

**GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÇİFT ÜSTEL İNTEGRASYON METODU VE BU
METODUN SALINIMLI İNTEGRALLERE
UYGULANMASI**

**MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**NESLİHAN AZAB
HAZİRAN 2013**

**Çift Üstel İntegrasyon Metodu ve Bu Metodun
Salınımlı İntegrallere Uygulanması**

**Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi**

**Danışman
Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK**

**Neslihan AZAB
HAZİRAN 2013**

© 2013 NESLIHAN AZAB


T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Çift Üstel İntegrasyon Metodu ve Bu Metodun Sınımlı İntegrallere
Uygulanması
Öğrencinin, Adı Soyadı: Neslihan AZAB
Tez Savunma Tarihi: 15.07.2013


Fen Bilimleri Enstitü Onayı


Doç. Dr. Metin BEDİR
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.


Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca (tarafımızca) okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.


Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

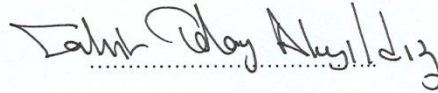
Juri Üyeleri :

Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ

Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK

Yrd. Doç. Dr. Ali Suat GERÇEK

İmzası







ÖZ

ÇİFT ÜSTEL İNTEGRASYON METODU VE BU METODUN SALINIMLI İNTEGRALLERE UYGULANMASI

AZAB, Neslihan

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Ali İhsan Haşçelik

Temmuz 2013, 54 Sayfa

Yüksek salınlı integrallerin hesabı geçmişten günümüze bilim dünyasında merak uyandıran ve üzerinde birçok çalışmaları beraberinde getiren bir konu olmuştur. Salınım çekirdeği $e^{i\omega g(x)}$ olan bu tür yüksek salınlı integrallerin değerinin bulunması için birçok nümerik metot kullanılmıştır. Çift üstel salınlı integrasyon metodu da bu nümerik metotlardan biridir.

Bu çalışmada çift üstel formülü ve onun optimalliği irdelenip, salınlı integrallere nasıl uygulanabildiği verilmiş olan nümerik örneklerle açıklanmıştır. Ayrıca çift üstel salınlı integrasyon metodu; yüksek salınlı integrallerin hesabı için daha önceden bilinen nümerik metotlarla karşılaştırılması tablo ve grafikler halinde gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: TANH-Kuralı, SINH-Kuralı, TAN-Kuralı, IMT-Kuralı, Hata Tahmini, Levin Metodu, Asimptotik Metot, Sayısal Dik İniş Metodu, Filon Metot, Optimallik Kavramı.

ABSTRACT

DOUBLE EXPONENTIAL INTEGRATION METHOD AND ITS APPLICATION TO OSCILLATORY INTEGRALS

AZAB , Neslihan

M.Sc.Thesis,Math Department

Adviser : Associate Professor Ali İhsan HASÇELİK

July 2013 , 54 pages

Numerical calculation of highly oscillatory integrals has been subject of the many investigations in science. There are many numerical methods to calculate the highly oscillatory integrals which has kernel $e^{i\omega g(x)}$. Double exponential oscillatory method is one of the methods.

In this thesis, optimality of the Double exponential oscillatory integrating formula is investigated and numerical examples are given whichs shows the applicability of this method. Furthermore, we compare the result of our method with other method which was used previously and the results are documented on graphs and tables.

Key words : TANH-rule, SINH-rule, TAN-Rule, IMT-Rule, Error Estimation, Levin method, Asymptotic Method, The Numerical Steepest Descent Method, Filon Mehtod, The optimality concept.

TEŐEKKÖRLER

Bu alıŐma sűresince gűsterdiĐi yol ve yűntemlerle desteĐini esirgemeyen Sayın hocam Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK'e ve benden maddi manevi hiçbir desteĐini esirgemeyen deĐerli aileme teŐekkűr ederim.

İÇİNDEKİLER

	SAYFA
ÖZ	v
ABSTRACT	vi
TABLolar LİSTESİ	x
ŞEKİLLER LİSTESİ	xi
SEMBOLLER LİSTESİ	xii
KISALTMALAR LİSTESİ	xiii
BÖLÜM 1: GİRİŞ	1
BÖLÜM 2: NÜMERİK İNTEGRASYON METOTLARI	3
2.1 Salınlı İntegrallerin hesabı İçin Nümerik Mototlar	3
2.1.1 Filon Motodu	3
2.1.2 Levin Metodu	4
2.1.3 Asimtotik Metod	5
2.1.4 Dik İniş Metodu	7
BÖLÜM 3: İMPROPER İNTEGRALLER İÇİN NÜMERİK METODLAR	10
3.1 İmproper İntegraller İçin Uygun Formüller	10
3.1.1 Tanh Kuralı	10
3.1.2 IMT Kuralı	11
3.1.3 Tanh ve IMT Kuralları İçin Nümerik Örnekler	11
3.2 Yavaş Yakınsayan İntegraller İçin İntegrasyon Formülleri	13
3.2.1 Sinh Kuralı	13
3.2.2 Tan Kuralı	13
3.2.3 Sinh ve Tan Kuralları İçin Nümerik Örnekler	14
BÖLÜM 4 : ÇİFT ÜSTEL İNTEGRASYON METODU	16
4.1 Nümerik İntegrasyon ve Çift Üstel Dönüşüm	16
4.2 Nümerik Örnekler	19
4.3 Çift Üstel Dönüşümün Optimalliği	23
4.3.1 $H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)$ Fonksiyon Uzayları	24
4.3.2 Yamuk Formülün Optimalliği	25
4.3.2.1 Hata Tahminleri	25
4.3.2.2 İspatlar	30
4.3.2.2.1 Yamuk Formülünün Hata Normunun Üst Tahmini	30
4.3.2.2.2 Minimum Hata Normu İçin Alt Tahmini	33

4.3.3 Yokluk Teoremi	36
BÖLÜM 5: ÇİFT ÜSTEL SALINIMLI İNTEGRASYON METODU	40
5.1 Çift Üstel Salınlı İntegrasyon Metodu	40
5.2 Dönüşümler İçin Çift Üstel Salınlı Formül.....	42
5.3 Nümerik Örnekler	44
5.3.1 Çift Üstel Metod ile Karşılaştırma	46
5.3.2 Nümerik Metotlar ile Çift Üstel İntegrasyon Metodunu Karşılaştırılması....	47
BÖLÜM 6: SONUÇLAR.....	50
KAYNAKLAR	51

TABLULAR LİSTESİ

SAYFA

Tablo. 5.1 DE formülü ile DE salınımlı formülün karşılaştırılması	46
Tablo 5.2 DE formülü ile DE salınımlı formülün karşılaştırılması	46
Tablo 5.3 Levin metodu ile çift üstel integrasyon metodunun karşılaştırılması	47
Tablo 5.4 $I_2^f[a, b]$ hesabı için gerekli nokta sayısı (integrand hesabı)	48

ŞEKİLLER LİSTESİ

SAYFA

Şekil 3.1 $\int_{-1}^1 1/\{(x-2)(1-x)^{\frac{1}{4}}(1+x)^{\frac{3}{4}}\} dx$ integrali için hesaplanmış hata.....	12
Şekil 3.2 $\int_{-1}^1 \cos \pi x / (1-x)^{\frac{1}{2}} dx$ integrali için hesaplanmış hata	12
Şekil 3.3 SINH-Kuralı ve TAN-Kuralının karşılaştırılması	15
Şekil 4.1 DE dönüşüm fonksiyonlarının karşılaştırılması	18
Şekil 4.2 DE dönüşüm fonksiyonlarının karşılaştırılması	19
Şekil 4.3 DE dönüşüm fonksiyonlarının karşılaştırılması	20
Şekil 4.4 DE dönüşüm fonksiyonlarının karşılaştırılması	20
Şekil 4.5 DE dönüşüm fonksiyonlarının karşılaştırılması	20
Şekil 4.6 $\int_{-1}^1 1/\{(x-2)(1-x)^{1/4}(1+x)^{3/4}\} dx$ in hesaplanmış hatası	21
Şekil 4.7 $\int_{-1}^1 (\cos \pi x) / \sqrt{1-x} dx$ in hesaplanmış hatası	21
Şekil 4.8 $\int_0^{\infty} e^{-1-x} / (1+x) dx$ in hesaplanmış hatası.....	22
Şekil 4.9 $\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-5/4} dx$ in hesaplanmış hatası	22
Şekil 4.10 $\int_{-\infty}^{\infty} 1/(1+x^4) dx$ in hesaplanmış hatası.....	23
Şekil 5.1 (4.4)-ün integrandı ve (4.5)-in örnek noktaları	42
Şekil 5.2 (4.7), (4.8), (4.9) integrandları	43
Şekil 5.3 $ F(\omega) - \tilde{F}_h^{(N)}(\omega) $, ($h = 0.075$, $N_- = 94$, $N_+ = 69$)	44
Şekil 5.4 $ F(\omega) - \tilde{F}_h^{(N)}(\omega) $, ($h = 0.15$, $N_- = 44$, $N_+ = 35$)	45
Şekil 5.5 $ F(\omega) - \tilde{F}_h^{(N)}(\omega) $, ($h = 0.03$, $N_- = 253$, $N_+ = 173$)	45

SEMBOLLER LİSTESİ

$\widehat{\Phi}(\omega)$ Karakteristik fonksiyon

$|\Delta I|$ Mutlak hata

$H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)$ Reel eksen üzerindeki $2d$ genişliğinde sınırlı bir bölgedeki fonksiyonların uzayı

$\|f\|$ f fonksiyonunun sup normu

$B(\mathfrak{D}_d)$ \mathfrak{D}_d de tüm f analitik fonksiyonları ailesi

$o(h^p)$ $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{f(h^p)}{h^p} = 0$

$O(h^p)$ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^p)}{h^p} = \text{sabit}$

KISALTMALAR LİSTESİ

DE formülü	Double Exponential (Çift üstel formül)
DEM	Double Exponential Method (Çift Üstel İntegrasyon Metodu)
DEO	Double Exponential Oscillatory (Çift Üstel Salınım)
FFT	Fast Fourier Transforms (Hızlı Fourier Dönüşümleri)

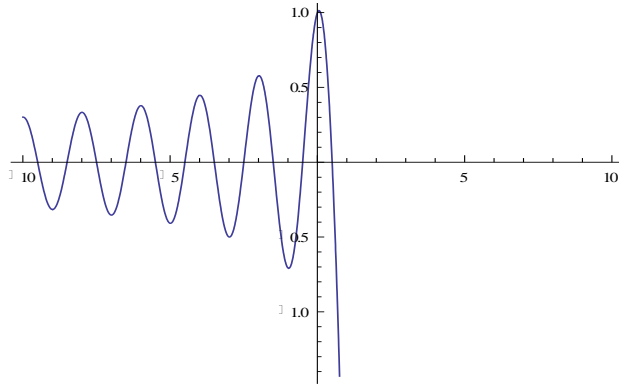
BÖLÜM 1

GİRİŞ

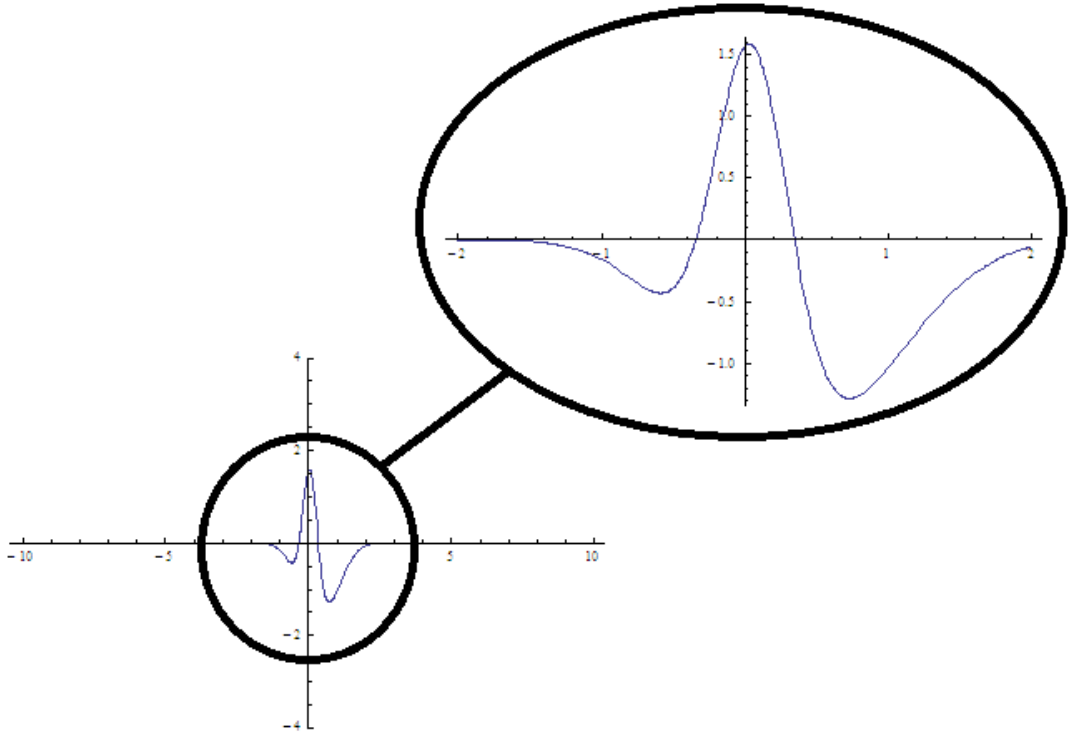
$$\int_a^b f(x)e^{i\omega g(x)} dx$$

şeklindeki salınımlı integrallerin hesabı için 2. Bölüm'de tanıtılacak olan bazı metotlar çeşitli fikirlere dayanarak ortaya atılmıştır. Bunlardan bazıları $f(x)$ fonksiyonuna bir interpolasyon polinomu ile yaklaşmayı, bazıları integrand fonksiyonunu çevreleyen uygun bir path (yol) seçmeyi, bazıları da sistem çözümünü gerektirecek yöntemler kullanarak bir sonuca ulaşmayı denemişlerdir.

Peki integrand fonksiyonu integral aralığında veya uç noktalarda tekilliğe sahip olduğunda böyle bir integral nasıl hesaplanacaktır? İlk kez 1974 yılında Takahasi ve Mori tarafından böyle bir integrali hesaplamak için integral aralığının tipine göre uygun değişken değişimleri kullanarak hesaplanacak olan alanlar toplamını $(-\infty, \infty)$ aralığına genişleterek bu aralıkta kompozit yamuk kuralını uygulamış ve son derece etkili bir yöntem ortaya koymuşlardır.



Grafiği yukarıda verilen salınımlı integral fonksiyona sahip bir integrali 3. ve 4. bölümlerde daha detaylı bir şekilde tanıtılacak olan uygun bir dönüşüm kullanıldığında hesaplanmak istenen integralin integrand fonksiyonu



biçimine sahip olacaktır. Dolayısıyla böyle bir integranda sahip integralin hesabı daha kolay ve hızlı olacaktır. İntegrandı bu hale getiren dönüşüme *Çift Üstel Dönüşüm*: bu yönteme de *Çift Üstel İntegrasyon Metodu* denilecektir.

6. Bölümde Takahasi ve Mori tarafından ortaya atılmış çift üstel metodun salınımlı integrallere nasıl uygulandığını ve daha önceden bilinen 2. Bölümde tanıtılmış salınımlı integrallerin hesabı için kullanılan diğer metotlarla karşılaştırılması yapılmıştır.

BÖLÜM 2

2.1 Salınlı İntegrallerin Hesabı İçin Nümerik Metotlar

Salınım çekirdeği $e^{i\omega g(x)}$ olan

$$I[f] = \int_a^b f(x) e^{i\omega g(x)} dx \quad (2.1)$$

şeklindeki integralleri hesaplamaya çalışıyoruz.

* $\int_a^b f(x) \sin(\omega g(x)) dx$ örneğindeki sıkıntıyı söyleyelim.

Örnek: $\int_0^2 \frac{1}{1+x} \sin(10^6 x) dx$ integralini inceleyelim:

(0,2) aralığında $\sin(10^6 x)$ -in kökleri:

$$\sin(10^6 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 10^6 x = k\pi \quad , \quad k = 0,1,2, \dots, 10^6$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{10^6} \quad , \quad k = 0,1,2, \dots, 10^6$$

olacak şekildedir. Yani burada yaklaşık 10^6 tane kök vardır. Dolayısıyla $\sin(10^6 x)$ fonksiyonu x -eksenini yaklaşık 10^6 defa keser. Bu da integralin (0,2) -aralığında yüksek bir salınımına sahip olduğunu gösterir. Bu integrali hesaplamak için salınlı ifadeye interpolasyon polinomu uygulanıp integral yeniden düzenlenir ve hesabı yapılır. Fakat tüm integralleri nümerik olarak hesaplamak için salınlı ifadeye interpolasyon polinomu kullanmak zor, pahalı ve masraflı bir iş olduğundan bu yöntem pratikte kullanılmaz. Bu tür integrallerin hesabı için şu metotlar kullanılmaktadır.

2.1.1 Filon Metodu

(2.1) integralinde salınlı fazla olmayan $f(x)$ e bir polinomla yaklaşmak bu metodun dayanağı olmuştur. Buradaki f fonksiyonunu

$$P_n(x_k) = f(x_k) \quad , \quad k = 0,1,2, \dots, n$$

olacak şekilde bir

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$$

polinomu ile yer değiştiriyoruz. Bu polinom (2.1) integralinde yerine yazılırsa

$$I_y[f] = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^n c_k x^k \right) e^{i\omega g(x)} dx = \sum_{k=0}^n c_k \int_a^b x^k e^{i\omega g(x)} dx = \sum_{k=0}^n c_k \mu_k$$

Burada

$$\mu_k = \int_a^b x^k e^{i\omega g(x)} dx$$

şeklinde tanımlı momentlerdir (ağırlıklardır).

Filon metodunun hatası

$$I[f] - I_y[f] = O\left(\frac{1}{\omega^{s+1}}\right)$$

şeklinindedir. Buradan da anlaşıldığı gibi ω ne kadar büyük olursa Filon metodu ($I_y[f]$) o kadar iyi sonuç verir bu da onu iyi bir metot yapar. Orijinal Filon metodunda uç noktalarda türev kullanılmamıştır. Normal interpolasyon yerine türevlerin de kullanıldığı Hermite interpolasyon polinomu kullanılırsa metot “*Filon tipi metot*” adını alır.

