TEMMUZ, 2013 **Yüksek Lisans – Matematik Bölümü** **TÜLAY ÖZDEN**

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIR ŞARTLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN SÜREKSİZ DIRAC SİSTEMİ İÇİN ÇÖZÜMÜN VARLIĞI

MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TÜLAY ÖZDEN

TEMMUZ 2013

Sınır Şartlarında Spektral Parametre Bulunan Dirac Sistemi için Çözümün Varlığı

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Abdullah KABLAN

Tülay ÖZDEN

Temmuz 2013

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tezin Adı: Sınır Şartlarında Spektral Parametre Bulunan Süreksiz Dirac Sistemi için Çözümün Varlığı

Öğrencinin, Adı Soyadı: Tülay ÖZDEN

Tez Savunma Tarihi: 4 Temmuz 2013

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Doç. Dr. Metin BEDİR
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Abdullah KABLAN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmzası
Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ	……………………
Doç. Dr. Okan ÖZER	……………………
Yrd. Doç. Dr. Abdullah KABLAN	……………………

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Tülay ÖZDEN

ÖZET

SINIR ŞARTLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN SÜREKSİZ DIRAC SİSTEMİ İÇİN ÇÖZÜMÜN VARLIĞI

ÖZDEN, Tülay

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Abdullah KABLAN

Temmuz 2013

32 sayfa

Bu tez çalışmasında sınır şartlarında spektral parametre bulunan süreksiz bir Dirac sistemi için çözümün varlığı ve spektral bazı özellikleri incelenmiştir. Öncelikle birinci bölümde problemle ilgili literatür araştırması yapılarak incelenecek problem tanıtılmıştır. İkinci bölüm de tez çalışması için gerekli olan tanım, teorem ve kavramlar üzerinde durulmuş ve daha sonra Dirac operatörlerinin de temeli olan Sturm-Liouville operatörlerinin bazı spektral özellikleri verilmiştir. Son olarak yine bu bölümde Dirac operatörleri kısaca tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde ise incelenen problem için farklı bir iç çarpım uzayı tanımlanmış ve daha sonra bu uzayda çözümünün varlığı ispatlanmıştır. Özdeğerler için karakteristik fonksiyon da yine bu bölümde bulunmuştur. Sonuçlar bölümünde ise problem için bundan sonra yapılacak araştırmalar konusunda bazı bilgiler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Strum-Liouville operatörleri, Dirac operatörleri, Geçiş şartları, Spektral parametre bulunan sınır şartları.

ABSTRACT

EXISTENCE OF SOLUTİONS FOR A DISCONTINUITY DIRAC SYSTEM WITH SPECTRAL PARAMETER CONTAINED IN THE BOUNDARY CONDITIONS

ÖZDEN, Tülay

M.Sc. in Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Abdullah KABLAN

June 2013

32 pages

In this thessis, the existence of solution and some spectral properties for a discontinuity Dirac system with spectral parameter contained in the boundary conditions are studied. First of all literature research and definition of considered problem are given in first section. In second section, focused on essential definitions, theorems and some consepts and then some spectral properties of Sturm-Liouville operators based olso Dirac operators are given. Additionally, Dirac operators are briefly introduced in this section. In the third section different definition of a inner product space for the considered problem is given and then existence of solution in this space is proven. Moreover, in this section, the characteristic function of eigenvalues is found. In the results section subsequent researchs for the problem are given.

Key Words: Strum-Liouville operators , Dirac operators, Transmission conditions, Eigen -parameter depend boundary conditions.

TEŞEKKÜR

Bu yüksek lisans çalışmamda bana yardımı ve desteği için saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Abdullah KABLAN' a, bu çalışma süresince manevi desteğiyle hep yanımda olan ailem ve isimlerini yazamadığım güzel insanlara en içten duygularımla sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SEMBOLLER LİSTESİ

A	Lineer operatör
$D(A)$	A operatörünün tanım kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	Elemanları reel değerli vektör uzayı
H	Hilbert uzayı
$\left\langle\, , \right\rangle_H$	İç çarpım
λ	Özdeğerler
$y(x,\lambda)$	Özfonksiyon
$\ell(.)$	Lineer operatör
L	Lineer operatör
$u(c\pm 0)$	Sağdan –Soldan türev
L_2	Karesi integrallenebilen fonksiyonlar kümesi
$C^{(n)}$	$n.$ mertebeden türevleri sürekli olan fonksiyonlar uzayı
W	Wronskian determinantı
$\left\Vert . \right\Vert$	Norm
$D(z_0,\delta)$	z_0 merkezli, δ yarıçaplı yuvar

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemleri teorisi ilk olarak 19. yüzyılın ortalarında Jacques Sturm (1803-1855) ve fransız matematikci Joseph Liouville'nin (1809-1882) çalışmalarına dayanmaktadır. Daha sonraki yıllarda birçok matematikçi başta E.C.Titchmarsh [1] ve Naimark [2] olmak üzere bu konuda birçok çalışma yapmıştır. Özellikle J. Sturm'un çalışmalarında ortaya çıkan

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

diferansiyel operatörü Sturm operatörü olarak bilinir ve uygulamalarda sık sık kullanılır. Bu operator genelde $H = L_2[a,b]$ Hilbert uzaylarında incelenmektedir. Levitan ve Sarqsjan [3] çalışmalarında bu operatörü $y(x)$ fonksiyonuna uygulayarak, $[a,b]$ aralığında

$$Ly = -y'' + q(x)y = \lambda y \tag{1.1}$$

denklemi ve $\alpha, \beta \in [0,\pi)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0 \\ y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

şeklinde sınır şartları veya

$$\begin{aligned} y(a) = y(b) \\ y'(a) = y'(b) \end{aligned} \tag{1.3}$$

şeklinde sınır şartlarını ele alarak L - operatörünün özdeğerleri, özfonksiyonları ve bunların asimtotik açılımları üzerine incelemeler yapmış ve bu konuda en önemli kaynaklardan biri olan çalışmalarını ortaya çıkarmışlardır. Bütün bu çalışmalara paralel olarak hem fizikte ortaya çıkan yeni somut problemler hem de Sturm- Liouville teorisinin iç talepleri doğrultusunda Sturm –Liouville problemleri farklı yönlerde genelleştirilmiştir. Bunlardan biri sınır şartlarında spektral parametre bulunduran Sturm–Liouville problemleridir. Bu konuda J. Walter [4] sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunan özdeğer problemleri için teorik-operator formülünü ortaya koyduktan sonra C.T. Fulton [5] çalışmasında

$$\tau u = -u'' + qu = \lambda u \tag{1.4}$$

$$\cos\alpha u(a) + \sin\alpha u'(a) = 0 \tag{1.5}$$

$$-(\beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b)) = \lambda(\beta_1^{'} u(b) - \beta_2^{'} u(b)) \tag{1.6}$$

poblemini ele almış Titchmarsh [1] de olan metodları bu problem taşımıştır. Burada $q(x)$ $[a,b]$ aralığında sürekli, $\alpha \in [0,\pi)$ ve $\beta_1, \beta_2, \beta_1^{'}, \beta_2^{'} \in \mathbb{R}$ dır. Daha sonra son yirmi yılda birçok matematiksel literatur bu konular üzerinde geliştirildi [6-8]. Son zamanlarda şüphesiz birçok ilgi çekici ve önemli çalışma olmasına ragmen biz burada son yıllarda oluşturulan birkaç çalışmaya değineceğiz. Ele alınan herhangi bir sonlu aralığın bir iç noktasında geçiş şartları olan ve sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunan Sturm-Liouville probleminin bazı spektral özellikleri ve çözümün varlığıyla ilgili bir çalışma O.Sh. Mukhtarov ve E.Tunc [9] tarafından yapıldı.Yine Kerimov [10] sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran Dirac sistemi ile ilgili bir çalışma yaptı.Ayrıca [11] da sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran Dirac sistemi için ters problem çalışıldı. Bizim bu çalışmadaki amacımız ise geçiş şartlarını kullanarak sınır şartlarında özdeğer-parametresi bulunduran süreksiz bir Dirac sistemi için çözümün varlığını göstermektir. Bu amaç için [9] da olan metod kullanıldı. Ayrıca

$$l(u) = Au'(x) - \mathrm{P}(x)u(x) = \lambda u(x) \tag{1.7}$$

Dirac sistemi ele alındı. Burada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & p_2(x) \end{pmatrix},$$

ve

$$u(x)=\begin{pmatrix}u_1(x)\\ u_2(x)\end{pmatrix}$$

dir. Dolayısıyla (1.7) sistemi açık olarak

$$\begin{matrix}u_2'(x)-\mathrm{p}_1(x)u_1(x)=\lambda u_1(x)\\ u_1'(x)+\mathrm{p}_2(x)u_2(x)=-\lambda u_2(x)\end{matrix},\quad x\in[a,c)\cup(c,b]$$

biçiminde yazılabilir. Yine çalışmamızda

$$\sin\alpha u_1(a)-\cos\alpha u_2(a)=0 \tag{1.8}$$

$$b_1u_1(b)-\mathrm{a}_1\,u_2(b)=-\lambda(\sin\beta u_1(b)-\cos\beta u_2(b)) \tag{1.9}$$

sınır şartlarını ve $x=c$ iç noktasında

$$\begin{matrix}u_1(c-0)=\gamma u_1(c+0)\\ u_2(c-0)=\gamma^{-1}u_2(c+0)\end{matrix} \tag{1.10}$$

geçiş şartlarını kullanacağız. Çalışmamız boyunca λ kompleks özdeğer parametresi, $p_i(x)$, $(\mathrm{i}=1,2)$ fonksiyonları $[a,\mathrm{c})]\cup(c,b]$ üzerinde sürekli , $p_i(\pm c)=\lim\limits_{x\to\pm c}p_i(x)$ var ve a_1, b_1, γ reel sayı, $\alpha,\beta\in[0,\pi)$ dir.

