vcvGAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK G-MODÜLLER

MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GAYE SUSAY

OCAK 2014

Bulanık G-Modüller

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN

Gaye SUSAY

Ocak 2014

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: BULANIK G-MODÜLLER

Öğrencinin, Adı Soyadı: Gaye SUSAY

Tez Savunma Tarihi: 23.01.2014

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Doç. Dr. Metin BEDİR

FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof.Dr. Fahir Talay AKYILDIZ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd.Doç.Dr. Necati OLGUN

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmzası
Yrd.Doç.Dr. Necati OLGUN	
Yrd.Doç.Dr. Özge ÖZTEKİN	
Yrd.Doç.Dr. Recep BİNDAK	

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tez de yer aldığını beyan ederim.

Gaye SUSAY

ÖZ

BULANIK G-MODÜLLER

SUSAY, Gaye

Yüksek Lisans Tezi , Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi : Y.Doç.Dr. Necati OLGUN

Ocak 2014 , 36 sayfa

Bu tezde G-modül üzerinde yapılan birtakım çalışmalar incelenmiştir. Burada bulanık G-modül, bunun direkt ayrık toplamı, bulanık tamamen indirgenebilir konularından bahsedilmiştir.

Tezde ilk olarak bulanık G-modül'ün anlaşılabilmesi için bulanık küme işlemleri ile bulanık cebirsel yapılar ele alınmıştır.

İkinci olarak grup temsili, G-modül, G-modülün indirgenebilirliği, indirgenemezliği ve tamamen indirgenebilirliği incelenmiştir.

Daha sonrada bulanık G-modül ve bulanık tam indirgenebilirlik hakkında bilgiler verilip, bu konu hakkında yapılan çalışmalar incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Bulanık Küme , G-Modül, Bulanık G-Modül, Bulanık Tam İndirgenebilirlik.

ABSTRACT

FUZZY G-MODULES

SUSAY, Gaye

M.Sc. in Department of Mathematics

Supervisor Assist.Prof.Dr. Necati OLGUN

January 2014, 36 pages

In this thesis, we have made an attempt to study more about G-modules. We have formulated the concepts ; fuzzy G-module, its direct sum decomposition and fuzy complete reducibility.

Firstly in the thesis it handled operations of fuzzy sets and fuzzy algebraic structures to make cleared for G-module.

As a second group represantation, G-module irreducibility, reducibility and complete reducibility of G-module studied.

After that it examined about the research they made after it has given information about fuzzy G-module and fuzzy complete reducibility.

KeyWords : Fuzzy Set, G-Module, Fuzzy G-Module, Fuzzy Complete Reducibility.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Y.Doç.Dr. Necati OLGUN'a sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışma süresince beni maddi ve manevi destekleyen sevgili babam Mesut SUSAY ve sevgili annem Elif SUSAY 'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER DİZİNİ

$F(x)$	: X üzerindeki tüm bulanık kümeler
Z	: Tam sayılar kümesi
Q	: Rasyonel sayılar kümesi
R	: Reel sayılar kümesi
$R- \ 0$	: Sıfırdan farklı reel sayılar kümesi
C	: Kompleks sayılar kümesi
$C- \ 0$	: Sıfırdan farklı kompleks sayılar kümesi
$F(a)$	: ‘a’ nın F ’ye eklenmesiyle elde edilen cisim
αF	: $\alpha c : c \in F$
$CharF$	: F cisminin karakteristiği
K	: C ’ nin alt cismi
(	: Modülü p asal olan tamsayılarının cismi
$DimM$	: M vektör uzayının boyutu
(a)	: ‘a’ tarafından üretilen devirli grup
ω	: Birimin küp kökü
S_n	: n. dereceden simetrik grup
$o(G)$	: G grubunun mertebesi
1_G	: G ’nin birim elemanı

