GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENOCCHI ve *q*-GENOCCHI POLİNOMLARI

MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AYNUR GÜRSUL

HAZİRAN 2013

Genocchi ve q-Genocchi Polinomları

Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Aynur GÜRSUL
Haziran 2013

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Genocchi ve q-Genocchi Polinomları

Öğrencinin, Adı Soyadı: Aynur GÜRSUL

Tez Savunma Tarihi: 25.06.2013

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Doç. Dr. Metin BEDİR

FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyeleri:</u> İmza

Prof. Dr. Adil KILIÇ ....

Doç. Dr. Metin BEDİR ....

Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ ....

İlgili tezin akademik ve etik kurallarına uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Aynur GÜRSUL

ÖZET

GENOCCHI ve q-GENOCCHI POLİNOMLARI

GÜRSUL, Aynur

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Haziran 2013, 48 Sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm önemli tanımlar ve teoremler, q-analiz ve p-adik analiz olmak üzere üç ana başlık altında incelenmiştir.

İkinci bölümde, Genocchi sayıları ve polinomları, yüksek mertebeden Genocchi sayıları ve polinomları ifade edildi ve onların önemli özellikleri incelendi.

Üçüncü bölümde, Genocchi sayılarının ve polinomlarının bir genelleştirilmesi olan q-Genocchi sayıları ve polinomları gösterildi.

Bu tezin son bölümünde ise ağırlıklı q-Genocchi polinomları tanımlandı ve analitik devamı verildi.

Anahtar Kelimeler: Genocchi sayıları ve polinomları, Zeta fonksiyonu, Mellin dönüşümü, Yüksek mertebeden Genocchi polinomları, q-Genocchi sayıları ve polinomları, ağırlıklı q-Genocchi sayıları ve polinomları.

ABSTRACT

GENOCCHI ve q-GENOCCHI POLYNOMIALS

GÜRSUL, Aynur

M. Sc. Thesis, Math. Department

Adviser : Associate Professor Doctor Mehmet ACIKGOZ

June 2013, 48 pages

This thesis is formed from four sections. In the first section, it is investigated under three main headings including important definitions and theorems, q-analysis and p-adic analysis.

In the second section, Genocchi numbers and polynomials, Genocchi polynomials of higher order are stated and investigated their important properties.

In the third section, q-Genocchi numbers and polynomials, which generalizes the classical Genocchi numbers and polynomials, are shown.

In the last section of this thesis, weighted q-Genocchi numbers and polynomials are defined and given their analytic continuation.

Keywords: Genocchi numbers and polynomials, Zeta functions, Mellin transformation, Genocchi polynomials of higher order, q-Genocchi numbers and polynomials, weighted q-Genocchi numbers and polynomials.

TEŞEKKÜRLER

Tezin oluşumunda emeği geçen, deneyimlerini ve bilgilerini benle paylaşıp bana yol gösteren, bu tezin her sayfasının her satırında emeği geçen danışmanım Doç. Dr. Mehmet Açıkgöz'e, bu tezin oluşumunda bana yardımcı olan değerli arkadaşım Serkan Aracı'ya, tezin yazılımında bana yardımcı olan ve benden desteğini esirgemeyen eşim Zeki Bozkurt'a ve manevi desteklerini yanımda hissettiğim canım annem, babam ve kardeşlerime teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET..iv

ABSTRACT..v

SEMBOLLER LİSTESİ..viii

BÖLÜM 1: GİRİŞ

1.1 Ön Bilgiler..1

1.2 q-Analiz..10

1.3 p-Adik Analiz...12

BÖLÜM 2: GENOCCHI POLİNOMLARI..17

2.1. GENOCCHI POLİNOMLARI VE SAYILARI.....................................17

2.2. YÜKSEK MERTEBEDEN GENOCCHI POLİNOMLARI ve SAYILARI.....25

2.3 GENOCCHI POLİNOMLARININ BAZI ÖZEL POLİNOMLARLA İLİŞKİSİ

....32

BÖLÜM 3: q-GENOCCHI POLİNOMLARI VE SAYILARI.........................37

BÖLÜM 4: AĞIRLIKLI q-GENOCCHI POLİNOMLARI...........................41

KAYNAKLAR...47

SEMBOLLER LİSTESİ

$B_n(x)$	Bernoulli polinomu
B_n	Bernoulli sayısı
$E_n(x)$	Euler polinomu
E_n	Euler sayısı
$G_n(x)$	Genocchi polinomu
G_n	Genocchi sayısı
$G_{n,q}(x)$	q-Genocchi polinomu
$G_{n,q}$	q-Genocchi sayısı
$\tilde{G}_{n,q}(x)$	ağırlıklı Genocchi polinomu
$S_2(n,k)$	ikinci stirling sayısı
$\binom{n}{k}$	binom katsayısı
q	Quantumun baş harfi
$[x]_q$	x in q-benzeri
ord_p	p-adik değer
$:=$	tanım olarak eşittir
$\mu(x+p^n Z_p)$	Haar dağılımı
$\int_{Z_p} d\mu(x)$	Z_p üzerinde p-adik integral
$\int_{Z_p} d\mu_{-1}(x)$	Z_p üzerinde p-adik fermionik integral

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Genocchi sayılarının ve polinomlarının tarihi İtalyan matematikçi Angelo Genocchi (1817-1889) ye dayanır. Genocchi sayıları ve polinomları 19. yüzyılın başlarından günümüze kadar birçok matematikçi tarafından, matematiğin pek çok farklı konusu içerisinde kapsamlı bir şekilde çalışılmıştır. Örneğin; sayılar teorisi, kompleks analitik sayılar teorisi, homotopi teorisi, diferansiyel topoloji, modüler formlar, p-adik analiz, quantum gruplar gibi pek çok teoriler üzerinde çalışılmıştır [3].

1.1. Ön Bilgiler

Bu bölümdeki tanım ve teoremler [10] ve [11] den yararlanılarak yazılmıştır.

Tanım 1.1.1 Doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı her fonksiyona dizi denir. f bir dizi ise her bir n doğal sayısına bir a_n sayısı karşılık geleceğinden f dizisi $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.2 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi verildiğinde $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için her $n \geq N$ iken $|a_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon, \text{a}) \in \mathbb{N}$ bulunabilirse $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi a ya yakınsar denir ve $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ile gösterilir. $\{a_n\}$ dizisinin limiti varsa bu diziye yakınsak dizi, yakınsak olmayan diziye de ıraksak dizi denir.

Tanım 1.1.3 $A \subset \mathbb{R}$ ve $F(A)$, A kümesi üzerinde tanımlı reel değerli bütün fonksiyonların kümesi olsun. Doğal sayılar kümesi üzerinde, $F(A)$ kümesinde tanımlı fonksiyona fonksiyonel dizisi denir.

Tanım 1.1.4 $A \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonel dizisi verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ sayısı, $\forall x \in A$ ve her $n \geq \text{N}$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir

$N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ bulunabilirse $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir.

Tanım 1.1.5 (a_n) dizisinin Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul, her $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sayısı için $n, m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$ gerektirmesini gerçekleyen ε a bağlı bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısının var olmasıdır.

Tanım 1.1.6 $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ gibi bir dizi verilmiş olsun. Bu diziden hareketle oluşturulan,

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

toplamına sonsuz seri veya kısaca seri denir.

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

olmak üzere $\{S_n\}$ dizisine $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi denir. $\{S_n\}$ kısmi toplamlar dizisi yakınsak ve $\lim_{n \to \infty} S_n = s$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine yakınsak seri denir. s sayısına serinin toplamı veya limiti denir. Yakınsak olmayan serilere ıraksak seri denir.

Tanım 1.1.7 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{n-1} = a_1 + a_2 r + a_3 r^2 + ... + a_n r^{n-1} + ...$

serisine geometrik seri denir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} = \frac{1}{1-a}, \qquad |a| < 1$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.1.8 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + ... + c_n (x-a)^n + ...$

şeklindeki bir seriye kuvvet serisi denir.

$a=0$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

elde edilir.

Tanım 1.1.9 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ gibi mutlak yakınsak iki serinin Cauchy çarpımı,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

olarak ifade edilir.

Tanım 1.1.10 f, $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun.

Eğer,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

limiti varsa f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilir denir.

Tanım 1.1.11 f fonksiyonu, a noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

serisine a noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor serisi adı verilir.

Taylor açılımında özel olarak $a=0$ alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

serisi elde edilir ki bu seriye Maclaurin serisi adı verilir.

Tanım 1.1.12 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ kuvvet serisinin $|x-x_0| < R$ için yakınsak olduğu en büyük pozitif R sayısına, bu kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı, $(x_0 - R, x_0 + R)$ aralığına da yakınsaklık aralığı denir.

Tanım 1.1.13 X boş olmayan bir küme olsun ve bir $d: XxX \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu için $\forall x, y, z \in X$ olmak üzere

$M_1)$ $d(x,y) \geq 0$,

$M_2)$ $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

$M_3)$ $d(x,y) = d(y,x)$,

$M_4)$ $d(x,y) \leq d(\mathrm{x},\mathrm{z}) + \mathrm{d}(z,y)$,

şartları sağlanıyorsa d ye X de bir metrik, (X,d) ikilisine ise metrik uzay denir.

Tanım 1.1.14 (X,d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.

I. $D(x_0;r) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar,

II. $\overline{D}(x_0;r) = \{x \in X : d(x,x_0) \leq r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar,

III. $\mathrm{S}(x_0;r) = \{x \in X : d(x,x_0) = r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

Yuvar deyimi yerine bazen civar veya komşuluk deyimi de kullanılır.

Tanım 1.1.15 X bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için $D(x;r) \subseteq \mathrm{A}$ olacak şekilde bir r pozitif sayısı varsa A ya X in açık alt kümesi veya A, X de açıktır denir. X in B alt kümesinin X deki tümleyeni yani $B' = X - B$, X de açıksa B ye kapalı küme denir.

Tanım 1.1.16 X boş olmayan bir küme ve $\mathcal{T}$, X in alt kümelerinin bir ailesi olsun.

I. $\varnothing, X \in \mathcal{T}$ dır,

II. $\mathcal{T}$ ya ait keyfi sayıdaki kümelerin birleşmesi yine $\mathcal{T}$ ya aittir,

II. $\mathcal{T}$ ya ait sonlu sayıdaki kümelerin arakesiti yine $\mathcal{T}$ ya aittir,

şartlarını sağlayan $\mathcal{T}$ ya, X için bir topoloji ve $(X,\mathcal{T})$ ikilisine de topolojik uzay denir.