BÖLÜM 2

GENEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1: A H Hilbert uyazında tanımlı bir lineer operator olsun. $\mathrm{X} \neq \varnothing$ normlu uzay ve $A : D(A) \to X$ lineer operatörü verilsin. λ bir kompleks parametre olmak üzere,

1) $(A - \lambda \mathrm{I})^{-1}$ operatörünün tersinin olduğu λ noktalarına *regular nokta,* bu noktalardan oluşan kümeye A nın *rezolvent kümesi* denir ve $\rho(\mathrm{A})$ ile gösterilir.
2) Bu kümenin tümleyeni olan $\mathbb{C} - \rho(A)$ kümesine A nın *spektrum kümesi* denir ve $\sigma(\mathrm{A})$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2: *(Özdeğer ve Özfonksiyon)* A**,** *Tanım 2.1.1* de verilen bir operator ve λ kompleks parametre olsun. Eğer $x \neq 0$ olduğunda

$$Ax = \lambda x$$

veya

$$(A - \lambda \mathrm{I})x = 0$$

ise λ ya A nın özdeğeri ve x e λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon denir.

Uyarı 2.1.1: $\sigma(A)$ kümesinin elemanları özdeğer olmak zorunda değildir.Yani $\sigma(A)$ nın elemanı olup özdeğer olmayan elemanlar da olabilir.

Tanım 2.1.3: Spektrum çeşitleri üçe ayrılır.

1) *(Ayrık Spektrum)* Bir A operatörünün spectrum kümesi sadece operatörün özdeğerlerinden oluşuyorsa bu operatöre ayrık spektruma sahiptir denir ve bu küme $\sigma_p(A)$ ile gösterilir.
2) *(Sürekli Spektrum)* Belirli bir H Hilbert uzayında tanımlı, $(A - \lambda \mathrm{I})$ operatörün tersi var ve operatör bu uzay üzerinde sınırlı değilse A operatörü surekli spektruma sahiptir denir ve $\sigma_c(A)$ ile gösterilir.

3) *(Rezüdü Spektrum)* H Hilbert uzayında tanımlı $(A-\lambda I)$ operatörünün tersi var ve değer kümesi H için de yoğun değilse A operatörüne rezüdü spektruma sahiptir denir ve $\sigma_r(A)$ ile gösterilir.

Not 2.1.1: $\sigma(A)$ kümesi aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\sigma(A)=\sigma_p(A)\cup\sigma_c(A)\cup\sigma_r(A)$$

Tanım 2.1.4: *(Lineer Diferansiyel Operatör)*

$$\ell(y)=p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_n(x)y$$

formunda ki $\mathbb{C}^{(n)}$ den $\mathbb{C}$ ye tanımlı operator lineerlik koşulunu sağlıyorsa bu operatöre *lineer diferansiyel operator* denir. Burada $p_0(x),\ p_1(x),\cdots,\ p_n(x)$ fonksiyonlarına *katsayılar* ve n ye diferansiyel operatörün *mertebesi* denir.

Tanım 2.1.5 *(Sınır Şartları)* Sınırlı bir D bölgesinde tanımlı bir diferansiyel denklemin çözümlerinin matematiksel olarak davranışı kontrol edilmek isteniyorsa, D bölgesinin sınırında genellikle bağımlı değişkene bazı şartlar yüklenilmesi gereklidir. Bu sınır değerlerine *sınır şartları* denir. Sınır şartları üçe ayrılır.

1) *Dirchlet Sınır Şartı:* Bu durumda y fonksiyonu D nin sınırında tanımlıdır. $D=[0,\ell]$ bölgesin de $y(0)=\alpha,\ y(\ell)=\beta$ şartlarına Dirichlet sınır şartları denir.Eğer α,β sabitleri sıfıra eşit ise bu şartlara homojen Dirichlet şartı,aksi taktirde homojen olmayan Dirichlet şartı denir.
2) *Neumann Sınır Şartı:* Verilen bir aralıkta (örneğin aralık $[0,\ell]$ olsun.) Neumann sınır şartları $y'(0)=\alpha,\ y'(\ell)=\beta$ olarak tanımlanır. Burada α,β sabittir.
3) *Robin (Karışık) Sınır Şartı:* Robin sınır şartlarında hem y bağımlı değişkenin lineer kombinasyonu hemde dy/dx normal türevi sınır üzerinde tanımlıdır. Yani aralığımız $[0,\ell]$ olduğunda $y(0)+y'(0)$ veya $y(\ell)+y'(\ell)$ gibi sınır şartlarına Robin şartları denir.

Tanım 2.1.6: Bir f kompleks fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0,\delta)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f, z_0 noktasında analitiktir denir.

Tanım 2.1.7: Eğer bir f kompleks fonksiyonu bir S kümesinin bütün noktalarında analitikse, f, S üzerinde analitiktir denir.

Tanım 2.1.8: Bir f fonksiyonu $\mathbb{C}$ nin tüm noktalarında analitikse, f ye tam (entire) veya integral fonksiyon denir.

Tanım 2.1.9: Herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_n| \tag{2.1}$$

skaler niceliğine x in *normu* denir.

Ardıl Yaklaşımlar Metodu

İlk olarak gerekli bazı bilgileri verelim [11]. Birinci mertebeden bir diferansiyel denklemi

$$u' = g(t,u) \tag{2.2}$$

formunda yazalım. Burada I reel eksen üzerinde bir açık aralık olmak üzere, g fonksiyonu $I \times R$ üzerinde tanımlı reel değerli bir fonsiyondur. Ayrıca (2.2) denklemine, eğer $g(t,u)$ fonksiyonu u ya gore lineer ise denkleme birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem, aksi taktirde birinci mertebeden lineer olmayan diferasiyel denklem denir.

Şimdi $u(t)$ (2.2) denkleminin bir $t_0 \in I$ noktasında

$$u(t_0) = u_0 \tag{2.3}$$

başlangıç şartını sağlayan çözümü olsun.

Yardımcı Teorem 2.1.1: Eğer $g(t,u)$ fonksiyonu $R(a,b)$ üzerinde sürekli ise, o zaman (2.2)-(2.3) başlangıç değer problemi $|t - t_0| \le a$ şartını sağlayan t ler için

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} g(s,u(s))ds \tag{2.4}$$

integral denklemine denktir, [9].

Şimdi yukarıda verilenler yardımıyla bir metot oluşturalım. $u(t)$ (2.2) denkleminin (2.3) başlangıç şartını sağlayan çözümü olsun. $g(t,u)$ sürekli olduğundan dolayı yardımcı teorem 2.1.1 gereği

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} g(s,u(s))ds$$

integral denklemine denktir. Dolayısıyla yukarıda verilen integral denklemini kullanarak $n = 1,2,\ldots$ için bir

$$\begin{aligned} &u_0(t) = u_0 \\ &u_1(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} (gs,u_0(s))ds \\ &\vdots \\ &u_n(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} (gs,u_{n-1}(s))ds \end{aligned} \tag{2.5}$$

integral dizisi oluşturabiliriz. Oluşturduğumuz bu diziye ardıl yaklaşımlar (aynı zamanda iterasyon veya Picard) metodu denir. Burada $u_0(t), u_1(t), \cdots, u_n(t)$ fonksiyonları (2.4) denkleminin ardıl yaklaşık çözümleridir.

2.2. Regüler ve Singüler Sturm-Liouville Problemi

Genel olarak $[a,b]$ aralığında tanımlı

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0 \\ y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

sınır değer problemi Sturm –Liouville problem olarak bilinir. Eğer $[a,b]$ aralığı sonlu ve $q(x)$ bu aralıkta integrallenebilirse bu problem regular (düzgün) Strum-Liouville problem; $[a,b]$ aralığı sonsuz, $q(x)$ bu aralıkta integrallenemezse veya bu iki durum birlikte var ise bu tür problemlere de singuler (tekil) Sturm –Liouville problem denir.

Teorem2.2.1: Eğer (2.6) denkleminde $q(x)$ düzgünlük koşullarını sağlıyor ve α (2.7) de verilen sabit ise, o zaman (2.6) denkleminin $a \le x \le b$ aralığında

$$\phi(a) = \sin\alpha, \;\; \phi'(a) = -\cos\alpha$$

başlangıç şartını sağlayan ve λ nın bir tam fonksiyonu olan $\phi(x)$ çözümü vardır.