$\wedge$	: Minumum (infimum)
$\vee$	: Maksimum (supremum)
$a \mid b$	: a böler b
$a \nmid b$	: a bölmez b
$Hom(M, M^*)$	: M 'den M^* olan tüm G-modül homomorfizimleri
$End(M)$	: M 'den M'ye olan tüm G-modüller
$GL(M)$	: $Hom(M, M)$ 'nin tersinir elemanları
M / N	: Bölüm G-modülü
$Çek\varphi$	: Homomorfik φ G-modülünün çekirdeği
	: İzomorfik
$\oplus$	: Direkt toplam
$K^{m \times n}$	: K cismi üzerindeki tüm $m \times n$ matrislerin kümesi
K_n	: K cismi üzerindeki tüm $n \times n$ matrislerin kümesi
$GL(n, K)$	: K_n'nin tersinir elemanları
$\wedge(\mu)$	: μ bulanık kümesinin düzey kümesi
$\mid \wedge(\mu) \mid$	: μ bulanık kümesinin düzey kardinalitesi
R^n	: $(x_1, x_2, \ldots.., x_n) \mid x_i \in R$
C^n	: $(x_1, x_2, \ldots., x_n) \mid x_i \in C$

BÖLÜM 1

GİRİŞ

20.yy' da bilimde ve matematikte birçok değişiklikler olmuştur. Bu tür değişiklikler belirsizlik kavramı ile ilgilidir. Bilimde bu değişikliğin geleneksel görüşten aşamalı bir şekilde geçiş yaptığı görülmüştür ki bu belirsizlik tüm mümkün yollarla giderilmelidir. Bir farklı görüşe göre bu belirsizlik tolere edilmiştir ve bilimin engellenemez olduğu iddia edilmiştir. Geleneksel görüşe göre bilim kesinlik için çaba göstermelidir (kesinlik,belirlilik,netlik.tutarlılık,vb) tüm bu belirtilerde ve bu yüzden belirsizlik (kesin olmayan,belirsizlik,net olmayan,tutarsız vb.) bilimsel olmayan olarak kabul edilir. Alternatif (modern) görüşe göre belirsizlik, bilime kaçınılmaz gerekli bir uğraş olarak düşünülür ve gerçekte de büyük bir faydası vardır.

Belirsizlik örnek iş de önemli bir kavramdır ki bu diğer modellerin gerekli özelliklerini elde edebilmek için kullanılabilir. Bu değişim yüksek ölçüde amaca saygılı bir şekilde, modeller için yararlı olabilir. 1960' ların literatüründe belirsizliğin bazı araştırmacılar tarafından bu önemli noktalarının doğrulanması açıkça görülmüştür ve böylece belirsizliğin geleneksel görüşten modern görüşe geçişi başlamıştır. Bu bölüm, olasılık teorisinden farklı olarak belirsizliğin çeşitli yeni teorileri tarafından karakterize edilmiştir. Daha önceden varsayılan bu teoriler, olasılık ve belirsizlik teorileri arasında tek bir bağlantı olduğunu iddia etmektedir.

1937'de Amerikan filozof Max Black tarafından bazı fikirlerin 30 yıl daha erken sunulmasına rağmen genel olarak anlaşılıyor ki belirsizliğin önemli bir noktası Lotfi A. Zadeh'in seminer tezidir. Bu tezde Zadeh bulanık küme ile kümelerin sınırlarının kesin olmadığını belirtmiştir. Bulanık kümelerde üyeliğin kabulü yada reddi önemli değildir, burada önemli olan üyelik derecesidir. Zadeh'in tezinin önemi Aristotelian'ın olasılık teorisinin iki değerli mantığı ile çelişmesidir. "x, A nın elemanı" önermesinde doğru yada yanlış olması ikili mantıkta geçerlidir, fakat A nın bulanık küme olmasında bu geçerli değildir, ama x, A nın tam elemanı olduğunda bu doğrudur. Bulanık kümelerde üyelik derecesi genel olarak [0,1] kapalı aralığında gösterilir. 0 ve 1 kapalı aralığı bulanık kümelerin doğru yada yanlış üyelik dereceleri olduğu kadar önermelerinde doğru yada yanlış olduğunu gösterir.