Bu metodun dezavantajı $g(x)$ karmaşık bir fonksiyon olursa momentleri hesaplamada sıkıntı çıkabilir. Bu nedenle moment hesaplamadaki bu güçlük metodu sürekli kullanılabilir olmaktan çıkarılır ve başka metotlarına varlığına ihtiyaç duyulur. İhtiyaç duyulan bu metotlardan birisi de Levin metodudur.

2.1.2 Levin Metodu

(2.1) integralinde $f(x)$ fonksiyonunun ilkeli olan $F(x)$ fonksiyonuna aşağıdaki řu işlemler yapılır.

$$\frac{d}{dx} [F(x)e^{i\omega g(x)}] = f(x)e^{i\omega g(x)}$$

$$F'(x)e^{i\omega g(x)} + F(x)i\omega g'(x)e^{i\omega g(x)} = f(x)e^{i\omega g(x)}$$

$$F'(x) + F(x)i\omega g'(x) = f(x)$$

$$\int_a^b \frac{d}{dx} [F(x)e^{i\omega g(x)}] dx = \int_a^b f(x)e^{i\omega g(x)} dx$$

$$F(b)e^{i\omega g(b)} - F(a)e^{i\omega g(a)} = \int_a^b f(x)e^{i\omega g(x)} dx \quad (2.2)$$

$F'(x) + F(x)i\omega g'(x) = L[F](x)$ operatörü densin. Yaklaşık fonksiyon

$$v(x) \equiv \sum_{k=0}^n c_k x^k \cong F(x)$$

$$F'(x) + F(x)i\omega g'(x) = f(x)$$

$$v'(x) + i\omega g'(x)v(x) \cong f(x)$$

$$\sum_{k=1}^n k c_k x^{k-1} + i\omega g'(x) \sum_{k=0}^n c_k x^k \cong f(x)$$

Özel noktalarda eşitlik sağlayacak bir c_k belirliyoruz.

$$\sum_{k=1}^n k c_k x_j^{k-1} + i\omega g'(x) \sum_{k=0}^n c_k x_j^k \cong f(x_j) \quad ; \quad j = 0, 1, \dots, n$$

Burada sistem çözümü yapılarak c_k -lar belirlenir ve uygun $v(x)$ polinomu bulunmuş olur. $v(x)$ polinomu (2.2) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$v(b)e^{i\omega g(b)} - v(a)e^{i\omega g(a)} = \int_a^b f(x)e^{i\omega g(x)} dx$$

bulunur. Bu metoda *Levin metodu* denir.

$$[v'(x) + i\omega g'(x)v(x)]' = [f(x)]'$$

alınırsa türevler de dahil edilir yani hem türevler hem de uç noktalar arasındaki noktalar hesaba katılmış olur. Böylece daha iyi netice elde edilir. Bu teknik de *Levin tipi metot* olur. Levin metodunun dezavantajı daha iyi bir yaklaşım elde edilmek istenirse daha büyük sistemleri çözmek gerekebilir ki bu da pahalı bir iştir. Ya da $f(x)$ integrandının integral aralığında tekil noktaları olabilir. Metodun bu yanı bir başka integrasyon metodun araştırılması gerekliliğini ortaya koyar.

2.1.3 Asimptotik Metot

$$\begin{aligned} I[f] &= \int_a^b f(x)e^{i\omega g(x)} dx \\ &= \int_a^b \frac{f(x)}{i\omega g'(x)} \frac{d}{dx} (e^{i\omega g(x)}) dx \end{aligned}$$

Burada $\frac{f(x)}{i\omega g'(x)} = u$ ve $\frac{d}{dx}(e^{i\omega g(x)})dx = dv$ olacak şekilde kısmi integrasyon uygulandığında;

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{i\omega} \frac{f(x)}{g'(x)} e^{i\omega g(x)} \Big|_a^b - \frac{1}{i\omega} \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g'(x)} \right) e^{i\omega g(x)} dx \\ &= Q_1^A(f) - \frac{1}{i\omega} I \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g'} \right) \right) \\ &\Rightarrow I(f) - Q_1^A(f) = O(\omega^{-2}) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu işlem tekrar edilirse

$$\begin{aligned} &\int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g'(x)} \right) e^{i\omega g(x)} dx \\ &= \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g'(x)} \right) \frac{1}{i\omega g'(x)} \frac{d}{dx} (e^{i\omega g(x)}) dx \\ &= \frac{1}{i\omega} \int_a^b \frac{1}{g'(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g'(x)} \right) \frac{d}{dx} (e^{i\omega g(x)}) dx \\ &= \frac{1}{i\omega} \left[\frac{1}{g'(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g'(x)} \right) e^{i\omega g(x)} \right]_a^b - \frac{1}{i\omega} \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{g'(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g'(x)} \right) \right) e^{i\omega g(x)} dx \end{aligned}$$

bulunur.

❖ Neden $\frac{1}{\omega}$ mertebesinde geliyor?

$g(x) = x$ olsun.

$$\int_a^b e^{i\omega g(x)} dx = \frac{1}{i\omega} e^{i\omega g(x)} \Big|_a^b = \frac{1}{\omega}$$

$$\sigma_0(f)(x) = f(x) ; \sigma_1(f)(x) = \frac{f(x)}{g'(x)} ; \sigma_2(f)(x) = \frac{1}{g'(x)} \frac{d}{dx} (\sigma_1(f)(x))$$

$$\sigma_{k+1}(f)(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{\sigma_k(f)(x)}{g'(x)} \right] , \quad k = 0, 1, \dots$$

$$Q_s^A(f) = - \sum_{k=1}^s \frac{1}{(-i\omega)^k} \{ \sigma_k(f)(b) e^{i\omega g(b)} - \sigma_k(f)(a) e^{i\omega g(a)} \}$$

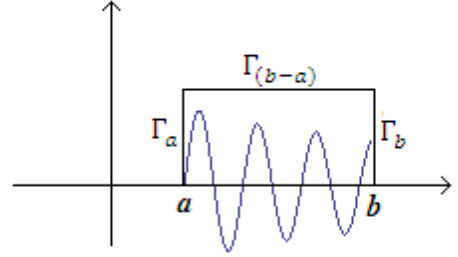
$$I(f) - Q_s^A(f) \approx O(\omega^{-s-1})$$

Bu metodun dezavantajı ω –nın küçük değerlerinde büyük hata getirmesidir. Ayrıca $g(x)$ fonksiyonunun sembolik türevini alma sıkıntıları olabilir.

2.1.4 Dik İniş Metodu (The Steepest Descent Method)

$$\int_a^b f(x)e^{i\omega g(x)} dx$$

$$g(x) = x, x^2, x^3, \dots$$

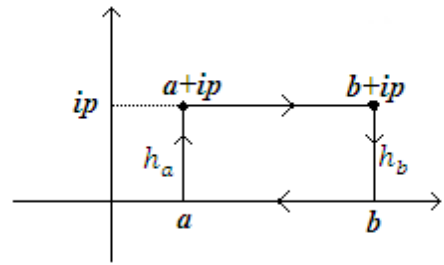


Örnek: $g(x) = x$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} e^{i\omega x} dx$$

$$g(h_a(p)) = g(a + ip) , \quad p > 0 , a = 0$$

$$h_a(p) = a + ip$$

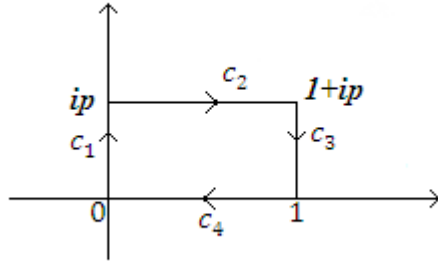


$$g(x) = \text{Re}[g(x)] + i\text{Im}[g(x)]$$

$$e^{i\omega g(x)} = e^{i\omega[\text{Re}(g(x)) + i\text{Im}(g(x))]}$$

$$e^{i\omega \text{Re}[g(x)]} e^{-\omega \text{Im}[g(x)]}$$

$\text{Re}[g(x)]$ sabit ise kompleks bir sayı belirtir, yani c bir sayı olmak üzere $e^{i\omega c}$ olur. Salınımsız hale gelir.



$$\int_c \frac{1}{1+z} e^{i\omega z} dz$$

integrallerini eğri üzerinden giderek hesaplayalım:

c_1, c_2, c_3, c_4 kapalı bir bölge (eğri) oluşturduğundan bu eğriler boyunca alınan integrallerin toplamı "0" olur ve

$$\begin{aligned} 0 &= \int_c \frac{1}{1+z} e^{i\omega z} dz \\ &= - \int_0^1 \frac{1}{1+x} e^{i\omega x} dx + \int_0^p \frac{i}{1+iy} e^{\omega y} dy + \int_0^p \frac{1}{2+iy} e^{i\omega(1+iy)} dy \\ &\quad + \int_0^1 \frac{1}{1+x+ip} e^{i\omega(x+ip)} dx - \int_0^p \frac{i}{2+iy} e^{i\omega-\omega y} dy \\ &= -ie^{i\omega} \int_0^p \frac{i}{2+iy} e^{-\omega y} dy \end{aligned}$$

c_2 için $p \rightarrow \infty$ için aslında;

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x+ip} e^{i\omega x} e^{-p\omega} dx &= e^{-p\omega} \int_0^1 \frac{1}{1+x+ip} e^{i\omega x} dx \\ - \int_0^1 \frac{1}{1+x} e^{i\omega x} dx &= i \int_0^p \frac{1}{1+iy} e^{-\omega y} dy - ie^{i\omega} \int_0^p \frac{1}{2+iy} e^{-\omega y} dy = 0 \end{aligned}$$

Yani;

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} e^{i\omega x} dx = i \int_0^p \frac{1}{1+iy} e^{-\omega y} dy - ie^{i\omega} \int_0^p \frac{1}{2+iy} e^{-\omega y} dy$$

Laguerre ağırlık fonksiyonu $\omega(x) = e^{-x}$ $[0, \infty)$

$\omega y = t$ ve $\omega dy = dt$ için

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} e^{i\omega x} dx = \frac{i}{\omega} \int_0^\infty \frac{1}{1+\frac{it}{\omega}} e^{-t} dt - i \frac{e^{i\omega}}{\omega} \int_0^\infty \frac{1}{2+\frac{it}{\omega}} e^{-t} dt$$

Son integralleri hesaplamak için Gauss-Laguerre metodu kullanılır. Bu yönteme *Dik*
İniş *Metodu* adı verilir.

BÖLÜM 3

3.1 İmproper İntegraller İçin Uygun Formüller

Değişken değişimi improper integrallerin hesabı için iyi bilinen bir tekniktir. Başarılı bir değişken değişimi yapmak her bir integrale özgü bir dönüşüm fonksiyonu belirlemek isteyen her matematikçinin hünerine bakan değişken değişimi için gerekli uygun bir dönüşüm fonksiyonunun seçimine bağlıdır. Buna zıt olarak, Schwartz improper integrallerin geniş bir sınıfına uygulandığında çok etkili olan böyle bir dönüşüm için genel bir form belirlemiştir. Dönüşüm fonksiyonu integrandı süreksiz yapan varsa tekil noktalarında, ∞ -da yakınsak olan bir başka integranda taşır. Daha sonra h -eşit adım aralıklı yamuk kuralı dönüşen yeni integrale uygulanır.

$(-1,1)$ -açık aralığı üzerinde uç noktaların en az birinde tekilliğe sahip herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx \quad (3.1)$$

improper integrale değişken değişimi yapılacaktır. Bu değişken değişimi için seçilen dönüşüm fonksiyonları aşağıda yan başlıklar halinde tek tek irdelenmiştir.

3.1.1 Tanh-Kuralı

Dönüşüm fonksiyonu

$$x = \varphi(u) = \tanh u \quad (3.1. a)$$

şeklinde alınırsa; (3.1) improper integrali

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tanh u) \frac{1}{\cosh^2 u} du \quad (3.2)$$

biçimine dönüşecektir. Dönüşen I integrale h -eşit adım aralıklı yamuk kuralı uygulandığında

$$I_h = h \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tanh nu) \frac{1}{\cosh^2 nh}$$

quadrature formülü elde edilir. Elde edilen (I_h) kuralına “*Tanh-Kuralı*” adı verilir. (I_h) kuralının hata formülü

$$\begin{aligned}
I(f) - I_h &= \int_{-1}^1 f(x)dx - h \sum_{n=0}^{\infty} f(\tanh u) \frac{1}{\cosh^2 nh} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int \Phi(\omega) f(\tanh \omega) \frac{1}{\cosh^2 \omega} d\omega
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada adı geçen $\Phi(\omega)$ fonksiyonu aşağıda tanımlanmıştır.

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} \frac{-2\pi i}{1 - e^{(-2\pi i\omega/h)}} \cong 2\pi i e^{2\pi i\frac{\omega}{h}} & ; I_m\omega > 0 \\ \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i\omega/h}} \cong -2\pi i e^{-2\pi i\frac{\omega}{h}} & ; I_m\omega < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

3.1.2 IMT Kuralı

Bir başka formül, Iri, Mariguti ve Takasawa tarafından ortaya atılan; $(-1,1)$ -aralığını kendi içine dönüştüren

$$\begin{aligned}
x = \phi(u) &= \frac{1}{Q} \int_{-1}^u \exp\left(-\frac{2}{1+t} - \frac{2}{1-t}\right) dt \\
Q &= \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{2}{1+t} - \frac{2}{1-t}\right) dt
\end{aligned}$$

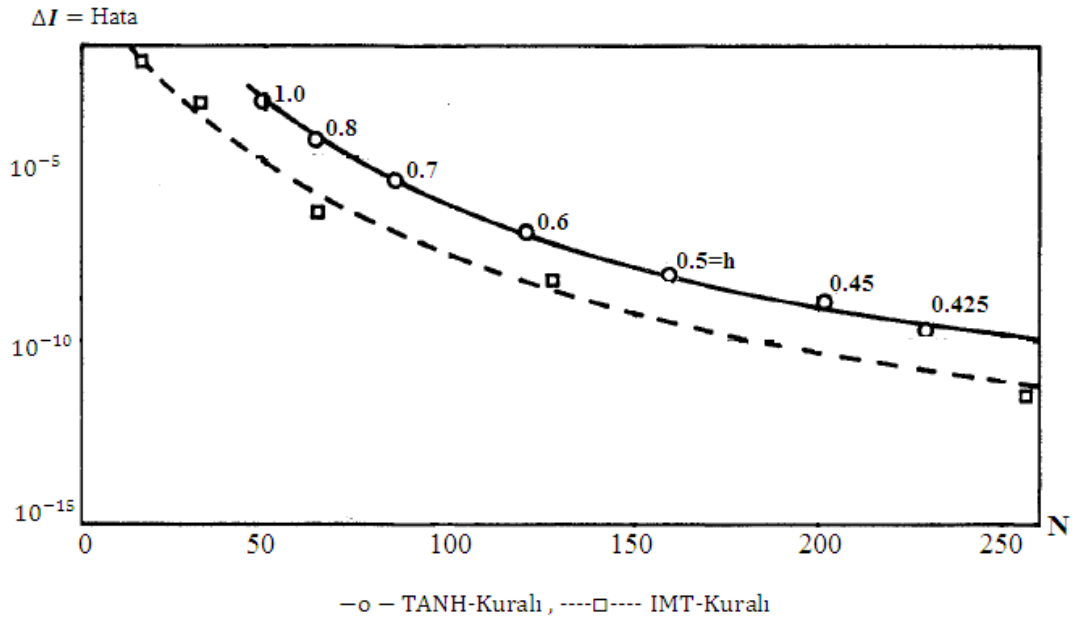
değişken değişimi kullanılarak oluşturulmuştur. $\phi(u)$ -nun tüm türevleri -1 ve $+1$ değerlerinde sıfırlandığından (yok olduğundan), dönüştürülmüş integrale $h = \frac{1}{N}$ eşit aralıklı yamuk kuralı uygulanabilir. Bu şekilde belirlenmiş olan kurala “IMT Kuralı” denir. IMT adı, Iri, Mariguti ve Takasawa bilim adamlarının isimlerinin baş harfleri getirilerek oluşturulmuştur. [1]

3.1.3 Tanh ve IMT Kuralları İçin Nümerik Örnekler

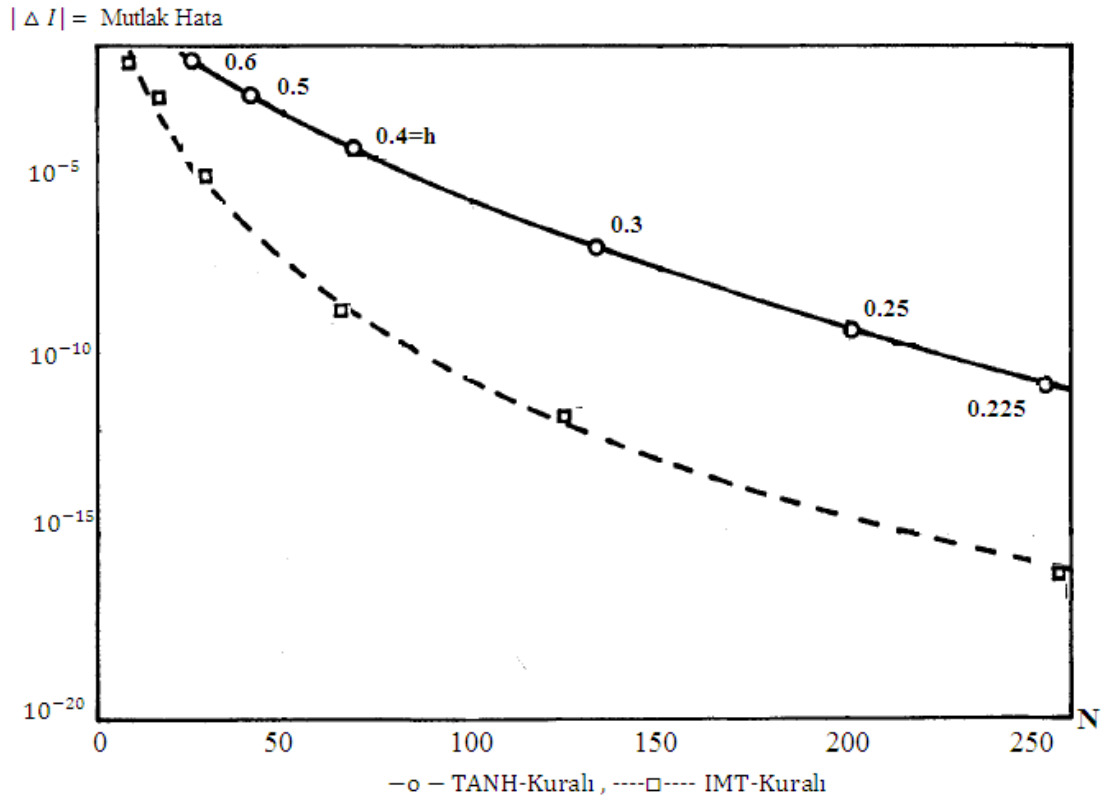
Tanh ve IMT kuralları

$$\begin{aligned}
(3.1.3.i) \quad & \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-2)(1-x)^{\frac{1}{4}}(1+x)^{\frac{3}{4}}} \\
(3.1.3.i) \quad & \int_{-1}^1 \frac{\cos \pi x}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} dx
\end{aligned}$$

integrallerine uygulanıp getirdiği hata değerleri grafikte incelenecektir.