Tanım 1.1.17 f, x_0 ın delinmiş komşuluğunda tanımlı olsun ve bir L sayısı verilsin. Eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $0 < |x - x_0| < \varepsilon$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa f nin x_0 daki limiti L dir, denir.

Tanım 1.1.18 Bir f karmaşık fonksiyonu bir z_0 noktasında belli bir $D(z_0, \delta)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f, z_0 da analitiktir.

Tanım 1.1.19 Bir f fonksiyonunun bir B bölgesindeki aykırılıkları sadece kutup noktaları ise f, B de bir meromorf fonksiyondur denir.

Tanım 1.1.20 Verilen bir X kümesi için Σ, X in alt kümelerinden oluşan küme olsun. Eğer,

I. $\varnothing, X \in \Sigma$

II. $\forall A \in \Sigma \Rightarrow A' \in \Sigma$

III. Σ içindeki her (A_n) dizisi için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ ise Σ ya σ cebiri denir. (X, Σ) ikilisine de ölçüm uzayı denir.

Tanım 1.1.21 X bir küme ve Σ, X üzerinde bir σ cebiri ise Σ üzerinde tanımlı, genişletilmiş değerler alan bir μ fonksiyonu,

I. $\mu(\varnothing)=0$

II. $\forall E \in \Sigma$ için $\mu(E) \geq 0$

III. (E_n), Σ da ayrık kümelerin bir dizisi olmak üzere

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

koşullarını sağlıyorsa μ ye bir ölçüm denir.

Teorem 1.1.22 (Rezidü Teoremi) f fonksiyonu bir B bölgesinde ve sınırında, sonlu tane $z_1, z_2, \ldots, z_n \in B$ ayrık aykırılıkları hariç analitik ise

$$\int_{\partial B} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Re} s(f, z_i)$$

dır. Burada ∂B, B nin sınırıdır.

Tanım 1.1.23 (Fourier İntegral Teoremi) f ve f' fonksiyonları her kapalı aralıkta parçalı sürekli ve $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$ ise f, x noktasında süreklidir ve

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\left[s(t-x)\right] dt ds \qquad (1.1)$$

dir. x, f nin bir süreksizlik noktası ise, (1.1) integrali $\frac{1}{2}\left[f(x^{+}) + f(x^{-})\right]$ değerine yakınsar.

Tanım 1.1.24 f Fourier integral teoremindeki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun.

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} x^{s-1} f(x) dx$$

integraline $f(x)$ fonksiyonunun Mellin dönüşümü denir.

Tanım 1.1.25 $K \in \mathbb{R}$ için $|t| < K$ bölgesinde $F(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) t^n$ şeklinde ifade edilebiliyorsa $F(t,z)$ fonksiyonuna $f_n(z)$ fonksiyonunun üreteç fonksiyonu denir.

Tanım 1.1.26 $u \in \mathbb{C} - \{1\}$, $|u| > 1$ özelliğindeki bir cebirsel sayı olsun. Frobenius-Euler sayıları

$$\frac{1-u}{e^t - u} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(u) \frac{t^n}{n!}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır. Burada H_n(u) sayılarına Frobenius-Euler sayıları denir.

Tanım 1.1.27 İkinci stirling sayıları (n,k) parametresi ile $S(n,k)$ biçiminde gösterilir. İkinci stirling sayılarının üreteç fonksiyonu;

$$F(t,k) = \frac{(-1)^k}{k!} \left(1 - e^t\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} S(n,k) \frac{t^n}{n!}$$

şeklinde verilir.

Şimdi klasik Bernoulli ve Euler sayılarının üreteç fonksiyonlarını tanımlayalım. Bernoulli sayıları 1713 yılında Jakob Bernoulli tarafından "Ars Conjectandi" adlı kitabında,

$$f(t)=\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!},\quad |t|<2\pi \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlanmıştır. B_n katsayılarına Bernoulli sayıları denir. Buradan,

$$B_0=1,\quad B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_3=0,\quad B_4=-\frac{1}{30},\quad B_5=0,\quad \cdots$$

dır. $n\geq 1$ için

$$B_{2n+1}=0$$

elde edilir. Kompleks düzlemde, Bernoulli polinomları

$$f(x,t)=\frac{t}{e^t-1}e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!},\quad |t|<2\pi \tag{1.3}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır. (1.2) ve (1.3) den,

$$f(x,t)=e^{xt}f(t) \tag{1.4}$$

fonksiyonel denklemi elde edilir. (1.2) ve (1.3), (1.4) denkleminde yerleştirilirse ve e^{xt} fonksiyonu Taylor serisine açılıp Cauchy çarpımı yapıldığında,

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}B_k\right)\frac{t^n}{n!} \tag{1.5}$$

elde edilir. Son eşitlikte $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları eşitlendiğinde

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}B_k$$

olarak bulunur.

$T=\{t\in\mathbb{C}\mid |t|<\pi\}$ bölgesinde, Euler sayıları

$$\frac{2}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n\frac{t^n}{n!},\qquad t\in T \tag{1.6}$$

olarak tanımlıdır. $t\in T$ olmak üzere, Euler polinomları ise

$$\frac{2}{e^t+1}e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n(x)\frac{t^n}{n!},\qquad t\in T \tag{1.7}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır. (1.6) dan $E_n(0)=E_n$ olduğundan,

$E_0=1,\quad E_1=0,\quad E_2=-1,\quad E_3=0,\quad E_4=5,\ \ldots$

ve $\forall n\geq 0$ için $E_{2n+1}=0$ elde edilir. (1.6) ve (1.7) den,

$$E_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}E_k$$

yazılır.

Tanım 1.1.28 L. Euler tarafından tanımlanan Gama fonksiyonu aşağıdaki gibidir. $z\in\mathbb{C}$, $\Re e(z)>0$ olmak üzere,

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{-t}dt$$

dir. Bu bölgede integral mutlak yakınsaktır.

Tanım 1.1.29 $s\in\mathbb{C}$, $\Re e(s)>1$ ve $0<x\leq 1$ olmak üzere,

$$\varsigma(s,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^s} \tag{1.8}$$

fonksiyonuna Hurwitz-Zeta fonksiyonu denir [19].

(1.8) eşitliğinde $x=1$ alınırsa,

$$\varsigma(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\qquad \Re e(s)>1$$

Riemann-Zeta fonksiyonu elde edilir [19].

Tanım 1.1.30 $s\in\mathbb{C}$, ve $0<x\leq 1$ olmak üzere,

$$\varsigma_E(s,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+x)^s} \tag{1.9}$$

fonksiyonuna Hurwitz tipi Euler zeta fonksiyonu denir [1], [2], [9], [10], [11], [13].

(1.9) eşitliğinde özel olarak $x=1$ alınırsa,

$$\varsigma_E(s,1)=\varsigma_E(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^s} \tag{1.10}$$

Euler-Zeta fonksiyonu elde edilir [1], [2], [9], [10], [11], [13].

1.2 q-Analiz

q-analiz özellikle quantum mekanikteki geniş kullanımı sayesinde birçok bilim adamının çalışma alanını oluşturmuştur. Özellikle matematikçilere geniş bir çalışma alanı sunmuştur. Bu teori yardımıyla pek çok özel polinomların q-genelleştirilmesi tanımlanmıştır, örneğin; q-Genocchi polinomları, q-Euler polinomları, q-Bernoulli polinomları, q-Zeta fonksiyonu, kompleks düzlemde q-L fonksiyonları, p-adik q-L fonksiyonları vb. Bu polinomlar kompleks fonksiyonlar teorisinde, analitik sayılar teorisinde önemli uygulamalara sahiptir.

Bu tez boyunca $q \in \mathbb{C}$ ise $|q| < 1$ olarak alınacaktır.

Tanım 1.2.1 x bir değişken olmak üzere x in q-açılımı,

$$[x:q] = [x]_q = \frac{1-q^x}{1-q} = 1 + q + q^2 + ... + q^{x-1}$$

biçiminde tanımlanır.

Burada,

$$\lim_{q \to 1}[x]_q = \lim_{q \to 1}\left(1 + q + q^2 + ... + q^{x-1}\right) = x$$

olduğu açıktır.

Aşağıda $[x]_q$ nun bazı özellikleri verilmiştir.

1. $[x+y]_q = [x]_q + q^x [y]_q$,
2. $[xy]_q = [x]_q [y]_{q^x}$,
3. $[x]_{q^{-1}} = q^{1-x}[x]_q$,
4. $[-x]_q = -q^{-x}[x]_q$

Jackson'ın 1908 deki çalışmasında Euler-Jackson q-fark opertatörü aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\left(D_q f\right)(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}, \quad q \in \mathbb{C}\text{-}\{1\}$$

Bu denklem günümüzde q-Jackson türev olarak bilinmektedir.

Eğer özel olarak f fonksiyonu x noktasında diferansiyellenebiliyorsa

$$\lim_{q\to 1}\left(D_q f\right)(x)=\frac{df(x)}{dx}$$

dir.

1.3 p-Adik Analiz

Son yıllarda p-adik analiz, birçok matematikçi tarafından çalışılmaktadır. p-adik tam sayılar, p-adik rasyonel sayılar, p-adik rasyonel sayıların cebirsel kapanışı, p-adik fonksiyonlar, p-adik türev, p-adik ölçüm ve p-adik q-volkenborn integral, bu alanda yapılan tanımlamalardan bazılarıdır.

Bu bölümde tez içerisinde kullanışlı olacak bazı tanımlar verilecektir.

Tanım 1.3.1 p bir asal sayı ve $a \in \mathbb{Z}-\{0\}$ olsun. p nin a yı bölen en büyük kuvveti "$\mathrm{ord}_p a$" ile gösterilir. Buna göre, p ve k birer tamsayı olmak üzere;

$$a = p^k m$$

ise

$$k = ord_p a$$

dır.

$ord_p a$ ile ilgili olarak aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

$$ord_2 12 = 2,\quad ord_3 15 = 1,\quad ord_3 32 = 0,\quad ord_7 60 = 0,\quad ord_5 \frac{1}{50} = -2$$

dır.