Aşamalı geçişlerde üye olandan olmayana yada tam tersi durumlarda bulanık kümelerin faydası büyüktür. Bize sadece belirsizliğin ölçülmesinde anlamlı ve güçlü temsil sağlamaz aynı zamanda doğal dilde ifade edilen belirsiz kavramlarında temsilini sağlar. Hem basit hem de sezgisel olan bulanık kümenin temelini klasik küme oluşturur .

Klasik kümenin karakteristik özelliği evrensel kümedeki her üyeye 1 veya 0 değerlerini vermesidir, böylece klasik kümenin üyelerini ve üye olmayanlarını ayırır.

Bu özellik evrensel kümenin elemanlarını belirlemedeki değerler gibi genellenebilir ve söz konusu olan kümedeki elemanların üyelik derecelerini belirtir. Bu özellik üyelik fonksiyonu olarak ve küme de bulanık küme olarak adlandırılır.

1960' larda teorinin başlangıcından beri bulanık kümelerle ilgili araştırmalar sürekli geliştirilmektedir. Kavramın yapısı ve teorilerin sonuçları günümüzde oldukça etkilidir. Uygulama üzerindeki çeşitli araştırmalar etkili ve uygulanabilir sonuçlar vermektedir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, konuya giriş yapılarak konu hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde bulanık kümeyle ilgili ön bilgiler, bulanık küme işlemleri, bulanık küme homomorfizmaları anlatılmaktadır.

Üçüncü bölümde grup temsili, G-modül, G-modüllerin indirgenemezliği,indirgenebilirliği ve tam indirgenebilirliği konuları anlatılmaktadır..

Dördüncü bölümde bulanık G-modüller ve bulanık tam indirgenebilirlik konuları incelenmektedir.

Beşinci bölümde ise tezin sonuç kısmına yer verilmiştir.

.

BÖLÜM 2

BULANIK KÜMELER

2.1. Giriş

1965 yılında, Zadeh [1] klasik kümeler teorisinde karakteristik fonksiyon kavramının bir genelleştirmesi olarak bulanık altküme kavramını geliştirmiştir. Herhangi bir A kümesi [ya da herhangi X evrensel kümesinin altkümesi] için, $X_A : X \to \{0,1\}$ karakteristik fonksiyonun $X_A\,(x)=0$, eğer $x \notin A$ ise, ve $X_A\,(x)=1$, eğer $x \in A$ ise, şeklinde tanımlandığı hatırlanabilir. Karakteristik fonksiyon genelleştirilebilir, şöyle ki, evrensel kümeye verilen değerler belirli bir aralığa düşerler ve söz konusu kümedeki bu elemanların ait olma derecelerini gösterirler. Daha büyük değerler, daha yüksek küme üyeliği derecesi anlamına gelir. Bu tür bir fonksiyon üyelik fonksiyonu olarak ve bununla tanımlanan küme de bulanık küme olarak adlandırılır. Üyelik fonksiyonları değerlerinin en yaygın olarak kullanılan aralığı, [0,1] birim aralığıdır. Genellikle bulanık kümeyi ve bunun üyelik fonksiyonunu tanımlarız. Daha biçimsel olarak, bir X evrensel kümesinin bulanık altkümesi (ya da X üzerinde bulanık küme) bir $\mu : X \to [0,1]$ fonksiyonu olarak tanımlanır.

Bu bölüm temel bazı tanım ve sonuçlar içermektedir. Bu bölüm boyunca X evrensel kümedir ve F(X), X üzerindeki tüm bulanık kümelerin kümesini ifade etmektedir.

2.2. Bulanık Küme İşlemleri

Bu kısımda bulanık küme işlemlerinde kullanılan temel tanımlar Klir ve Yuan'ın [2] çalışmalarını kullanılarak verilmiştir.

