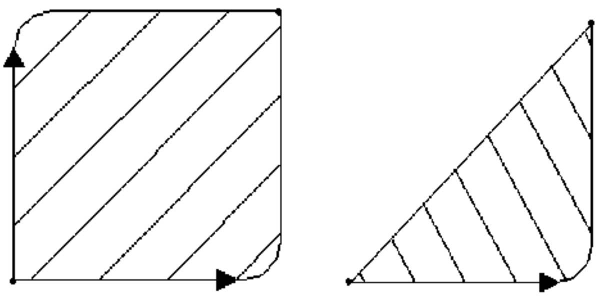
Klein şişesi, S^2 küre yüzeyinden iki farklı dairenin çıkarılması ve yerlerine birer Möbius şeridi eklenmesiyle oluşan uzaya homeomorfiktir.

Aslında Klein şişesinin iki Möbius şeridinin sınırları boyunca birbirine eklenmesiyle oluşan uzaya homeomorfik olduğunu göstereceğiz. Buradan, oluşan uzayın iki Möbius şeridinin dikdörtgensel ince bir şeride eklenmesiyle oluşan uzaya da homeomorfik olacağı açıktır. Buradan da dikdörtgensel ince şeridin, iki farklı daire çıkarılmış küre yüzeyine homeomorfik olacağı açıktır.

Şekil 5.6 Klein şişesi boylamasına ikiye kesildiğinde iki adet Mobius şeridi elde edilir.

Örnek 5.2.5 :

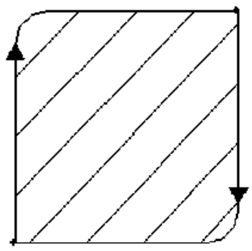
Şekil 5.7'ü düşünelim. Verilen özdeşleşme sonunda oluşan bölüm uzayı küreye homeomorfiktir.



Şekil 5.7 Kürenin oluşumu.

Örnek 5.2.6 :

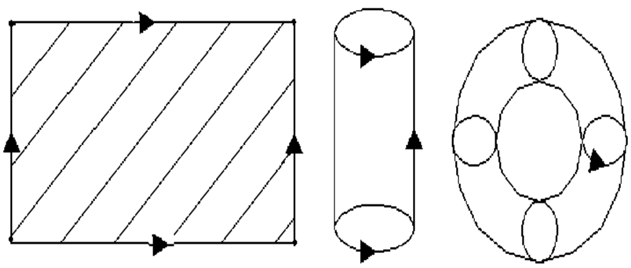
Şekil 5.8' teki şekli düşünelim. Verilen özdeşleşme sonunda oluşan bölüm uzayı P^2 Projektif düzlemine homeomorfiktir (Kahn 1995).



Şekil 5.8 Projektif düzlemin oluşumu.

Örnek 5.2.7 :

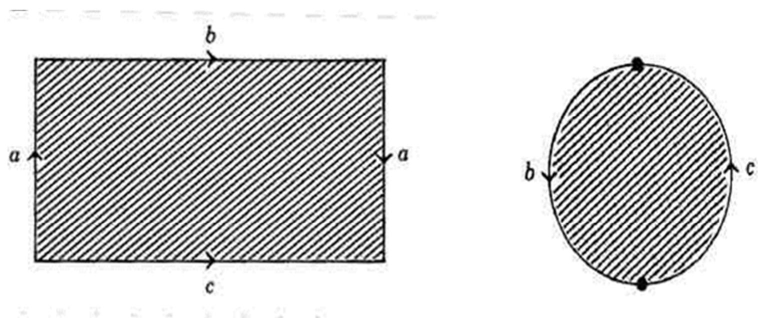
Şekil 5.9 deki kareyi düşünelim. Verilen özdeşleşmeler sonunda oluşan bölüm uzayı tor yüzeyine homeomorfiktir.



Şekil 5.9 Tor yüzeyinin oluşumu.

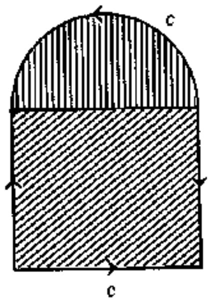
Örnek 5.2.8 :

P^2 projektif düzlemi S^2 küre yüzeyinden bir açık dairenin çıkarılması ve bu çıkarılan yere Möbius şeridinin eklenmesi ile oluşan uzaya homeomorfiktir. Elde edilen yüzeyin P^2 ye homeomorfik olduğunu göstermek için Möbius şeridini ve ona eklenecek daireyi Şekil 5.10' daki gibi temsil edelim.



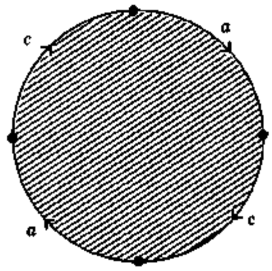
Şekil 5.10 Bir Möbius şeridi ve ona eklenecek bir daire (Kahn,1995).

Eğer şekil 5.10’ daki iki *b* yi özdeşleştirirsek, Şekil 5.11’ deki uzayı elde ederiz.



Şekil 5.11 İki *b* nin özdeşleştirilmesi (Kahn,1995).

Hatta sırasıyla *c* lerin yönünü değiştirirsek sonuçta değişen bir şey olmaz. O halde elde edilen uzay Şekil 5.12’ deki uzaya homeomorfiktir.



Şekil 5.12 *c*’lerin yönünün değişmiş hali (Kahn, 1995).

Şekil 5.12’deki dairenin sınırındaki başlangıca göre simetrik noktalar özdeşleşmiş olacağından sonuç P^2 projektif düzlemidir.

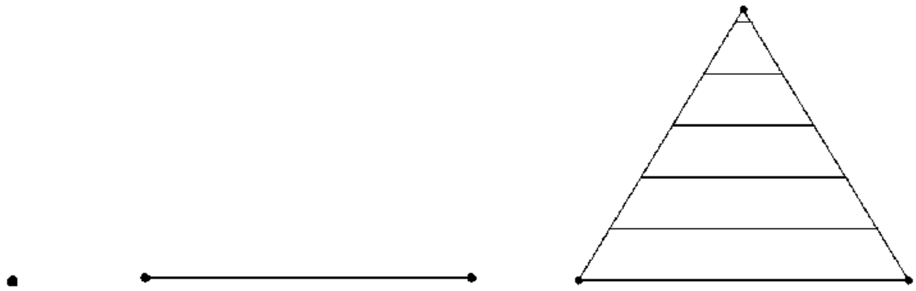
5.3 İKİ BOYUTLU KOMPAKT MANİFOLDLARIN SINIFLANDIRILMASI

Tanım 5.3.1: 2-Kompleks diye adlandıracağımız ***Simpleksel Kompleks (Simplicial Komplex)*** noktaların veya *I* aralıklarının veya üçgenlerin (içi dahil) ayrık birleşimlerinin verilen bir denklik bağıntısına göre bölüm uzayıdır. Bu denklik bağıntısı :

i) Ya; köşe noktaları başka köşe noktalara özdeş kılar (Örneğin; farklı aralıkların uç noktalarını veya üçgenin köşe noktalarını).

ii) Ya da; farklı üçgenlerin birer kenarlarını birbirine lineer olarak özdeş kılar (veya hiçbir özdeşleştirme yapmaz).