Aşağıda $ord_p a$ nın bazı özellikleri verilmiştir.

1. $ord_p(a_1.a_2) = ord_p a_1 + ord_p a_2$,
2. Bir $x = \frac{a}{b}$ rasyonel sayısı için,

$$ord_p x = ord_p a - ord_p b$$

dir. Özel olarak $ord_p 0 = \infty$ olarak alınacaktır.

Tanım 1.3.2 $\mathbb{Q}$ üzerindeki p-adik norm,

$$|x|_p = \begin{cases} \dfrac{1}{p^{ord_p x}}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ 0, & x = 0 \; ise \end{cases}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Buna göre,

$|16|_2 = \frac{1}{16}$, $|47|_3 = 1$, $|27|_7 = 1$ dir.

Not 1.3.3 p-adik analizde limitler p-adik norma göre alınır. Örneğin,

$$\lim_{N\to\infty} p^N = \lim_{N\to\infty} \left|p^N\right|_p = \lim_{N\to\infty} p^{-ord_p p^N} = \lim_{N\to\infty} p^{-N} = 0$$

veya $\lim_{N\to\infty} q^{p^N} = 1$ dir.

Tanım 1.1.4 p bir asal sayı, $a_n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere p-adik tamsayılar halkası, $\mathbb{Z}_p$ ile gösterilir ve

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ x \middle| x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n, a_n \in \{0,1,2,\ldots,p-1\} \right\}$$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 1.1.5 $\mathbb{Q}_p$ p-adik rasyonel sayılar kümesini gösterir ve

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ x \middle| x = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n p^n, 0 \le a_n \le p-1 \right\}$$

şeklinde tanımlıdır. Buradan,

$$x = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n p^n = a_{-k} p^{-k} + a_{-k+1} p^{-k+1} + \ldots + a_{-1} p^{-1} + a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots$$

olduğundan, $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$ dir. $\mathbb{Q}_p$ nin cebirsel kapanışı $\overline{\mathbb{Q}}_p$ olmak üzere,

$$\mathbb{C}_p = \overline{\mathbb{Q}}_p$$

dir

Tanım 1.1.6 $\mathbb{Q}_p$ metrik uzayının tüm açık kümeleri $a \in \mathbb{Q}_p$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$a + p^n \mathbb{Z}_p = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p \le p^{-n} \right\}$$

şeklinde açık aralıkların birleşimidir. $\mathbb{Q}_p$ nin açık bir alt kümesinin kompakt olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul açık alt aralıklarının sonlu birleşimi olarak yazılabilmesidir. Bu kümelere kompakt-açık küme denir ([10], [11], [20]).

Teorem 1.1.7 X, $\mathbb{Q}_p$ nin kompakt-açık altkümesi olsun. X in açık alt aralıklarından $\mathbb{Q}_p$ ye tanımlı her μ dönüşümü $a + p^n \mathbb{Z}_p$, X in bir alt kümesi olmak üzere,

$$\mu\left(a+p^n\mathbb{Z}_p\right)=\sum_{b=0}^{p-1}\mu\left(a+bp^n+p^{n+1}\mathbb{Z}_p\right)$$

şartını sağlıyorsa X üzerinde tek bir şekilde p-adik dağılıma genişletilir [10], [11], [20].

Tanım 1.1.8 (Haar Dağılımı) p-adik volkenborn integrali inşasında çok önemli bir yere sahip olup, μ_{Haar} ile gösterilir ve

$$\mu\left(a+p^n\mathbb{Z}_p\right)=\frac{1}{p^n}, \quad a\in\mathbb{Z}_p$$

olarak tanımlanır. Teorem 1.1.7 yi kullanarak, μ_{Haar}

$$\sum_{b=0}^{p-1}\mu_{Haar}\left(a+bp^n+p^{n+1}\mathbb{Z}_p\right)=\sum_{b=0}^{p-1}\frac{1}{p^{n+1}}=\mu\left(a+p^n\mathbb{Z}_p\right)$$

elde edilir. O halde μ_{Haar}, $\mathbb{Z}_p$ üzerinde bir p-adik dağılımdır [10], [11], [20].

Tanım 1.1.9 μ, X üzerinde bir p-adik dağılım olsun. Her $U\subset X$ kompakt-açık altkümesi için $\left|\mu(U)_p\right|\leq B$ olacak şekilde $B\in\mathbb{R}$ varsa μ ye p-adik ölçüm denir [10], [11], [20].

Tanım 1.1.10 X, $\mathbb{C}_p$ nin ayrık noktası olmayan bir altkümesi olsun. $f:X\to\mathbb{C}_p$ fonksiyonu ve $x,y\in X$, $x\neq y$ için,

$$F_f(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

olarak tanımlanan iki değişkenli $F_f(x,y)$ fonksiyonu için,

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)}F_f(x,y)$$

mevcut ise f fonksiyonuna $a\in X$ noktasında sürekli diferansiyellenebilir denir. X in her noktasında sürekli(düzgün) diferansiyellenebilir bir f fonksiyonuna da sürekli diferansiyellenebilir fonksiyon denir. Bütün sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi

$$C^1\left(X\to\mathbb{C}_p\right)=\left\{f\mid f:X\to\mathbb{C}_p, f \text{ sürekli diferansiyellenebilir}\right\}$$

ile gösterilir [10], [11], [20].

Teorem 1.1.11 $f\in C^1\left(\mathbb{Z}_p\to\mathbb{C}_p\right)$ olsun. f nin Volkenborn integrali

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\,d\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p^n}\sum_{x=0}^{p^n-1} f(x)$$

şeklinde tanımlıdır [10], [11], [20].

Volkenborn integrali aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$d\mu(x)=\mu_{Haar}\left(x+p^n\mathbb{Z}_p\right)=\frac{1}{p^n} \text{ olsun.}$$

1. $$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\,d\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{Sf\left(p^n\right)-Sf(0)}{p^n}=(Sf)'(0)$$

dır. Burada,

$$(Sf)'(x)=\frac{d\left(Sf(x)\right)}{dx}$$

dir.

2. $$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\,d\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(0)+f(1)+\ldots+f\left(p^n-1\right)}{p^n}$$

dir.

3. $$\int_{\mathbb{Z}_p} \left(f(x+1)-f(x)\right)d\mu(x)=f'(0)$$

dir.

4. $$\int_{\mathbb{Z}_p} \left(f(x+n)-f(x)\right)d\mu(x)=\sum_{l=0}^{n-1} f'(l)$$

dir [10], [11], [20].

Tanım 1.1.12 $f\in\mathbb{C}\left(\mathbb{Z}_p\to\mathbb{C}_p\right)$ ve p tek doğal sayı olsun. f nin fermionik p-adik integrali,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\,d\mu_{-1}(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{x=0}^{p^n-1}(-1)^x f(x)$$

şeklinde tanımlanır [10], [11], [20].

Fermionik p-adik integral aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$d\mu_{-1}(x)=\mu_{-1}\left(x+p^n\mathbb{Z}_p\right)=(-1)^x \text{ olsun.}$$

1. $$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\,d\mu_{-1}(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{x=0}^{p^n-1}(-1)^x f(x)$$

dir.

2. $$\int_{\mathbb{Z}_p} \left(f(x+1)+f(x)\right)d\mu_{-1}(x)=2f(0)$$

dir.

3. $$\int_{\mathbb{Z}_p} \left(f(x+n)+(-1)^{n-1} f(x)\right)d\mu_{-1}(x)=2\sum_{x=0}^{p^n-1} f(x)$$

dir [10], [11], [20].

BÖLÜM 2

GENOCCHI POLİNOMLARI

Genocchi polinomları ve sayıları Analitik sayılar teorisinde kullanılan önemli polinomlardandır. Genocchi polinomları ve sayıları üzerinde q-analiz ve p-adik analizin özellikleri uygulanmış ve geniş bir çalışma alanı oluşturduğu bir çok matematikçi tarafından görülmüştür.

Genocchi polinomlarının p-adik açılımları Kim tarafından [16], [20], nümerik integrasyon yapısı Ryoo tarafından [22], Genocchi polinomlarının q-benzerleri Aracı, Açıkgöz ve Qi tarafından tanımlanmış ve bu polinomların Bernstein polinomları ile ilişkisi Aracı ve Açıkgöz tarafından verilmiştir [12]. Bu açıdan bakıldığında birbiriyle bağlantılı çalışmaların yoğunlaştığı çok geniş ve zengin bir teoridir.

2.1. Genocchi Polinomları ve Sayıları

Bu bölümde Genocchi polinomları ve sayıları tanımlanacak ve Genocchi polinomları ve sayılarının önemli özellikleri üzerinde durulacaktır. Genocchi polinomları ve sayılarının Analitik sayılar teorisindeki bazı önemli teoremleri ve ispatlarına da bu bölümde yer verilecektir.

Tanım 2.1.1 Genocchi polinomları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlıdır.

$$F(x,t)=\frac{2t}{e^t+1}e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(x)\frac{t^n}{n!}, \qquad |t|<\pi \tag{2.1}$$

(2.1) denkleminde $x=0$ yazılır ve $G_n(0):=G_n$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$F(0,t)=\frac{2t}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n\frac{t^n}{n!}, \qquad |t|<\pi \tag{2.2}$$

elde edilir. Buradaki G_n, Genocchi sayılarını temsil etmektedir.

Aşağıdaki teoremde Genocchi polinomlarının açık formülü verilmiştir.

Teorem 2.1.2 $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere, Genocchi polinomları,

$$G_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}G_k$$

biçimindedir.

İspat : (2.1) denkleminde (2.2) denklemi yazılıp, e^{xt} nin seri açılımı yapılırsa,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}G_n\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Eşitliğin sol tarafına Cauchy çarpımı uygulanıp $n!$ ile çarpılıp bölünür ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}G_k\frac{t^k}{k!}x^{n-k}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}\frac{n!}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}G_k\right)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Burada $\frac{t^n}{n!}$ katsayı karşılaştırması yapılırsa,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}G_k=G_n(x)$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Şimdi birkaç Genocchi polinomunu bulalım. Genocchi sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty}G_n\frac{t^n}{n!}=\frac{2t}{1+e^t}$$

şeklindedir ve bu denklemi

$$G_0+G_1t+G_2\frac{t^2}{2!}+\ldots=\frac{2t}{1-(-e^t)}=2t\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{nt}$$

biçiminde yazarsak $G_0=0$ olduğu görülür. $G_n:=G^n$ ifadesinden hareketle diğer Genocchi sayılarını bulalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty}G_n\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Gt)^n}{n!}=e^{Gt}=\frac{2t}{e^t+1}$$

$$e^{Gt}\left(e^t+1\right)=2t$$

$$e^{t(G+1)}+e^{Gt}=2t$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((G+1)^n+G^n\right)\frac{t^n}{n!}=2t$$

ve buradan;

$$(G+1)^n+G_n=\begin{cases}2, & n=1\\ 0, & n>1\end{cases} \tag{2.3}$$

ifadesi elde edilir. Bu da Genocchi sayılarını veren bağıntıdır.