İspat: (2.6) denkleminin homojen çözümü teoremde verilen başlangıç şartları da kullanılarak

$$y_0(x) = \sin\alpha - (x-a)\cos\alpha$$

biçiminde elde edilir. Özel çözüm için (2.6) eşitliğinde $q(x)$ sağ tarafa alınıp a dan x e iki kere integral alınırsa

$$y(x) = y_0(x) + \int_a^x \{q(\mathrm{t}) - \lambda\} y(t)(x-t)dt$$

elde edilir. Son eşitlikte $n = 1,2,...,$ için ardıl yaklaşımlar metodu kullanılarak

$$y_n(x) = y_0(x) + \int_a^x \{q(\mathrm{t}) - \lambda\} y_{n-1}(t)(x-t)dt$$

dizisi oluşturulur. Şimdi $a \le x \le b$ aralığında $|q(x)| \le M,$ $|y_0(x)| \le K$ ve $|\lambda| \le N$ olsun $n = 1$ için

$$|y_1(x) - y_0(x)| \le \int_a^x (M+N)\mathrm{K}(x-t)dt = \frac{1}{2}(\mathrm{M}+\mathrm{N})\mathrm{K}(x-a)^2$$

ve $n \ge 2$ için

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le (\mathrm{M}+N)\int_a^x |y_{n-1}(\mathrm{t}) - y_{n-2}(\mathrm{t})|(x-t)dt$$

dolayısıyla $n = 2$ için

$$|y_2(x) - y_1(x)| \le K(\mathrm{M}+\mathrm{N})^2 \int_a^x (t-a)^2(x-t)dt = K(\mathrm{M}+\mathrm{N})^2(x-a)^4 \;/\; 4!$$

ve n için tümevarım kullanılarak

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le \frac{K(\mathrm{M}+\mathrm{N})^n(x-a)^{2n}}{(2\mathrm{n})!}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafı yakınsak olduğundan karşılaştırma testi gereğince sol da olan ifade de yakınsaktır. Ayrıca

$$\phi(x) = y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ y_n(x) - y_{n-1}(x) \right\}$$

dizisi $|\lambda| \leq N$ ise $a \leq x \leq b$ aralığında λ ya göre düzgün yakınsaktır. Şimdi $n \geq 2$ için

$$y_n'(x) - y_{n-1}'(x) = \int_a^x \left\{ q(\mathrm{t}) - \lambda \right\} \left\{ y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x) \right\} dt$$

ve

$$y_n''(x) - y_{n-1}''(x) = \left\{ q(x) - \lambda \right\} \left\{ y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x) \right\}$$

dir . Açıkca görülebilir ki birinci ve ikinci türevler x e göre yakınsaktır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \phi''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ y_n''(x) - y_{n-1}''(x) \right\} \\ &= \left\{ q(x) - \lambda \right\} \left[y_0(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x) \right\} \right] \\ &= \left\{ q(x) - \lambda \right\} \phi(x) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu $\phi(x)$ in (1.1) denkleminin çözümü olduğunu gösterir.Ayrıca $\phi(a) = \sin \alpha$ olduğu açıktır. Böylece ispat biter.

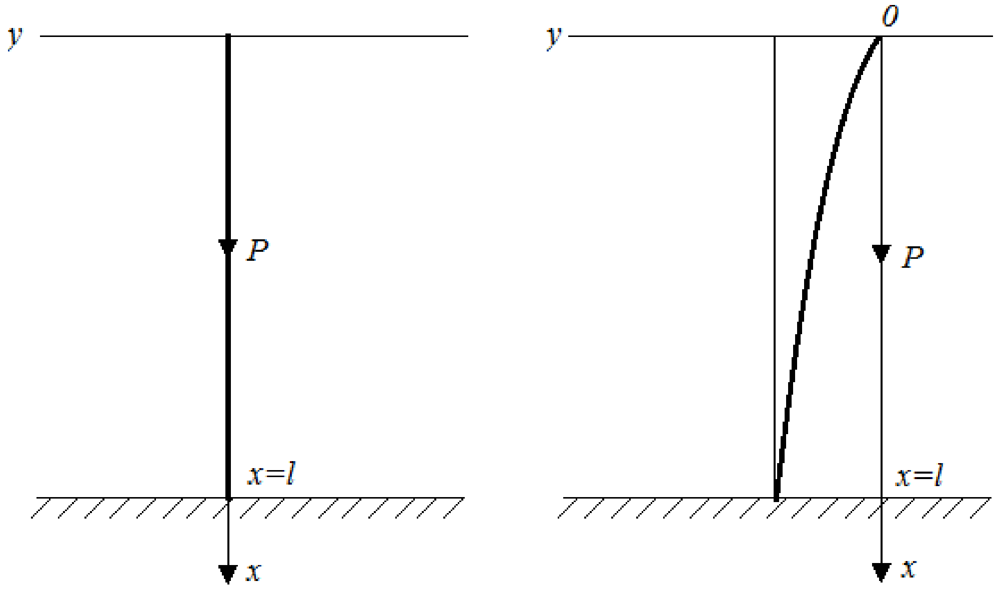
Teorem2.2.1: (2.6) -(2.7) probleminin birbirinden farklı özdeğerleri $\lambda_{\mathrm{n}}, \lambda_{\mathrm{m}}$ olsun. Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar $y(x, \lambda_{\mathrm{n}})$ ve $y(x, \lambda_{\mathrm{m}})$ ortagonaldir. Yani aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\int_a^b y(x, \lambda_{\mathrm{n}}) y(x, \lambda_{\mathrm{m}}) dx = 0$$

Teorem.2.2.2: (2.6)-(2.7) probleminin özdeğerleri reel dir.

Şimdi konuyla ilgili birkaç örnek inceleyelim.

Örnek 2.21: [2] $x = \ell$ son noktasında sabit ve $x = 0$ noktasında serbest (*Şekil 1*) deki gibi bir teli düşünelim. P kuvveti 0 noktasından ℓ noktasına kadar bu tele etki ediyor. Burda P nin çok küçük değerlerinde telin şeklinin kararlı olduğu yani değişmediği kabul gören bir gerçektir, fakat P nin öyle bir kritik P_0 noktası vardır ki $P_0 \leq P$ olduğunda telin şekli ve eğimi değişir. Biz bu eğimi (*Şekil 1*) den çok az farklı olan (*Şekil 2*) deki denge durumunda inceleğeceğiz.



Şekil 1 *Şekil 2*

$y = y(x)$ telin eğim fonksiyonu olmak üzere eğim denklemi

$$Py = -EIy'' \tag{2.8}$$

şeklindedir. Burada I telin hareketsiz anında tamamında ki momentum ve E esneklik katsayısıdır. Bu denklemin her iki yanında uygulanan kuvvet ve başlangıç nokasından tel boyunca olan eğimden dolayı eğim momenti vardır. Burada telin sabit bir bölümünün tamamında homojen olan durumu inceleyeceğiz. EI sabit olduğundan dolayı $\lambda = \dfrac{P}{EI}$ alınarak (2.8) denklemi

$$-y'' = \lambda y \tag{2.9}$$

biçiminde yazilabilir. (*Şekil 2*) de $y(x)$ fonksiyonunun

$$y(0) = 0,\ \ y'(\ell) = 0 \tag{2.10}$$

koşullarını sağladığı açıktır. Dolayısıyla (2.8) ve (2.9) eşitlikleri kulanılarak (2.10) sınırdeğerleriyle birlikte bir özdeğer problem inşa edilebilir. Şimdi (2.9) özdeğer probleminin genel çözümü

$$y = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

olduğundan dolayı bu çözüme (2.10) sınır şartlarını uygulayarak

$$A = 0,\ \cos\sqrt{\lambda}\ell = 0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2\ell}\pi\right)^2, \quad n = 1,2,3,...$$

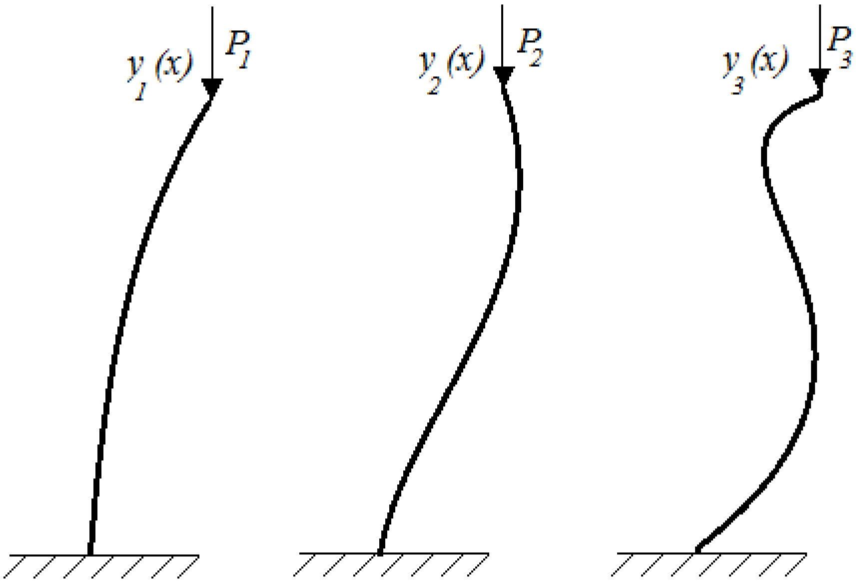
problemin özdeğerleridir. Ayrıca problemin özdeğerleri basittir ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar

$$y(x,\lambda) = B\sin\frac{2n-1}{2\ell}\pi x \ , \ \ n = 1,2,3,...$$

biçimindedir. Yine yapılan dönüşümden dolayı kuvvet

$$P_n = EI\left(\frac{2n-1}{2\ell}\pi\right)^2$$

olarak bulunur. Ayrıca *(Şekil 3)* özfonksiyonlara göre telin denge durumunu gösterir.

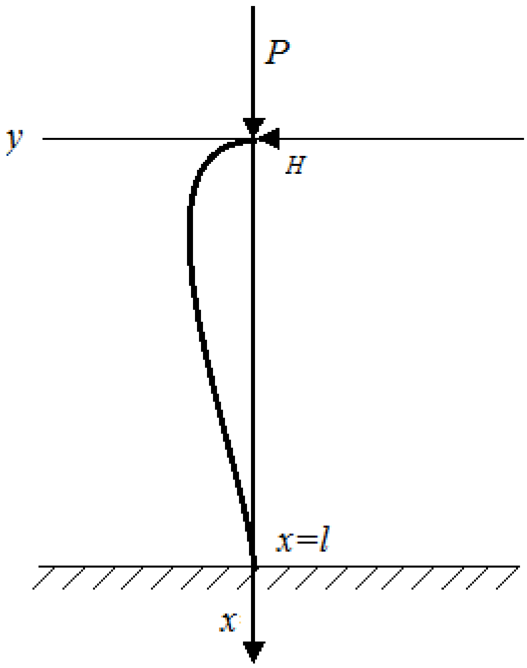


Şekil 3

Örnek 2.2.2: [2] $x = 0$ noktasında bir yatay H etkisinin olduğu *(Şekil 4)* ve $x = \ell$ noktasında sabit bir teli göz önünde bulunduralım. Bu durumda telin eğim momenti

$$M = Py - Hx = -EIy'' \tag{2.11}$$

dir.