Şekil 3.1 $\int_{-1}^1 1/\{(x-2)(1-x)^{\frac{1}{4}}(1+x)^{\frac{3}{4}}\} dx$ integrali için hesaplanmış hata [2]



Şekil 3.2 $\int_{-1}^1 \cos \pi x / (1-x)^{\frac{1}{2}} dx$ integrali için hesaplanmış hata [2]

3.2 Yavaş Yakınsayan İntegraller İçin İntegrasyon Formülleri

Değişken değişimi için bir başka kullanım alanı da; $x \rightarrow \infty$ iken oldukça yavaş azalan (bozulan) integranda sahip

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (3.4)$$

şeklindeki sonsuz bir integralin yakınsaklığını hızlandırmaktır. Tıpkı $\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{5/4} dx$ örneğinde olduğu gibi.

3.2.1 Sinh- Kuralı

(3.4) integralinde $x = \sinh u$ değişken değişimi yapıldığında

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sinh u) \cosh u du$$

elde edilir. Eğer h -adım aralıklı yamuk kuralı uygulanırsa

$$I_A = h \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\sinh nh) \cosh nh$$

quadrature formülü elde edilir. Bu kurala “*Sinh-Kuralı*” denir. Hata için

$$\Delta I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{c}} \hat{\Phi}(\omega) f(\sinh \omega) \cosh \omega d\omega$$

buradaki $\hat{\Phi}(\omega)$ (3.3) -de verilmiştir.

3.2.2 Tan-Kuralı

$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ de yer alan $f(x)$ integrandı $x = \infty$ da düzenli olduğunda

$$x = \tan u$$

dönüşümü; integrali oldukça etkili bir dördülleme (quadrature) algoritmasına dönüştürür. Bu değişken dönüşümü ile ; I integrali $u = \pm\pi/2$ uç noktalarında orijinal integrali yakınsak hale getiren ve bu uç noktaları içeren reel eksen boyunca düzgün ve π -periyotlu $f(\tan u)/\cos^2 u$ analitik bir fonksiyonun sonlu integraline dönüşmüş olur. Yani yeni form;

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\tan u) \frac{1}{\cos^2 u} du$$

Tüm periyot üzerinde periyodik fonksiyonların integrasyonu için eşit aralıklı yamuk kuralı uygulanabilir olduğundan

$$I_A = h \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} f(\tan nh) \frac{1}{\cos^2 nh} \quad (N:\text{çift}, h = \frac{\pi}{N})$$

ifadesi elde edilir. İşte bu formüle “*Tan-Kuralı*” adı verilir. Bu kuralın getirdiği hata ise

$$I - I_A = \Delta I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{c}} \hat{\Phi}(\omega) f(\tan \omega) \frac{1}{\cos^2 \omega} d\omega$$

şeklinde belirlenir. Buradaki $\hat{\Phi}(\omega)$ karakteristik fonksiyonu (3.3) -de verilmiştir.

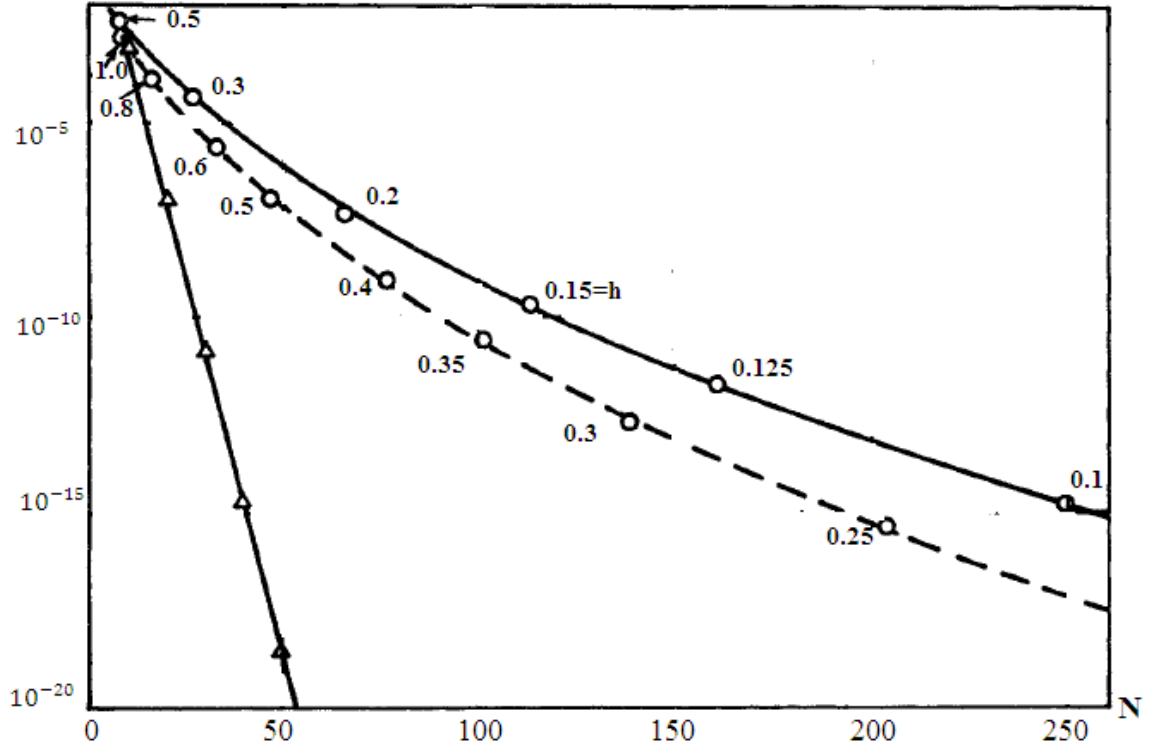
3.2.3 Sinh ve Tan Kuralları İçin Nümerik Örnekler

Sinh ve Tan kurallarını

$$(3.2.3.i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} \quad (3.2.3.ii) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{5/4}}$$

integrallerine uygulayıp getirdiği hata değerleri grafikte incelenecektir.

$|\Delta I| = \text{Mutlak Hata}$



$\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^4)^{-1} dx$ in hesaplanmış hatası (—o— SINH-Kuralı, —Δ— TAN-Kuralı)

$\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{\frac{5}{4}} dx$ in hesaplanmış hatası (—o— SINH-Kuralı)

Şekil 3.3 [2]

BÖLÜM 4

ÇİFT ÜSTEL İNTEGRASYON METODU

4.1 Nümerik İntegrasyon ve Çift Üstel Dönüşüm

Çift üstel dönüşüm;

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)(1-x)^{1/4}(1+x)^{3/4}}$$

örneğinde olduğu gibi uç noktalarda tekilliğe sahip fonksiyonların integrallerini yüksek duyarlılıkta hesaplamak için ilk kez 1974 yılında Takahasi ve Mori tarafından ortaya atılmıştır. Bu dönüşüme dayanan nümerik integrasyon için çift üstel formülü şu aşamalar takip edilerek belirlenebilir;

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

integrali göz önünde bulundursun. İntegrasyon (a, b) -aralığı sonlu, yarı sonlu (a, ∞) veya sonsuz $(-\infty, \infty)$ olabilir. $f(x)$ integrandı (a, b) -üzerinde analitik olmalıdır fakat $x = a$ veya $x = b$ ya da her iki noktada tekilliğe sahip olabilir.

$$x = \phi(t) \quad ; \quad a = \phi(-\infty), \quad b = \phi(\infty)$$

olacak biçimde $(-\infty, \infty)$ -aralığı üzerinde analitik olan bir $\phi(t)$ dönüşüm fonksiyonu (değişken değişimi) I itegraline uygulandığında

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi(t))\phi'(t)dt \quad (4.1)$$

integrali elde edilmiş olur. Bu aralık $f(x)$ integrandının tekilliğine yol açtığı noktaları içine aldığından ve integrandın bu kritik noktalarda dönüşüm sayesinde değeri çift üstel bir biçimde hızla azalır. Yani;

$$|f(\phi(t))\phi'(t)| \cong e^{(-ce^{|t|})} \quad , |t| \rightarrow \infty \quad (4.2)$$

Diğer bir yandan, bilindiği üzere, $(-\infty, \infty)$ -aralığı üzerindeki analitik bir fonksiyonun (4.1)-e benzer bir integral için; h-eşit adım aralıklı yamuk kuralı optimal bir formüldür. Yani en az fonksiyon hesabıyla doğru sonuca en hızlı bir şekilde erişmeyi sağlayan bir formüldür. Şu halde (4.1) integaline h-eşit adım aralıklı yamuk kuralı uygulandığında

$$I_h = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\phi(kh))\phi'(kh)$$

elde edilir. (I_h) -in gerçek değerine çok yakın bir aralıkta bu sonsuz toplama ($k = -N_-$ ve $k = N_+$) kesilirse

$$I_h^{(N)} = h \sum_{k=-N_-}^{N_+} f(\phi(kh))\phi'(kh) \quad , \quad N = N_+ + N_- + 1$$

formuna dönüşür. Buradaki N hesaplanacak olan fonksiyon sayısını göstermektedir. İntegranda dönüşüm uygulandıktan sonra çift üstel bir biçimde azalacağından dolayı (bakınız (4.2)) bu yolla belirlenmiş formüle “Çift Üstel Formül” denir ve basit bir atıfta bulunmak üzere “DE Formülü” şeklinde kısaltılması yapılır.

Her bir aralık tipi için fonksiyonun kritik noktalarında çift üstel biçimde azaltan Çift Üstel Dönüşümleri aşağıdaki gibi seçilmelidir. [3]

i) (a, b) -sonlu aralığı için;

$$\int_a^b f(x)dx \Rightarrow x = \frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}(b-a) \tanh\left(\frac{1}{2}\pi \sinh(x)\right)$$

ii) (a, ∞) -aralığı için;

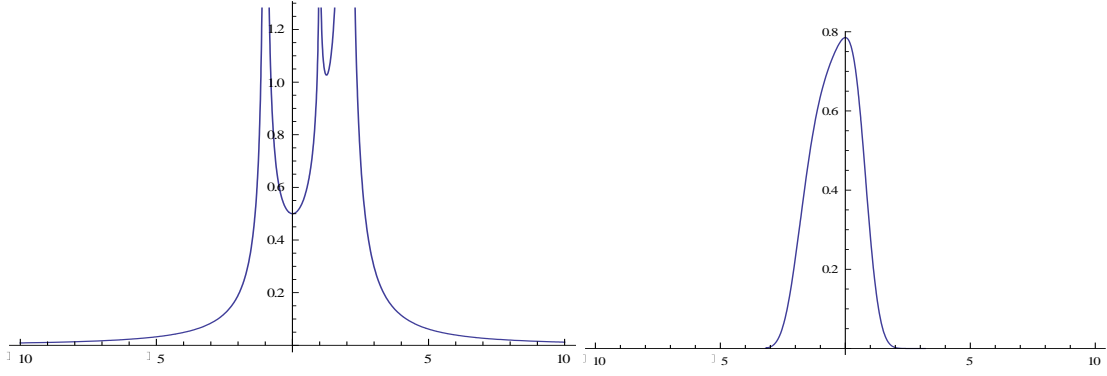
$$\int_a^{\infty} f(x)dx \Rightarrow x = a + e^{\frac{1}{2}\pi \sinh(x)}$$

iii) $(-\infty, \infty)$ -aralığı için;

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \Rightarrow x = \sinh\left(\frac{1}{2}\pi \sinh(x)\right)$$

formülü somutlaştırmak amacıyla aşağıdaki örnek incelenebilir.

Örnek.4.1 : $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)(1-x)^{1/4}(1+x)^{3/4}} = ?$



Şekil 4.1

Aralık sonlu olduğundan $x = \frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}(b-a) \tanh\left(\frac{1}{2}\pi \sinh t\right)$ dönüşüm fonksiyonu (değişken değişimi) kullanılır. Şu halde;

$$dx = \frac{\pi}{2} \cosh(t) \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\pi \sinh t\right) dt$$

ve sınırlar

$$D_a = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctanh}(-1)\right) = -\infty$$

$$D_{ii} = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctanh}(1)\right) = \infty$$

olarak elde edilir ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2} \cosh(t) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)}{\left(2 - \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)\right) [1 - \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)]^{1/4} [1 + \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)]^{3/4}} dt$$

formuna dönüşür. Yamuk uygulandığında

$$I_h^{(N)} = \sum_{k=-N_-}^{N_+} f\left(\tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh kh\right)\right) \frac{\pi}{2} \cosh(kh) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh(kh)\right)$$

çift üstel formülü elde edilir.

4.2 Nümerik Örnekler

$$(i) \int_{-1}^1 \frac{\cos \pi x}{\sqrt{1-x}} dx$$

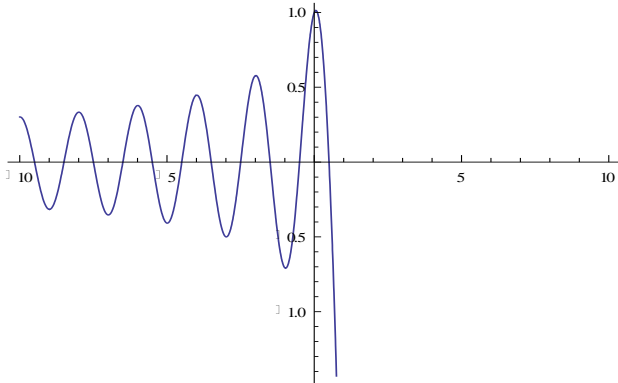
$$(iii) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{5/4}}$$

$$(ii) \int_0^{\infty} \frac{e^{-1-x}}{1+x} dx$$

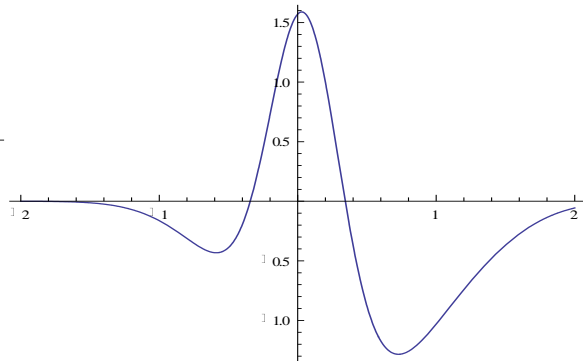
$$(iv) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

Yukarıda yer alan integrallerde ilgili her bir aralık için uygun olan çift üstel dönüşüm seçildiğinde elde edilen yeni integrallerin hesabı daha kolay olmakta ve integrandta yer alan fonksiyonların çift üstel dönüşümden önce ve sonraki grafikleri aşağıda karşılaştırma olarak verilmiştir.

Çift üstel dönüşümden önce

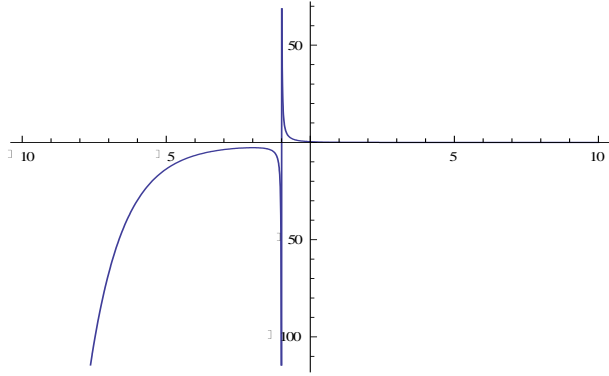


Çift üstel dönüşümden sonra

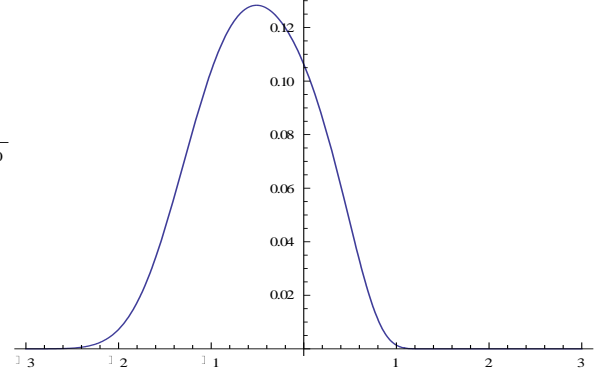


Şekil 4.2 (i)

Çift üstel dönüşümden önce

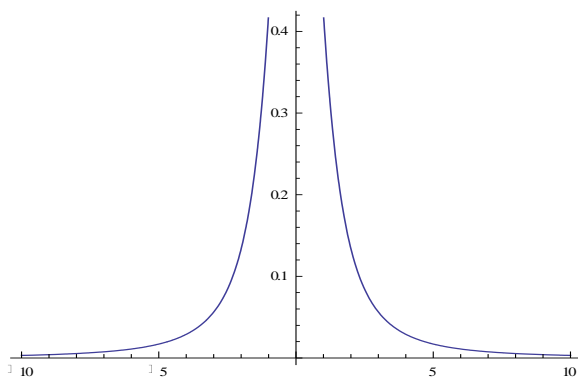


Çift üstel dönüşümden sonra

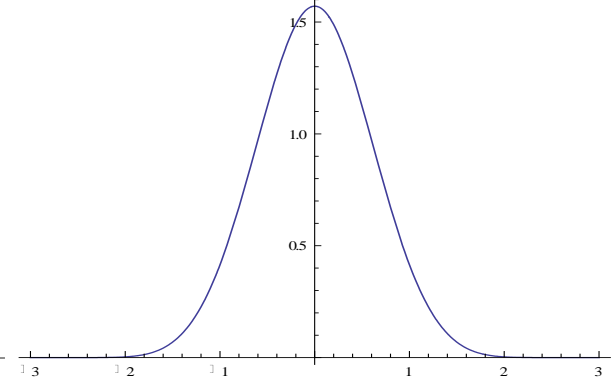


Şekil 4.3 (ii)