(2.3) te $n=1$ için;

$$(G+1)^1+G_1=2$$

$$\binom{1}{0}G_0+\binom{1}{1}G_1+G_1=2, \qquad (G_0=0)$$

$$0+G_1+G_1=2,$$

$$G_1=1$$

bulunur.

(2.3) te $n=2$ için;

$$(G+1)^2+G_2=0$$

$$\binom{2}{0}G_0+\binom{2}{1}G_1+\binom{2}{2}G_2+G_2=0,$$

elde edilir ve gerekli işlemler yapılırsa $G_2=-1$ bulunur.

(2.3) te $n=3$ için;

$$(G+1)^3+G_3=0$$

$$\binom{3}{0}G_3+\binom{3}{1}G_1+\binom{3}{2}G_2+\binom{3}{3}G_3+G_3=0,$$

buradan $G_3=0$ olarak bulunur.

Benzer yolla diğer Genocchi sayıları bulunabilir. Bulduğumuz bu Genocchi sayıları yardımıyla Genocchi polinomları ise;

$$G_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}G_k x^{n-k}=(G+x)^n \tag{2.4}$$

denklemi yardımıyla;

$n=0$ için,

$$G_0(x)=0$$

$n=1$ için,

$$G_1(x)=1$$

$n=2$ için,

$$G_2(x)=2x-1$$

dir. Benzer şekilde $n=3$ için $G_3(x)=3x^2-3x$ bulunur. Bu şekilde diğer Genocchi polinomları bulunabilir.

Tanım 2.1.3 Genocchi sayılarının üreteç fonksiyonundan,

$$G(-t)=\frac{-2t}{e^{-t}+1}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(-1)^n\frac{t^n}{n!}$$

yazılabilir.

Şimdi de

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}(-G(-t))t^{s-2}dt$$

ifadesini düşünelim. Burada aşağıdaki düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\left(-\left(\frac{-2t}{e^{-t}+1}\right)\right)t^{s-2}dt=\frac{2}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{t^{s-1}}{1-\left(-e^{-t}\right)}dt$$

$$=\frac{2}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}t^{s-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-nt}\,dt$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}e^{-nt}t^{s-1}dt$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^s}$$

bulunur. Bu ise Genocchi-Zeta fonksiyonu olarak isimlendirilir ve aşağıdaki biçimde gösterilir.

$$\varsigma_G(s) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$$

Not 2.1.4 : Genocchi-Zeta fonksiyonu negatif değerlerde, Genocchi sayılarının interpolasyon fonksiyonudur. Bu tip interpolasyon fonksiyonlar Analitik sayılar teorisinde, Kompleks analiz ve diğer bilim dallarında bir çok uygulamaya sahiptir.

Şimdi de Genocchi polinomlarının ve sayılarının bazı özelliklerini teorem olarak verelim.

Teorem 2.1.5 $n \in \mathbb{N}$ için,

$$G_n(1-x) = (-1)^{n+1} G_n(x)$$

dir.

İspat : Genocchi polinomlarının üreteç fonksiyonundan,

$$F(x,-t) = \frac{-2t}{e^{-t}+1} e^{-xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \frac{(-t)^n}{n!}$$

yazılabilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{-2t}{1+e^t} e^{t(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)(-1)^n \frac{t^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(1-x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)(-1)^{n+1} \frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Bulunan bu eşitlikte $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları eşitlenirse

$$G_n(1-x) = (-1)^{n+1} G_n(x)$$

elde edilir. Bu ise teoremin ispatıdır.

Teorem 2.1.6 $n \in \mathbb{N}$ için,

$$2x^n = \frac{1}{n+1}\left[G_{n+1}(x+1) + G_{n+1}(x)\right]$$

dir.

İspat : Genocchi polinomlarının üreteç fonksiyonundan

$$F(x+1,t)=\frac{2te^{t(x+1)}}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(x+1)\frac{t^n}{n!} \tag{2.5}$$

yazılabilir. (2.1) ve (2.5) denklemlerinden,

$$F(x+1,t)+F(x,t)=\frac{2te^{tx}}{e^t+1}e^t+\frac{2te^{xt}}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(G_n(x+1)+G_n(x)\right)\frac{t^n}{n!}$$

toplamı elde edilir. Bu denklem düzenlenirse,

$$2\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^{n+1}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(G_n(x+1)+G_n(x)\right)\frac{t^n}{n!}$$

eşitliği elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları eşitlenirse

$$2x^{n-1}=\frac{1}{n}\left[G_n(x+1)+G_n(x)\right]$$

bulunur. Burada $n \to n+1$ için teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.1.7 $m,n,j \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$G_m(nx)=n^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j G_m\left(x+\frac{j}{n}\right)$$

dir.

İspat : Bu teoremin ispatını vermek için bazı kısa hatırlatmalar yapalım. a,b $\in \mathbb{R}$ ve n tek bir doğal sayı olmak üzere;

$$\left(a^n+b^n\right)=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots+b^{n-1}\right)$$

olduğu biliniyor. Burada $a=e^t$ ve $b=1$ için

$$\left(e^{nt}+1\right)=\left(e^t+1\right)\left(e^{t(n-1)}-e^{t(n-2)}+e^{t(n-3)}-\ldots+1\right)$$

yazılabilir. Bu ifadeyi düzenlenirse

$$\left(e^{nt}+1\right)=\left(e^t+1\right)\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j e^{jt}$$

elde edilir. (2.1) denkleminin sol tarafını $\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j e^{jt}$ ile çarpıp bölelim.

$$\frac{2t\left(\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j e^{jt}\right)e^{xt}}{\left(e^t+1\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j e^{jt}\right)}=\sum_{m=0}^{\infty}G_m(x)\frac{t^m}{m!}$$

bulunur. Eşitliğin sol tarafında bazı düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\frac{(2nt)e^{nt\left(\frac{x+j}{n}\right)}}{\left(e^{nt}+1\right)}=\sum_{m=0}^{\infty}G_m(x)\frac{t^m}{m!}$$

eşitliği elde edilir. Sol tarafta Genocchi polinomlarının üreteç fonksiyonu göz önünde bulundurulursa,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\sum_{m=0}^{\infty}n^m G_m\left(\frac{x+j}{n}\right)\frac{t^m}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}G_m(x)\frac{t^m}{m!}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(n^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j G_m\left(\frac{x+j}{n}\right)\right)\frac{t^m}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}G_m(x)\frac{t^m}{m!}$$

bulunur. Yukarıdaki son eşitlikte $\frac{t^m}{m!}$ katsayıları karşılaştırılırsa ve x yerine nx yazılırsa, teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Not 2.1.8 (2.1.7) teoremi Genocchi polinomunun dağılım bağıntısıdır. Bir polinomun dağılım bağıntısı varsa, bu polinom p-adik integralden elde edilebilir. Özel olarak,

$$n \to p^n$$

alınırsa,

$$\mu_m\left(x+p^n\mathbb{Z}_p\right)=p^{N(m-1)}(-1)^j G_m\left(\frac{x}{pN}\right)$$

elde edilir. Burada $\mu_m\left(x+p^n\mathbb{Z}_p\right)$ Genocchi dağılımıdır.

Teorem 2.1.9 $n\in\mathbb{N}$ için,

$$\frac{G_n}{n}=\varsigma_G(1-n)$$

dir.

İspat : Genocchi sayılarının üreteç fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty}G_n\frac{t^n}{n!}=\frac{2t}{1-\left(-e^t\right)}$$

Sağ tarafta geometrik seri ve Taylor serisinin açılımlarını sırasıyla yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!} = 2t \sum_{\mathrm{m}=0}^{\infty} (-1)^{\mathrm{m}} \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \mathrm{m}^{\mathrm{n}} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m m^n \right) \frac{t^{n+1}}{n!}$$

bulunur. t^n nin katsayıları eşitlenirse

$$\frac{G_n}{n} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^{1-n}}$$

elde edilir. Genocchi-Zeta fonksiyonunun tanımından

$$\frac{G_n}{n} = \varsigma_G (1-n)$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

2.2. Yüksek Mertebeden Genocchi Polinomları ve Sayıları

Tezin bu kısmında yüksek mertebeden Genocchi polinomları ve sayılarının tanımı verilecek ve bazı uygulamaları gösterilecektir. Tezin bu bölümü için ayrıntılı bilgilere [23] ten ulaşılabilir.

Tanım 2.2.1 $\alpha \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!}, \qquad (\alpha = 0,1,2...) \tag{2.6}$$

dır ve burada $G_n^{(\alpha)}(x)$, α. mertebeden Genocchi polinomudur. Özel olarak $\alpha = 1$ için $G_n^{(1)}(x) := G_n(x)$, klasik Genocchi polinomu elde edilir. $G_n^{(\alpha)}(0) := G_n^{(\alpha)}$, α. mertebeden Genocchi sayıları olarak isimlendirilir ve üreteç fonksiyonu

$$\left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(\alpha)} \frac{t^n}{n!} \tag{2.7}$$

şeklindedir. (2.6) dan,

$$G_n^{(\alpha)}(x) = 0, \qquad (n < \alpha)$$

ve $\alpha = 0$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(0)}(x)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^0 e^{xt}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(0)}(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Burada $\frac{t^n}{n!}$ katsayı karşılaştırması yapılırsa

$$G_n^{(0)}(x) = x^n$$

elde edilir. Birkaç genelleştirilmiş Genocchi polinomları,

$$G_{\alpha}^{(\alpha)}(x) = \alpha!$$

$$G_{\alpha+1}^{(\alpha)}(x)=(\alpha+1)!\left\{x-\frac{\alpha}{2}\right\}$$

$$G_{\alpha+2}^{(\alpha)}(x)=\frac{(\alpha+2)!}{2!}\left\{x^2-\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{4}\right\}$$

$$G_{\alpha+3}^{(\alpha)}(x)=\frac{(\alpha+3)!}{3!}\left\{x^3-\frac{3\alpha}{2}x^2+\frac{3\alpha(\alpha-1)}{4}x-\frac{\alpha^2(\alpha-3)}{8}\right\}$$

$$G_{\alpha+4}^{(\alpha)}(x)=\frac{(\alpha+4)!}{4!}\left\{x^4-\frac{4\alpha}{2}x^3+\frac{6\alpha(\alpha-1)}{4}x^2-\frac{4\alpha^2(\alpha-3)}{8}x+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha^2-5\alpha-2)}{16}\right\}$$

$\vdots$

olarak bulunur. (2.6) nın iki taraflı x 'e göre türevi alındığında

$$\frac{d}{dx}G_n^{(\alpha)}(x)=nG_{n-1}^{(\alpha)}(x), \qquad (n-1\geq 0) \qquad (2.8)$$

elde edilir. Bu özellik, yüksek mertebeden Genocchi polinomlarının "Appell dizisi" olduğunu gösterir.