Örnek 5.3.1 En basit örnekler, Şekil 5.13 de görüldüğü gibi bir nokta kapalı aralık veya bir üçgendir. Bunların herbirine ***simpleks*** diyeceğiz. Örneğin bir nokta 0-simplekstir, bir aralık 1-simplekstir. Başka bir örnek üçgensel prizma yüzeyidir. Bu yüzeyde 4 köşe, 6 kenar (veya aralık) ve 4 de üçgen bulunmaktadır. Bu üçgenlerin köşelerini özdeşleme bağıntısına göre farklı 4 üçgenin bir bölüm uzayıdır.



Şekil 5.13 0 , 1 ve 2 kompleks

Bir 2-kompleksdeki bazı simplekslerin birleşiminden oluşan kümeye kompleksin ***alt kompleksi*** denir.

Teorem 5.3.1: *M* kompakt, bağlantılı ve 2-boyutlu bir topolojik manifold olsun. Bu manifoldun 2-kompleks olduğunu düşünelim. Bu durumda *M*,

$$D^2 = \{(x , y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

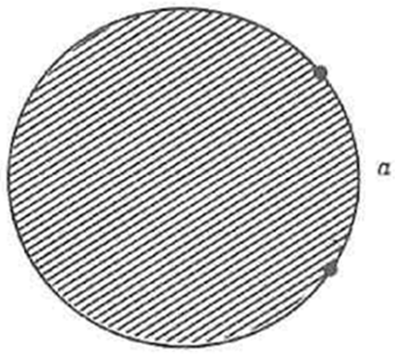
dairesinin bir bölüm uzayıdır. Burada denklik bağıntısı D^2 nin sınırı olan çember üzerindeki sonlu sayıda kapalı aralık çiftlerinin özdeşleştirilmesiyle oluşur. [7]

İspat : *M'*nin 2-kompleks olan ve 2-daireye homeomorfik olan tüm alt kümelerinin ailesini düşünelim. ***M,*** 2-simplekslerin sonlu sayıda birleşimlerinden oluşan bir 2-kompleks olduğundan, yalnızca sonlu sayıda alt kompleks vardır. Her tek 2-simpleks veya üçgen *D* ye homeomorfik olduğundan, *M'*nin böyle alt kümelerinin ailesi boş kümeden farklıdır.

M de simplekslerin (kenarlar, köşeler ve üçgenler) D ye homeomorfik böyle bir maksimal K kompleksi seçelim. Burada maksimalin anlamı; K kompleksinden daha büyük ve D ye homeomorfik olan başka bir kompleks olmamasıdır. Böyle bir maksimal K nın varlığı açıkça bellidir, çünkü M de sadece sonlu sayıda simpleks vardır.

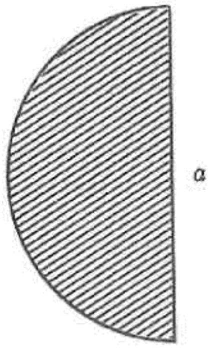
Eğer L, D ye homeomorfik olacak şekilde M nin bir alt kompleksi (ya da bir kompleksi) ve T, L ile bir kenarı ortak ve bu kenar L ile lineer olarak özdeş ve L ye yalnızca bu kenar boyunca değmek üzere bir üçgen olsun. Bu durumda $L \cup T$, D ile homeomorfiktir. İspatın en önemli adımı olan bu durumu, adım adım ispatlayalım.

L'nin D ye homeomorfik olduğu veriliyor. T üçgeninin ekleneceği kenar sınırdaki a yayına homeomorfiktir.



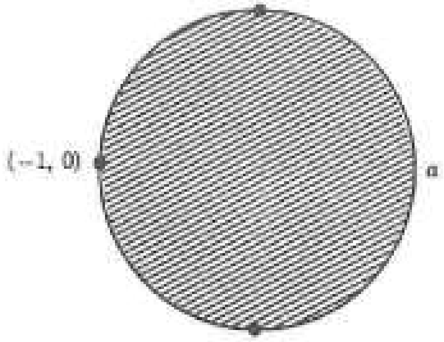
Şekil 5.14 D nin sınırında T nin ekleneceği a aralığı (Kahn, 1995)

Bu da $\{ (x , y) : x^2 + y^2 \leq 1 , x \leq 0 \}$ yarı dairesine homeomorfiktir ve burada $\{(0, y) : -1 \leq y \leq 1 \}$ 'e karşılık gelmektedir.



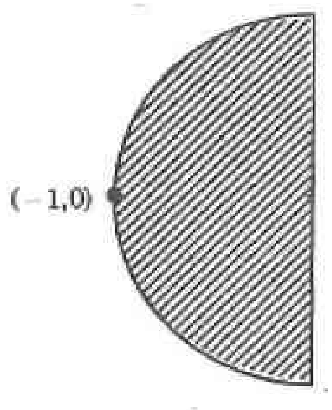
Şekil 5.15 D ye homeomorfik yarı daire (Kahn, 1995).

Şekil 5.16 ‘ı Şekil 5.17 ‘ye homeomorfik olacağı açıktır. Bunu a yayını dairenin sınırının



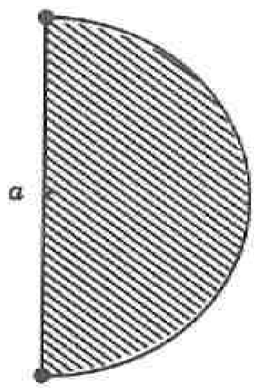
Şekil 5.16 D ye homeomorfik daire (Kahn, 1995).

yarısı alarak kolayca görebiliriz.