Çift üstel dönüşümden önce

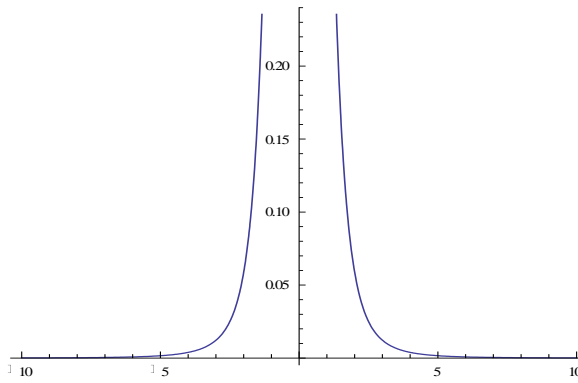


Çift üstel dönüşümden sonra

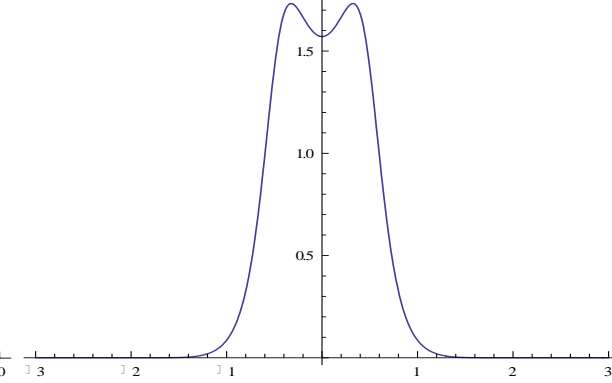


Şekil 4.4 (iii)

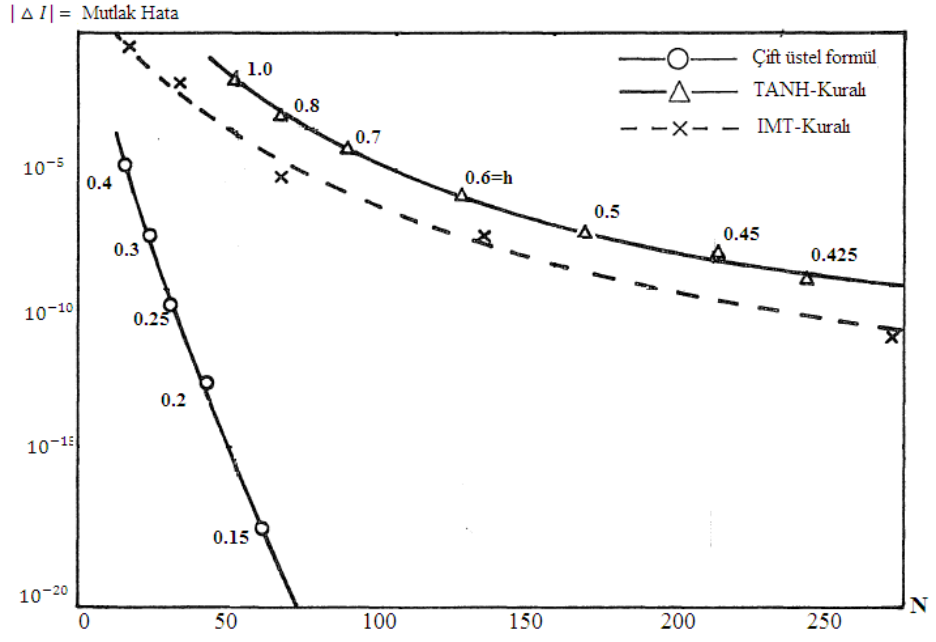
Çift üstel dönüşümden önce



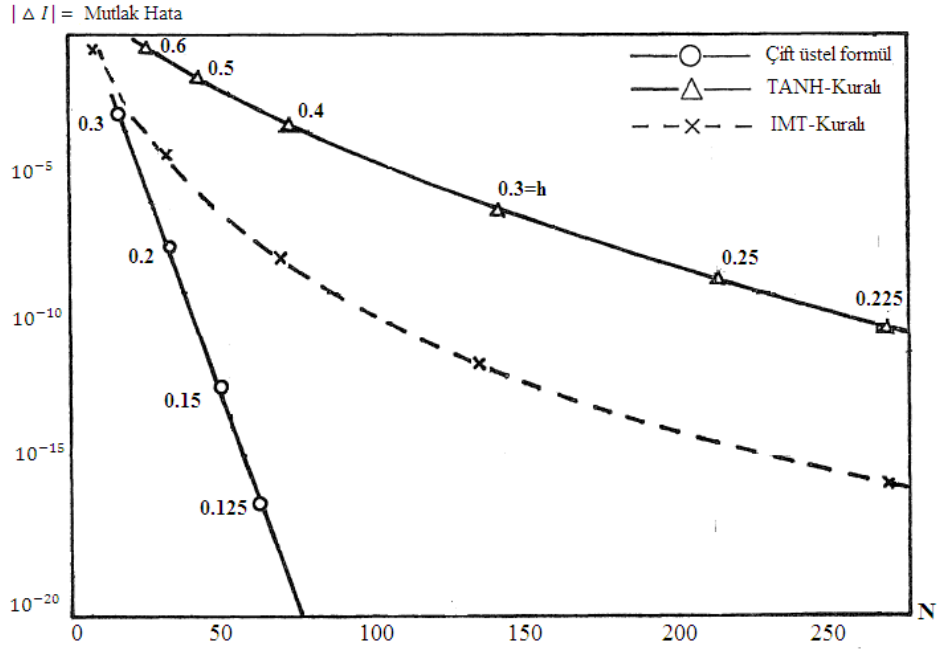
Çift üstel dönüşümden sonra



Şekil 4.5 (iv)

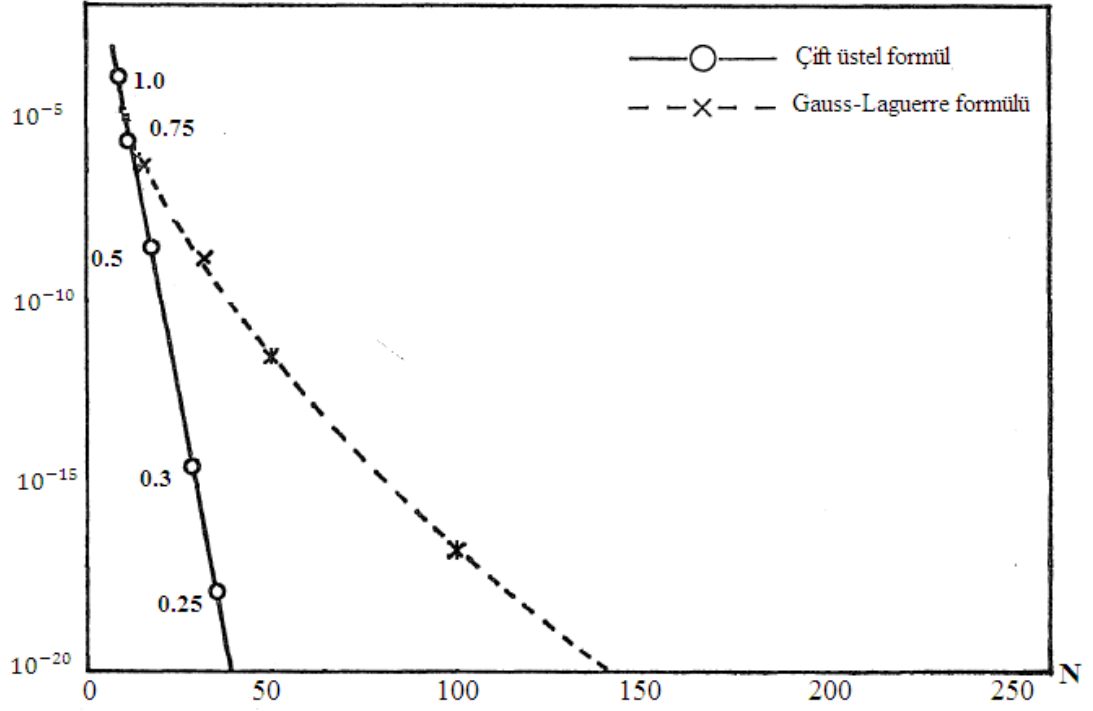


Şekil 4.6 $\int_{-1}^1 1/\{(x-2)(1-x)^{1/4}(1+x)^{3/4}\}dx$ in hesaplanmış hatası [4]



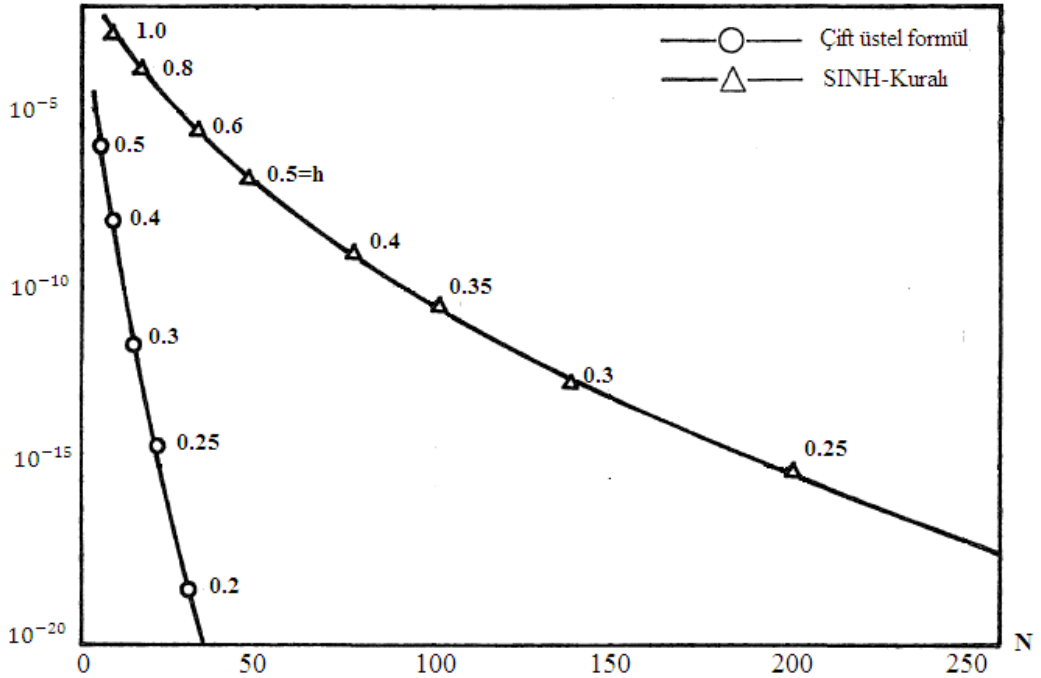
Şekil 4.7 $\int_{-1}^1 (\cos \pi x)/\sqrt{1-x} dx$ in hesaplanmış hatası [4]

$|\Delta I| = \text{Mutlak Hata}$

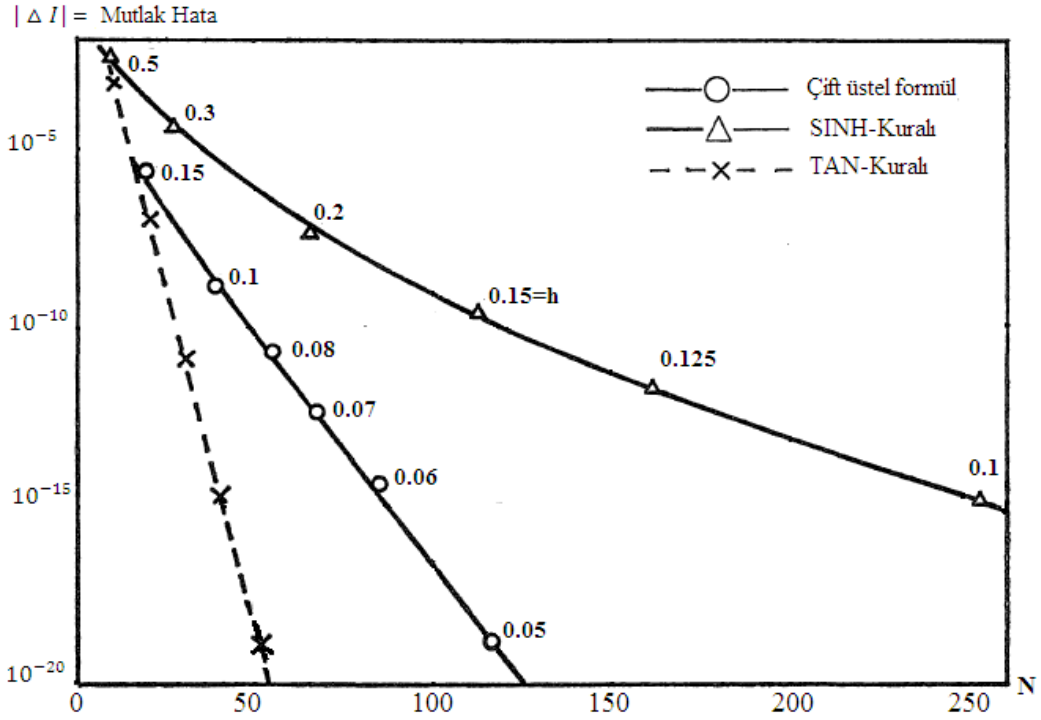


Şekil 4.8 $\int_0^{\infty} e^{-1-x}/(1+x)dx$ in hesaplanmış hatası [4]

$|\Delta I| = \text{Mutlak Hata}$



Şekil 4.9 $\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-5/4}dx$ in hesaplanmış hatası [4]



Şekil 4.10 $\int_{-\infty}^{\infty} 1/(1+x^4)dx$ in hesaplanmış hatası [4]

4.3 Çift Üstel Dönüşümünün Optimallığı

Çift üstel formüllerin optimallığı için Takahasi ve Mori'nin iddiaları kesin bir matematiksel mantık üzerine dayalı olmaktan ziyade matematiksel sezgi üzerine dayanmaktadır. Bu durumu düzeltmek için matematiksel bir mantık çerçevesinde çift üstel formülünün optimallığı, ya da "meta-optimallığı", bu bölümde belirlenecektir. Burada çift üstel formülünün meta optimallığı fonksiyonel analiz yaklaşımı ile formülize edilecektir. Ve bu da şu üç adımda belirtilecektir.

1. Adım: Reel eksen üzerinde sınırlı bir bölgede, sonsuzun komşuluğunda elemanlarının (yani fonksiyonlar) bozulma (azalma, çürüme) oranları tarafından karakterize edilmiş uzaylar olan analitik fonksiyonların birkaç uzayı tanıtılacaktır. Tek üstel azalma çift üstel azalma gibi azalma oranları göz önünde bulundurulacaktır.

2. Adım: İntegrand fonksiyonların her bir uzayında yamuk kuralının hata normu için hem alt tahmin hem de üst tahmin oluşturulacaktır.

- (1) Her iki üst ve alt tahmin integrand fonksiyonların her bir uzayında hemen hemen eşittir.
- (2) Uzayın azalma hızı daha hızlı olurken hem üst tahmin hem de alt tahmin daha küçüktür.

Bu saptamalar; elemanları, çift üstellikten daha hızlı bir şekilde azalan bir uzayda (hemen hemen) optimal ve daha etkili olabilen yamuk kuralının var olduğu ihtimalini vurgular.

3. *Adım* : Bu ihtimal; elemanları çift üstelden daha hızlı azalan uzaylar için Yokluk teoremi ispatlanarak ortadan kaldırılacaktır. Böylece çift üstel formülünün meta-optimalliği sonucuna ulaşılmış olunacaktır.

4.3.1 $H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)$ Fonksiyon Uzayları

d pozitif bir sayı ve \mathfrak{D}_d reel eksen üzerindeki $2d$ genişliğinde sınırlı bir bölge

$$\mathfrak{D}_d = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < d\}$$

olsun.

$\omega(z)$, \mathfrak{D}_d bölgesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve $H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)$ uzayı ve

$$\|f\| = \sup_{z \in \mathfrak{D}_d} \left| \frac{f(z)}{\omega(z)} \right|$$

olmak üzere

$$H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega) = \{f: \mathfrak{D}_d \rightarrow \mathbb{C} \mid f(z) \text{ } \mathfrak{D}_d \text{ içinde analitik ve } \|f\| < +\infty\}$$

şeklinde tanımlanmış olsun.

$$|f(z)| \leq \|f\| \cdot |\omega(z)| \quad (4.3)$$

eşitsizliği $f \in H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)$ fonksiyonunun $z \rightarrow \infty$ olduğunda $\omega(z)$ gibi azaldığı anlamına gelir. Yani; $\omega(z)$ tek üstel bir biçimde azaldığında $H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)$ içinde yer alan fonksiyonlar da tek üstel bir şekilde azalır; $\omega(z)$ çift üstel bir biçimde azaldığında $H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)$ içinde yer alan fonksiyonlar da çift üstel bir şekilde azalır.