Yüksek mertebeden Genocchi polinomlarının türevleri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d^2}{dx^2}G_n^{(\alpha)}(x)=n(n-1)G_{n-2}^{(\alpha)}(x)$$

$$\frac{d^3}{dx^3}G_n^{(\alpha)}(x)=n(n-1)(n-2)G_{n-3}^{(\alpha)}(x)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^p}{dx^p}G_n^{(\alpha)}(x)=n(n-1)...(n-p+1)G_{n-p}^{(\alpha)}(x) \qquad (n-p\geq 0)$$

için

$$\frac{d^n}{dx^n}G_n^{(\alpha)}(x)=n(n-1)...(n-n+1)G_{n-n}^{(\alpha)}(x)=n!$$

dir. (2.8) in integrali integralin sabiti olarak $G_n^{(\alpha)}$ yı üretir.

$A_n(x)$ polinomları,

$$\frac{dA_n(x)}{dx} = nA_{n-1}(x)$$

özelliğine sahip ise, "Appell" polinomları olarak isimlendirilir. Örneğin, Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomları Appell polinomlarıdır [23].

Şimdi de yüksek mertebeden Genocchi polinomlarını üretebileceğimiz diferansiyel denklemi kuracağız. Bundan dolayı bir ϕ fonksiyonunu

$$\phi := \phi(x,t|\alpha) = \left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^{\alpha} e^{xt}$$

şeklinde tanımlıyalım. Bu fonksiyonun x e göre türevi

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = t\phi$$

olarak bulunur. Bu fonksiyonun t ye göre türevi de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\alpha 2\left(e^t+1-te^t\right)}{\left(e^t+1\right)^2}\left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^{\alpha-1} e^{tx} + \left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^{\alpha} xe^{tx} \\
&= \left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^{\alpha} e^{tx}x + \alpha t^{\alpha-1}\left(\frac{2}{e^t+1}\right)^{\alpha} e^{tx} - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{2}{e^t+1}\right)^{\alpha+1} t^{\alpha} e^{t(1+x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^{\alpha} e^{tx}xt + \alpha t^{\alpha-1}t\left(\frac{2}{e^t+1}\right)^{\alpha} e^{tx} - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{2}{e^t+1}\right)^{\alpha+1} t^{\alpha} t e^{t(1+x)} \\
&= \phi xt + \alpha\phi - \frac{\alpha}{2}e^t\phi t\frac{2}{e^t+1} \\
&= \phi xt + \alpha\phi - \alpha e^t\phi t\frac{1}{e^t+1}
\end{aligned}$$

şeklindedir. $x-$ e ve $t-$ ye göre türevler karşılaştırılırsa

$$t\frac{\partial \phi}{\partial t} - \left\{\frac{\alpha+tx}{t} - \frac{\alpha e^t}{e^t+1}\right\}\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

$$\phi xt+\alpha\phi-\alpha e^{t}\phi\frac{t}{e^{t}+1}-\left\{\frac{\alpha+tx}{t}-\frac{\alpha e^{t}}{e^{t}+1}\right\}\phi t$$

$$\phi t\left\{x+\frac{\alpha}{t}-\frac{\alpha e^{t}}{e^{t}+1}\right\}-\left\{\frac{\alpha+tx}{t}-\frac{\alpha e^{t}}{e^{t}+1}\right\}\phi t$$

$$\phi t\left\{\frac{\alpha+tx}{t}-\frac{\alpha e^{t}}{e^{t}+1}\right\}-\left\{\frac{\alpha+tx}{t}-\frac{\alpha e^{t}}{e^{t}+1}\right\}\phi t=0$$

olarak bulunur. Elde edilen yukarıdaki diferansiyel denklem yüksek mertebeden Genocchi polinomlarını üreten bir denklemdir.

Yüksek mertebeden Genocchi polinomunun integral yansıması

$$\int_0^1 G_n^{(\alpha)}(x)\,dx=\left.\frac{G_{n+1}^{(\alpha)}(x)}{n+1}\right|_0^1=\frac{G_{n+1}^{(\alpha)}(1)-G_{n+1}^{(\alpha)}(0)}{n+1}$$

$$=\begin{cases}0, & n\ \text{çift ise}\\ -\dfrac{2G_{n+1}^{(\alpha)}}{n+1}, & n\ \text{tek ise},\end{cases}$$

olarak bulunur. Daha genel olarak;

$$\int_x^{x+1} G_n^{(\alpha)}(x)\,dx=\frac{G_{n+1}^{(\alpha)}(1+x)-G_{n+1}^{(\alpha)}(x)}{n+1} \tag{2.9}$$

integrali elde edilir. Ayrıca (2.8) den,

$$\int_0^x G_{n-1}^{(\alpha)}(x)\,dx=\frac{G_n^{(\alpha)}(x)-G_n^{(\alpha)}(0)}{n}$$

$$G_n^{(\alpha)}(x)-G_n^{(\alpha)}=n\int_0^x G_{n-1}^{(\alpha)}(x)\,dx \tag{2.10}$$

eşitlikleri de yazılabilir [23].

(2.6) da x yerine $x+y$ yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(\alpha)}(x+y)\frac{t^n}{n!}=\left(\frac{2t}{e^{t}+1}\right)^{\alpha}e^{t(x+y)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(\alpha)}(x+y)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}y^n\frac{t^n}{n!}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliğin sağ tarafında Cauchy çarpımı uygulandığında

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(\alpha)}(x+y)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} G_j^{(\alpha)}(x)\binom{n}{j}y^{n-j}\right)\frac{t^n}{n!}$$

yazılır. Son eşitlikte $\frac{t^n}{n!}$ katsayı karşılaştırması yapılırsa,

$$G_n^{(\alpha)}(x+y)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}G_j^{(\alpha)}(x)y^{n-j} \tag{2.11}$$

bulunur. (2.11) de $x=0$ alındığında

$$G_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}G_j^{(\alpha)}y^{n-j} \tag{2.12}$$

yazılabilir ve (2.11) de $y=\alpha$ için

$$G_n^{(\alpha)}(\alpha+x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}G_j^{(\alpha)}(x)\alpha^{n-j}$$

dır. Buradan

$$G_n^{(\alpha)}(\alpha+x)=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}G_j^{(\alpha)}(x)\alpha^{n-j}+G_n^{(\alpha)}(x)\alpha^{n-n}$$

$$G_n^{(\alpha)}(\alpha+x)-G_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}G_j^{(\alpha)}(x)\alpha^{n-j} \tag{2.13}$$

olarak bulunur. (2.13) te, $\alpha=1$ yazılırsa,

$$G_n^{(\alpha)}(1+x)-G_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}G_j^{(\alpha)}(x) \tag{2.14}$$

$$G_n^{(\alpha)}(1+x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}G_j^{(\alpha)}(x) \tag{2.15}$$

bulunur. (2.9) ve (2.14) eşitliklerinden

$$\int_{x}^{x+1} G_{n-1}^{(\alpha)}(x)dx=\frac{G_n^{(\alpha)}(1+x)-G_n^{(\alpha)}(x)}{n}$$

$$\int_{x}^{x+1} G_{n-1}^{(\alpha)}(x)dx = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}G_j^{(\alpha)}(x)$$

yazılır. (2.11) de $x=0$ ve $y=1$ alınırsa

$$G_n^{(\alpha)}(1+0) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}G_j^{(\alpha)}(0)$$

$$G_n^{(\alpha)}(1) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}G_j^{(\alpha)}$$

eşitliği bulunur.

Teorem 2.2.2 $\alpha, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$G_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}G_k^{(\alpha)}x^{n-k} \tag{2.16}$$

dir.

İspat : (2.7) denklemi (2.6) da yazılıp, e^{xt} nin seri açılımı yapıldığında,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(\alpha)}\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}G_k^{(\alpha)}x^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!}$$

bulunur ve $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları karşılaştırılması yapıldığında teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.3 $\alpha, m \in \mathbb{N}$ için,

$$G_{m+\alpha}^{(\alpha)}\frac{m!}{(m+\alpha)!} = 2^{\alpha}\sum_{n_1,\ldots,n_\alpha=0}^{\infty}(-1)^{n_1+\ldots+n_\alpha}(n_1+\ldots+n_\alpha)^m \tag{2.17}$$

dir.

İspat : α. mertebeden Genocchi sayılarının üreteç fonksiyonu

$$\underbrace{\frac{2t}{1-(-e^t)}\frac{2t}{1-(-e^t)}\cdots\frac{2t}{1-(-e^t)}}_{\alpha\,\text{tane}} = \sum_{m=0}^{\infty}G_m^{(\alpha)}\frac{t^m}{m!}$$

$$(2t)^{\alpha} \sum_{n_1,\ldots,n_\alpha=0}^{\infty} (-1)^{n_1+\ldots+n_\alpha} e^{t(n_1+\ldots+n_\alpha)} = \sum_{m=0}^{\infty} G_m^{(\alpha)} \frac{t^m}{m!} \tag{2.18}$$

şeklinde yazılabilir. $e^{t(n_1+\ldots+n_\alpha)}$ üstel fonksiyonu Taylor serisine açılıp düzenlenirse,

$$(2t)^{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n_1,\ldots,n_\alpha=0}^{\infty} (-1)^{\sum_{k=1}^{\alpha} n_k} \left(\sum_{k=1}^{\alpha} n_k \right)^m \right) \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} G_m^{(\alpha)} \frac{t^m}{m!}$$

$$2^{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n_1,\ldots,n_\alpha=0}^{\infty} (-1)^{n_1+\ldots+n_\alpha} (n_1+\ldots+n_\alpha)^m \right) \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} G_m^{(\alpha)} \frac{t^{m-\alpha}}{m!}$$

elde edilir. Burada t^m nin katsayıları eşitlenirse teorem ispatlanmış olur.