Şekil 4

Bu eşitlikte iki kez türev alınırsa

$$(EIy'')'' = -Py'' \tag{2.12}$$

eşitliği elde edilir. Burada telin eğim fonksiyonu $y(x)$

$$y(0) = 0,\ y''(0) = 0,\ y(\ell) = 0,\ y''(\ell) = 0, \tag{2.13}$$

şartlarını sağlamalıdır. Şimdi bu sınır şartlarının sağlandığını açıklayalım. ilk olarak birinci ve üçüncü sınır şartının sağlandığı açıktır *(Şekil 4)*; ikinci sınır şartı eğim momentinin $x = 0$ noktasında sıfır olduğunu gösterir (çünkü bu noktada tel destekleniyor); dördüncü sınır şartı $x = \ell$ noktasında tel sabit olduğundan eğim x -eksenine paraleldir. Bu yüzden (2.12)-(2.13) problem özdeğer poblemidir. Şimdi kabul edelim ki EI sabit ve $P / EI = k^2$ ve dahası problemin anlaşılır olması açısından $\ell = 1$ olsun. Dolayısıyla (2.12) denklemini

$$y'''' = -k^2 y'' \tag{2.14}$$

formunda yazabiliriz.

Durum 1: Bu denklemin $k \neq 0$ durumundaki çözümü

$$y = A + Bx + C\cos kx + D\sin kx \tag{2.15}$$

dir. Bu çözüme (2.13) da verilen sınır şartları uygulanarak $A = C = 0$ ve

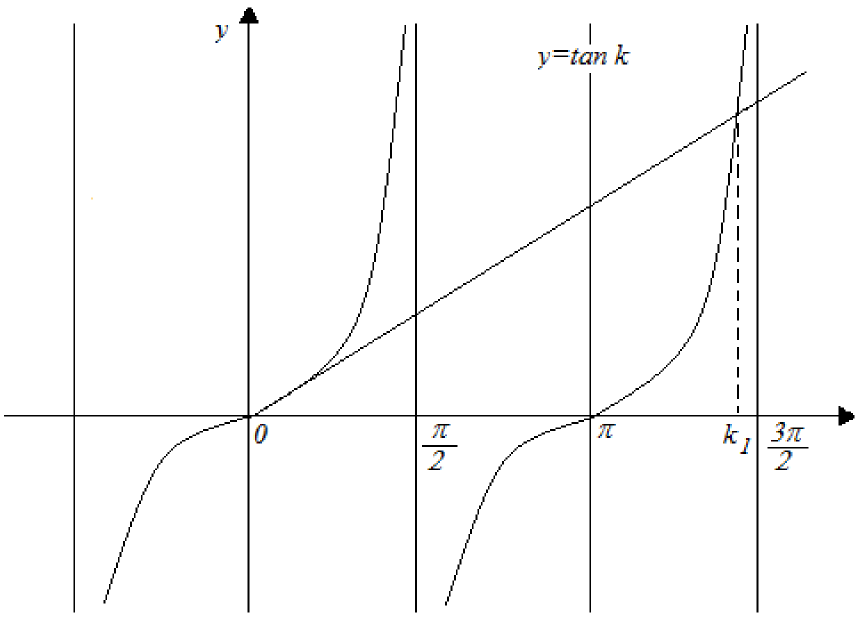
$$\tan k = k$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla bu problemin özdeğerleri yukarıda verilen denklemin kökleridir. Bu kökler *(Şekil 5)* de görüldüğü gibi

$$y = \tan x \qquad \text{ve} \qquad y = x$$

fonksiyonlarının kesim noktalarıdır. Dolayısıyla özdeğerler basit ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar aşağıdaki gibidir

$$y = \sin kx - x\sin k.$$



Şekil 5

Durum 2: $k = 0$ için (2.14) denkleminin çözümü

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \qquad (2.16)$$

dir. B çözüme (2.13) sınır şartları uygulatıldığında $A = B = C = D = 0$ olduğu görülür ki bu bize $y = 0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $k = 0$ özdeğer değildir.

2.3 Dirac Operatörü

Aşağıdaki denklem sistemini ele alalım.

$$B\frac{dy}{dx} + p(x)y = \lambda y \ , \quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \qquad (2.17)$$

Burada

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ p(x) = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}$$

$p_{12}(x) \equiv p_{21}(x)$ ve $p_{ik}(x)$, $(i,k = 1,2)$ reel değerli ve $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlardır. (2.17) denklemi

$$\begin{aligned} y_2' + p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 &= \lambda y_1 \\ -y_1' + p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 &= \lambda y_2 \end{aligned} \qquad (2.18)$$

biçimindeki birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemine denktir.

$p_{12}(x) \equiv 0 \equiv p_{21}(x)$ durumunda $p_{11}(x) = V(x) + m,\ p_{22}(x) = V(x) - m$ (ki barada $V(x)$ potansiyel fonksiyonu ve m parçacığın kütlesidir.) dir. (2.18) sistemine kuantum teoride bir boyutlu durağan *Dirac sistemi* denir.

Şimdi

$$H(x) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}$$

iki boyutlu uzayda düz ve ortagonal bir dönüşüm olsun. B ve H nin değişmeli yani

$$BH = HB$$

olduğu açıktır. Buradan (2.18) deki denklemleride göz önünde bulundurarak $y = Hz$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} y_2' - \left\{\lambda + p_1(x)\right\} y_1 &= 0 \\ y_1' + \left\{\lambda + p_2(x)\right\} y_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

formu elde edilir. Bu forma (2.18) sisteminin *kanonik formu* denir.

Teorem 2.3.1: (2.19) sisteminde sınır şartları $[a, b]$ aralığında

$$y_1(a)\sin\alpha + y_2(a)\cos\alpha = 0 \tag{2.20}$$

$$y_1(b)\sin\beta + y_2(b)\cos\beta = 0 \tag{2.21}$$

alındığında (2.19)-(2.21) probleminin birbirinden farklı herhangi iki özdeğeri λ_n, λ_m ve bu özdeğerlere karşılık gelen fonksiyon değerli özvektörler $y(x, \lambda_n),\ y(x, \lambda_m)$ olmak üzere

$$\int_a^b y^T z dx = \int_a^b \left[y_1(x, \lambda_n) z_1(x, \lambda_m) + y_2(x, \lambda_n) z_2(x, \lambda_m) \right] dx = 0$$

dır. Yani özdeğerler birbirine diktir.

Teorem 2.3.2: (2.19)-(2.21) probleminin özdeğerleri reeldir.

Tanım 2.3.1: $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ ve $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ reel fonksiyon değerli vektörler (2.19) sisteminin çözümleri olsun.

$$W\left\{\varphi,\phi\right\}=\begin{vmatrix}\varphi_1(x,\lambda) & \varphi_2(x,\lambda)\\ \phi_1(x,\lambda) & \phi_1(x,\lambda)\end{vmatrix}$$

fonksiyonuna bu sistemin Wronskian determinant denir.

Teorem 2.3.3: (2.19) sisteminin Wronskian determinantı x e bağlı değildir.

İspat: φ ve ϕ (2.19) sisteminin çözümleri olsun. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\varphi_2' - \left\{\lambda + p_1(x)\right\}\varphi_1 = 0 \quad \phi_2' - \left\{\lambda + p_1(x)\right\}\phi_1 = 0\\ \varphi_1' + \left\{\lambda + p_2(x)\right\}\varphi_2 = 0 \quad \phi_1' + \left\{\lambda + p_2(x)\right\}\phi_2 = 0\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler sırasıyla $\phi_1, -\phi_2, -\varphi_1, \varphi_2$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$(\varphi_2'\phi_1 - \varphi_1'\phi_2 - \phi_2'\varphi_1 + \phi_1'\varphi_2)(x,\lambda) = 0$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{d}{dx}(\varphi_1\phi_2 - \varphi_2\phi_1)(x,\lambda) = \frac{d}{dx}W\left\{\varphi,\phi\right\} = 0$$

dir. Bu da türev özelliklerinden $W\left\{\varphi,\phi\right\}$ fonksiyonunun yalnızca λ bağlı olduğunu gösterir. Dolayısıyla ispat biter.

Örnek 2.3.1:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$y_1(0)\sin\alpha + y_2(0)\cos\alpha = 0$$

$$y_1(\pi)\sin\beta + y_2(\pi)\cos\beta = 0$$

probleminin çözümü

$$\phi^T(x,\lambda) = (\cos(\lambda x - \alpha), \sin(\lambda x - \alpha))$$

ve özdeğerleri

$$\lambda_n = n - \frac{\beta - \alpha}{\pi}$$

dir. Şimdi bu problemde $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{\pi}{2}$ alındığın da yukarıda verilen sınır şartları aşağıdaki forma dönüşür.