1. Tek üstel azalma tipi

$$\frac{d}{dz} \tanh\left(\frac{z}{2}\right), \quad \frac{2}{\pi} e^{-z^2} \quad (4.4)$$

2. Çift üstel azalma tipi

$$\frac{d}{dz} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(z)\right), \quad \frac{e^{-A \cdot \cosh(Bz)}}{\int_0^\infty e^{-A \cdot \cosh(Bs)} ds} \quad (A, B > 0) \quad (4.5)$$

biçimindedir. [5]

4.3.2 Yamuk Formülün Optimallığı

Bu bölümde integraller için yamuk formülün (yakın) optimallığını kuracağız.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx, \quad f \in H^{\infty}(\mathcal{D}_d, \omega)$$

Bu amaçla, $H^{\infty}(\mathcal{D}_d, \omega)$ integral fonksiyonlarının alanında yamuk Formülün hata normu için yüksek bir tahmin ve minimum hata normu için düşük bir tahmin verir ve böylece üst ve alt tahmin hemen hemen eşit olduğunu gösteririz. [6]

4.3.2.1 Hata Tahminleri

$(-\infty, \infty)$ aralığı için $N(= 2n + 1)$ -noktasında yamuk formülünü düşünelim:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \approx h \sum_{j=-n}^n f(jh),$$

belirli bir pozitif n tam sayısı için uygun bir h sayısı seçilir. Yamuk formülü için, $\mathfrak{E}_{N,h}^T(H^{\infty}(\mathcal{D}_d, \omega))$, $H^{\infty}(\mathcal{D}_d, \omega)$ de hata normunu ifade etsin:

$$\mathfrak{E}_{N,h}^T(H^{\infty}(\mathcal{D}_d, \omega)) = \sup_{\|f\| \leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - h \sum_{j=-n}^n f(jh) \right|$$

Aşağıdaki formun tüm N -noktalarının bir ailesini düşünelim.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \approx \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^{m_j-1} c_{jk} f^{(k)}(a_j),$$

$a_j \in \mathcal{D}_d, c_{jk} \in \mathbb{C}$, ve $N = m_1 + m_2 + \dots + m_l$, ve $\mathfrak{E}_N^{\min}(H^{\infty}(\mathcal{D}_d, \omega))$ minimum tüm N -nokta karesel formüller üzerinde alınır $H^{\infty}(\mathcal{D}_d, \omega)$ minimum hata norm belirlemenize olanak sağlar.

$$\mathfrak{E}_N^{\min}(H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega))$$

$$= \inf_{1 \leq l \leq N} \inf_{\substack{m_1, m_2, \dots, m_l \\ m_1 + \dots + m_l = N}} \inf_{a_j} \inf_{c_{jk}} \left\{ \sup_{\|f\| \leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^{m_j-1} c_{jk} f^{(k)}(a_j) \right| \right\}$$

\mathfrak{D}_d de tüm f analitik fonksiyonları ailesini $B(\mathfrak{D}_d)$ ile ifade edelim

$$\int_{-d}^d |f(x + iy)| dy \rightarrow 0 \quad \text{ise } x \rightarrow \pm\infty$$

ve $\mathcal{N}_1(f, \mathfrak{D}_d) < \infty$ olur.

$$\mathcal{N}_1(f, \mathfrak{D}_d) = \lim_{y \rightarrow d-0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)| + |f(x - iy)| dx$$

$B(\mathfrak{D}_d)$ ailesi İlk Strenger tarafından tanıtıldı, yamuk formülünün hata analizi teorisinde önemli bir rol oynar.

Aşağıdaki iki teorem bize $H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)$ de minimum hata normu için alt tahmini ve yamuk formülün hata normu için üst tahmini verir: birinci teorem $\omega(z)$ -nin azalma oranı tek üstel durumu için (tek üstel bir şekilde azalan integrandlara sahip); ve ikinci teorem ise $\omega(z)$ -nin azalma oranı çift üstel durumu için (çift üstel bir şekilde azalan integrandlara sahip) verilmiştir. Her iki teorem $H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)$ içinde yamuk formülünün optimalliğini iddia eder yani h –adım aralıklı yamuk formülü

$$\mathfrak{E}_{N,h}^T(H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)) \approx \mathfrak{E}_{N,h}^{\min}(H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega))$$

seçimine uygundur. [5]

Teoremlerin ispatı bölüm 4.3.2.2 -de verilmiştir.

Teorem 4.1. $\omega(z)$ nin aşağıdaki üç koşulu sağladığını varsayalım.

1. $\omega(z) \in B(\mathfrak{D}_d)$
2. $\omega(z)$, \mathfrak{D}_d 'de herhangi bir noktada kaybolur ve gerçekte ekseninde gerçekte değerleri alır
3. $\omega(z)$ nin gerçekte eksen üzerinde bozulma oranı

$$\alpha_1 \exp(-(\beta|x|)^\rho) \leq |\omega(x)| \leq \alpha_2 \exp(-(\beta|x|)^\rho) \quad , -\infty < x < \infty \quad ,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta > 0$ ve $\rho \geq 1$ olmak üzere

O halde

$$\mathfrak{E}_{N,h}^T(H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)) \leq C_{d,\omega} \exp(-(\pi d \beta N)^{\frac{\rho}{\rho+1}}) \quad (4.6)$$

$N = 2n + 1$ olduğunda, aralık h olarak seçilmiştir.

$$h = (2\pi d)^{\frac{1}{\rho+1}} (\beta n)^{-\frac{\rho}{\rho+1}}$$

ve $C_{d,\omega}$, d ve ω ya bağlı bir sabit ve

$$\mathfrak{E}_N^{\min}(H^\infty(D_d, \omega)) \geq C'_{d,\omega} N^{\frac{1}{\rho+1}} \exp\left(-\left(\left(\frac{2}{\rho+1}\right)^{\frac{1}{\rho}} 2\pi d \beta N\right)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right) \quad (4.7)$$

$C'_{d,\omega}$, d ve ω ya bağlı başka bir sabit. [5]

Teorem 4.2. $\omega(z)$ fonksiyonunun aşağıdaki üç koşulu sağladığını varsayalım.

1. $\omega(z) \in B(\mathfrak{D}_d)$
2. $\omega(z)$, \mathfrak{D}_d 'de herhangi bir noktada kaybolur ve gerçekte ekseninde gerçekte değerleri alır
3. $\omega(z)$ nin gerçekte eksen üzerinde bozulma oranı

$$\alpha_1 \exp(-(\beta_1 \exp(\gamma|x|))) \leq |\omega(x)| \leq \alpha_2 \exp(-(\beta_2 \exp(\gamma|x|))) \quad , -\infty < x < \infty \quad ,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma > 0$ olmak üzere

O halde

$$\mathfrak{E}_{N,h}^T(H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)) \leq C_{d,\omega} \exp\left(-\frac{\pi d \gamma N}{\log(\pi d \gamma N / \beta_2)}\right) \quad (4.8)$$

$N = 2n + 1$ olduğunda, aralık h olarak seçilmiştir.

$$h = \frac{\log(2\pi d \gamma N / \beta_2)}{\gamma^n}$$

ve $C_{d,\omega}$, d ve ω ya bağlı bir sabit ve

$$\mathfrak{E}_N^{\min}(H^\infty(D_d, \omega)) \geq C'_{d,\omega} \log N \exp\left(-\frac{2\pi d \gamma N}{\log(\pi d \gamma N / \beta_1)}\right) \quad (4.9)$$

$C'_{d,\omega}$, d ve ω ya bağlı başka bir sabit. [5]

Örnekler. (4.4) ve (4.5)de verilen durumlarda $\omega(z)$ yi göz önüne alalım.

(a) Fonksiyon

$$\omega(z) = \frac{d}{dz} \tanh\left(\frac{z}{2}\right)$$

$\beta = 1$ ve $\rho=1$, $d < \pi$ olmak üzere Teorem 3.1 deki tüm koşulları sağlar. ($\mathfrak{E}_{N,h}^T$ ve \mathfrak{E}_N^{\min} büyüklükleri ile ilgisiz olduğu için α_1 ve α_2 yi ihmal edeceğiz. Aynı nedenle aşağıdaki örneklerde de aynı şekilde yapacağız.) Teorem 4.1 den dolayı

$$\mathfrak{E}_{N,h}^T(H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)) \leq C_d \exp(-\sqrt{\pi d N})$$

burada $N = 2n + 1, h = \sqrt{2\pi d/n}$, ve C_d , d ye bağı bir sabit, ve

$$\mathfrak{E}_{N,h}^{\min}(H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)) \geq C'_d \sqrt{N} \exp(-\sqrt{2\pi d N})$$

burada C'_d , d ye bağı bir sabit.

(b) Fonksiyon

$$\omega(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2)$$

$\beta=1$ ve $\rho=2$ olmak üzere Teorem 4.1 deki tüm koşulları sağlar. Teorem 4.1 den dolayı

$$\mathfrak{E}_{N,h}^T(H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)) \leq C_d \exp(-(\pi d N)^{2/3})$$

burada $N = 2n + 1, h = (2\pi d)^{1/3} n^{-2/3}$, ve C_d , d ye bağı bir sabit, ve

$$\mathfrak{E}_N^{\min}(H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)) \geq C'_d N^{1/3} \exp\left(-\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} 2\pi d N\right)^{2/3}\right)$$

burada C'_d , d ye bağı bir sabit.

(c) Fonksiyon

$$\omega(z) = \frac{\exp(-A \cosh(Bz))}{\int_0^\infty \exp(-A \cosh(Bs)) ds} \quad (A, B > 0)$$

$\beta_1 = \pi/2$, $\beta_2 = (\pi - \varepsilon)/2$ (ε keyfi küçük pozitif bir sayı) ve $\gamma=1, d < \pi/2$ olmak üzere Teorem 4.2 deki tüm koşulları sağlar. Teorem 4.2 den dolayı

$$\mathfrak{E}_{N,h}^T(H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)) \leq C_d(\varepsilon) \exp\left(-\frac{\pi d N}{\log(2\pi d N/(\pi - \varepsilon))}\right)$$

burada $N = 2n + 1, h = \log(4\pi d N/(\pi - \varepsilon))/n$, ve $C_d(\varepsilon)$, d ve ε ye bağı bir sabit, ve

$$\mathfrak{E}_N^{\min}(H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)) \geq C'_d \log N \exp\left(-\frac{2\pi d N}{\log(2d N)}\right)$$

burada C'_d , d ye bağı bir sabit.

(d) Fonksiyon

$$\omega(z) = \frac{\exp(-A \cosh(Bz))}{\int_0^\infty \exp(-A \cosh(Bs)) ds} \quad (A, B > 0)$$

$\beta_1 = (A + \varepsilon)/2$ (ε keyfi küçük pozitif bir sayı) , $\beta_2 = A/2$ ve $\gamma = B, d < \pi/(2B)$ olmak üzere Teorem 4.2 deki tüm koşulları sağlar. Teorem 4.2 den dolayı

$$\mathfrak{E}_{N,h}^T(H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)) \leq C_{d,A,B} \exp\left(-\frac{\pi d B N}{\log(2\pi d B N/A)}\right)$$

burada $N = 2n + 1, h = \log(4\pi d B N/A)/(Bn)$, ve $C_{d,A,B}$, d, A, B ye bağlı bir sabit, ve

$$\mathfrak{E}_N^{\min}(H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)) \geq C'_{d,A,B}(\varepsilon) \log N \exp\left(-\frac{2\pi d B N}{\log(2\pi d B N/(A + \varepsilon))}\right)$$

burada $C'_{d,A,B}(\varepsilon)$, d, A, B ve ε ye bağlı bir sabit.

Dikkat 4.1. Örnek (a) da özel olarak $d = \pi/2$ alınırsa

$$\mathfrak{E}_{N,h}^T(H^\infty(\mathfrak{D}_{\pi/2}, \omega)) \leq C \exp(-\pi\sqrt{N/2})$$

olur, burada $N = 2n + 1, h = \pi/\sqrt{n}$ ve

$$\mathfrak{E}_N^{\min}(H^\infty(\mathfrak{D}_{\pi/2}, \omega)) \geq C'\sqrt{N} \exp(-\pi\sqrt{N})$$

Aynı tahminler yamuk formülünün $H^\infty(\mathfrak{D}_{\pi/2}, \omega)$ da optimal olduğunu iddia edildiği ile birlikte [6],[7] de bildirilmektedir.

Dikkat 4.2. Aşağıdaki ispatlarda (c) deki $\mathfrak{E}_{N,h}^T$ için ve (d)deki \mathfrak{E}_N^{\min} için ε sıfır alınabilir. Öyle ki (c) de

$$\mathfrak{E}_{N,h}^T(H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)) \leq C_d \exp\left(-\frac{\pi d N}{\log(2dN)}\right)$$

olur. Burada $N = 2n + 1, h = \log(4dn)/n$ ve C_d , d ye bağlı bir sabit; ve (d) de

$$\mathfrak{E}_N^{\min}(H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)) \geq C'_{d,A,B} \log N \exp\left(-\frac{2\pi d B N}{\log(2\pi d B N/A)}\right)$$

burada $C'_{d,A,B}$, d, A, B ye bağlı bir sabit.

4.3.2.2 İspatlar

4.3.2.2.1 Yamuk Formülünün Hata Normunun Üst Tahmini

Öncelikle, değişken h -adım aralıklı yamuk formülünün hata normu için aşağıdaki önerme ispatlanacaktır.

Önerme 4.1.

1. $\omega(z)$ Teorem 4.1 deki tüm koşulları sağlasın. O halde herhangi $h > 0$ için

$$\mathfrak{E}_{N,h}^T(H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)) \leq \frac{\exp(-2\pi d/h)}{1 - \exp(-2\pi d/h)} \mathcal{N}_1(\omega, \mathfrak{D}_d) + \frac{2\alpha_2 \exp(-(\beta hn)^\rho)}{\rho \beta^\rho (hn)^{\rho-1}} \quad (3.10)$$

2. $\omega(z)$ -nin Teorem 4.2 deki tüm şartları sağladığını farz edelim. O halde herhangi $h > 0$ için

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{N,h}^T(H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)) & \\ & \leq \frac{\exp(-2\pi d/h)}{1 - \exp(-2\pi d/h)} \mathcal{N}_1(\omega, \mathfrak{D}_d) \\ & \quad + \frac{2\alpha_2 \exp(-\beta_2 \exp(\gamma hn))}{\beta_2 \gamma \exp(\gamma hn)} \quad (3.11) \end{aligned}$$

Aşağıdaki önerme; Önerme 4.1 in ispatı için çok önemlidir. [5]

Önerme 4.2. Farz edelim ki $\omega(z)$ Teorem 4.1 (veya Teorem 4.2) deki tüm koşulları sağlasın. O halde herhangi $h > 0$ için

$$\mathfrak{E}_{N,h}^T(H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)) \leq \frac{\exp(-2\pi d/h)}{1 - \exp(-2\pi d/h)} \mathcal{N}_1(\omega, \mathfrak{D}_d) + h \sum_{|j|>n} |\omega(jh)| \quad (4.12) [3]$$

Önerme 4.2 in ispatı: (4.3) eşitsizliği ve $\omega(z)$ için (1) şartı yani , $\omega(z) \in B(\mathfrak{D}_d)$, herhangi bir $f(z) \in H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)$ fonksiyonunun $B(\mathfrak{D}_d)$ ye ait olduğu anlamına gelir. Ve $f(z) \in B(\mathfrak{D}_d)$ için yamuk formülünün hata durumu standart olup,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - h \sum_{j=-n}^n f(jh) \right| & \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - h \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(jh) \right| + h \sum_{|j|>n} |f(jh)| \\ & \leq \frac{\exp(-2\pi d/h)}{1 - \exp(-2\pi d/h)} \mathcal{N}_1(f, \mathfrak{D}_d) + h \sum_{|j|>n} |f(jh)| \end{aligned}$$

(4.3) den kolayca elde edilen $|f(jh)| \leq \|f\| |\omega(jh)|$ ve $\mathcal{N}_1(f, \mathfrak{D}_d) \leq \|f\| \mathcal{N}_1(\omega, \mathfrak{D}_d)$ eşitsizlikleri yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafında yerine konulursa (4.12) elde edilir. [5] \square

Önerme 4.1 in ispatı: Teorem 4.1 ya da Teorem 4.2-deki $\omega(z)$ için şart 3 göz önüne alındığında (4.12) -nin sağ tarafındaki ikinci terim;

i) Teorem 4.1-deki $\omega(z)$ için (şart 3) altında ;

$$\begin{aligned} h \sum_{|j|>n} |\omega(jh)| &\leq 2h\alpha_2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \exp(-(\beta jh)^\rho) \\ &\leq 2h\alpha_2 \int_n^{\infty} \exp(-(\beta hx)^\rho) dx \\ &\leq \frac{2h\alpha_2}{\rho(\beta h)^\rho n^{\rho-1}} \int_n^{\infty} \rho(\beta h)^\rho x^{\rho-1} \exp(-(\beta hx)^\rho) dx \\ &= \frac{2\alpha_2 \exp(-(\beta hn)^\rho)}{\rho\beta^\rho (hn)^{\rho-1}} \end{aligned}$$

ii) Teorem 4.2-deki $\omega(z)$ için (şart 3) altında;

$$\begin{aligned} h \sum_{|j|>n} |\omega(jh)| &\leq 2h\alpha_2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \exp(-\beta_2 \exp(\gamma jh)) \\ &\leq 2h\alpha_2 \int_n^{\infty} \exp(-\beta_2 \exp(\gamma hx)) dx \\ &\leq \frac{2h\alpha_2}{\beta_2 \gamma h \exp(\gamma hn)} \int_n^{\infty} \beta_2 \gamma h \exp(\gamma hx) \exp(-\beta_2 \exp(\gamma hx)) dx \\ &= \frac{2\alpha_2 \exp(-\beta_2 \exp(\gamma hn))}{\beta_2 \gamma \exp(\gamma hn)} \end{aligned}$$

olduğu belirlenmiş olur. (4.12) ile birlikte bu tahminlerin kombini ile sırasıyla (4.10) ve (4.11) elde edilmiş olur. \square

Bu aşamadan sonraki amacımız; Önerme 4.1-de verilen $\mathfrak{E}_{N,h}^T$ için üst tahmini içerisinde kullanılacak olan belirli bir n için uygun h - adım aralığını seçmektir.

Teorem 4.1-in durumu:

(4.10)-in sağ tarafındaki ikinci terim ile ilk terimin büyüklük açısından dengesini sağlayabilmek için h -adım aralıklarını seçmenin gerekliliği açıktır. Bu gereklilik

$$\exp(-2\pi d/h) = \exp(-(\beta hn)^\rho) \quad (4.13)$$

denkleminin varlığına yol açar.

h için (4.13) -ün çözümü;

$$h = (2\pi d)^{\frac{1}{\rho+1}} (\beta n)^{-\frac{\rho}{\rho+1}}$$

şeklinde bulunmuş olur. Daha sonra (4.10)-in sağ tarafındaki ikinci terim ile ilk terimdeki h yerine yukarıdaki ifade yerine konulduğunda

$$\begin{aligned} \frac{\exp\left(-\frac{2\pi d}{h}\right)}{\left(1 - \exp\left(-\frac{2\pi d}{h}\right)\right)} \mathcal{N}_1(\omega, \mathfrak{D}_d) &\leq C_1 \exp\left(- (2\pi d \beta n)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right) \\ &\leq C'_1 \exp\left(- (\pi d \beta N)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right) \\ \frac{2\alpha_2 \exp(-(\beta hn)^\rho)}{\rho \beta^\rho (hn)^{\rho-1}} &\leq C_2 n^{-\frac{\rho-1}{\rho+1}} \exp\left(- (2\pi d \beta n)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right) \\ &\leq C'_2 N^{-\frac{\rho-1}{\rho+1}} \exp\left(- (\pi d \beta N)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right) \end{aligned}$$

(4.6) yani Teorem 4.1-deki $\mathfrak{E}_{N,h}^T$ için üst tahmin elde edilmiş olur.