Şimdi de (2.18) denklemine Mellin dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} (-1)^{\alpha} (-2t)^{\alpha} \sum_{n_1,\ldots,n_\alpha=0}^{\infty} (-1)^{n_1+\ldots+n_\alpha} e^{-t(n_1+\ldots+n_\alpha)} t^{s-\alpha-1} dt$$

olarak yazılır. Buradan

$$\sum_{n_1,\ldots,n_\alpha=0}^{\infty} (-1)^{\alpha} (-2)^{\alpha} (-1)^{n_1+\ldots+n_\alpha} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-t(n_1+\ldots+n_\alpha)} t^{s-1} dt$$

bulunur. Bu ifade ise

$$2^{\alpha} \sum_{n_1,\ldots,n_\alpha=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n_1+\ldots+n_\alpha}}{(n_1+\ldots+n_\alpha)^s} = \zeta_G^{(\alpha)}(s)$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıdaki son eşitlikte $s=-m$ yazıp, (2.17) denklemiyle karşılaştırıldığında,

$$G_{m+\alpha}^{(\alpha)} \frac{m!}{(m+\alpha)!} = \zeta_G^{(\alpha)}(-m) \tag{2.19}$$

α. mertebeden Genocchi sayılarının interpolasyon polinomu elde edilir.

(2.19) da $\alpha=1$ için, kompleks analizde, sayılar teorisinde, matematiksel fizikte önemli rol oynayan ve iyi bilinen klasik Genocchi sayılarının interpolasyon fonksiyonu elde edilir.

2.3 Genocchi Polinomlarının Bazı Özel Polinomlarla İlişkisi

Teorem 2.3.1 $E_n(x)$, Euler polinomları olmak üzere,

$$G_n(x) = \frac{d}{dx}(E_n(x))$$

dir.

İspat : Genocchi ve Euler polinomlarının üreteç fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$G(x,t) = \frac{2t}{e^t+1}e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)\frac{t^n}{n!} \qquad (2.20)$$

$$E(x,t) = \frac{2}{e^t+1}e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!} \qquad (2.21)$$

(2.20) ve (2.21) den

$$G(x,t) = tE(x,t)$$

fonksiyonel denklemi elde edilir. Buradan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!}$$

elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları karşılaştırılırsa,

$$G_n(x) = nE_{n-1}(x) \qquad (2.22)$$

bağıntısı elde edilir. (2.22) denklemi ise

$$G_n(x) = \frac{d}{dx}(E_n(x))$$

dir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.3.2 $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\varsigma_E(1-m,x)=\frac{G_m(x)}{m}$$

dir.

İspat : Genocchi polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\frac{2t}{1-(-e^t)}e^{xt}=\sum_{m=0}^{\infty}G_m(x)\frac{t^m}{m!}$$

ile tanımlı olup, yukarıdaki eşitliğin sol tarafında, geometrik seri ve kuvvet seri açılımları sırasıyla uygulanırsa,

$$2t\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{t(n+x)}=\sum_{m=0}^{\infty}G_m(x)\frac{t^m}{m!}$$

$$2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+x)^m\frac{t^{m+1}}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}G_m(x)\frac{t^m}{m!}$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki son eşitlikte $\frac{t^m}{m!}$ katsayı karşılaştırması yapılırsa,

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+x)^{m-1}=\frac{G_m(x)}{m}$$

bağıntısı bulunur. Buradan

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+x)^{1-m}}=\frac{G_m(x)}{m}$$

yazılabilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 2.3.3 $B_k(\frac{x}{2})$ Bernoulli polinomları olmak üzere;

$$G_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k(\frac{x}{2})2^k$$

dır.

İspat : Genocchi polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\frac{(e^t-1)}{(e^t-1)}\frac{2t}{e^t+1}e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(\mathrm{x})\frac{t^n}{n!} \tag{2.23}$$

şeklinde yazılıp ve düzenlemeler yapılırsa,

$$(e^t-1)\frac{2t}{e^{2t}-1}e^{\frac{x}{2}(2t)}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$(e^t-1)\sum_{n=0}^{\infty}B_n(\frac{x}{2})\frac{(2t)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Eşitliğin sol tarafında $B^n(x):=B_n(x)$ özdeşliği ve kuvvet serisi uygulanırsa,

$$(e^t-1)e^{2B(\frac{x}{2})t}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

eşitliği yazılabilir. Buradan

$$e^{t(2B(\frac{x}{2})+1)}-e^{2B(\frac{x}{2})t}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Eşitliğin sol tarafı kuvvet serisine açılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(2B(\frac{x}{2})+1\right)^n-2^nB_n(\frac{x}{2})\right)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

olarak yazılır. Burada $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları karşılaştırılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\binom{n}{n}2^nB_n(\frac{x}{2})+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}2^kB_k(\frac{x}{2})-2^nB_n(\frac{x}{2})=G_n(x)$$

bulunur. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.3.4 $E_n^{(\alpha)}(\mathrm{x}),\alpha.$ mertebeden Euler polinomları olmak üzere;

$$\alpha!=\left(E^{(-\alpha)}(x)+G^{(\alpha)}(x)\right)^{\alpha}$$

dır.

İspat : α. mertebeden Euler ve Genocchi polinomlarının üreteç fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

$$\left(\frac{2}{e^t+1}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} \tag{2.24}$$

$$\left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} \tag{2.25}$$

(2.24) de α yerine –α yazıp, elde edilen eşitliği (2.25) eşitliği ile taraf tarafa çarparsak,

$$\frac{(2t)^{\alpha}}{2^{\alpha}} e^{2xt} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(-\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!}\right)$$

bulunur. Eşitliğin sol tarafında e^{2xt} yi geometrik seriye açıp, sağ tarafta Cauchy çarpımı uygulanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \frac{t^{n+\alpha}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} E_k^{(-\alpha)}(x) G_{n-k}^{(\alpha)}(x)\right)\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Burada $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları karşılaştırılırsa,

$$2^{n-\alpha} x^{n-\alpha}\frac{1}{(n-\alpha)!} = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} E_k^{(-\alpha)}(x) G_{n-k}^{(\alpha)}(x)\right)\frac{1}{n!}$$

olarak yazılır. Bu ifadeyi düzenlersek,

$$2^{n-\alpha} x^{n-\alpha}\frac{n!}{(n-\alpha)!} = \left(E^{(-\alpha)}(x) + G^{(\alpha)}(x)\right)^n \tag{2.26}$$

elde edilir. (2.26) de $n=\alpha$ için teorem ispatlanmış olur.

Frobenius-Euler polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\frac{1-u}{e^t-u} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(u,x)\frac{t^n}{n!}$$

şeklinde tanımlıdır. Özel olarak $u=-1$ için,

$$H_n(-1,x)=E_n(x)=\frac{G_{n+1}(x)}{n+1}$$

olduğu açıktır.

Şimdi de α. mertebeden Genocchi polinomlarının, ikinci Stirling sayıları ve α. mertebeden Bernoulli polinomları ile ilişkisini inceleyelim. Bu nedenle, α. mertebeden Genocchi polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\frac{(e^t-1)^\alpha}{(e^t-1)^\alpha}\frac{(2t)^\alpha}{(e^t+1)^\alpha}e^{xt}=\left(e^t-1\right)^\alpha\left(\frac{2t}{e^{2t}-1}\right)^\alpha e^{\frac{x}{2}(2t)}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!}$$

şeklinde yazılıp, yukarıdaki son iki eşitliğin her iki tarafı $\alpha!$ ile bölündüğünde

$$\frac{(e^t-1)^\alpha}{\alpha!}\left(\frac{2t}{e^{2t}-1}\right)^\alpha e^{\frac{x}{2}(2t)}=\frac{1}{\alpha!}\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!}$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_2(n,\alpha)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{2}\right)\frac{(2t)^n}{n!}\right)=\frac{1}{\alpha!}\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!}$$

yazılabilir. Sol tarafta Cauchy çarpımı uygulanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_2(k,\alpha)2^{n-k}B_{n-k}^{(\alpha)}(\frac{x}{2})\right)\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{\alpha!}\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Burada $\frac{t^n}{n!}$ katsayı karşılaştırması yapılırsa,

$$G_n^{(\alpha)}(x)=\alpha!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_2(k,\alpha)2^{n-k}B_{n-k}^{(\alpha)}(\frac{x}{2})$$

eşitliği elde edilir.