Şekil 5.17 Yarı daire (Kahn, 1995).

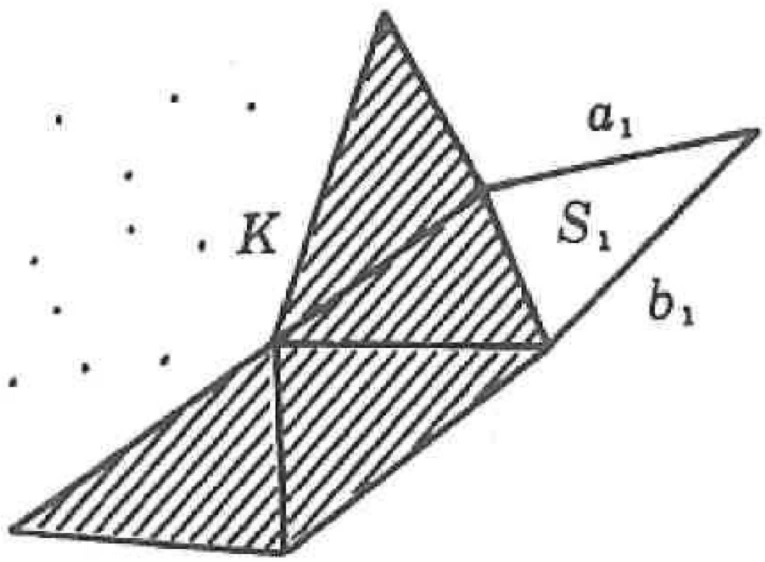
Diğer yandan, K ya eklemek ya da a kenarı boyunca özdeşleştirmek istediğimiz tek üçgen dairenin diğer yarısına homeomorfiktir.



Şekil 5.18 Üçgenin homeomorfik olduğu dairenin diğer yarısı (Kahn, 1995).

Şekil 5.17 ile Şekil 5.18' in birbirine a kenarı boyunca özdeşlenmesi sonucu oluşan uzay yani; K ile bir üçgenin birleşimi tam daireye homeomorfiktir.

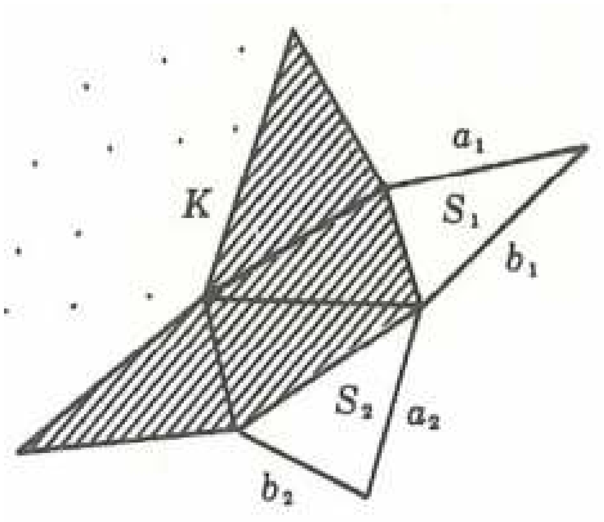
İspatı tamamlamak için, T_1 , T_2 , … , T_j , M de olup da maksimal K kompleksinde olmayan üçgenler olsun. M bağlantılı olduğundan, her bir T_i nin $K \cup T \cup ....\cup T_{i\text{-}1}$ ile bir yüzü (kenarı) paylaşacak şekilde sıralandığını kabul edebiliriz. T_1 , K'nın yalnızca bir yüzü ile özdeşleşecek şekilde K'ya ekleyelim. Geri kalan yüzleri özdeşleştirmiyoruz ve böylece oluşan yeni simpleksi S_1 ile gösterelim. Buradan, taralı kısım K yı göstermek üzere Şekil 5.19'u elde ediyoruz.



Şekil 5.19 S_1 simpleksi (Kahn, 1995).

$K \cup T_1$, elde edecek şekilde özdeşleştirilecek olan yeni kompleksin yüzlerini a_1 ve b_1 olarak adlandıralım. Önceki açıklamalarımız $K \cup S_1$ in D ye homeomorfik olduğunu gösterir.

T_2 , $K \cup T_1$ ile bir yüz boyunca kesişmek zorunda olduğundan, şekil 5.20 deki gibi, bir S_2 üçgenini $K \cup S_1$ e bir yüz boyunca olan noktaları özdeşleştirerek, fakat kalan yüzleri daha sonra özdeşleştirecek şekilde ekleyelim.



Şekil 5.20 S_2 in eklenmesi (Kahn, 1995).

Yine önceki açıklamalarımızdan $K \cup S_1 \cup S_2$, D ye homeomorfiktir ve tüm yüzler boyunca uygun özdeşleştirmeler yapılarak $K \cup T_1 \cup T_2$, $K \cup S_1 \cup S_2$ in bölüm uzayıdır. Elbette S_2 , K ile değil de S_1 ile bir kenarını paylaşabilir. Burada verilen bir kenar boyunca ancak iki üçgenin kesişebileceğini not edelim. Bizim uzayımız 2-boyutlu bir manifold olduğundan bunu bir noktanın bir komşuluğundan uygun bir aralığı çıkararak görmek mümkündür.

Böylece devam edilirse, $K \cup T_1 \cup \ldots\ldots \cup T_j$ sadece sınırdaki yay (kenar) parçalarının özdeşleştirilmesi ile D ye homeomorfik olan $K \cup S_1 \ldots \cup S_j$ nin bölüm uzayıdır. Fakat $M = K \cup T_1 \cup \ldots\ldots \cup T_j$ olduğundan ispat biter. Bu kompleks kavramını açıkça kullandığımız tek yerdir.