Teorem 4.2 -nin durumu:

Benzer durum aynı gereklilikten dolayı;

$$\exp\left(-\frac{2\pi d}{h}\right) = \exp(-\beta_2 \exp(\gamma hn)) \quad (4.14)$$

Denkleminin elde edilmesine olanak tanır.

h için (4.14) çözümü

$$h = \frac{\log(2\pi d \gamma n / \beta_2)}{\gamma^n} + O\left(\frac{\log \log(2\pi d \gamma n / \beta_2)}{\gamma^n}\right) \quad n \rightarrow \infty$$

şeklinde bulunmuş olur. Buradaki h -adım aralığı,

$$h = \frac{\log(2\pi d \gamma n / \beta_2)}{\gamma^n}$$

yukarıdaki asimptotik açılımdaki ana terim olarak seçilir ve daha sonra (4.11)-nın sağ tarafındaki ikinci terim ile ilk terimde yerine konduğunda;

$$\begin{aligned}
\frac{\exp\left(-\frac{2\pi d}{h}\right)}{\left(1 - \exp\left(-\frac{2\pi d}{h}\right)\right)} \mathcal{N}_1(\omega, \mathfrak{D}_d) &\leq C_3 \exp\left(-\frac{2\pi d \gamma n}{\log(2\pi d \gamma n / \beta_2)}\right) \\
&\leq C'_3 \exp\left(-\frac{\pi d \gamma N}{\log(\pi d \gamma N / \beta_2)}\right) \\
\frac{2\alpha_2 \exp(-\beta_2 \exp(\gamma h n))}{\beta_2 \gamma \exp(\gamma h n)} &= \frac{2\alpha_2 \exp(-2\pi d \gamma n)}{2\pi d \gamma^2 n} \\
&\leq C_4 \frac{\exp(-\pi d \gamma N)}{\gamma N}
\end{aligned}$$

(4.8) yani Teorem 4.2 deki $\mathfrak{E}_{N,h}^T$ için üst tahmin elde edilmiş olur. Böylece yamuk formülünün hata normu için üst tahmin ispatı tamamlanmış olur.

4.3.2.2.2 Minimum Hata Normu İçin Alt Tahmin

Optimal algoritmanın genel teorinden bilinmektedir ki

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{E}_N^{\min}(H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)) \\
&= \inf_{1 \leq l \leq N} \inf_{\substack{m_1, m_2, \dots, m_l \\ m_1 + \dots + m_l = N}} \inf_{a_j} \left\{ \sup_{f \in F_0(\{a_j\}, \{m_j\})} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \right| \right\} \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Burada $a_j \in \mathfrak{D}_d$ ($j = 1, \dots, l$) ve $F_0(\{a_j\}, \{m_j\})$, $H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)$ -nin birer alt uzayı ve

$$F_0(\{a_j\}, \{m_j\}) = \{f \in H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega) \mid \|f\| \leq 1 \text{ ve } f^{(k)}(a_j) = 0, k = 0, \dots, m_j - 1, j = 1, \dots, l\}$$

şeklinde tanımlıdır.

(4.15) eşitsizliğinin sağ tarafını daha basit bir forma getirmek için ;

$$b = b_1, b_2, \dots, b_N, b_i \in \mathfrak{D}_d \quad (i = 1, \dots, n) \text{ ve}$$

$$T(z) = \tanh\left(\frac{\pi}{4d} z\right)$$

yapısı \mathfrak{D}_d bölgesini birim disk içine dönüştüren bir conformal dönüşüm olmak üzere

$$B_N(z; \mathbf{b}, \mathfrak{D}_d) = \prod_{i=1}^N \frac{T(z) - T(b_i)}{1 - T(b_i)T(z)}$$

Şeklinde tanımlanan fonksiyonu göz önünde bulundurmakta fayda vardır. $B_N(z; \mathbf{b}, \mathfrak{D}_d)$ fonksiyonu değişken değişimi (dönüşümü) ile Blaschke çarpımından elde edildiğinden bu fonksiyona Blaschke Çarpım Dönüşümü (N. mertebeden) adı

veilir. Blaschke çarpımının temel özelliklerine karşılık gelen Blaschke çarpım dönüşümü;

1. $B_N(z; \mathbf{b}, \mathcal{D}_d)$, \mathcal{D}_d içinde analitiktir.
2. b_i ($i = 1, \dots, n$) ; $B_N(z; \mathbf{b}, \mathcal{D}_d)$ 'in \mathcal{D}_d içindeki kökleridir.
3. $z \in \mathcal{D}_d$ için $|B_N(z; \mathbf{b}, \mathcal{D}_d)| < 1$ ve $z \in \partial \mathcal{D}_d$ için $|B_N(z; \mathbf{b}, \mathcal{D}_d)| = 1$

özelliklerini sağlar. Bu özellikler altında $F_0(\{a_j\}, \{m_j\})$ kümesi

$$F_0(\{a_j\}, \{m_j\}) = \{g(z) \mid g \in H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega), \|g\| \leq 1\}$$

şeklinde ifade edilir. Bu küme (4.15) eşitliğinin sağ tarafında yerine konursa ; (4.15)-den daha genel bir form olan

$$\begin{aligned} & \mathfrak{G}_N^{\min}(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)) \\ &= \inf_{a_i \in \mathcal{D}_d (i=1, \dots, N)} \left\{ \sup_{\|g\| \leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(x) B_N(x; \mathbf{a}, \mathcal{D}_d) dx \right| \right\} \quad (4.16) \end{aligned}$$

elde edilmiş olur. (4.16) sayesinde aşağıdaki anahtar önerme kolayca belirlenmiş olur.

Önerme 4.3. $\omega(z)$ -in Teorem 4.1 veya Teorem 4.2-deki şart 1 ve şart 2 durumlarını sağladığını farz edelim. O halde

$$\mathfrak{G}_N^{\min}(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)) \geq \sup_{R \in \mathbb{R}} 2R \exp\left(-\frac{\pi d N}{R} + \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log |\omega(x)| dx\right) \quad (4.17)$$

İspat: Verilen herhangi bir $a_i \in \mathcal{D}_d$ ($i = 1, 2, \dots, N$) için;

$$1. \quad \|g\| \leq 1;$$

2.

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} g(x) B_N(x; \mathbf{a}, \mathcal{D}_d) dx \right| \geq \sup_{R \in \mathbb{R}} 2R \exp\left(-\frac{\pi d N}{R} + \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log |\omega(x)| dx\right)$$

Şartlarını yerine getiren bir $g(z)$ fonksiyonunun var olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$a_i \in \mathcal{D}_d$ ($i = 1, 2, \dots, N$) için

$$s(z) = B_N(z; \mathbf{a}, \mathcal{D}_d) \omega(z) \quad (4.18)$$

fonksiyonunun yukarıdaki şartları sağladığını ispatlamak istiyoruz. $\|s\| \leq 1$ eşitsizliğinin doğruluğu göz önüne alınırsa integralin değeri;

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(x) B_N(x; \mathbf{a}, \mathfrak{D}_d) dx \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} |B_N(x; \mathbf{a}, \mathfrak{D}_d)|^2 \omega(x) dx \right| \\ &= \sup_{R \in \mathbb{R}} 2R \int_{-R}^R |B_N(x; \mathbf{a}, \mathfrak{D}_d)|^2 \omega(x) \frac{dx}{2R} \end{aligned}$$

şeklinde belirlenir. $\int_{-R}^R \frac{dx}{2R} = 1$ olduğundan dolayı; Jensen'in eşitsizliğine uygulandığında;

$$\begin{aligned} &\sup_{R \in \mathbb{R}} 2R \int_{-R}^R |B_N(x; \mathbf{a}, \mathfrak{D}_d)|^2 \omega(x) \frac{dx}{2R} \\ &\geq \sup_{R \in \mathbb{R}} 2R \exp \left[\int_{-R}^R \log(|B_N(x; \mathbf{a}, \mathfrak{D}_d)|^2 \omega(x)) \frac{dx}{2R} \right] \\ &\geq \sup_{R \in \mathbb{R}} 2R \exp \left[\frac{1}{R} \int_{-R}^R \log(|B_N(x; \mathbf{a}, \mathfrak{D}_d)|) dx + \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log |\omega(x)| dx \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Newman'dan biliniyor ki

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \log(|B_N(x; \mathbf{a}, \mathfrak{D}_d)|) dx &= \frac{4d}{\pi} \int_{-T(R)}^{T(R)} \log \left[\prod_{i=1}^N \left| \frac{\xi - T(a_i)}{1 - T(a_i)\xi} \right| \frac{d\xi}{1 - \xi^2} \right] \\ &\geq \left(\frac{4d}{\pi} \right) N \left(-\frac{\pi^2}{4} \right) \\ &= -N\pi d \end{aligned}$$

Buradan

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} s(x) B_N(x; \mathbf{a}, \mathfrak{D}_d) dx \right| \geq \sup_{R \in \mathbb{R}} 2R \exp \left(-\frac{\pi d N}{R} + \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log |\omega(x)| dx \right)$$

elde edilir ki bu eşitsizlik istenen değer olup; ispat biter. [5] \square

Minimum hata normu için; (4.7) ve (4.9); alt tahminlerin ispatı ; (4.17)-nin sağ tarafındaki tahminle tamamlanmış olur.

Önerme 4.4.

1. $\omega(z)$ -nin Teorem 4.1 de yer alan tüm şartları sağladığını farz edelim. O halde

$$\begin{aligned} &\sup_{R \in \mathbb{R}} 2R \exp \left(-\frac{\pi d N}{R} + \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log |\omega(x)| dx \right) \\ &\geq \sup_{R \in \mathbb{R}} 2R \exp \left(-\frac{\pi d N}{R} + \log \alpha_1 - \frac{(\beta R)^\rho}{\rho + 1} \right) \end{aligned}$$

$$\geq C' N^{1/\rho+1} \exp\left(-\left(\left(\frac{2}{\rho+1}\right)^{1/\rho} 2\pi d\beta N\right)^{\rho/\rho+1}\right)$$

2. $\omega(z)$ -nin Teorem 4.2-de yer alan tüm şartları sağladığını kabul edelim. O halde

$$\begin{aligned} & \sup_{R \in \mathbb{R}} 2R \exp\left(-\frac{\pi dN}{R} + \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log |\omega(x)| dx\right) \\ & \geq \sup_{R \in \mathbb{R}} 2R \exp\left(-\frac{\pi dN}{R} + \log \alpha_1 - \frac{\beta_1(\exp(\gamma R) - 1)}{\gamma R}\right) \\ & \geq C' \log N \exp\left(-\frac{2\pi d\gamma N}{\log(\pi d\gamma N/\beta_1)}\right) \end{aligned}$$

İspat: 1. ve 2. ifadelerdeki ilk eşitsizlikler önemsiz olup; 2. kısımlardaki ifadeler sırasıyla

$$R = \left(\frac{(\rho+1)\pi dN}{\beta^\rho}\right)^{1/\rho+1}$$

ve

$$R = \frac{1}{\gamma} \log\left(\frac{\pi d\gamma N}{\beta_1}\right)$$

olarak belirlenir. [5]

4.3.3 Yokluk Teoremi

Bir önceki bölümde aşağıdaki durumlar belirlenmişti.

(1) Yamuk kuralı $\omega(z)$ fonksiyonlarının bir çeşitliliği ile $H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)$ nın her uzayında, her durumda hemen hemen optimaldir. Yani istenen duyarlılığa daha az fonksiyon hesabı yaparak en az hatayla ulaşılır. Burada her iki $\mathfrak{E}_{N,h}^T(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega))$ için üst tahmin ve $\mathfrak{E}_{N,h}^{\min}(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega))$ için alt tahmin değerleri eşit olur.

(2) Her iki $\mathfrak{E}_{N,h}^T(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega))$ için üst tahmin ve $\mathfrak{E}_{N,h}^{\min}(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega))$ için alt tahmin değerleri $\omega(z)$ -nin azalma (çürüme) oranından daha küçüktür. Yani uzayın karakterize edici bozulma (çürüme) hızı daha hızlıdır.

Sonuç olarak çift üstelden daha hızlı bir çürüme (bozulma, azalma) oranı olan; yamuğun $\omega(z)$ ile bir $H^\infty(\mathfrak{D}_d, \omega)$ uzayında optimal ve daha etkili olabileceği yukarıdaki gözlemlerden çıkarılabilmektedir. Bununla birlikte bu ihtimallik çift üstelden daha hızlı bozulan (azalan) elemanlara sahip olan uzaylar için aşağıdaki yokluk teoremi tarafından önemini kaybeder. Böylece DE formülün “meta-optimalliği” sonucuna varılır.

Teorem 4.3. $\omega(z)$ -nin aşağıdaki üç koşulu sağladığını kabul edelim.

1. $\omega(z) \in B(\mathfrak{d}_d)$;
2. $\omega(z)$ \mathfrak{d}_d içinde herhangi bir noktada sıfırlanmaz ve reel eksen üzerinde gerçek değerler alır;
3. $\omega(z)$ -nin reel eksen üzerindeki çürüme (bozulma, azalma) oranı $\beta > 0$ ve $\gamma > \pi/(2d)$ olmak üzere

$$\omega(x) = O\left(\exp(-\beta \exp(\gamma|x|))\right) \quad |x| \rightarrow \infty$$

şeklinde belirtilir. [5]

İspat: Gerekenden daha güçlü bir durumu kanıtlayarak $\omega(z)$ için 1,2 ve 3 şartları çelişkiye yol açmaktadır. $\omega(z)$ -nin $B(\mathfrak{d}_d)$ -ye ait ve $\beta > 0$ ve $\gamma > \pi/(2d)$ olduğunu kabul edelim.

$$\omega(x) = O\left(\exp(-\beta \exp(\gamma x))\right) \quad x \rightarrow +\infty \quad \text{reel eksen üzerinde.}$$

O halde $\omega(z) \equiv 0$.

Aşağıdaki önerme gereklidir. [5]

Önerme 4.5. $\omega(z)$ -nin düzgün ve \mathfrak{d}_δ -in kapanışı olan $\overline{\mathfrak{d}_\delta}$ içinde sınırlı ve herhangi bir $\beta' > 0$ ve $\gamma' = \pi/(2\delta)$ olsun.

$$\omega(x) = O\left(\exp(-\beta' \exp(\gamma' x))\right) \quad x \rightarrow +\infty \quad \text{reel eksen üzerinde.}$$

O halde $\omega(z) \equiv 0$.

Ünlü Phragmen-Lindelof ilkesinden doğan Cartwright sonucuna ihtiyacımız var. Cartwright sonucu aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.4. $f(z)$ düzenli ve $S\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi, |z| \geq 1\}$ şeklinde tanımlanan bölge içinde mertebesi ≤ 1 ve $S\left(\frac{1}{2}\pi\right)$ üzerinde $|f| \leq M$ olsun. Ayrıca $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$ olacak şekilde sabit bir θ için

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(re^{i\theta})|}{r} = -\infty$$

O halde $f(z) \equiv 0$ olur.

Önerme 4.5 in ispatı: z' in logaritmasının esas değeri $\text{Log } z'$ olmak üzere

$$f(z') \equiv \omega \left(\frac{2\delta}{\pi} \text{Log } z' \right)$$

Fonksiyonu göz önüne alınarak Önerme 4.5-i ispatlamak için Teorem 4.4 kullanılacaktır. $S(\frac{1}{2}\pi)$ bölgesini $\overline{\mathfrak{d}}_\delta \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z \geq 0\}$ bölgesinin içine dönüştüren

$$z = \frac{2\delta}{\pi} \text{Log } z'$$

fonksiyonu göz önünde tutularak kolayca görülebilir ki $f(z')$ fonksiyonu Teorem 4.4-deki tüm hipotezleri sağlar. Bundan dolayı $\omega(z) = 0$ ı gerektiren $f(z') \equiv 0$ elde edilir. \square

Önerme 4.5-i uygulamak için $\lambda < d$ olacak şekilde herhangi bir λ için $\overline{\mathfrak{d}}_\lambda$ içinde $\omega(z)$ -nin sınırlılığını göstermek gerekir. $z \in \overline{\mathfrak{d}}_\lambda$ için $\omega(z)$ -nin integral gösterimi

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\omega(\xi + i\eta)}{\xi + i\eta - z} + \frac{\omega(\xi - i\eta)}{\xi - i\eta - z} \right] d\xi \quad (\lambda < \eta < d)$$

ve $\omega(z) \in B(\mathfrak{d}_d)$ şartı ve Cauchy integral formülü kullanılarak

$$|\omega(z)| \leq \frac{1}{2\pi(\eta - \lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} (|\omega(\xi + i\eta)| + |\omega(\xi - i\eta)|) d\xi \quad (\lambda < \eta < d)$$

O halde

$$\begin{aligned} |\omega(z)| &\leq \lim_{\eta \rightarrow d-0} \frac{1}{2\pi(\eta - \lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} (|\omega(\xi + i\eta)| + |\omega(\xi - i\eta)|) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi(d - \lambda)} \mathcal{N}_1(\omega, \mathfrak{d}_d) \\ &< \infty \end{aligned}$$

olduğundan istenen elde edilmiş olur.

Şimdi Önerme 4.5-in tüm hipotezleri $\delta = (1 - \min\{\frac{2\gamma d}{\pi} - \frac{1,1}{2}\})d$ olmak üzere $\omega(z)$ için aşıkardır. Bundan dolayı \mathfrak{d}_a içinde $\omega(z) \equiv 0$ olduğunda \mathfrak{d}_δ içinde $\omega(z) \equiv 0$ dır. Böylece Teorem 4.3 tamamlanmış olur.

BÖLÜM 5

5.1 Çift Üstel Salınlı İntegrasyon Metodu

“Çift üstel salınım” stratejisi ω, c, p sabitler olmak üzere $f(x) \sin(\omega x^p + c)$, $f(x) \cos(\omega x^p + c)$ veya $f(x)e^{i\omega x^p}$ formlarının integrandlarına sahip tek boyutlu sonsuz bölgeler üzerindeki çok yavaş çürüyen (bozulan) salınlı integraller için kullanılmaktadır. Tıpkı

$$I = \int_1^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2} dx$$

örneğinde olduğu gibi.