BÖLÜM 3

q-GENOCCHI POLİNOMLARI ve SAYILARI

q-Genocchi Polinomları,

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_{n,q}(x)\frac{t^n}{n!} = t\int_{\mathbb{Z}_p} e^{[x+y]_q t} d\mu_{-q}(y) \tag{3.1}$$

şeklinde üreteç fonkisyonu ile tanımlıdır [1], [2]. Bu üreteç fonksiyonunda

$$e^{[x+y]_q t} = \sum_{n=0}^{\infty} [x+y]_q^n \frac{t^n}{n!} \tag{3.2}$$

üstel fonksiyonun Taylor açılımı kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{G_{n+1,q}(x)}{n+1}\right)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{Z}_p} [x+y]_q^n d\mu_{-q}(y)\right)\frac{t^n}{n!} \tag{3.3}$$

elde edilir ve son eşitlikte katsayı karşılaştırılması yapıldığında;

$$\frac{G_{n+1,q}(x)}{n+1} = \int_{\mathbb{Z}_p} [x+y]_q^n d\mu_{-q}(y) \tag{3.4}$$

olarak bulunur. (3.1) de $x=0$ alındığında, $G_{n,q}(0) := G_{n,q}$ elde edilir ve q-Genocchi sayıları olarak bilinir. Ayrıca (3.1) denkleminin her iki tarafında $t \to 0$ iken limit alınırsa;

$$G_{0,q}(x) = \lim_{t\to 0}\left(\sum_{n=0}^{\infty} G_{n,q}(x)\frac{t^n}{n!}\right) = \lim_{t\to 0}\left(t\int_{\mathbb{Z}_p} e^{[x+y]_q t} d\mu_{-q}(y)\right) = 0 \tag{3.5}$$

bulunur. q-Genocchi polinomlarının açık bir bağıntısını elde etmek için,

$$[x+y]_q^n=\left(\frac{1-q^{x+y}}{1-q}\right)^n=\left(\frac{1}{1-q}\right)^n\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(-1)^l q^{lx+ly} \tag{3.6}$$

eşitliği kullanışlı olacaktır. (3.4), (3.6) dan,

$$\frac{G_{n+1,q}(x)}{n+1}=\left(\frac{1}{1-q}\right)^n\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(-1)^l q^{lx}\int_{\mathbb{Z}_p} q^{ly}d\mu_{-q}(y) \tag{3.7}$$

elde edilir ve

$$\int_{\mathbb{Z}_p} q^{ly}d\mu_{-q}(y)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{[p^n]_{-q}}\sum_{y=0}^{p^n-1}q^{ly}(-1)^y q^y$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1-(-q)^{p^n}}{1-(-q)}}\sum_{y=0}^{p^n-1}(-q^{l+1})^y$$

$$=(1+q)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+q^{p^n}}\frac{1-(-q^{l+1})^{p^n}}{1+q^{l+1}}$$

$$=\frac{1+q}{1+q^{l+1}}=\frac{[2]_q}{1+q^{l+1}}$$

olduğundan

$$\frac{G_{n+1,q}(x)}{n+1}=\frac{[2]_q}{(1-\mathrm{q})^n}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(-1)^l\frac{q^{lx}}{1+q^{l+1}} \tag{3.8}$$

olarak bulunur. (3.8) de $\frac{1}{1+q^{l+1}}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^{ml+m}$ yazıldığında,

$$\frac{G_{n+1,q}(x)}{n+1}=\frac{[2]_q}{(1-q)^n}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(-1)^l q^{lx}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^m q^{ml}$$

$$=[2]_q\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^m\left(\left(\frac{1}{1-q}\right)^n\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(-1)^l q^{l(x+m)}\right)$$

$$=[2]_q\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^m \frac{\left(1-q^{(x+m)}\right)^n}{(1-q)^n}$$

$$=[2]_q\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^m [x+m]_q^n$$

elde edilir ve q-Genocchi polinomlarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{G_{n+1,q}(x)}{n+1}\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left([2]_q\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^m [x+m]_q^n\right)\frac{t^n}{n!}$$

$$=[2]_q\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^m e^{[x+m]_q t}$$

olarak bulunur. O halde

$$T_q(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}G_{n,q}(x)\frac{t^n}{n!} \tag{3.9}$$

olsun. Burada

$$T_q(x,t)=[2]_q t\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^m e^{[x+m]_q t} \tag{3.10}$$

dır. Şimdi q-Genocchi polinomlarının interpolasyon fonksiyonlarını verelim. (3.10) bağıntısına Mellin dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}t^{s-2}\left(-T_q(x,-t)\right)dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\left([2]_q\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^m e^{-[x+m]_q t}\right)t^{s-1}dt$$

$$=[2]_q\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^m\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}t^{s-1}e^{-t[x+m]_q}dt\right)$$

$$=[2]_q\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m q^m}{[x+m]_q^s}=\zeta_q(s,x)$$

elde edilir. Burada $\zeta_q(s,x)$ Hurwitz tipi q-Genocchi zeta fonksiyonu olarak isimlendirilir. Son eşitlikte $x=0$ yazılırsa,

$$\zeta_q(s,0) := \zeta_q(s) = [2]_q \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m q^m}{[m]_q^s} \qquad (3.11)$$

bulunur. $\zeta_q(s)$ ise q-Genocchi zeta fonksiyonudur. Özel olarak $s=-n$ alınırsa

$$\zeta_q(-n,x) = \frac{G_{n+1,q}(x)}{n+1}$$

ve

$$\zeta_q(-n) = \frac{G_{n+1,q}}{n+1}$$

elde edilir.

BÖLÜM 4

AĞIRLIKLI q-GENOCCHI POLİNOMLARI

q-Genocchi polinomlarının pek çok genelleştirmesi, birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Son zamanlarda, Araci, Acikgoz ve Seo q-Genocchi polinomlarına "α" parametresini ekleyerek, α-ağırlıklı q-Genocchi polinomlarını tanımladılar ve bu polinomların Sayılar teorisinde önemli özelliklerini türettiler [1], [2]. $\alpha \to 1$ iken q-Genocchi polinomunun elde edileceğini gösterdiler. Daha sonra, α-ağırlıklı q-Genocchi polinomlarının üreteç fonksiyonunu tanımlayarak ve bu üreteç fonksiyonuna Mellin dönüşümünü uygulayarak, α-ağırlıklı q-Zeta fonksiyonunu tanımladılar. Bu fonksiyonlar negatif değerlerde α-ağırlıklı q-Genocchi polinomunu interpole ettiğini gösterdiler. Güney Koreli matematikçi Prof. Taekyun Kim, 2008 de, q-Euler sayılarının ve polinomlarının analitik devamını inceleyip, Analitik sayılar teorisine yeni bir bakış açısı kazandırmıştır [13].

Bu tezin son kısmındaki amacımız, Kim'in metodunu kullanarak, α-ağırlıklı q-Genocchi polinomlarının analitik devamını incelemektir.

α-ağırlıklı q-Genocchi polinomlarının $t=0$ daki Taylor açılımı,

$$F_q^{(\alpha)}(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}G_{n,q}^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!}=[2]_q\,t\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^n e^{t[n+x]_{q^\alpha}} \tag{4.1}$$

şeklindedir. Bu denklem α-ağırlıklı q-Genocchi polinomlarının üreteç fonksiyonu olarakta adlandırılır. $G_{n,q}^{(\alpha)}(0):=G_{n,q}^{(\alpha)}$, α-ağırlıklı q-Genocchi sayısı olarak adlandırılır. (4.1) içerisinde $x=0$ aldığımızda $F_q^{(\alpha)}(0,t):=F_q^{(\alpha)}(t)$ elde ederiz. (4.1) den,

$$
\begin{aligned}
F_q^{(\alpha)}(x,t) &= [2]_q t\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^n e^{t[n+x]_{q^\alpha}} \\
&= [2]_q t\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^n e^{t\left([x]_{q^\alpha}+q^{\alpha x}[n]_{q^\alpha}\right)} \\
&= e^{t[x]_{q^\alpha}} q^{-\alpha x}\left([2]_q\left(q^{\alpha x}t\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^n e^{\left(tq^{\alpha x}\right)[n]_{q^\alpha}}\right) \\
&= e^{t[x]_{q^\alpha}} q^{-\alpha x} F_q^{(\alpha)}\left(q^{\alpha x}t\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki fonksiyonel denklemi elde ederiz.

$$
F_q^{(\alpha)}(x,t) = q^{-\alpha x} e^{t[x]_{q^\alpha}} F_q^{(\alpha)}\left(q^{\alpha x}t\right). \tag{4.2}
$$

Burada $F_q^{(\alpha)}(x,t)$, α -ağırlıklı q-Genocchi polinomunun üreteç fonksiyonunu temsil eder. (4.1) ve (4.2) den,

$$
\sum_{n=0}^{\infty} G_{n,q}^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} = q^{-\alpha x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}[x]_{q^\alpha}^n \frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^{\alpha n x} G_{n,q}^{(\alpha)}\frac{t^n}{n!}\right)
$$

bulunur ve yukarıdaki eşitliğin sağ tarafında Cauchy çarpımı kuralını uyguladığımızda,

$$
= q^{-\alpha x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} q^{\alpha k x} G_{k,q}^{(\alpha)}[x]_{q^\alpha}^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!}
$$

elde edilir ve buradan,

$$
G_{n,q}^{(\alpha)}(x) = q^{-\alpha x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} q^{\alpha k x} G_{k,q}^{(\alpha)}[x]_{q^\alpha}^{n-k}
$$

bulunur. Aşağıdaki p-adik q-fermionik dağılımı

$$
\mu_{-q}\left(x+p^n\mathbb{Z}_p\right) = \frac{(-q)^x}{\left[p^n\right]_{-q}}
$$

Kim tarafından tanımlandı [15], [18].

Araci, Acikgoz ve Seo [1], α -ağırlıklı q-Genocchi polinomlarını

$$
\frac{G_{n+1,q}^{(\alpha)}(x)}{n+1} = \int_{\mathbb{Z}_p}[x+y]_{q^\alpha}^n \, d\mu_{-q}(y)
$$

şeklinde tanımladılar.