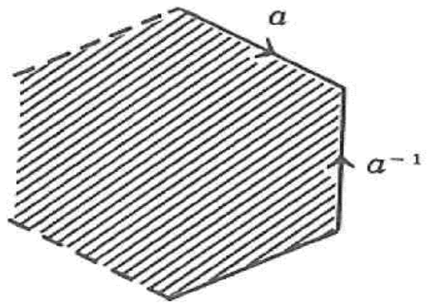
Teorem 5.3.2: Kompleks olan herhangi bir kompakt, bağlantılı ve 2-boyutlu M manifoldu 2-boyutlu küre yüzeyinden sonlu sayıda dairesel deliğin çıkarılması ve yerlerine;

i) her bir ucu bir çift delik ile özdeşleşecek şekilde kulp (kesik silindir) eklenmesi veya

ii) bir deliğe bir cross-cap (veya Möbius şeridi), yani Möbius şeridinin sınırı, dairesel deliğin sınırı ile özdeşleşecek şekilde eklenmesi ile oluşan yeni uzaya homeomorfiktir. [7]

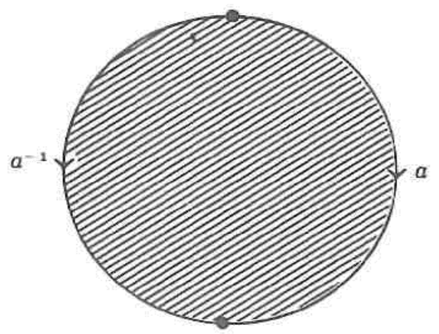
İspat: Teorem 5.3.1 den *M'*nin sınırdaki yay parçalarının özdeşleştirilmesi ile 2-dairenin bölüm uzayı olduğunu biliyoruz. İddiamız; *M'*nin bir *D* dairesine üç tip özdeşleme yoluyla homeomorfik olduğudur.

a) Ters yönde yönlendirilmiş ve özdeşleştirilecek olan iki komşu kenar (a^{-1} ile a nın ters yönde oklandırılmasını göstereceğiz).



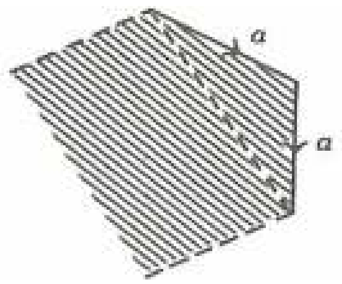
Şekil 5.21 Ters yönde komşu iki kenar (Kahn, 1995)

En basit durumda, şekil 5.22 S^2 küresini verir.



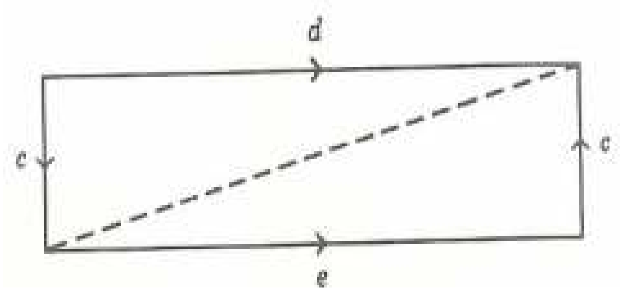
Şekil 5.22 Kürenin oluşumu (Kahn, 1995).

b) Aynı yönde yönlendirilmiş ve özdeşleştirilecek olan iki komşu kenar şekil 5.23 'de gösterilmiştir.



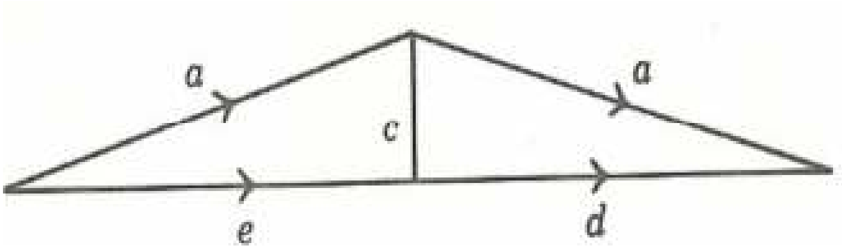
Şekil 5.23 Aynı yönde komşu iki kenar (Kahn, 1995).

Bu durum bir deliğe eklenmiş bir cross-cap ya da Möbius şerididir. Kesikli doğru, bir deliği ve Möbius şeridini oluşturan *a'* lar ile çevrelenmiş bir üçgeni temsil eder. Bunu görmek için;



Şekil 5.24 Möbius şeridi (Kahn, 1995).

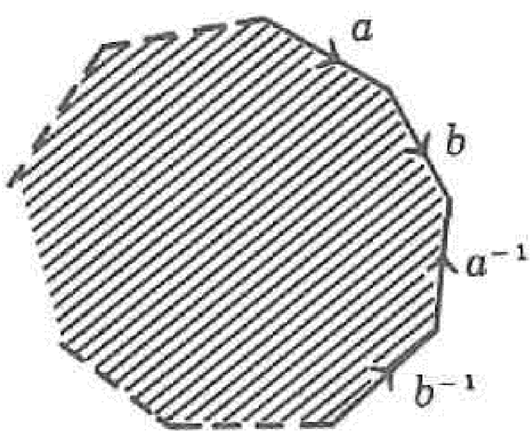
şekil 5.24'deki gibi bir Möbius şeridi alıp, kesikli doğru boyunca keselim, özdeşleşen kenarları iki *a* ile gösterelim. Şekil 5.25 aynı uzayın yeni bir gösterimidir.



Şekil 5.25 Möbius şeridinin değişik bir gösterimi (Kahn, 1995).

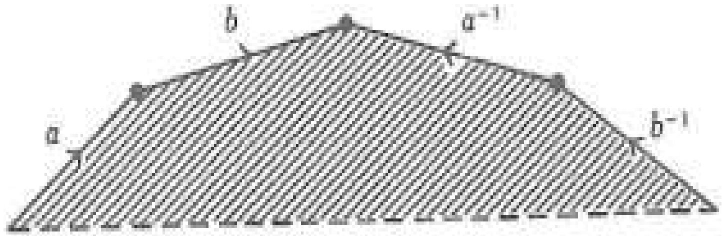
e+d yi Şekil 5.23 deki kesikli çizgi olarak düşünürsek açıkça bir sınır çemberi elde ederiz.

c) Şekil 5.26'daki gibi *a* ve *b* sırasıyla a^{-1} ve b^{-1} ile özdeşleştirilecek olsun.



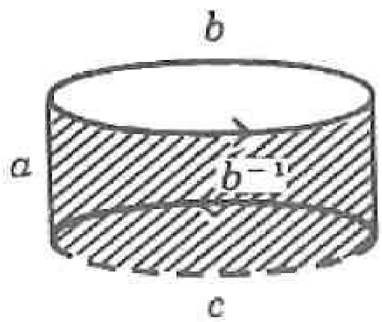
Şekil 5.26 *a* ve *b* nin sırasıyla a^{-1} ve b^{-1} ile özdeşleştirilmesi (Kahn, 1995).