“Çift üstel salınım” stratejisi çift üstel formülüne dayanır. Ancak “çift üstel salınım” stratejisi integrasyon aralığının uçlarını çift üstelliğe ulaştıran bir dönüşüm kullanmak yerine ; $\sin(\omega x^p + c)$ ve $\cos(\omega x^p + c)$ fonksiyonlarının köklerini çift üstele ulaştıran bir dönüşüm kullanmaya dayanır. “Çift üstel salınım” algoritması, burada $\sin e$ integrali kullanılarak açıklanacaktır.

$$I_s = \int_0^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx \quad (5.1)$$

$$x = \frac{M\phi(t)}{\omega} , \quad \phi(t) = \frac{t}{1 - \exp(-2t - \beta(e^t - 1) - \alpha(1 - e^{-t}))} \quad (5.2)$$

dönüşümleri göz önünde bulundurulsun. Buradaki α ve β sabitleri;

$$\beta = O(1) , \quad \alpha = O\left(\frac{1}{\sqrt{M \log M}}\right) , \quad 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$$

eşitliklerini sağlarlar ve

$$\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{1 + \frac{M \log(M+1)}{4\pi}}} , \quad \beta = \frac{1}{4} \quad (5.3)$$

şeklinde seçilirler.

(5.2) -de yer alan dönüşüm; (5.1) -de yer alan $\sin e$ integraline uygulandığında;

$$I_s = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f\left(\frac{M\phi(t)}{\omega}\right) \sin\left(\frac{M\phi(t)}{\omega}\right) M\phi'(t)}{\omega} dt \quad (5.4)$$

elde edilmiş olur. Burada görülmelidir ki “ ω ” sine terim içinde yok olur. (5.4) eşitliğine eşit adım aralıklı yamuk kuralı uygulandığında

$$DEO(I_5, h) = Mh \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(M(\phi(nh)/\omega)) \sin(M\phi(nh))\phi'(nh)/\omega \quad (5.5)$$

elde edilir.

Uygulanan $x = \frac{M\phi(t)}{\omega}$ dönüşümünden görüldüğü üzere büyük negatif n -değerlerinde integrand değeri çift üstel olarak azalır (bozulur). Diğer yandan büyük pozitif n -değerlerinde bir çürüme yokken;

$$\sin(M\phi(nh)) \cong \sin(Mnh) = \sin(nh) = 0$$

olması integrandın büyük n -değerleri için hesabına gerek kalmadığını açıkça ortaya koymaktadır. Buna dayanarak n -in makul bir değerinde sonsuz toplam kesilebilir.

Buradaki sonsuz toplam uygun bir N için kesilecek olunursa

$$\begin{aligned} DEO(I_5, h, N) &= Mh \sum_{n=-N_-}^{N_+} f\left(M\left(\frac{\phi(nh)}{\omega}\right)\right) \sin\frac{(M\phi(nh))\phi'(nh)}{\omega}, \quad N \\ &= N_- + N_+ + 1 \end{aligned}$$

ve kesilmiş seri toplamı elde edilmiş olur. Buradaki m ve h sabitleri;

$$Mh = \pi$$

eşitliğini sağlayacak şekilde seçilmektedir. Buradan en son bulunan ifade (5.1) -e çok hızlı bir şekilde yakınsar. Böylece aşağıdaki formül belirlenmiş olur. [7]

1. Yaklaşım formülü: N_+ ve N_- iki tamsayı ve $h > 0$ seçilsin.

$$\begin{aligned} DEO(I_5, h, N) &= Mh \sum_{n=-N_-}^{N_+} f\left(M\left(\frac{\phi(nh)}{\omega}\right)\right) \sin\frac{(M\phi(nh))\phi'(nh)}{\omega}, \quad N \\ &= N_- + N_+ + 1 \end{aligned}$$

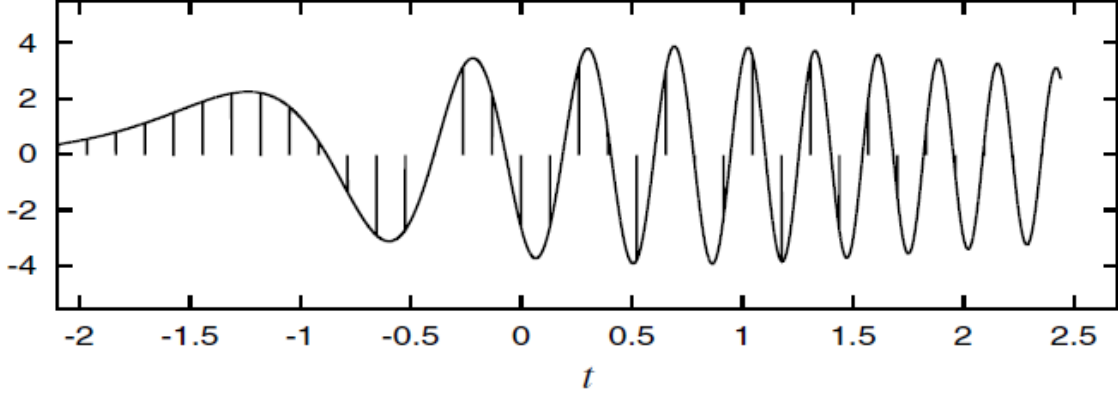
Buradaki $\phi(t)$ dönüşümünün parametreleri (5.3) -deki gibi seçilmiştir. Eğer

$N = N_- + N_+ + 1$ yaklaşık olarak seçilirse, hata

$$\left|I - I_h^{(N)}\right| < c'e^{-\frac{c}{h}} < C'e^{(-CN/\log N)}$$

şeklinde sınırlanmış olur. Buradaki c, c', C, C' değerleri $f(x)$ ve ω değerlerine bağlı pozitif sabitlerdir. [7]

$f(x) = x^{-1/2}$ ve $\omega = 1$ için integrand örnek noktalar Şekil 5.1'de gösterilmiştir. Örnek noktaların $\frac{\pi}{\omega}$ periyoduna bağlıdır. Yani ω değeri değiştiğinde örnek noktalar da değişir. Bu nedenle 1. Yaklaşım formülünü kullanarak Fourier dönüşümünün ω değerleri üzerinden değerini hesaplamak bir çok örnek nokta (data) gerektirir.



Şekil 5.1 (5.4)-ün integrandı ve (5.5)-in örnek noktaları [7]

5.2 Dönüşümler İçin Çift Üstel Salınlı Formül

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx \quad (5.6)$$

Fourier dönüşümüne (5.2) değişken değişimi uygulanarak

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(M\varphi(t))\exp(i\omega M\varphi(t))M\varphi'(t)dt \quad (5.7)$$

elde edilir.

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(M\varphi(t))\exp(i\omega M\varphi(t) - i\omega_0 M\hat{\varphi}(t))M\varphi'(t)dt \quad (5.8)$$

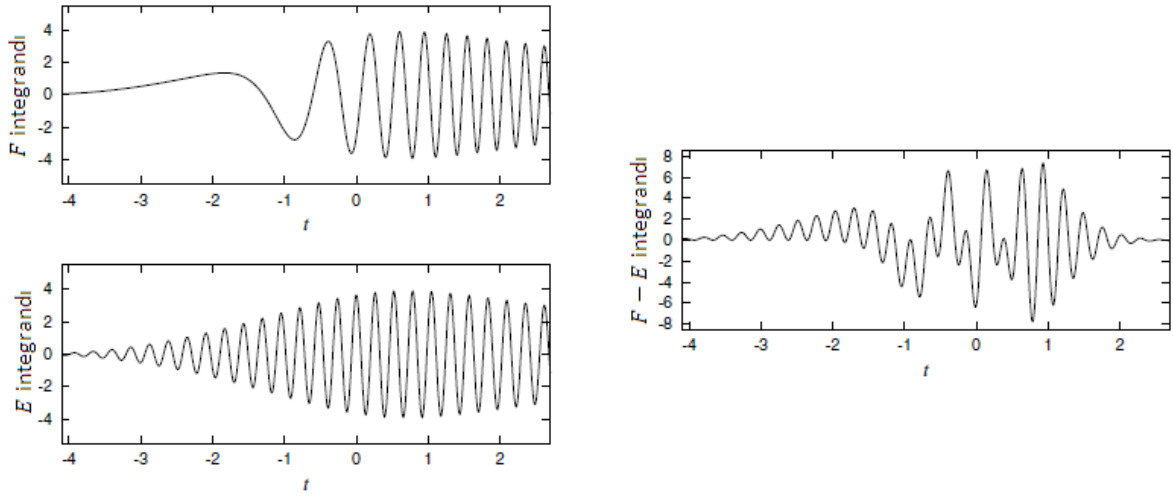
Burada $\hat{\varphi}(t) = \varphi(t) - t$ ve ω_0 pozitif bir sabittir. Şu durumda; büyük M değerleri için $|E(\omega)|$ değerleri çok küçüktür ve merteye

$$|E(\omega)| = O(\exp(-d'M\min(\omega, \omega_0)))$$

Burada d' , $f(x)$ fonksiyonuna bağlı pozitif bir sabittir. $F(\omega)$ yerine $\tilde{F}(\omega) = F(\omega) - E(\omega)$ hesaplandığında

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(M\varphi(t))\exp\left(i\omega M\varphi(t) - \frac{i}{2}\omega_0 M\hat{\varphi}(t)\right)2iM \sin\left(\frac{1}{2}\omega_0 M\hat{\varphi}(t)\right)\varphi'(t)dt \quad (4.9)$$

elde edilir. $t \rightarrow \infty$ iken $\hat{\varphi}(t) \rightarrow 0$ ve $t \rightarrow \infty$ iken $\varphi'(t) \rightarrow 0$ olduğundan $t \rightarrow \pm\infty$ iken $\left| \sin\left(\frac{1}{2}\omega_0 M \hat{\varphi}(t)\right) \varphi'(t) \right|$ çok hızlı bir şekilde 0'a yakınsar. Böylece $\tilde{F}(\omega)$ -nin integrandı; bilinen çift üstel formülünün uygulanabileceği bir fonksiyona hazır hale gelmiş olur. Bu da ω 'dan bağımsız bir h -adım aralığı seçilebildiği anlamına gelir. $F(\omega)$, $E(\omega)$ ve $F(\omega) - E(\omega)$ -nin integrandlarının imajiner (sanal) kısımları $f(x) = x^{-1/2}$ alınarak Şekil 5.2 de gösterilmiştir. $\omega \in (0, 2\omega_0)$ olmak üzere integrali hesaplamak için $M = \frac{\pi}{(\omega_0 h)}$ seçmek yeterlidir. Şu durumda aşağıdaki formül belirlenmiş olur.



Şekil 5.2 : (5.7), (5.8), (5.9) integrandları [7]

2. Yaklaşım formülü : $(0, 2\omega_0)$ aralığında, ω için (5.6) integralini hesaplayalım: O halde amaçlanan yaklaşım formülü

$$\tilde{F}_h^{(N)}(\omega) = \frac{2\pi i}{\omega_0} \sum_{n=-N_-}^{N_+} f\left(\frac{\pi}{\omega_0 h} \varphi(nh)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2h} \hat{\varphi}(nh)\right) \varphi'(nh) \exp\left(\frac{\pi i \omega}{\omega_0 h} \varphi(nh) - \frac{\pi i}{2h} \hat{\varphi}(nh)\right)$$

biçiminde belirlenir. Buradaki $\varphi(t)$ parametreleri (5.3)-deki gibi seçilmiştir. Bu formül için hata $\left| F(\omega) - \tilde{F}_h^{(N)}(\omega) \right| < c'_0 e^{-c_0/h} + c'_1 e^{-c_1 \omega/h} + c'_2 e^{-c_2(2\omega_0 - \omega)/h}$, şeklinde sınırlı olmuş olur. Buradaki c_i , c'_i değerleri d' boyunca $f(x)$ fonksiyonuna bağlı pozitif sabitlerdir. [8]

3. yaklaşım formülü için örnek noktaların (datalar) değiştirilmesine gerek yoktur. Üstelik $\omega = \omega_0$ durumunda 2. Yaklaşım formülünün imajiner (sanal) kısmı 1. Yaklaşım formülünde olduğu gibidir. Böylece 2. yaklaşım formülü; 1. yaklaşım formülünün geliştirilmiş halidir.

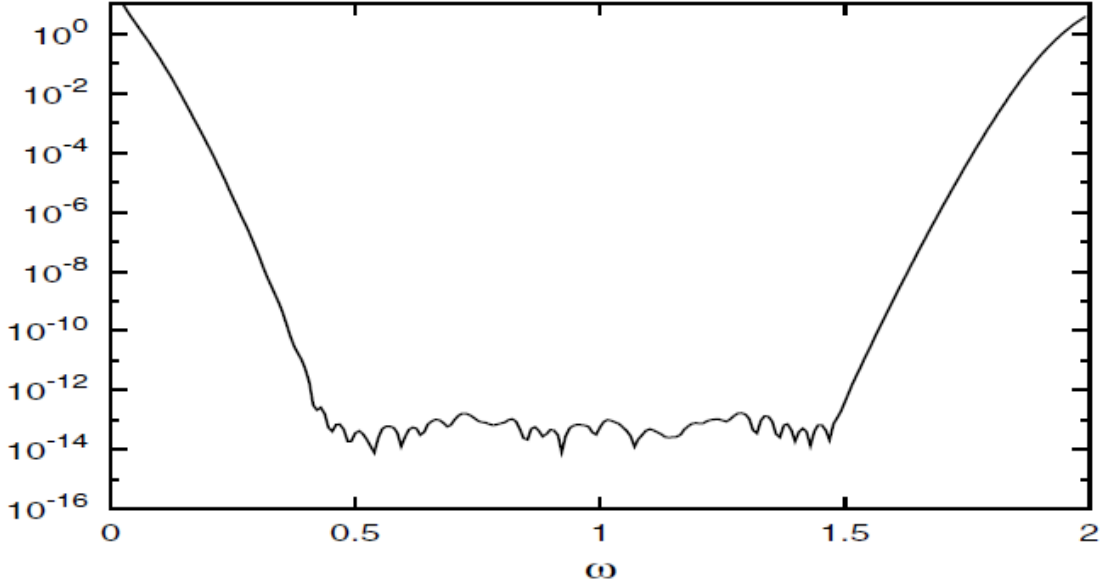
5.3 Nümerik Örnekler

Çift üstel salınımlı metodun etkililiğini göstermek için $x \rightarrow \infty$ iken çok yavaş azalan (bozulan) ve $x = 0$ noktasında tekillığe sahip olduğundan FFT (Fast Fourier Transform) tabanlı metot tarafından etkili hesaplanamayan

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} e^{i\omega x} dx \quad (5.10)$$

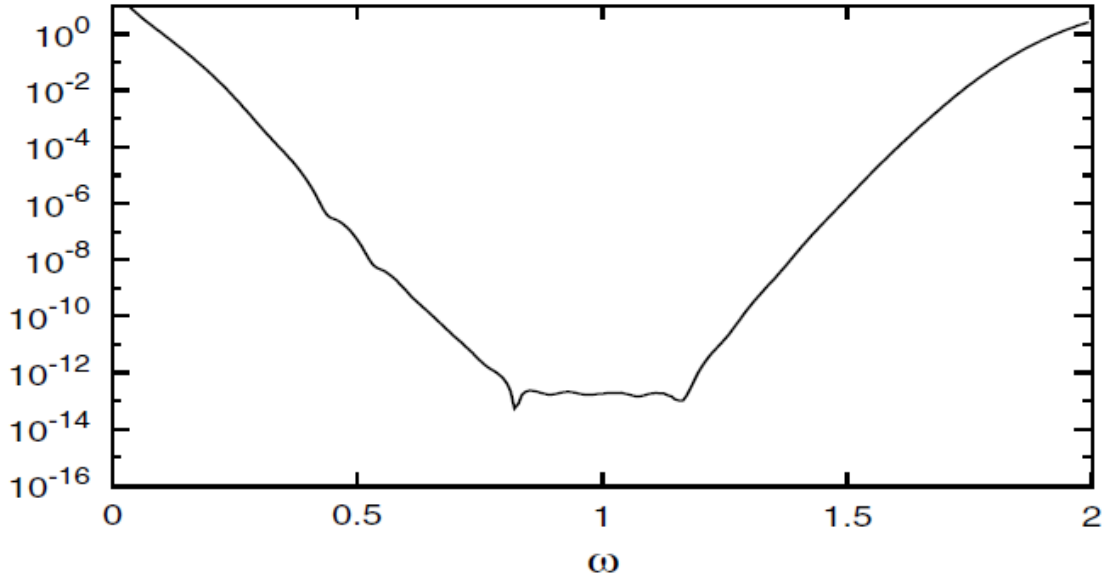
integrali göz önüne alınsın.

$\omega_0 = 1$, $h = 0,075$, $N_- = 94$, $N_+ = 69$ parametreleriyle 2. yaklaşım formülü kullanılarak hesaplanan mutlak hata Şekil 5.3'de gösterilmiştir. Parametrelerdeki etkili doğruluk aralığı $0 < \omega < 2\omega_0 = 2$ dir. Hesaplama 2 kat duyarlılıkta yapılmış olup; böylece yuvarlama hatası 10^{-15} civarındadır.

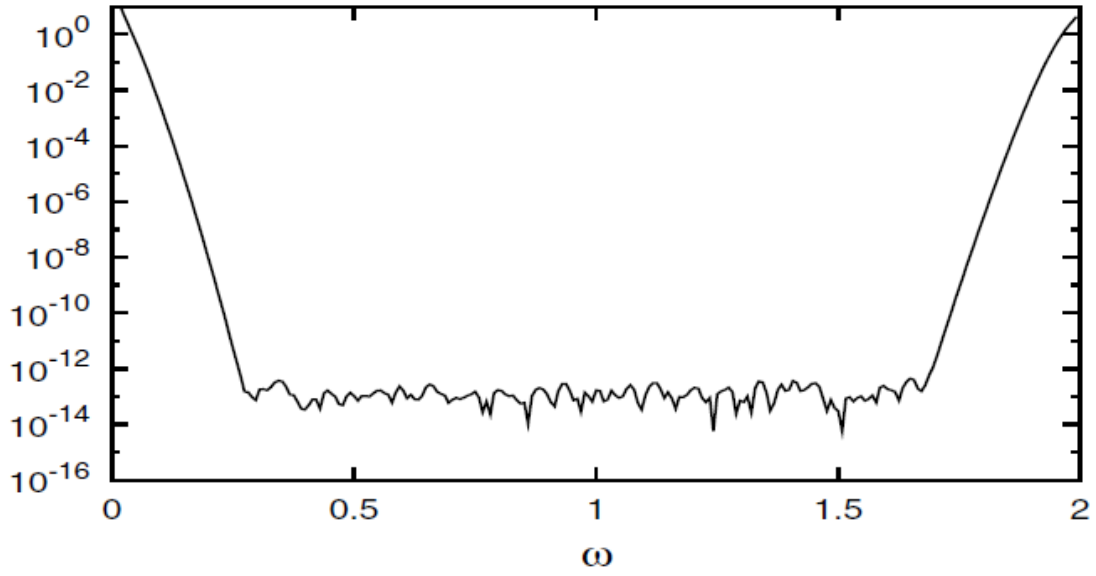


Şekil 5.3 : $|F(\omega) - \tilde{F}_h^{(N)}(\omega)|$, ($h = 0.075$, $N_- = 94$, $N_+ = 69$) [7]

h -adım aralığı aynı hesap çerçevesinde değiştirildiğinde elde edilen mutlak hata değerleri Şekil 5.4 ve Şekil 5.5'te gösterilmiştir. Buradan anlaşılıyor ki h -adım aralığı ne kadar azalırse etkili doğruluk aralığı o kadar büyür. Şu da belirtmelidir ki; h ne kadar azalırse doğruluk değeri o kadar gelişir, yani artar fakat bu durum daha büyük N_- ve N_+ değerlerini gerektirir. Ω 'nin geniş bir aralığında hesaplama yapmak için metotta ω_0 -in değiştirilmesi ve yeniden hesaplanması önerilir.