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1,\ y_2(0) = 0 \\ y_1(\pi) &= 0,\ y_2(\pi) = 1 \end{aligned}$$

Dolayısıyla problemin genel çözümü aşağıdaki formda olacağından dolayı

$$\begin{aligned} y_1(x,\lambda) &= -c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x \\ y_2(x,\lambda) &= c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \end{aligned}$$

bu çözümlere elde edilen sınır şartları uygulandığında $c_1 = 0$ ve $c_2 = 1$ olarak elde edilir. Ayrıca özdeğerler aşağıdaki formdadır ki problemin başında verilen özdeğer formunda $\alpha = 0,\ \beta = \frac{\pi}{2}$ alındığında aynı eşitlik elde edilir. Yani

$$\lambda_n = (n - \frac{1}{2})$$

dir ve bu özdeğerlere karşılık gelen vektor değerli özfonksiyonlar da

$$\begin{pmatrix} y_1(x,\lambda_n) \\ y_2(x,\lambda_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(n - \frac{1}{2})x \\ \sin(n - \frac{1}{2})x \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Ayrıca açıktır ki özdeğerler ayrık ve artandır.

BÖLÜM 3

BİR BOYUTLU SÜREKSİZ DIRAC OPERATÖRÜ

3.1. [12] Problem için Operatör Formülü

Öncelikle çalışmamızın teoride uygun olması açısından $\left|a_1\right| + \left|b_1\right| \neq 0,\ \gamma \neq 0$ olduğunu kabul edeceğiz. Ayrıca (1.7)-(1.10) problemine teorik yaklaşım formülü elde etmek için, üzerinde aşağıda tanımlanan iççarpım normu ile $H = L_2[a,c) \cup L_2(c,b] \oplus \mathbb{C}_\sigma$ Hilbert uzayını

$$\left\langle \mathrm{U}, V \right\rangle_H = \int_a^c u^T \bar{v} dx + \int_c^b u^T \bar{v} dx + \frac{1}{\sigma} \tilde{u}\bar{\tilde{v}} \tag{3.1}$$

ele alalım. Burada T transpozu göstermek üzere

$$U = \begin{pmatrix} u(x) \\ \tilde{u} \end{pmatrix},\ \mathrm{V} = \begin{pmatrix} v(x) \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \in H$$

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix},\ v(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} \in H$$

dır. $i = 1,2$ için $u_i(x), v_i(x) \in L_2[a,\mathrm{c}) \cup L_2(c,b]$, $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{C}$ dir. Şimdi σ sabitini

$$\sigma = \det \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ \sin\beta_{21} & \cos\beta_{22} \end{pmatrix} > 0 \tag{3.2}$$

biçiminde tanımlayalım. Dahası $dom(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{H}$ kümesi bütün $U = \begin{pmatrix} u(x) \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \in H$ fonksiyonlarının kümesi olsun öyleki $u_1(x),\ u_2(x),\ [a,c) \cup [c,b)$ üzerinde mutlak sürekli $\sin\alpha u_1(a) - \cos\alpha u_2(a) = 0$ ve $u_1(\pm \mathrm{c}),\ u_2(\pm \mathrm{c})$ sonlu limitleri var.

Şimdi

$$A : dom(A) \to \mathrm{H}$$

operatörü aracılığıyla (1.7)-(1.10) problemi

$$AU = \lambda U$$

formunda yazılabilir. Açık olarak görülebilir ki A operatörü ve $(1.7)-(1.10)$ Dirac sistemi aynı özdeğerlere sahip ve bu özdeğerlere karşılık gelen A operatorünün fonksiyon değerli özvektörünün ilk bileşeni $(1.7)-(1.10)$ Dirac sisteminin aynı özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonudur.

Teorem 3.1.1: A operatörü simetriktir.

İspat: Her $U,V \in dom(A)$ için (3.1) iç çarpımını kullanarak

$$\begin{aligned}
\left\langle A\mathrm{U},V\right\rangle_H &= \int_a^c u^T \overline{v} dx + \int_c^b u^T \overline{v} dx + \frac{1}{\sigma}\tilde{u}\overline{\tilde{v}} \\
&= \int_a^c \begin{pmatrix} u_2' - p_1 u_1 & -u_1' - p_2 u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{v}_2 \end{pmatrix} dx \\
&+ \int_a^c \begin{pmatrix} u_2' - p_1 u_1 & -u_1' - p_2 u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{v}_2 \end{pmatrix} dx - \frac{1}{\sigma}\tilde{u}\overline{\tilde{v}} \\
&= \int_a^c (u_2' - p_1 u_1)\overline{v}_1 dx - \int_a^c (u_1' + p_2 u_2)\overline{v}_2 dx \\
&+ \int_c^b (u_2' - p_1 u_1)\overline{v}_1 dx - \int_c^b (u_1' + p_2 u_2)\overline{v}_2 dx - \frac{1}{\sigma}\tilde{u}\overline{\tilde{v}}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

elde edilir. Şimdi sırasıyla her bir terimde kısmi integrasyon kuralı uygulanarak

$$\begin{aligned}
\left\langle A\mathrm{U},V\right\rangle_H &= [u_2\overline{v}_1 - u_1\overline{v}_2]_a^{c-0} + [u_2\overline{v}_1 - u_1\overline{v}_2]_{c+0}^b \\
&+ \int_a^c u_2(-\overline{v}_1 - p_2\overline{v}_2)dx + \int_a^c u_1(\overline{v}_2 - p_1\overline{v}_1)dx \\
&+ \int_c^b u_2(-\overline{v}_1 - p_2\overline{v}_2)dx + \int_c^b u_1(\overline{v}_2 - p_1\overline{v}_1)dx \\
&- \frac{1}{\sigma}(b_1 u_1(b) - a_1 u_2(b))(\sin\beta\overline{v}_1(b) - \cos\beta\overline{v}_2(b))
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi U ve V (1.8), (1.9) sınır şartlarını sağladığı için

$$\begin{aligned}
u_2(a)\overline{v}_1(a) &= u_1(a)\overline{v}_2(a) \\
u_2(b)\overline{v}_1(b) &= u_1(b)\overline{v}_2(b)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

ve (1.10) geçiş şartlarından dolayı

$$u_2(\mathrm{c}-0)\overline{v}_1(\mathrm{c}-\mathrm{o}) = u_2(\mathrm{c}+0)\overline{v}_1(\mathrm{c}+0)$$
$$u_1(\mathrm{c}-0)\overline{v}_2(\mathrm{c}-0) = u_1(\mathrm{c}+0)\overline{v}_2(\mathrm{c}+0) \tag{3.5}$$

dır. Buradan (3.4) ve (3.5) eşitlikleri göz önünde bulundurulduğunda

$$[u_2\overline{v}_1 - u_1\overline{v}_2]_a^{c-0} + [u_2\overline{v}_1 - u_1\overline{v}_2]_{c+0}^{b} = 0$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\begin{aligned}(b_1u_1(b) - a_1u_2(b))(\sin\beta\overline{v}_1(b) - \cos\beta\overline{v}_2(b))& \\ = \sin\beta(b_1u_1(b)\overline{v}_1(b) - a_1u_2(b)\overline{v}_1(b))& \\ - \cos\beta(b_1u_1(b)\overline{v}_1(b) - a_1u_2(b)\overline{v}_1(b))&\end{aligned}$$

(3.6)

dır. Buradan eşitliğin sağ tarafında ilk terimde parantezin içine $-a_1u_1(b)\overline{v}_2(b)$, ikinci terimde parantezin içine $-b_2u_2(b)\overline{v}_1(b)$ eklenip çıkarılırsa (3.6) eşitliğinin sağ tarafı

$$\begin{aligned}&\sin\beta(b_1u_1(b)\overline{v}_1(b) - a_1u_1(b)\overline{v}_2(b)) + \sin\beta(a_1u_1(b)\overline{v}_2(b) - a_1u_2(b)\overline{v}_1(b)) \\ &-\cos\beta(b_1u_2(b)\overline{v}_1(b) - a_1u_2(b)\overline{v}_2(b)) - \cos\beta(b_1u_1(b)\overline{v}_2(b) - b_1u_2(b)\overline{v}_1(b))\end{aligned}$$

olur. Yine açıktır ki

$$u_1(b)\overline{v}_2(b) = u_2(b)\overline{v}_1(b)$$

olduğundan ikinci ve sonuncu terim sıfıra eşittir. Dolayısıyla (3.6) eşitliği

$$\begin{aligned}&(b_1u_1(b) - a_1u_2(b))(\sin\beta\overline{v}_1(b) - \cos\beta\overline{v}_2(b)) \\ &= (\sin\beta u_1(b) - \cos\beta u_2(b))(b_1\overline{v}_1(b) - a_1\overline{v}_2(b))\end{aligned}$$

biçiminde olur. Sonuç olarak (3.4), (3.5) ve (3.6) dan

$$\langle AU, V\rangle_H = \langle U, \mathrm{A}V\rangle_H$$

elde edilir ki buradan ispat biter.

Sonuç 3.1.1: (1.7)-(1.10) probleminin özdeğerleri reeldir.

Sonuç 3.1.2: (1.7)-(1.10) probleminin her λ_n özdeğerleri ve bu özdeğerlere karşılık gelen $u_n{}^T(x,\lambda_n) = (u_{n1}(x,\lambda_n), u_{n2}(x,\lambda_n))$ özvektörleri $n \neq m$ olduğunda

$$\int_a^c u_n{}^T \overline{v}_m dx + \int_c^b u_n{}^T \overline{v}_m dx - \frac{1}{\sigma}\tilde{u}\overline{\tilde{v}} = 0$$

dir. Yani problemin fonksiyon değerli özvektörleri birbirine diktir.