Bunun iki dairesel deliğe kulp (kesik silindir) eklenmesi olduğunu iddia ediyoruz. Bunu görmek için ilgili kısmı çıkarırsak aşağıdaki şekil 5.24' i elde ederiz.



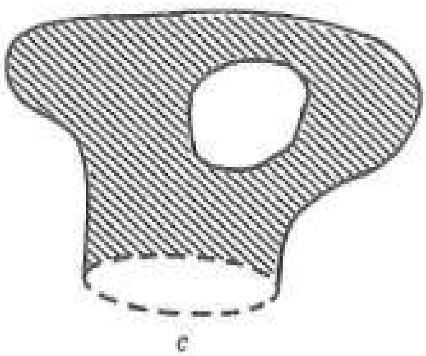
Şekil 5.27 , şekil 5.26'daki ilgili bölgenin kesimi (Kahn, 1995).

(Burada c kestiğimiz doğrudur) Eğer a ile a^{-1} yı özdeşlersek aşağıdaki şekil 5.28 'i elde ederiz:



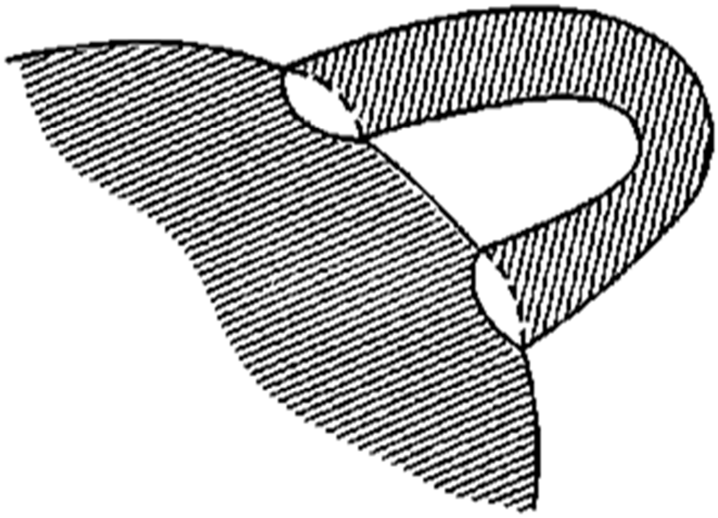
Şekil 5.28 a ve a^{-1} in özdeşleştirilmesi (Kahn, 1995).

b ve b^{-1} özdeşleştirilirse yani b^{-1}, b nin üzerine yapıştırılırsa şekil 5.29' da olduğu gibi c ye yapışık bir patlak tor elde ederiz.



Şekil 5.29 Patlak Tor (Kahn, 1995)

Böylece bir patlak torun bir küredeki delik ile özdeşleştirilmesinden elde edilen uzayın, bir kulpun bir kürenin iki deliğine eşleştirilmesinden elde edilen uzaya homeomorf olduğunu göstermek kolaydır. Yani iddiamız doğrudur.



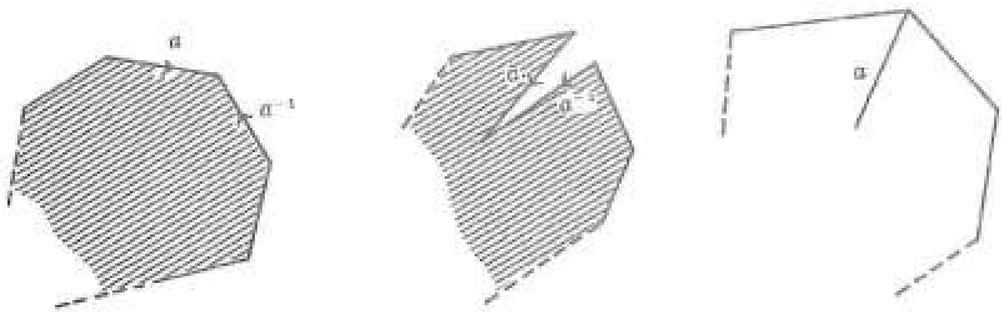
Şekil 5.30 Küre yüzeyine bir kulp takma (Kahn, 1995).

Eğer *M'*nin bu üç çeşit özdeşleşmeler yoluyla bir daireye denk olduğunu gösterebilirsek; sonuca ulaşırız. İspatın kalanı, bu üç çeşit forma sistematik indirgeme olacaktır. Bunu adım adım gösterelim:

D dairesi örneğin $aba^{-1}bcc^{-1}$ ile gösterebileceğimiz kenarlara sahip olsun. Bu $aba^{-1}bcc^{-1}$ ifadesine *D* dairesi için bir ***kelime*** diyeceğiz.

Bir harfle gösterilen her kenar iki defa oluşacaktır. Çünkü her özdeşleştirme iki kenarı birbirine yapıştırır. a saat yönünde a^{-1} ise saat yönünün tersine yönlendirilmiş demektir. Adımlarımız bir kelimeyi daha basit bir forma indirgeyecektir.

i) Eğer en az dört kenar varsa a ve a^{-1} tipindeki komşu kenarlar kelimeden çıkarılabilir. Bu durum, en iyi aşağıdaki şekil 5.31 le açıklanabilir.



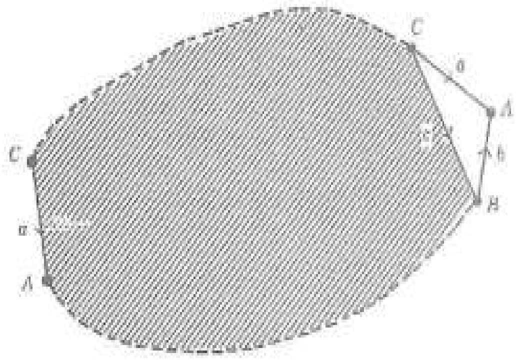
Şekil 5.31 Komşu kenarların kelimeden çıkarılması (Kahn, 1995).

Ters yönü göstermek için a^{-1} yazmamız yeterlidir; ancak karmaşıklığı önlemek için Okları da ekleyebiliriz.

Kısaca, eğer aa^{-1} varsa hemen özdeşleştirmeyi yaparız ve böylece geriye iki kenar daha eksik olan bir daire kalır, şekil 5.31’ deki sağdaki şekil.

ii) İddia ediyoruz ki *D* nin sınırındaki tüm kenarlar, *D* den *M* elde edilirken birbirine özdeşleştirilmiş kabul edilebilir.

Özdeşleşmemiş iki kenar varsa, bunlar *A* ve *B* ile adlandırılan komşu iki kenar olmak zorundadırlar.