Tanım 2.2.1: μ , ν $\in$ F(X) olsun. O zaman,

(i) $\mu \subseteq \nu \quad \Leftrightarrow \quad \mu(x) \leq \nu(x), \forall x \in X$

(ii) $\mu = \nu \quad \Leftrightarrow \quad \mu(x) = \nu(x), \forall x \in X$ olur.

Tanım 2.2.2: μ $\in$ F(X) olsun. O zaman**,**

$$\wedge(\mu) = \ \alpha \ : \ \mu(x) = \alpha, x \in X$$ kümesi

μ düzey kümesi olarak adlandırılır ve | $\wedge$ (μ) | μ düzey kardinalitesi olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.3: $\nu_j : j \in J$, $\forall x \in X$ için, X ' in bulanık alt kümeler ailesi olsun. Bunların birleşimi ve kesişimi sırasıyla şu şekilde tanımlanır:

$$\left(\bigcup_{j \in J} \nu_j \right) x \ = \vee \ \nu_j \ x \ : j \in J$$

$$\left(\bigcap_{j \in J} \nu_j \right) (x) = \wedge \ \nu_j(x) : j \in J$$

dir.

Tanım 2.2.4: μ bulanık kümesinin $\overline{\mu}$ bulanık tümleyeni, $\forall x \in X$ için

$$\overline{\mu}(x) = 1 - \mu(x), \forall\ x \in X,$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.5: $\mu \in F(X)$'in $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu altında görüntüsü, Y'nin $f(\mu)$ bulanık alt kümesidir ve $\forall\ y \in Y$ için

$$f(\mu)(y) = \vee \{\mu(x) : x \in f^{-1}(y)\} ,$$

olarak tanımlanır.

$\nu \in F(Y)$' nin 'f' altında ters görüntüsü X' in f^{-1} bulanık alt kümesidir ve $\forall\ x \in X$ için

$$f^{-1}(\nu)(x) = \nu(f(x)), ,$$

olarak verilir.

2.2.6.Açıklama: $F(X)$ "$\subseteq$" kısmi sıralaması bakımından bir latistir. $F(X)$' in iki elemanının her bir alt kümesi için en küçük üst sınır ve en büyük alt sınır, sırasıyla, elemanların birleşimi ve kesişimidir.

2.3. Bulanık Cebirsel Yapılar

Bu bölümde, bulanık yapılardan bahsedeceğiz. Bu çalışmada kullanılan cebirsel terimler, simgeler ve sonuçlar için Biswas [5] ve Mordeson & Malik [6] dan alınmıştır. Grupları tartışırken, aksi belirtilmedikçe, çarpma grup işlemi olarak alınacaktır.

Tanım 2.3.1: Eğer G bir çarpımsal grup ise, o zaman G'nin bulanık bir alt grubu (ya da G üzerinde bulanık grup) tüm x,y $\in$ G için aşağıdaki iki özelliği sağlayan bir μ : G → [0,1] fonksiyonudur.

(i) μ (xy) ≥ μ(x) $\wedge$ μ(y), ve

(ii) $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$

Önerme 2.3.2: μ bir G grubunun, birim elemanı e_G olan bulanık bir alt grubu olsun. o zaman, her x ∈ G için;

(i) $\mu(e_G) \geq \mu(x)$

(ii) $\mu(x) = \mu(x^{-1})$

olur.

Örnek 2.3.3: Z tüm tamsayıların toplamsal grubu olsun. Herhangi bir n tamsayısı için, nZ n'nin tüm tamsayı katları kümesini ifade eder.

(Ör.) nZ = {0, ± n, ± 2n, ± 3n,……………}.