3.2 . Çözümlerin Varlığı

Bu bölümde (1.7)-(1.10) Dirac sisteminin çözümlerinin varlığını göstereceğiz. Bunun için aşağıda verilecek olan teoremi kanıtlayacağız.

Teorem 3.2.1: (1.7**)** denklemi $[a,c)\cup(c,b]$ aralığında (1.8) sınır şartı ve (1.10) geçiş şartlarını sağlayan bir $\Phi(x,\lambda)$ çözümüne sahip ve bu çözüm $\forall x\in[a,c)\cup(c,b]$ için λ ya bağlı integral fonksiyonudur, [13].

İspat: Diferansiyel denklerin klasik teorisinden, [9]

$$Au'(x) - P(x)u(x) = \lambda u(x), \quad x\in[a,c)$$

sisteminin

$$u_1(a) = \cos\alpha,\ \ u_2(a) = \sin\alpha$$

başlangıç şartlarını sağlayan λ nın integral fonksiyonu olan sürekli bir tek $\Phi_1(x,\lambda) = (\Phi_{11}(x,\lambda), \Phi_{12}(x,\lambda))$ çözümü vardır. Şimdi

$$\begin{aligned} &u_2'x - p_1 u_1(x) = \lambda u_1(x) \\ &u_1'x + p_2 u_2(x) = -\lambda u_2(x), x\in(c,b] \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dirac sistemini ve özdeğer içeren standart olmayan

$$\begin{aligned} &u_1(c+0) = \gamma^{-1}\Phi_{11}(c-0,\lambda) \\ &u_2(c+0) = \gamma\Phi_{12}(c-0,\lambda) \end{aligned} \tag{3.8}$$

başlangıç şartlarını birlikte ele alalım ve bu problemin $p_1(x)\equiv 0 \equiv p_2(x)$ durumunda ki çözümünü elde edelim. Bunun için ilk olarak

$$u_2'(x) = \lambda u_1(x)$$
$$u_1'(x) = -\lambda u_2(x)$$

homojen sistemini kullanalım. Sistemde türev alınıp gerekli işlemler sonucunda

$$u_2''(x) = -\lambda u_2(x)$$

elde edilir. Sabit katsayılı homojen diferansiyel denklemin çözümünden (bunu $u^0(x,\lambda)$ ile göstereceğiz)

$$u_{12}^0(x,\lambda) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$$

ve benzer biçimde

$$u_{11}^0(x,\lambda) = -c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x$$

homojen çözümleri elde ederiz. Bu çözümlere (3.8) standart olmayan başlangıç şartları uygulanarak c_1, c_2 sabitleri

$$c_1 = \gamma \Phi_{12}(c-0,\lambda) \cos \lambda(\mathrm{c}+0) - \gamma^{-1} \Phi_{11}(c-0,\lambda) \sin \lambda(\mathrm{c}+0)$$

$$c_2 = \gamma \Phi_{12}(c-0,\lambda) \sin \lambda(\mathrm{c}+0) + \gamma^{-1} \Phi_{11}(c-0,\lambda) \cos \lambda(\mathrm{c}+0)$$

biçiminde bulunur. Bu değerler kullanılarak gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} u^0(x,\lambda) &= \begin{pmatrix} u_{11}^0(x,\lambda) \\ u_{12}^0(x,\lambda) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^{-1}\Phi_{11}(c-0,\lambda)\cos\lambda(x-(\mathrm{c}+0)) + \gamma\Phi_{12}(c-0,\lambda)\sin\lambda(x-(\mathrm{c}+0)) \\ \gamma\Phi_{12}(c-0,\lambda)\cos\lambda(x-(\mathrm{c}+0)) + \gamma^{-1}\Phi_{11}(c-0,\lambda)\sin\lambda(x-(\mathrm{c}+0)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

homojen çözümünü elde ederiz. Şimdi parametlerin değişim metodunu kullanarak genel çözümü bulalım. Temel matris aşağıda verilen formdadır.

$$\Psi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \cos \lambda x & \sin \lambda x \\ -\sin \lambda x & \cos \lambda x \end{pmatrix}$$

Bu durumda katsayı matrisi

$$c(x)=\begin{pmatrix}c_1(x)\\c_2(x)\end{pmatrix}$$

alınırsa parametrelerin değişim metodu gereği $\Psi(x,\lambda)c(x)$ yazılabilir. Dolayısıyla

$$\Psi'(x,\lambda)c(x)+\Psi(x,\lambda)c'(x)$$
$$=\begin{pmatrix}-\lambda\sin\lambda x & \lambda\cos\lambda x\\ -\lambda\cos\lambda x & -\lambda\sin\lambda x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1(x)\\c_2(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\lambda x & \sin\lambda x\\ -\sin\lambda x & \cos\lambda x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1'(x)\\c_2'(x)\end{pmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\Psi'(x,\lambda)c(x)=\lambda\begin{pmatrix}u_1(x)\\u_2(x)\end{pmatrix}$$

olduğu açıktır. Böylece bu işlemlerden elde edilen sonuçların sistemde uygun terimlerin yerine yerleştirilmesiyle

$$\begin{pmatrix}\cos\lambda x & \sin\lambda x\\ -\sin\lambda x & \cos\lambda x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1'(x)\\c_2'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1u_1\\-p_2u_2\end{pmatrix}$$

denklem sistemi elde edilir ve buradan

$$\begin{pmatrix}c_1'(x)\\c_2'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\lambda x & -\sin\lambda x\\ \sin\lambda x & \cos\lambda x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1u_1\\-p_2u_2\end{pmatrix}$$

bulunur. Dolayısıyla son eşitlikte taraf tarafa c den x e integral alınırsa

$$c(x)=\begin{pmatrix}c_1(x)\\c_2(x)\end{pmatrix}=\int_c^x\begin{pmatrix}p_1u_1\cos\lambda\,\mathrm{s}+p_2u_2\sin\lambda\,\mathrm{s}\\ p_1u_1\sin\lambda\,\mathrm{s}-p_2u_2\cos\lambda\,\mathrm{s}\end{pmatrix}ds$$

elde edilir ve böylece

$$u_p\begin{pmatrix}u_{12}\\u_{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\lambda x & \sin\lambda x\\ -\sin\lambda x & \cos\lambda x\end{pmatrix}\int_c^x\begin{pmatrix}p_1u_1\cos\lambda\,\mathrm{s}+p_2u_2\sin\lambda\,\mathrm{s}\\ p_1u_1\sin\lambda\,\mathrm{s}-p_2u_2\cos\lambda\,\mathrm{s}\end{pmatrix}ds$$

olarak bulunur. Dolayısıyla sistem için genel çözüm

$$u_1=\begin{pmatrix}u_{11}\\u_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{11}^0\\u_{12}^0\end{pmatrix}+\int_c^x\begin{pmatrix}p_1u_{11}^0\sin\lambda(\mathrm{s}-x)-p_2u_{12}^0\cos\lambda(\mathrm{s}-x)\\ p_1u_{11}^0\cos\lambda(\mathrm{s}-x)+p_2u_{12}^0\sin\lambda(\mathrm{s}-x)\end{pmatrix}ds$$

bulunur. Şimdi çözümlerin yakınsak olduğunu gösterelim. Bunu Bölüm 2 de anlatılan ardıl yaklaşımlar metodunu kullanarak göstereceğiz. Şimdi $n = 1,2,...$ için yukarıda bulunan çözüm ile bir dizi oluşturalım.

$$u_1^n = \begin{pmatrix} u_{11}^0 \\ u_{12}^0 \end{pmatrix} + \int_c^x \begin{pmatrix} p_1 \sin\lambda(\text{s}-x)u_{11}^{n-1} - p_2\cos\lambda(\text{s}-x)u_{12}^{n-1} \\ p_1\cos\lambda(\text{s}-x)u_{11}^{n-1} + p_2\sin\lambda(\text{s}-x)u_{12}^{n-1} \end{pmatrix} ds$$

dizisinde Bölüm 2 Tanım 2.1.6 da verilen normu $n = 1$ için

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} u_{11}^1 - u_{11}^0 \\ u_{12}^1 - u_{12}^0 \end{pmatrix} \right\| &\le \int_c^x \left\| \begin{pmatrix} p_1 \sin\lambda(\text{s}-x)u_{11}^0 - p_2\cos\lambda(\text{s}-x)u_{12}^0 \\ p_1\cos\lambda(\text{s}-x)u_{11}^0 + p_2\sin\lambda(\text{s}-x)u_{12}^0 \end{pmatrix} \right\| ds \\ &= \int_c^x (\left|p_1 \sin\lambda(\text{s}-x)u_{11}^0 - p_2\cos\lambda(\text{s}-x)u_{12}^0\right| \\ &\quad + \left|p_1\cos\lambda(\text{s}-x)u_{11}^0 + p_2\sin\lambda(\text{s}-x)u_{12}^0\right|)ds \\ &\le \int_c^x (2\left|p_1\right|\left|u_{11}^0\right| + 2\left|p_2\right|\left|u_{12}^0\right|)ds \end{aligned}$$

integral içindeki fonksiyonların maksimumları dikkate alındığında

$$\left\| \begin{pmatrix} u_{11}^1 - u_{11}^0 \\ u_{12}^1 - u_{12}^0 \end{pmatrix} \right\| \le 2(\theta_1 R_1(\lambda) + \theta_2 R_2(\lambda))(x-c)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\theta_1 = \max_{x\in(c,b]}\left|p_1\right|,\ \ \theta_2 = \max_{x\in(c,b]}\left|p_2\right|$$

$$R_1(\lambda) = \max_{x\in(c,b]}\left|u^0{}_{11}\right|,\ \ R_2(\lambda) = \max_{x\in(c,b]}\left|u^0{}_{12}\right|$$