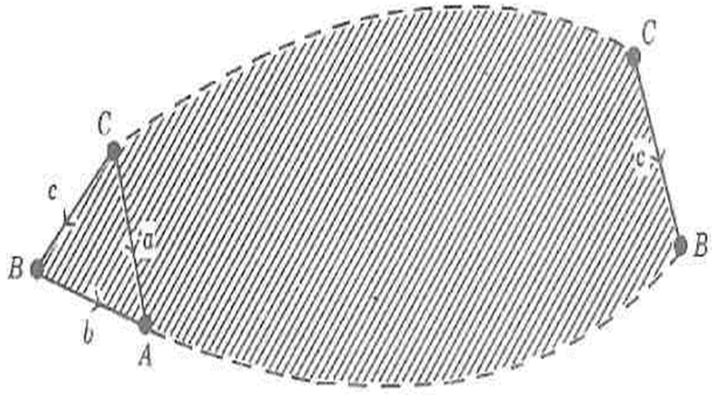


Şekil 5.32 Özdeşleşmemiş komşu iki kenar (Kahn, 1995).

Bu durumun Şekil 5.32’deki gibi olduğunu varsayabiliriz. Burada *C* ile *B* yi birleştirecek şekilde bir *c* doğrusu ekleyelim.

Bir önceki adımımız gereği saat yönündeki a ile saat yönünün tersine yönlendirilmiş b nin özdeşleştirilmemiş olduğunu kabul edebiliriz, yani a şeklin solunda gösterdiğimiz gibi başka bir kenar ile özdeşleşsin.

ABC üçgenini kesip çıkararak sola yapıştıralım.



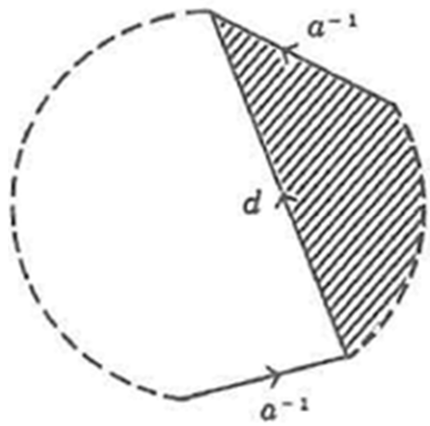
Şekil 5.33 *ABC* üçgeninin kesilip eklenmesi (Kahn, 1995).

Her iki c de özdeşleştirileceğinden manifoldu veya bölüm uzayını değiştirmiş olmayız.

Yeni şeklimiz A ile özdeş olacak şekilde bir tane daha az köşeye ve B ile özdeş olacak şekilde bir tane daha fazla köşeye sahiptir. Yukarıdaki adım *i)* nin üst üste tekrarlanması sonucu bir tek A köşesine özdeş olan köşelerin sayısını sıfıra indirgeyebiliriz. Böylelikle tüm kenarların özdeşleşmiş olduğu görülür. Doğal olarak bu yeni daire, sınırdaki özdeşleştirmelerle ilk daireden tamamen farklıdır. Fakat her durumda M manifoldu her birinin bölüm uzayına homeomorfik olacaktır.

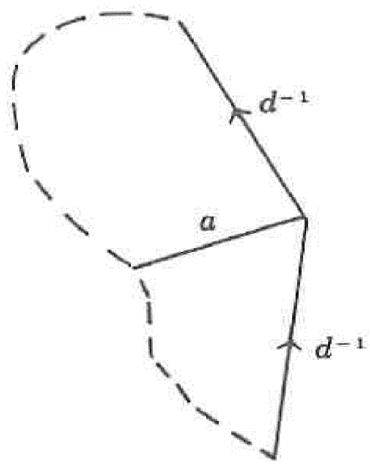
iii) Varsayalım ki; aynı kuvvette iki a bulunsun. Örneğin, $abcb^{-1}c^{-1}a$. O zaman bu iki a nın komşu olduğunu kabul edebiliriz.

Şekil 5.34 deki d'yi ve taralı bölgeyi göz önüne alalım. Bir sonraki adımı açıklayabilmek için d'yi ekleyip tarama yapalım.



Şekil 5.34 Aynı üslü iki *a* nın olması durumu (Kahn, 1995).

Şekil 5.34’ deki gibi *d* boyunca kesip, şeklin kalanını a^{-1} boyunca yapıştıralım.

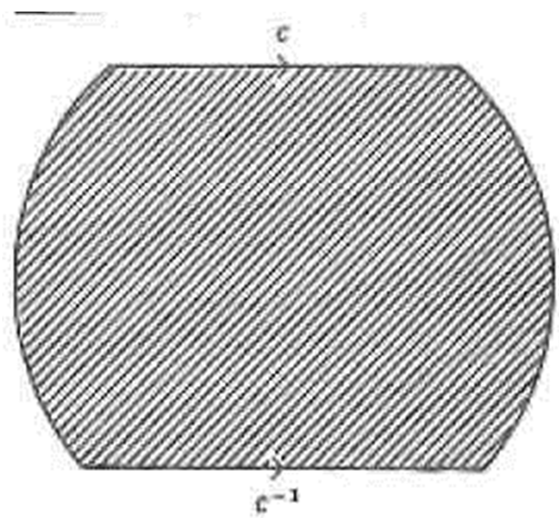


Şekil 5.35 Taralı bölgenin kesilip eklenmesi (Kahn, 1995).

Sonuç, uygun özdeştirmelerle *M’*ye homeomorfik olan bir dairedir. a^{-1} dışındaki hiçbir kenar ve sıralamalar değiştirilmemiştir. Ancak iki a^{-1} yerine komşu olan iki d^{-1} gelmiştir Bu işlemi böyle tüm çiftler komşu olana kadar tekrarlayabiliriz.

Eğer tüm çiftler komşu ve aynı kuvvette iseler örnek 5.2.9 ve bu ispattaki b) şıkkından *M* bazı dairesel delikler çıkarılmış küre ve çıkarılan bu yerlere Möbius şeridi eklenmiş uzaya homeomorfiktir. Böylece bu durumdaki ispat tamamlanır.

iv) Şimdi de şekil 5.36 daki gibi komşu olmayan bir çift c ve c^{-1} kenarları olduğunu kabul edelim. Burada c ve c^{-1} arasında bir d olduğunu ve c^{-1} den sonra d^{-1} in geldiğini iddia ediyoruz.