Z⊃ 2Z⊃ 4Z⊃ 8Z⊃ 16Z olsun. μ : Z→[0,1] şu şekilde tanımlanır:

μ(x) =1, eğer x $\in$ 16Z ise,
= 0.7, eğer x $\in$ 8Z-16Z ise,
= 0.5, eğer x $\in$ 4Z-8Z ise,
= 0.2, eğer x $\in$ 2Z-4Z ise,
= 0, eğer x $\in$ Z-2Z ise,

μ'nun Z'nin bulanık bir altgrubu olduğu kolayca gösterilebilir.

Önerme 2.3.4: f : G → H bir grup homomorfizması olsun. O zaman G üzerindeki her hangi bir μ bulanık grubu için, $f(\mu)$, H'nin bulanık bir alt grubudur.

Önerme 2.3.5: f : G → H, G'nin H üzerine bir grup homomorfizması olsun. O zaman, H'nin her η bulanık altgrubu için $f^{-1}(\eta)$, G'nin bulanık bir altgrubudur.

Tanım 2.3.6: R halkasının bulanık bir alt halkası bir μ : R → [0,1] fonksiyonudur, şöyle ki, tüm x, y ∈ R için,

(i) $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$, ve

(ii) $\mu(x-y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$.

Örnek 2.3.7: p asal sayı olmak üzere, R = (Z_p, ⊕, ⊙) halkasını göz önünde bulundurun, $Z_p = \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{p-1}$ olup μ : Zp → [0,1] şu şekilde tanımlanır:

μ (x) =1, eğer x çift ise,

=1/2, eğer x tek ise.

O zaman, μ, Zp'nin bulanık bir alt halkasıdır.

Tanım 2.3.8: [7] C karmaşık sayılar kümesi ve V, C üzerinde bir vektör uzay ise, o zaman V' nin bir bulanık altvektör uzayı bir μ : V → [0,1] fonksiyonudur, öyle ki, tüm a, b ∈ C ve x,y ∈ V için

$\mu(ax+by) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ olur.

Örnek 2.3.9: R bir gerçel sayılar kümesi olsun. O zaman, R^n R üzerinde bir vektör uzayı olur. $\mu : R^n \rightarrow [0,1]$ şu şekilde tanımlanır:

$\mu(x) = 0$, eğer en az bir $x_j \neq 0$,

= 1, aksi durumda.

O zaman, μ, R^n' nin bulanık bir altvektör uzayıdır.

Tanım 2.3.10: [8] K üzerinde bir A cebirinin bulanık bir altcebiri aşağıdaki iki özelliği sağlayan bir μ : A $\rightarrow$ [0,1] fonksiyonudur.

(i) μ(ax+by) $\geq$ μ(x) $\wedge$ μ(y), ve

(ii) μ(xy) $\geq$ μ(x) $\wedge$ μ(y) ; $\forall$ x, y $\in$ A ve a,b $\in$ K.

Örnek 2.3.11: C bir karmaşık sayılar kümesi olsun. O zaman C, R üzerinde bir cebirdir. μ : C $\rightarrow$ [0,1] şu şekilde tanımlanır:

μ(x) = 1, eğer x=0,

= 0.5, eğer x ($\neq$ 0) gerçel ise,

= 0.2, diğer durumda.

O zaman, μ C'nin bulanık bir altcebiridir.

Tanım 2.3.12: G ve H gruplar olsun, ve μ , ν sırasıyla G ve H üzerinde bulanık gruplar olsun. f , G' nin H üzerine bir grup homomorfizmi olsun. O zaman $f(\mu)$ $\subseteq$ ν ise f , μ'nun ν'ye zayıf bulanık bir homomorfizmi olarak adlandırılır. Ayrıca, μ'nun ν'ye zayıf bulanık homomorfik olduğunu söyleyebiliriz ve $\mu \sqcup \nu$ olarak yazabiliriz.

f homomorfizma ve f(μ) = v ise, μ'nun ν üzerine bulanık bir homomorfizması olarak adlandırılır ve μ 'nun ν'ye bulanık homomorfik olduğunu söyleyebiliriz.