dır. Aynı dizide $n.$ ve $(n-1).$ terimler taraf tarafa çıkarılıp norm alınırsa

$$\left\| \begin{pmatrix} u_{11}^n - u_{11}^{n-1} \\ u_{12}^n - u_{12}^{n-1} \end{pmatrix} \right\| \le \int_c^x \left\| \begin{pmatrix} p_1\sin\lambda(\text{s}-x)[u_{11}^{n-1} - u_{11}^{n-2}] - p_2\cos\lambda(\text{s}-x)[u_{12}^{n-1} - u_{12}^{n-2}] \\ p_1\cos\lambda(\text{s}-x)[u_{11}^{n-1} - u_{11}^{n-2}] + p_2\sin\lambda(\text{s}-x)[u_{12}^{n-1} - u_{12}^{n-2}] \end{pmatrix} \right\| ds$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi son eşitsizlikte $n = 2$ için yine aynı değerlendirme yapılırsa

$$\left\| \begin{pmatrix} u_{11}^2 - u_{11}^1 \\ u_{12}^2 - u_{12}^1 \end{pmatrix} \right\| \le 2^2(\theta_1 + \theta_2)(\theta_1 R_1(\lambda) + \theta_2 R_2(\lambda))\frac{(x-c)^2}{2}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla n için son eşitsizliği tümevarım yöntemi gereğince

$$\left\| \begin{pmatrix} u_{11}^{n} - u_{11}^{n-1} \\ u_{12}^{n} - u_{12}^{n-1} \end{pmatrix} \right\| \leq 2^{n}\theta^{n} R(\lambda)\frac{(x-c)^{n}}{n!}$$

biçiminde genelleyebiliriz. Burada $\theta = \max\left\{\theta_1, \theta_2\right\}$ ve $R(\lambda) = \max\left\{R_1(\lambda), R_2(\lambda)\right\}$ dır.

Şimdi $(c,b]$ aralığındaki çözümü inceleyelim. Bunun için teorem 3.2.1 in ispatında elde ettiğimiz çözümleri kullanacağız. İlk olarak

$$\Phi_2(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \Phi_{21}(x,\lambda) \\ \Phi_{22}(x,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}^{0} \\ u_{12}^{0} \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} u_{11}^{n} - u_{11}^{n-1} \\ u_{12}^{n} - u_{12}^{n-1} \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

dizisinde

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} u_{11}^{n} \\ u_{12}^{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{21} \\ \Phi_{22} \end{pmatrix}$$

olduğu açıktır. Şimdi bu çözümün sistemin bir çözümü olduğunu gösterelim. Bunun için (3.9) da türev alınarak

$$\Phi_2'(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \Phi_{21}(x,\lambda) \\ \Phi_{22}(x,\lambda) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u_{11}^{1} \\ u_{12}^{1} \end{pmatrix}' + \sum_{n=2}^{\infty} \begin{pmatrix} u_{11}^{n} - u_{11}^{n-1} \\ u_{12}^{n} - u_{12}^{n-1} \end{pmatrix}' \tag{3.10}$$

eşitliği elde edilir.Bu eşitlikte sağ da ilk terim

$$\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}^{0} \\ u_{12}^{0} \end{pmatrix} + \int_{c}^{x} \begin{pmatrix} p_1 u_{11}^{0} \sin\lambda(\text{s}-x) - p_2 u_{12}^{0} \cos\lambda(\text{s}-x) \\ p_1 u_{11}^{0} \cos\lambda(\text{s}-x) + p_2 u_{12}^{0} \sin\lambda(\text{s}-x) \end{pmatrix} ds$$

için türev alındığında

$$\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u_{11}^{0} \\ u_{12}^{0} \end{pmatrix}' + \int_{c}^{x} \begin{pmatrix} -\lambda p_1 \cos\lambda(\text{s}-x) - \lambda p_2 \sin\lambda(\text{s}-x) \\ \lambda p_1 \sin\lambda(\text{s}-x) - p_2 \cos\lambda(\text{s}-x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11}^{0} \\ u_{12}^{0} \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} 0 & -p_2 \\ p_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11}^{0} \\ u_{12}^{0} \end{pmatrix} \quad \text{ve}$$

integralli ifade

$$\int_c^x \begin{pmatrix} -\lambda p_1 \cos\lambda(\mathrm{s}-x) - \lambda p_2 \sin\lambda(\mathrm{s}-x) \\ \lambda p_1 \sin\lambda(\mathrm{s}-x) - p_2\cos\lambda(\mathrm{s}-x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11}^0 \\ u_{12}^0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11}^1 - u_{11}^0 \\ u_{12}^1 - u_{12}^0 \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı ve aynı zamanda sistemden dolayı

$$\begin{pmatrix} u_{11}^0 \\ u_{12}^0 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11}^0 \\ u_{12}^0 \end{pmatrix}$$

dir. Şimdi (3.10) eşitliğinde ikinci terim için

$$\begin{pmatrix} u_{11}^n - u_{11}^{n-1} \\ u_{12}^n - u_{12}^{n-1} \end{pmatrix} = \int_c^x \begin{pmatrix} p_1 \sin\lambda(\mathrm{s}-x) & -p_2\cos\lambda(\mathrm{s}-x) \\ p_1 \cos\lambda(\mathrm{s}-x) & p_2 \sin\lambda(\mathrm{s}-x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11}^{n-1} - u_{11}^{n-2} \\ u_{12}^{n-1} - u_{12}^{n-2} \end{pmatrix} ds$$

eşitliğinden türev alınarak

$$\begin{pmatrix} u_{11}^n - u_{11}^{n-1} \\ u_{12}^n - u_{12}^{n-1} \end{pmatrix}' = \int_c^x \begin{pmatrix} -\lambda p_1 \cos\lambda(\mathrm{s}-x) & -\lambda p_2 \sin\lambda(\mathrm{s}-x) \\ \lambda p_1 \sin\lambda(\mathrm{s}-x) & -\lambda p_2\cos\lambda(\mathrm{s}-x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11}^{n-1} - u_{11}^{n-2} \\ u_{12}^{n-1} - u_{12}^{n-2} \end{pmatrix} ds$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & -p_2 \\ p_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11}^{n-1} - u_{11}^{n-2} \\ u_{12}^{n-1} - u_{12}^{n-2} \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikte integralli ifadenin

$$\int_c^x \begin{pmatrix} -\lambda p_1 \cos\lambda(\mathrm{s}-x) & -\lambda p_2 \sin\lambda(\mathrm{s}-x) \\ \lambda p_1 \sin\lambda(\mathrm{s}-x) & -\lambda p_2\cos\lambda(\mathrm{s}-x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{n-1}{}_{11} - u^{n-2}{}_{11} \\ u^{n-1}{}_{12} - u^{n-2}{}_{12} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^n{}_{11} - u^{n-1}{}_{11} \\ u^n{}_{12} - u^{n-1}{}_{12} \end{pmatrix}$$

olduğu açıktır. Dahası

$$\begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} u_{11}^1 - u_{11}^0 \\ u_{12}^1 - u_{12}^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{11}^n - u_{11}^{n-1} \\ u^n{}_{12} - u_{12}^{n-1} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11}^{n-1} - u_{11}^{n-2} \\ u_{12}^{n-1} - u_{12}^{n-2} \end{pmatrix}$$

dır. Dolayısıyla elde edilen sonuçlar (3.10) eşitliginde uygun yere yazılarak

$$\begin{pmatrix} \Phi_{11}' \\ \Phi_{12}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda - p_2 \\ \lambda + p_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11}^0 \\ u_{12}^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\lambda - p_2 \\ \lambda + p_1 & 0 \end{pmatrix} \sum_{n=2}^{\infty} \begin{pmatrix} u^{n-1}{}_{11} - u^{n-2}{}_{11} \\ u^{n-1}{}_{12} - u^{n-2}{}_{12} \end{pmatrix}$$

son eşitlikte gerekli işlemler yapılarak

$$\begin{pmatrix} \Phi'_{11} \\ \Phi'_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda - p_2 \\ \lambda + p_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Phi'_{11} + p_2 \Phi_{12} &= -\lambda \Phi_{12} \\ \Phi'_{12} - p_1 \Phi_{11} &= \lambda \Phi_{11} \end{aligned}$$

sistemi elde edilir ki bu çözümlerin denklemi sağladığını gösterir. Şimdi bu bölümde verilenleri teorem olarak ifade edelim.

Teorem 3.2.2: Her $x \in [a,c) \cup (c,b]$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için (1.7)-(1.10) Dirac sistemi

$$\Phi(x,\lambda) = \begin{cases} \Phi_1^T(x,\lambda) = (\Phi_{11}, \Phi_{12}), x \in [a,c) \\ \Phi_2^T(x,\lambda) = (\Phi_{21}, \Phi_{22}), x \in (c,b] \end{cases}$$

biçiminde λ nın tam fonksiyonu olan bir çözüme sahiptir, [13].

İspat: Yukarda yapılan kanıtlara benzerdir.