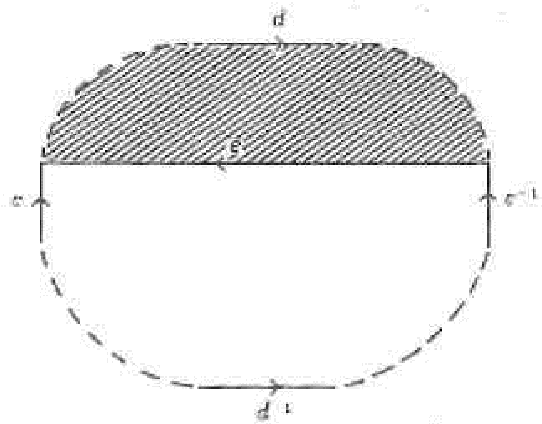
Şekil 5.36 Komşu olmayan c ve c^{-1} kenarlarının olması hali (Kahn, 1995).

Adım *iii)* de ispatladığımız gibi a ve a çifti komşudur. Sağ yarı çemberde aa şeklinde bir tek komşu çift olduğunu kabul edelim. O halde sol yarı çemberdeki hiç bir kenar, sağ yarı çemberdeki hiçbir kenar ile özdeşleştirilemez.

Buradan sağ yarı çemberdeki her köşe ve sol yarı çemberdeki her köşe kendi aralarında özdeşleşmiştir sonucuna varılır. Buradan c'nin iki köşesinin özdeşleşmediği sonucu çıkar ki; bu da adım *ii)* ile çelişir.

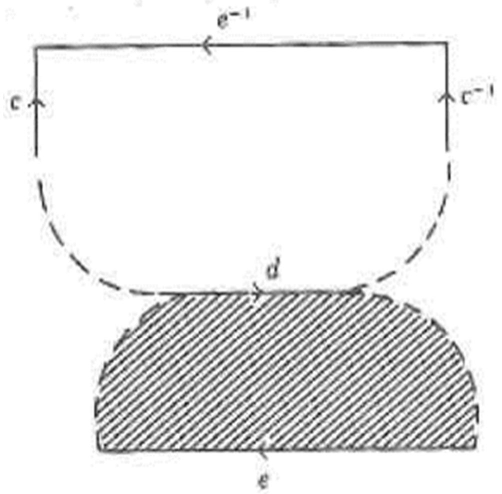
Böylece sağ yarı çemberde, sol yarı çemberdeki d^{-1} ile özdeşleşecek bir d vardır, (d^{-1} olmak zorundadır . Çünkü eğer d olsaydı adım *iii)* gereği d ile d komşu olacaklardı).

v) c ve d , ...c....d....c^{-1}....d^{-1} sıralamasında ise bunu ....$cdc^{-1}d^{-1}$...sıralamasında olacak şekilde dönüştürebiliriz. Bunu aşağıdaki şekiller dizisi ile açıklayabiliriz:



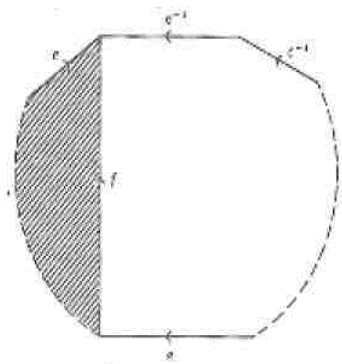
Şekil 5.37 ....*c*....*d*.... c^{-1} ….d^{-1} nin bir temsili (Kahn, 1995).

Şekil 5.37 deki *e* ve taralı bölge bir sonraki şekil 3.38' i açıklamak için verilmiştir.



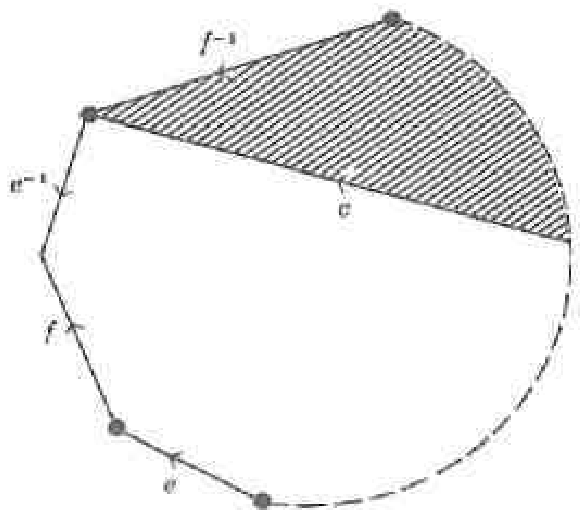
Şekil 5.38 İki d'nin özdeşleşmesi (Kahn, 1995).

Buradan şekil 5.39 elde edilir.



Şekil 5.39 İki d' nin özdeşleşmesinin başka bir temsili (Kahn, 1995).

Bir kez daha f boyunca kesip, c boyunca yapıştıralım:



Şekil 5.40 ...$efe^{-1}f^{-1}$... formuna getirme (Kahn, 1995).

Bu ....c....$d\ c^{-1}\ d^{-1}$ …ifadesini ....$efe^{-1}\ f^{-1}$... ifadesi ile değiştirir. Bu işlem sırasında *aa* tipindeki çiftlerin bir değişikliğe uğramayacağı kolayca görülebilir.

Buradan şu sonuca varırız: Ya iki kenarımızın olduğu durumda (ki bu durum küre durumu) ya da örnek 5.2.8' deki gibi bir projektif düzlem = bir cross-cap eklenmiş küre olur ki bu durumda *i)* adımımız geçersizdir ya da ispatın b) şıkkındaki gibi olası cross-caplar eklenmiş küre veya ispatın c) adımında olduğu gibi kulplar eklenmiş küre durumları mevcuttur. Burada bir Möbius şeridi (vaya cross-cap) nin *aa* ile ve bir kulpunda $cdc^{-1}d^{-1}$ ile gösterildiğini de belirtelim.

Teorem 5.3.2 aslında tam değildir. Çünkü bu teoremdeki kompleks olan kompakt 2-manifoldların tanımlanması tek değildir. Aynı 2-manifoldun mümkün olan tanımlamaları arasındaki esnekliği aşağıdaki gibi açıklayabiliriz.

Teorem 5.3.3: 2-manifolda eklenmiş herhangi üç cross-cap (Möbius şeridi) kaldırılabilir ve yerine bir kulp ve bir cross-cap konularak başlangıçdaki manifolda homeomorfik bir manifold elde edilebilir.