$f : G \rightarrow$ H bir izomorfizm olsun. O zaman, $f(\mu) \subseteq \nu$ ise, f zayıf bulanık bir izomorfizimdir ve $f(\mu) = \nu$ ise, f bulanık bir izomorfizimdir.

Ör.2.3.13: G, (Z, +) grubu, ve H (1 , - 1) çarpımsal grup ise $f : G \rightarrow H$

$$f(x) = 1 \text{ , eğer x çift ise}$$

$$= -1, \text{eğer x tek ise}$$

olarak tanımlanırsa o zaman f bir grup homomorfizmasıdır.

μ ve ν sırasıyla G ve H üzerinde bulanık gruplar aşağıdaki gibi tanımlanırsa

$\mu(x) = 1$, eğer x çift ise

$\mu(x) = 0$, eğer x tek ise

$\nu(1) = 1$

$\nu(-1) = 0$

O zaman $\eta = f \ \mu$

$$\eta(1) = \sup\{\ \mu(x) : x \in f^{-1}(1)\} = 1$$

$$\eta(-1) = \sup\{\ \mu(x) : x \in f^{-1}(-1)\}$$

olarak elde edilir.

Burada $\eta = f \ \mu = \{ (1,1),(-1,0) \} = \nu$. Böylece f , μ'nun ν üzerine bulanık bir homomorfizmidir ve bu yüzden μ , ν'ye homomorfiktir.

BÖLÜM 3

G-MODÜLLERİ

3.1. Giriş

Bu bölüm, G-modül teorisindeki, gerekli olan bazı temel tanımları ve sonuçları kapsamaktadır.

3.2. Grup Temsili ve G-Modülü

Tanım 3.2.1: [9]. G bir sonlu grup, M ise K üzerinde bir vektör uzayı ve GL(M) ise M ’den kendi üzerine tüm lineer izomorfizmler grubu olsun. G’nin M temsil uzayı ile lineer temsili bir $T: G \rightarrow$ GL(M) homomorfizmidir.

Örnek 3.2.2: F bir cisim, K ise F ’nin bir cisim genişlemesi ve a $\in K$ olsun. $F\ (a)$ ‘ a ’ nın F ’ye eklenmesiyle elde edilen bir cisim olsun.

$$\text{(Ör.)} \quad F\ (a) = \quad b_0 + b_1 a + b_2 a^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots : b_i \in F$$

$G = \ a$, ‘ a ’ tarafından üretilen devirli grup olsun. j ∈ Z için, T_j : M → M

$$T_j \quad \sum \beta_i a^i \quad = \sum \beta_i a^{i+j}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman T_j , M’nin kendisi üzerine bir izomorfizmidir. Ayrıca, T : G → GL(M)

$$T \quad a^j \quad = T_j \ , \ \forall \text{ j} \in \text{Z}$$

Şeklinde tanımlanan bir homomorfizmdir ve böylece G’nin lineer bir temsilidir.

Tanım 3.2.3: [9] G sonlu bir grup ve K_n de K üzerindeki tüm $n \times n$ matrislerin kümesi olsun. GL(n, K) ise K_n'nin tüm tersinir elemanları grubunu ifade etsin. O zaman, G'nin n. dereceden matris temsili bir T : G $\rightarrow$ GL(n, K) homomorfizmidir.

Örnek 3.2.4: p bir asal sayı ve G = $a^0 = e, a, a^2, ...a^{p-1}$ ise p mertebeli devirli bir grubu olsun. $K = Z_p$ için K karakteristiği p olan bir cisimdir.

Örneğin ;

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; 0,1 \in K$$

Matrisini göz önünde bulunduralım.

p =2 için $X^p = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, 2.dereceden birim matristir.

$$T \; a^j = X^j, \; \forall \text{ j} = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots, \; p - 1$$

Şeklinde tanımlanan T : G $\rightarrow$ GL(2, K) fonksiyonu bir izomorfizimdir ve böylece T, 2. mertebeden bir matris temsilidir.