3.3. Problemin Özdeğerleri

Problemin Wronskian determinant, $W(\Phi_i \Psi_i)$, $i = 1,2$, $\forall x \in [a,c) \cup (c,b]$den bağımsız yalnızca λ ya bağlı olduğunu Bölüm 2 den biliyoruz. Şimdi

$$W(\Phi_i(x,\lambda), \Psi_i(x,\lambda)) = \omega_i(\lambda),\ i = 1,2$$

olsun. Dolayısıyla (1.10) geçiş şartları kullanılarak

$$\begin{aligned} \omega_1(\lambda) &= W(\Phi_1(\mathrm{c}-0,\lambda), \Psi_1(\mathrm{c}-0,\lambda)) \\ &= \begin{vmatrix} \Phi_{11}(\mathrm{c}-0,\lambda) & \Phi_{12}(\mathrm{c}-0,\lambda) \\ \Psi_{11}(\mathrm{c}-0,\lambda) & \Psi_{12}(\mathrm{c}-0,\lambda) \end{vmatrix} \\ &= \Phi_{11}(\mathrm{c}-0,\lambda)\Psi_{12}(\mathrm{c}-0,\lambda) - \Phi_{12}(\mathrm{c}-0,\lambda)\Psi_{11}(\mathrm{c}-0,\lambda) \\ &= \gamma^{-1}\Phi_{21}(\mathrm{c}+0,\lambda)\gamma\Psi_{22}(\mathrm{c}+0,\lambda) - \gamma\Phi_{22}(\mathrm{c}+0,\lambda)\gamma^{-1}\Psi_{21}(\mathrm{c}+0,\lambda) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla yukarı da ilk ve son eşitlikten

$$\omega_1(\lambda) = \omega_2(\lambda) = \omega(\lambda) \tag{3.11}$$

yazabiliriz. Şimdi özdeğerler için karakteristik fonksiyon tanımlayalım. Daha öncesinde (1.7)-(1.10) probleminin $\Phi(x,\lambda)$ ve $\Psi(x,\lambda)$ çözümleri bazı $\alpha,\beta \in [0,\pi)$ için

$$\begin{aligned} &\Phi_{11}(a,\lambda) = \cos\alpha,\ \Phi_{12}(a,\lambda) = \sin\alpha \\ &\Psi_{21}(b,\lambda) = a_1 + \lambda\cos\beta,\ \Psi_{22}(b,\lambda) = b_1 + \lambda\sin\beta \end{aligned} \tag{3.12}$$

sağlanacak biçim de tanımlanmıştı. Dolayısıyla (1.7)-(1.10) probleminin herhangi bir çözümü aşağıda gösterildiği gibi temsil edinilir.

$$u(x,\lambda) = \begin{cases} u_1^T(x,\lambda) = (\mathrm{c}_1\Phi_{11} + \mathrm{c}_2\Psi_{11}, \mathrm{c}_1\Phi_{12} + \mathrm{c}_2\Psi_{12}), x \in [a,c) \\ u_2^T(x,\lambda) = (\mathrm{c}_3\Phi_{21} + \mathrm{c}_4\Psi_{21}, \mathrm{c}_3\Phi_{22} + \mathrm{c}_4\Psi_{22}), x \in (c,b) \end{cases} \tag{3.13}$$

Şimdi (3.12) de verilen başlangıç şartlarını göz önün de bulundurarak (1.8),(1.9) ve (110) sınır şartlarını (3.13) çözümüne uygulayarak bilinmeyenleri c_1, c_2, c_3 ve c_4 olan bir lineer denklem sistemi elde edilebilir. Dolayısıyla bu sistem için aşağıdaki katsayı matrisini oluşturabiliriz.

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_1(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2(\lambda) & 0 \\ \Phi_{11}(c-0,\lambda) & \Phi_{12}(c-0,\lambda) & -\gamma\Psi_{21}(c+0,\lambda) & -\gamma\Psi_{22}(c+0,\lambda) \\ \Phi_{21}(c-0,\lambda) & \Phi_{22}(c-0,\lambda) & -\gamma^{-1}\Psi_{11}(c+0,\lambda) & -\gamma^{-1}\Psi_{12}(c+0,\lambda) \end{pmatrix}$$

Oluşturduğumuz bu matrisin determinantını $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ için $W(\lambda)$ ile gösterelim. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= -\omega_1(\lambda)\omega_2(\lambda) \begin{vmatrix} \Phi_{11}(c-0,\lambda) & \Psi_{11}(c-0,\lambda) \\ \Phi_{12}(c-0,\lambda) & \Psi_{12}(c-0,\lambda) \end{vmatrix} \\ &= -\omega_1^2(\lambda)\omega_2(\lambda) \\ &= -\omega^3(\lambda) \end{aligned} \tag{3.14}$$

fonksiyonu elde edilir. Şimdi teoremi verelim.

Teorem 3.3.1: (1.7)-(1.10) probleminin özdeğerleri $W(\lambda)$ karakteristik fonksiyonun kökleridir, [13].

İspat: Herhangi bir $\lambda = \lambda_n$ için $W(\lambda_n) = 0$ olsun.O zaman (3.14) eşitliğinden $\Phi(x,\lambda)$ ve $\Psi(x,\lambda)$ fonksiyonlarının *Wronskian* determinant sıfırdır ki bu determinant özelliklerinden

$$\Psi_2(x,\lambda_n) = k\Phi_2(x,\lambda_n), x \in (c,b]$$

olacak şekilde bir k reel sayısının olduğunu gösterir. Ayrıca $\Psi(x,\lambda_n)$ (1.9) koşulunu gerçekler ve dolayısıyla (1.7)-(1.10) probleminin λ_n özdeğerine karşılık gelen özfonsiyonudur.

Tersine λ_n özdeğerine karşılık gelen vectör-değerli özfonksiyon $u_n(x,\lambda_n)$ ve $W(\lambda_n) \neq 0$ olsun. O zaman (3.13) den dolayı lineer bağımsız olan enaz bir (Φ_1^T, Φ_2^T) ve (Ψ_1^T, Ψ_2^T) fonksiyon çifti vardır öyle ki enaz biri sıfırdan farklı olan C_1, C_2, D_1 ve D_2 sabitleri yardımıyla

$$u_n(x,\lambda_n) = \begin{cases} C_1\Phi_1^T(x,\lambda_n) + C_2\Phi_2^T(x,\lambda_n), x \in [a,c) \\ D_1\Psi_1^T(x,\lambda_n) + D_2\Psi_2^T(x,\lambda_n), x \in (c,b] \end{cases}$$

biçimin de ifade edilebilir. Dolayısıyla $u_n(x,\lambda_n)$ vectör-değerli fonksiyonu, λ_n özdeğerine karşılık gelen özfonksiyondur. O halde (1.8) –(1.10) şartları kullanılarak katsayı determinant sıfır olan bir homojen denklem sistemi elde edilebilir. Dolayısıyla $W(\lambda_n) = 0$ olacağından çelişkiye düşeriz. Buradan ispat biter.

Teorem 3.3.3: (1.7)-(1.10) Dirac sistemi sayılabilir çoklukta özdeğere sahip ve bu özdeğerler sonlu limit noktasına sahip değildir, [13].

BÖLÜM 4

SONUÇLAR

Bu güne kadar yapılan çalışmalarda Dirac sistemlerinin de temeli olan Sturm-Liouville denklemleriyle ilgili (sürekli veya süreksiz) birçok çalışma yapılmıştır.
Ancak literatürde Dirac sistemleri ile ilgili sınırlı sayıda çalışma var ve bu çalışmalar genellikle ters problem üzerine ortaya konmuş ve sonuçlar bu yönde geliştirilmiştir.

Tez boyunca yapılan çalışmalarda süreksiz bir Dirac sistemi ele alınıp, bu sistem için çözümlerin varlığı ispatlanmıştır. Ayrıca incelenen sistemin özdeğerlerinin basit olduğu gösterilmiş, özdeğerler için karakteristik denklem elde edilmiş ve bazı özellikleri ortaya çıkarılmıştır.

Son olarak diyebiliriz ki bu çalışma n tane noktada süreksiz olan Dirac sistemi için genelleştirilebilir. Ayrıca ikinci mertebeden süreksiz lineer diferansiyel sitemler için tezde verilen yöntem kullanılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Titchmarsh, E.C., *Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations,* Clarendon Press, Oxford, 1962.

[2] Naimark M. A., *Linear Differential Operators, Part I,* George G. Harrap, London, 1967.

[3] Levitan. B.M., Sargsjan, I.S., Sturm-Liouville and Dirac operators, *Kluwer Academic Pub.,* Boston, 1991.

[4] Walter, J., Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions, *Math. Z.,* 133: 301-312, 1973.

[5] Fulton,C.T., Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions, *Proc. Roy. Soc. Edin*. A 77: 293-308. 1977.

[6] Fulton,C.T., Singular eigenvalue problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions, *Proc. Roy. Soc. Edin. A* 87: 293-308. 1980

[7] Kadakal, M ., Mukhtarov, O.Sh., Sturm-Liouville Problems with discontinuities at two points, *Computers and Mathematics with Applications*, 54: 1367-1379, 2007.

[8] Akdoğan, Z., Demirci, M., Mukhtarov, O.Sh., Discontinuous Sturm-Liouville Problems with Eigendependent Boundary and Transmissions Conditions, *Acta Applicandae Mathematicae*, 86:329-344, 2005

[9] Mukhtarov, O.Sh., Tunc E., Eigenvalue problems for Sturm-Liouville equations with transmission conditions, *Israel J. Math.,* 144: 367-380,2004.

[10] Kerimov, N. B., A boundary value problem for the Dirac system with a spectral parameter in the boundary conditions, *Differential Equations.* 38(2): 164-174, 2002.

[11] Keskin. B., Özkan. A. S., eigenvalue Inverse spectral problems for the Dirac operator with dependent boundary and jump conditions, *Acta Math.* Hungar., 130 (4): 309-320, 2011.

[12] Rama Mohana Rao, M., *Ordinary differential equations-theory and Applications*, Edward Arnold, London, 1980.

[13] Kablan, A., Özden, T., A Dirac system with transmission condition and eigen-parameter in the boundary condition, *Abstract and Applied Analysis* (gönderildi)