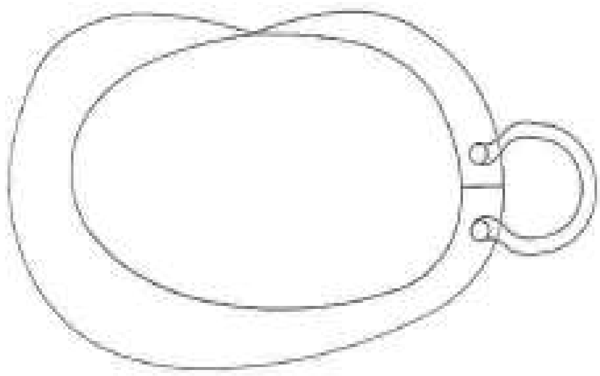
İspat: İspat için aşağıdakileri göstermek yeterlidir.

a) Bir kulp eklenmiş Möbius şeridi (yani bir kulp ve bir cross-cap) ile

b) Bir Klein şişesi eklenmiş Möbius şeridi homeomorfiktir.

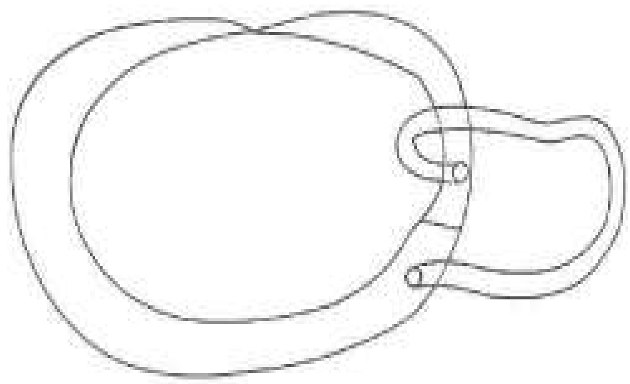
Aşağıdaki durumları göz önüne alalım.

i)



Şekil 5.41 Bir Möbius şeridine bir kulp eklenmesi (Kahn, 1995).

ii)



Şekil 5.42 Bir Möbius şeridine bir Klein şişesinin eklenmesi (Kahn, 1995).

Şekil 5.41 ve Şekil 5.42 yukarıdaki a) ve b) şıklarını temsil ederler. Möbius şeridi yalnızca bir yüze sahip olduğundan b) şıkkındaki ayaklardan biri Mobius şeridi boyunca kaydırılırsa a) ve b) durumunun aynı (homeomorfik) olduklarını görürüz. Bu da ispatı tamamlar.

BÖLÜM 6

DEĞERLENDİRME

Sonuç olarak; herhangi 2-boyutlu bir kompakt manifoldun Küre, Tor, ve Projektif düzlemin uygun şekilde birbirine eklenmesi ile elde edilebileceğini göstermiş olduk.

Yukarıda, verilen iki boyutlu kompakt küre, tor, projektif düzlem ve Klein şişesi manifoldlarının birbirine homeomorfik olmayan 2-boyutlu manifoldlar olduğu gösterilmiştir (Kahn, 1995).

Yönlendirilebilir ve 2-boyutlu bir kompakt manifoldun küre, tor yada en genel anlamda sunlu $n \geq 2$ delikli tor yada bunlardan birine homeomorfik olduğu bilinmektedir. Yönlendirilemez durumda yani kompakt yüzeyin bir Möbius şeridi içermesi durumunda yüzeyin Projektif düzlem ya da sonlu tane projektif düzlemin birbirine eklenmesinden oluşan yüzeye homeomorfik olduğu bilinmektedir. Bu ve benzeri sonuçlar için Armstrong (1983), Kinsey (1993), Massey (1997) kaynaklarına bakılabilir.

Daha yüksek boyutlu manifoldların sınıflandırılması halen açık bir problemdir. Hatta 3-boyutta bile sınıflandırma henüz tam anlamıyla yapılamamıştır. [5]

KAYNAKLAR

[1] Armstrong, M. A. ,1983 , *Basic Topology,* Springer-Verlag, New York, Inc., p. 251.

[2] Burns, K. and Gidea, M. , 2005 , *Differential Geometry and Topology,* Chapman &Hall / Crc, p. 389.

[3] Bülbül, A. , 2004 ,*Genel Topoloji,* Hacettepe Üniversitesi, Ankara, p. 312.

[4] Collins, G.P. (2004) "The Shapes of Space" Scientific American, Copyrıght 2004 Scıentific american, ınc. , p.(94-103)

[5] D.Kotschick , C. Neofytidis (2012) On The Three Manifolds Dominated By Crıcle Bundles (Germany U.) , p.(94-103)

[6] İ.M Singer , U.A Thape , 1967 , Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry, Springer – Verlag , Newyork , p. (109-152)

[7] Kahn, W. D. , 1995 , *Topology,* Dover Publications, Inc. , New York, p. 217.

[8] Kinsey, L.C. ,1993,*Topology Of Surfaces,* Springer-Verlag, New York, Inc., p. 279.

[9] Massey, S.W. ,1997, *A Basic Course in Algebric Topology,* Springer Verlag, New York Inc., p. 428.

[10] Sabuncuoğlu, A. , 2004 , *Diferensiyel Geometri,* Nobel Yayın Dağıtım, p. 593.

[11] Sergıı Kutsak (2012) Essential Manifolds With Extra Structures ,Topology and its Applications , 159 (10-11) ; 2635 - 2641

[12] William Jaco , 1977 , Lectures On Three - Manifold Topology Conference, Board of the Mathematical Sciences CBMS, (Number 53), p.(30-50)

Çiğdem ÇAMANLI, 1986 yılında Gaziantep' te doğdu. İlk ve orta öğrenimini aynı şehirde tamamladı. Gaziantep Anadolu Lisesi'nden mezun olduktan sonra; Osman Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne girdi ve 2008 yılında mezun oldu. 2009 yılında Gazi Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsünden pedogojik formasyonunu aldı. 2010 yılında itibaren Gaziantep Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans programına devam etmektedir. Şuan Mardin-Kızıltepe Şenyurt Lisesinde öğretmen olarak çalışmaktadır.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Merkez mah. Vatan cad. Siyana 21 sitesi A blok Kat: 9 D:18

Mezitli/MERSİN

Ev Tel : 0 (324) 358 40 41

Tel : 0 (506) 946 07 40

E-Posta: cilek1016@hotmail.com