Fermionik p-adik q-integral,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)d\mu_{-q}(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left[p^n\right]_{-q}}\sum_{x=0}^{p^n-1} f(x)(-q)^x$$

olarak tanımlıdır. Buradan, integralde $f(x)$ yerine $f(x+1)$ aldığımızda,

$$-q\int_{\mathbb{Z}_p} f(\mathrm{x}+1)\,\mathrm{d}\mu_{-q}(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left[p^n\right]_{-q}}\sum_{x=0}^{p^n-1} f(x+1)(-q)^{x+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left[p^n\right]_{-q}}\left(f(1)(-q)+f(2)(-q)^2+\ldots+f\left(p^n-1\right)(-q)^{p^n-1}+f\left(p^n\right)(-q)^{p^n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(0)+f(1)(-q)+f(2)(-q)^2+\ldots+f\left(p^n-1\right)(-q)^{p^n-1}}{\left[p^n\right]_{-q}}\right)+$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left[p^n\right]_{-q}}\left(-f(0)-f\left(p^n\right)q^{p^n}\right)$$

$$=\int_{\mathbb{Z}_p} f(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\mu_{-q}(x)+\lim_{n\to\infty}\frac{-f(0)-q^{p^n}f\left(p^n\right)}{\dfrac{1-(-q)^{p^n}}{1+q}}$$

$$=\int_{\mathbb{Z}_p} f(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\mu_{-q}(x)-[2]_q f(0)$$

dır. Uygulamaların bir sonucu olarak fermionik p-adik q-integrali ile ilgili

$$q\int_{\mathbb{Z}_p} f(y+1)d\mu_{-q}(y)+\int_{\mathbb{Z}_p} f(y)d\mu_{-q}(y)=[2]_q f(0)$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte $f(y)=[x+y]_{q^\alpha}^n$ alındığında

$$q\int_{\mathbb{Z}_p}[x+1+y]_{q^\alpha}^n d\mu_{-q}(y)+\int_{\mathbb{Z}_p}[x+y]_{q^\alpha}^n d\mu_{-q}(y)=[2]_q[x]_{q^\alpha}^n$$

olarak bulunur. Yukarıdaki eşitlikten,

$$q\frac{G_{n+1,q}^{(\alpha)}(x+1)}{n+1}+\frac{G_{n+1,q}^{(\alpha)}(x)}{n+1}=[2]_q[x]_{q^\alpha}^n$$

$\alpha-$ ağırlıklı $q-$ Genocchi polinomlarının yineleme bağıntısı elde edilir. α -ağırlıklı q-Genocchi polinomunun tanımından

$$\frac{G_{n+1,q}^{(\alpha)}(x)}{n+1} = \int_{\mathbb{Z}_p} [x+y]_{q^\alpha}^n d\mu_{-q}(y)$$
$$= \int_{\mathbb{Z}_p} \left(\frac{1-q^{\alpha x+\alpha y}}{1-q^\alpha} \right)^n d\mu_{-q}(y)$$
$$= \left(\frac{1}{1-q^\alpha} \right)^n \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (-1)^l q^{\alpha l x} \int_{\mathbb{Z}_p} q^{\alpha l y} d\mu_{-q}(y)$$

elde edilir. $\int_{\mathbb{Z}_p} q^{\alpha l y} d\mu_{-q}(y)$ integralini çözümleyelim;

$$\int_{\mathbb{Z}_p} q^{\alpha l y} d\mu_{-q}(y) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left[p^n\right]_{-q}} \sum_{y=0}^{p^n-1} q^{\alpha l y} (-q)^y$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1-(-q)^{p^n}}{1+q}} \sum_{y=0}^{p^n-1} \left(-q^{\alpha l+1}\right)^y$$
$$= \frac{[2]_q}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1+\left(q^{\alpha l+1}\right)^{p^n}}{1+q^{\alpha l+1}} = \frac{[2]_q}{1+q^{\alpha l+1}}$$

dir. Böylece, α -ağırlıklı q-Genocchi polinomlarının açık formülü

$$\frac{G_{n+1,q}^{(\alpha)}(x)}{n+1} = \frac{[2]_q}{\left(1-q^\alpha\right)^n} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (-1)^l \frac{q^{\alpha l x}}{1+q^{\alpha l+1}}$$

şeklindedir. $\frac{1}{1+q^{\alpha l+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^m q^{m\alpha l}$ eşitliği yukarıdaki denklemde yerleştirildiğinde;

$$\frac{G_{n+1,q}^{(\alpha)}(x)}{n+1} = [2]_q \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^m \left(\frac{1}{\left(1-q^\alpha\right)^n} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (-1)^l \left(q^{\alpha x+\alpha m}\right)^l \right)$$
$$= [2]_q \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^m [x+m]_{q^\alpha}^n \tag{4.3}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki eşitlikte, her iki taraf $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ toplamı altında yazıldığında;

$$F_q^{(\alpha)}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{n,q}^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} = [2]_q\, t \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^m e^{t[x+m]_{q^\alpha}}$$

α -ağırlıklı q-Genocchi polinomunun üreteç fonksiyonu elde edilir.

Bernoulli polinomları Riemann-Zeta fonksiyonu tarafından negatif değerlerde interpole edilen fonksiyonlardır. Zeta fonksiyonları, modüler gruplarda, L-fonksiyonları teorisinde, Analitik sayılar teorisinde ve özellikle kompleks analizin analitik devam konusunda önemli ve etkili bir yere sahiptir.

Bu nedenle, q-Genocchi polinomlarının üreteç fonksiyonlarına Mellin dönüşümünü uygulandığında,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-2}\left(-F_q^{(\alpha)}(x,-t)\right)dt \\
&=[2]_q\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^m\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t[m+x]_{q^\alpha}}dt\right) \\
&=[2]_q\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m q^m}{[x+m]_{q^\alpha}^s}=\varsigma_q^{(\alpha)}(s,x) \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

α -ağırlıklı q-Hurwitz-Zeta fonksiyonu elde edilir. (4.3) ve (4.4) ten aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1. (Araci, Acikgoz ve Gürsul [2]). $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\varsigma_q^{(\alpha)}(-n,x)=\frac{G_{n+1,q}^{(\alpha)}(x)}{n+1}$$

dir.

Bu tip eşitlikler Analitik sayılar teorisinde evrensel formüller olarak bilinir.

Teorem 4.2. (Araci, Acikgoz ve Gürsul [2]). α -ağırlıklı q- Zeta fonksiyonlarının özellikleri;

1.) $\alpha=1$ için $\varsigma_q^{(1)}(s,x)=\varsigma_q(s,x)$, q- Hurwitz-Zeta fonksiyonudur.

2.) $\alpha=1$ ve $q\to 1$ için; $\lim\limits_{\substack{q\to 1\\ \alpha=1}}\varsigma_q^{(\alpha)}(s,x)=\varsigma(s,x)$, Hurwitz-Zeta fonksiyonudur.

3.) $x=1$ için $\varsigma_q^{(\alpha)}(s,1)=[2]_q\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m q^m}{[1+m]_{q^\alpha}^s}=[2]_q\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m q^m}{[m]_{q^\alpha}^s}$

ve buradan,

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to\infty} \varsigma_q^{(\alpha)}(s,1) &= \lim_{s\to\infty}\left([2]_q \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m q^m}{[m]_{q^\alpha}^s} \right) \\
&= \lim_{s\to\infty}\left(\left([2]_q(-q)\right) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m q^m}{[m]_{q^\alpha}^s} \right) \\
&= -q[2]_q .
\end{aligned}
$$

KAYNAKLAR

[1] Araci, S., Acikgoz, M., ve Seo, J. J. (2012), A study on the weighted q-Genocchi numbers and polynomials with their interpolation function, *Honam Mathematical J.* 34, no. 1, pp. 11-18.

[2] Araci, S., Acikgoz, M., ve Gürsul, A. (2013), Analytic continuation of weighted q-Genocchi numbers and polynomials, *Communications of the Korean Math. Soc.* (Baskıda).

[3]Araci, S., Acikgoz, M., ve Şen, E., Some New Identities of Genocchi Numbers and Polynomials involving Bernoulli and Euler polynomials, arXiv:1209.0628 [math.NT].

[4] Araci, S., Acikgoz, M., ve Şen, E. (2013), On the extended Kim's p-adic q-deformed fermionic integrals in the p-adic integer ring, *J. Number Theory* (baskıda).

[5] Araci, S., Acikgoz, M., ve Kilicman, A. (2013), Extended p-adic q-invariant integrals on Zp associated with applications of umbral calculus, *Advances in Difference Equations* 2013:96.

[6] Araci, S., Acikgoz, M., Seo, J.J.(2012), Explicit formulas involving q-Euler numbers and polynomials, *Abstr. Appl. Anal.* 2012, Article ID 298531.

[7] Araci, S., Acikgoz, M. (2012), A note on the Frobenius-Euler numbers and polynomials associated with Bernstein polynomials, *Adv. Stud. Contemp. Math.* 22(3), 399-406.

[8] Araci, S., Acikgoz, M., ve Park, K.-H. (2013), A note on the q-analogue of Kim's p-adic log gamma type functions associated with q-extension of Genocchi and Euler numbers with weight, *Bull. Korean Math. Soc.* 50 (2013), No. 2, pp. 583–588.

[9] Araci, S., Acikgoz, M., ve Jolany, H. (2013), On p-adic interpolating function asssociated with modified Dirichlet's type of twisted q-Euler numbers and polynomials with weight alpha, *Journal of Classical Analysis*, Volume 2, Number 1, 35–48.

[10] Aslan, N. (2011), Euler ve q-Euler polinomları ve yaklaşım özellikleri, Gaziantep Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi.

[11] Erdal, D. (2010), Bernoulli ve q-Bernoulli polinomları ve yaklaşım özellikleri, Gaziantep Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi.

[12] Araci, S., Acikgoz, M., ve Qi, F. (2013), On the q-Genocchi numbers and polynomials with weight zero and their applications, *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, Vol. 18, No. 2, pp.193-203.

[13] Kim, T. (2008), Analytic continuation of q-Euler numbers and polynomials, *Applied Mathematics Letters* 21 (2008) 1320-1323.

[14] Kim, T. (1994), On explicit formulas of p-adic q-L-functions, *Kyushu J. Math.* 43, 73-86.

[15] Kim, T. (2008), On p-adic interpolating function for q-Euler numbers and its derivatives, *J. Math. Anal. Appl.* 339 (2008) 598.608.

[16] Kim, T. (2007), On the q-extension of Euler and Genocchi numbers, J. Math. Anal. Appl. 326, 1458.1465.

[17] Kim, T. (1999), On a q-analogue of the p-adic log gamma functions and related integrals, *Journal of Number Theory* 76, 320-329.

[18] Kim, T. (2007), On the analogs of Euler numbers and polynomials associated with p-adic q-integral on *Zp* at q =-1, *J. Math. Anal. Appl.* 331, 779-792.

[19] Kim, T., Ryoo, C. S., Jang, L. C., ve Rim, S.-H. (2005), Exploring the q-Riemann zeta function and q- Bernoulli polynomials, *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, no. 2, 171.181.

[20] Kim, T.(2005), Power series and asymptotic series associated with the q-analog of the two-variable p-adic L-function, *Russ. J. Math. Phys.* 12, no. 2, 186.196.

[21] Schikhof, W. H. (1984), Ultrametric Calculus: An Introduction to p-adic Analysis, *Cambrige Univ Pr.*

[22] Ryoo, C.S. (2008), A numerical computation on the structure of the roots of q-extension of Genocchi polynomials, *Applied Mathematics Letters*, Vol.21, 348-354.

[23] Horadam, A. F. (1991), Genocchi polynomials, *Applications of Fibonacci Numbers* 1991, pp 145-166.