Şekil 5.4 : $|F(\omega) - \tilde{F}_h^{(N)}(\omega)|$, ($h = 0.15$, $N_- = 44$, $N_+ = 35$) [7]



Şekil 5.5 : $|F(\omega) - \tilde{F}_h^{(N)}(\omega)|$, ($h = 0.03$, $N_- = 253$, $N_+ = 173$) [7]

5.3.1 Çift Üstel Metot ile Karşılaştırma

Bu kısımda geleneksel çift üstel metodu ve çift üstel salınımlı metot tarafından yaklaşık değerleri bulunan (5.10) integrali sonuçları karşılaştırılacaktır.

$0.5 \leq \omega \leq 1.5$ aralığında mutlak hata payı 10^{-12} civarında olacak şekilde (5.10) integralini hesaplamak istiyoruz. $F\left(0.5 + \frac{k}{128}\right)$ dönüşümü 128-nokta kullanarak hesaplandı ($k = (0,1,2, \dots, 127)$). Hesaplama sırasında geçen zaman ve gerekli fonksiyon hesabının toplam sayısı Tablo 5.1’de gösterilmiştir.

	h	N	CPU süresi (Intel Pentium(R) Dual-Core 2.00 GHz)
Önerilen çift üstel formülü (Formül 2)	0.075	164	0.11 ms
Çift üstel formülü (Formül 1)	0.15	20096	3.57 ms

Tablo 5.1

Başka bir örnek olarak

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cos(\omega x) dx \quad (5.11)$$

örneğini ele alalım.

Bu kez (5.11) -e uygulanan FFT ile sürekli Euler dönüşümü metotları ile hesaplama yapalım:

$0.5 \leq \omega \leq 1.5$ aralığında mutlak hata payı 10^{-12} olacak şekilde (5.11) integralini 128 -nokta kullanılarak hesaplanmış olup sonuçlar Tablo 5.2 ile aşağıda verilmiştir.

	h	N	CPU süresi (Intel Pentium(R) Dual-Core 2.00 GHz)
Önerilen çift üstel formülü (Formül 2)	0.075	157	0.06 ms
Çift üstel formülü (Formül 1)	0.15	9856	1.17 ms
Sürekli Euler dönüşümü + FFT	0.15	2049	0.16 ms

Tablo 5.2

5.3.2 Nümerik Metotlar ile Çift Üstel İntegrasyon Metodunun Karşılaştırılması

$$I_1^f[a, b] = \int_a^b \frac{1 + 2 \ln x}{1 + e^x} e^{i\omega x^2 \ln x} dx$$

integrali için $[e^{-1/2}, 3]$ aralığındaki sonucun reel kısmı

-0.00152886230241440982811558447650918465794148148060297331293314623
7253788162790392807252796438448264137.....

biçimindedir.

İntegral	Levin Rule	Çift Üstel İntegrasyon Metodu
$I_1 [e^{-1/2}, 3]$	Metot başarısız	-0.001528862302414409828
		11558447650918465794148
		14806029733129331462372
		53788162790392807252796
		438448264137.....

Tablo 5.3 Levin metodu ile çift üstel integrasyon metodunun karşılaştırılması

Burada belirtilen “Levin Rule” Mathematica’ın Levin metodudur. Ancak aralık tekil noktada ikiye ayrılırsa Levin metodu çalışır.

$$I_2^f[a, b] = \int_a^b \left(\frac{1}{10^{-2}x^2 + 1} \right) \cos(\omega x^2 e^{x^3}) dx$$

integraline direk olarak dik iniş metodu uygulanamamaktadır. Ancak $\omega x^2 e^{x^3} = u$ değişken değişimi yapılırsa elde edilen fonksion Lambert W fonksiyonu ($W(x)$) cinsinden ifade edilebilir. Yani

$$x = \psi(u) = \left[\frac{2}{3} W \left(\frac{3}{2} \left(\frac{u}{\omega} \right)^{3/2} \right) \right]^{1/3}$$

değişken değişimi ile integral

$$\text{Re} \left[\int_{\omega \left(\frac{1}{4} \right)^2 e^{\left(\frac{1}{4} \right)^3} f(\psi(u)) \psi'(u) e^{i\omega u} du \right]$$

haline gelmiş olur. Bu hali ile yukarıdaki integrale dik iniş metodu kolaylıkla uygulanabilir.

Bunun için aşağıdaki Mathematica programı verilmiştir.

```
w=1;
a=1/4;
b=4;
α=2;
β=3;
f[x_]:=1/((10^(-2)*x^2+1));
n=100;
t=Array[N[Root[LaguerreL[n,x],#],100]&,n];
ww=t/((n+1)*LaguerreL[(n+1),t])^2;
(*modW=Array[(Exp[t #]*t #)/(((n+1)*LaguerreL[(n+1),t
#])^2)&,n];*)
Phi[u_]:=((α/β)*ProductLog[(β/α)*(u/w)^(β/α)])^(1/β);
dPhi[u_]:=Derivative[1][Phi][u];
h[x_,p_]:=w*x^α*Exp[x^β]+I*p;
GC=
N[I*Exp[I*w*a^α*Exp[a^β]]*Sum[ww[[i]]*f[Phi[h[a,t[[i]]]]]
*dPhi[h[a,t[[i]]]],{i,1,n}]-
I*Exp[I*w*b^α*Exp[b^β]]*Sum[ww[[i]]*f[Phi[h[b,t[[i]]]]]*d
Phi[h[b,t[[i]]]],{i,1,n}],100];
```

[a,b]	Dik İniş Metodu	DEM	Levin Rule
[1/4,4]	Başarısız	150	50
[1,4]	100	150	30
[2,4]	4	75	20

Tablo 5.4 $I_2^f[a,b]$ hesabı için gerekli nokta sayısı (integrand hesabı)

Buradaki “Levin Rule” Mathematica’nın NIntegrate komutudur.

Yukardaki tabloda verilen sonuçlar Mathematica'da WorkingPrecision 16, AccuracyGoal 14 ve $w = 1$ alınarak hesaplanmıştır.

$A = \min\{wg'(a), g'(b)\}$ olarak tanımlansın. $I_2^f[a, b]$ örneğinde geçen fonksiyon $[a, b]$ - aralığında artan bir fonksiyon olduğunda buradaki A değeri $wg'(a)$ dır.

$[1/4, 4]$ - aralığı için $A = wg'(a) = \frac{131e^{1/64}}{256} \cong 0.519777147753343$ değerinde Dik İniş metodu bir sonuç bulamazken DEM 150 noktada, Levin Rule ise 50 noktada istenilen duyarlılıkta bir neticeye ulaşmıştır. Fakat gibi Levin Metodu daha az nokta kullanarak neticeyi bulmasına rağmen istenilen duyarlılıkta sonucu bulunabilmesi için, n nokta sayısı olmak üzere $n \times n$ tipindeki lineer sistem çözümü de gerekmektedir. Bu ise $O(n^3)$ mertebesinde işlem gerektirir.

$[1, 4]$ - aralığı için $A = wg'(a) = 5e \cong 13.591409142295225$ değerinde en az nokta kullanarak istenilen duyarlılığı sağlayan metodun Dik İniş metodu olduğu görülmektedir. Ayrıca tabloda görüldüğü gibi Levin Metodu daha az nokta kullanarak neticeyi bulmasına rağmen istenilen duyarlılıkta sonucu bulunabilmesi için, n nokta sayısı olmak üzere $n \times n$ tipindeki lineer sistem çözümü de gerekmektedir. Bu ise $O(n^3)$ mertebesinde işlem gerektirir.

$[2, 4]$ - aralığı için $A = wg'(a) = 5e^8 \cong 155009.81532616986$ değerinde ise en iyi olan metodun Dik İniş metodu olduğu görülmektedir. Yine burada Levin daha az nokta kullanarak neticeyi bulmasına rağmen istenilen duyarlılıkta sonucu bulunabilmesi için, n nokta sayısı olmak üzere $n \times n$ tipindeki lineer sistem çözümü de gerekmektedir. Bu ise $O(n^3)$ mertebesinde işlem gerektirir.

Sonuç olarak; A değeri küçük olduğunda Çift Üstel integrasyon metodu (DEM), A değeri büyük olduğunda ise Dik İniş metodu daha iyi netice vermektedir.

BÖLÜM 6

SONUÇLAR

Yapılan çalışmalar boyunca yüksek salınlı integrallerin hesabı için kullanılan bir çok nümerik metodun, bu çalışmanın konusu olan çift üstel formülüne dayanan yeni bir metod olan çift üstel salınlı integrasyon metodu çeşitli örneklere uyarlanarak elde edilen sonuçlar bahsedilen diğer metotlarla karşılaştırılmıştır.

Bugüne kadar çift üstel formülün optimalliği ile ilgili kesin bir sonuca varılmamakla birlikte burada fonksiyonel analiz yaklaşımı ile öncekilerle karşılaştırıldığında matematiksel anlamda daha mantıklı bir sonuca ulaşılmıştır.

Çift üstel salınlı integrasyon metodu yüksek salınlı bazı integraller için daha avantajlı sonuçları getirdiği bu çalışma boyunca irdelenmiş olup tablo ve grafiklerle desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] M. Mori, (1978), An IMT-type double exponential formula for numerical integration, *Publ. RIMS. Kyoto Univ.* 14 713{729.
- [2] Takahasi, H. and Mori, (1973), M., Quadrature Formulas Obtained by Variable Transformation, *Numer. Math.*, 21 206-219.
- [3] Takahasi, H. (1974), and Mori, M., Double exponential formulas for numerical integration, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 9 721-741.
- [4] M. Sugihara, (1997), Optimality of the double exponential formula { functional analysis approach. *Numer. Math.* 75 379{395. (The original paper in Japanese appeared in Kokyuroku *RIMS Kyoto Univ.* No. 585 (1986) 150{175).
- [5]. Andersson, J.-E. (1980): Optimal quadrature of Hp functions. *Math. Z.* 172, 55–62
- [6] H. Takahasi, M. Mori, (1970), Error estimation in the numerical integration of analytic functions, *Report Comput. Centre, Univ. Tokyo*, Vol. 3, , pp. 41{108.
- [7] T. Ooura, (2005), A Double Exponential Formula For The Fourier Transforms, *Publ. RIMS, Kyoto Univ. Tokyo*, 41 ,971-977.
- [8] T. Koshihara, M. Sugihara, (1996), A numerical solution for the Sturm{Liouville type eigenvalue problems employing the double exponential transformation, *Proceedings of the (1996) Annual Meeting of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics* , pp. 136{137 (in Japanese).
- [9] T. Matsuo, (1997), On an application of the DE transformation to a Sinc-type pseudospectral method, *Proceedings of the 1997 Annual Meeting of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics*, pp. 36{37 (in Japanese).
- [10] T. Ooura, (1994), A new variable transformation of Fourier-type integrals, *Proceedings of the Annual Meeting of the Japan Society for Industrial and Appl. Mathematics*, pp. 260{261 (in Japanese).
- [11] Takahasi, H., Mori, M., (1971), Estimation of errors in the numerical quadrature of analytic functions. *Applicable Analysis* 1, 20t-229
- [12] Takahasi, H. and Mori, M.,(1970), Error Estimation in the Numerical Integration of Analytic Functions, *Report of the Computer Centre, Univ. of Tokyo*, 3 41- 108.

- [13] Schwartz, (1969), C., Numerical Integration of Analytic Functions, /. *Computer Physics*, 4 19-29.
- [14] Iri, M., Moriguti, S. and Takasawa, Y., (1970), On a Certain Quadrature Formula (in Japanese), "*Kokyuroku*" of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto Univ., No. 91 82-118.
- [15] K. Horiuchi, M. Sugihara, (1999). Sinc-Galerkin method with the double exponential transformation for the two point boundary problems, Technical Report 99-05, Dept. of Mathematical Engineering, University of Tokyo,
- [16] M. Iri, S. Moriguti, Y. Takasawa, (1987) On a certain quadrature formula, *J. Comput. Appl. Math.* 17 3{20 (translation of the original paper in Japanese from *Kokyuroku RIMS Kyoto Univ.* No. 91, pp. 82{119.
- [17] Cartwright, M.L. (1956): Integral Functions. *Cambridge Univ. Press, London*
- [18] Iri, M., Moriguti, S., Takasawa, (1970), Y. On a certain quadrature formula (in Japanese). *Kokyuroku of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto Univ.* No. 91, 82-1t8
- [19] M. Mori, (1974), On the superiority of the trapezoidal rule for the integration of periodic analytic functions, *Mem. Numer. Math.* (1) 11{19.
- [20] Ooura, T. and Mori, M., (1991), The double exponential formula for oscillatory functions over the half infinite interval, *J. Comput. Appl. Math.*, 38 ,353-360.
- [21] M. Mori, (1985), Quadrature formulas obtained by variable transformation and the DE-rule, *J. Comput. Appl. Math.* 12 & 13 119{130.
- [22] M. Mori, (1986), Numerical Methods and FORTRAN 77 Programming, *Iwanami Shoten, Tokyo*, pp. 168{186 (in Japanese).
- [23] M. Mori, (1988), The double exponential formula for numerical integration over the half in_nite interval, in: R.P. Agarwal et al. (Eds.), *Numerical Mathematics (Singapore International Series of Numerical Mathematics, Vol. 86, Birkhäuser, Basel, 1988, pp. 367{379.*
- [24] M. Mori, (1988), An error analysis of quadrature formulas obtained by variable transformation, in: M. Kashiwara, T. Kawai (Eds.), Algebraic Analysis, Vol. 1, *Academic Press, Boston*, pp. 423{437.
- [25] M. Mori, (1991), Developments in the double exponential formulas for numerical integration, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Kyoto, 1990, *Springer, Tokyo*, pp. 1585{1594.
- [26] K. Murota, M. Iri, (1982), Parameter tuning and repeated application of the IMT-type transformation in numerical quadrature, *Numer. Math.* 38 327{363.

- [27] H. Ogata, T. Ooura, (1996), Theoretical error analysis of a DE-type quadrature formula for oscillatory integrals, *Proceedings of the Annual Meeting of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics*, pp. 18{19 (in Japanese).
- [28] H. Ogata, M. Sugihara, (1996), Interpolation and quadrature formulae whose abscissae are the zeros of the Bessel functions, *Trans. Japan Soc. Ind. Appl. Math.* 6 39{66 (in Japanese).
- [29] H. Ogata, M. Sugihara, (1998), Quadrature formulae for oscillatory in_nite integrals involving the Bessel functions, *Trans. Japan Soc. Ind. Appl. Math.* 8 223{256 (in Japanese).
- [30] H. Ogata, M. Sugihara, (1993), M. Mori, A DE-type quadrature rule for Cauchy principal-value integrals and Hadamard_nite-part integrals, *Trans. Japan Soc. Ind. Appl. Math.* 3 309{322 (in Japanese).
- [31] T. Ooura,(1993) An extension of the Euler transformation, *Proceedings of 1993 Annual Meeting of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics*, pp. 111{112 (in Japanese).
- [32] Takahasi, H., Mori, (1970), M. : Error estimation in the numerical integration of analytic functions, *Report of the Computer Centre, Univ. of Tokyo*, 3, 41-108
- [33] T. Ooura,(1996) A method of computation of oscillatory integrals using a continuous Euler transformation and the DE transformation, *Proceedings of 1996 Annual Meeting of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics*, pp. 22{23 (in Japanese).
- [34] T. Ooura, (1997), Study on numerical integration of Fourier type integrals, *Doctoral Thesis, University of Tokyo, (in Japanese)*.
- [35] T. Ooura, M. Mori, (1991), The double exponential formula for oscillatory functions over the half in_nite interval, *J. Comput. Appl. Math.* 38 353{360.
- [36] T. Ooura, M. Mori, (1993), Double exponential formula for Fourier type integrals with a divergent integrand, in: R.P. Agarwal (Ed.), *Contributions in Numerical Mathematics, World Scienti_c Series in Applicable Analysis, Vol. 2, World Scienti_c, Singapore*, pp. 301{308.
- [37] T. Ooura, M. Mori, (1999), A robust double exponential formula for Fourier type integrals, *J. Comput. Appl. Math.* 112 229{241.
- [38] R. Piessens, (1983), E. de Doncker-Kapenga, C.W. U□berhuber, D.K. Kahaner, *QUADPACK { A Subroutine Package for Automatic Integration, Springer, Berlin*.

- [39] F. Stenger, (1993), *Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions*, Springer, New York,
- [40] t. Ooura, M. Mori, (1999), A robust double exponential formula for Fourier type integrals, *J. Comput. Appl. Math.*, 112 229-241.
- [41] M. Sugihara, (1999), Near-optimality of the Sinc approximation, Technical Report 99-04, *Dept. of Mathematical Engineering, University of Tokyo*,
- [42] Ooura, T. (2001), A continuous Euler transformation and its application to the Fourier transform of a slowly decaying function, *J. Comput. Appl. Math.*, 130-259-270.
- [43] H. Takahasi, M. Mori, (1973), Quadrature formulas obtained by variable transformation, *Numer. Math.* 21-206{219.
- [44] H. Takahasi, M. Mori, (1974), Double exponential formulas for numerical integration, *Publ. RIMS Kyoto Univ.* 9 721{741.