Tanım 3.2.5: [9] G sonlu bir grup olsun ve M Bir K cismi üzerindeki vektör uzayı olsun. Eğer $\forall g \in G$ ve $m \in M$ için aşağıdaki aksiyomları sağlayan $m.g \in M$ çarpımı (G ' nin M üzerindeki etkisi) varsa M ' ye bir G-modül denir.

(i) m.1_G = m, $\forall$ m $\in M$ (1_G, G'de bir birim elemandır)

(ii) m.(g.h)= (m.g).h, $\forall$ m $\in M$; g, h $\in$ G ; ve

(iii) ($k_1m_1+k_2m_2$).g= k_1(m_1.g) + k_2(m_2.g), $\forall$ k_1, k_2 $\in K$; m_1, m_2 $\in M$; g $\in$G

Örnek 3.2.6: G = $\{1,-1,i,-i\}$ ve $M = C^n$ $(n \geq 1)$ olsun. O zaman M, C üzerinde bir vektör uzayıdır, ve karmaşık sayıların bilinen toplama ve çarpma altında, M 'nin bir G-Modül olduğunu gösterebiliriz.

Açıklama 3.2.7: Yukarıda tanımlanan (m,g) $\rightarrow$ m.g işlemi G'nin M üzerine sağa doğru etkisi olarak adlandırılabilir ve M ' ye sağ G- modül denir.

Benzer şekilde, sola doğru etki ve sol G modülünü de tanımlayabiliriz. Biz bu bölümde G modüllerini sol G modülleri olarak ele alacağız.

Eğer M bir G-modül ise, o zaman T : G $\rightarrow$ GL(M) görünümü T(g) = T_g şeklinde tanımlanır, burada T_g(m) = g.m, (g $\in$ G; m $\in M$) bir homomorfizmdir, ve böylece G'nin lineer bir temsilidir. T'ye M G-Modül tarafından sağlanan bir temsil denir. Buna karşılık, eğer G bir grup ve M de K üzerinde bir n boyutlu vektör uzayı ise, o zaman G'nin $n \times n$ matrisleri tarafından oluşturulan bir temsili M üzerindeki G-modülü yapısı tektir. Bu nedenle, lineer temsil, matris temsili ve G-modülü denk kavramlardır.

Tanım 3.2.8 : M ve M^* G-modülleri olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $\varphi : M \rightarrow M^*$ fonksiyonu bir G-modül homomorfizmidir.

(i) $\varphi(k_1m_1+k_2m_2) = k_1.\varphi(m_1) + k_2.\varphi(m_2)$; ve

(ii) $\varphi(g.m) = g.\varphi(m)$, $\forall$ $k_1, k_2 \in K$; m, m_1, $m_2 \in M$; g $\in$G.

Ayrıca, eğer φ 1-1 ve örten ise, o zaman φ izomorfizimdir. Eğer M 'nin φ izomorfizmi M^* üzerine mevcut ise, M ve M^* G-modüllerinin izomorfik olduğu söylenebilir. O zaman $M \approx M^*$ olarak yazabiliriz.

$\varphi : M \rightarrow M^*$ bir G-modülü homomorfizmi olsun. Her m $\in M$,

$Çek\varphi = \quad m \in M : \varphi(m) = 0$ kümesine φ' nin çekirdeği denir ve $Çek\varphi$ ile gösterilir

. **Örnek 3.2.9 :** G={1,-1}, M = C ve M^* =R olsun. O zaman M ve M^* R üzerinde G-modüllerdir. $\varphi : M \rightarrow M^*$ fonksiyonu,

$$\varphi(x + iy) = x + y \, , \qquad \forall x + iy \in M$$

şeklinde tanımlanır.

O zaman φ bir G-modül homomorfizmidir ve çekirdeği

$$Çek\varphi = \quad x + iy \in M : x = -y$$

olur.

Tanım 3.2.10: [9] M bir G-modülü olsun. Eğer N de G'nin aynı etkisi altında bir G-modülü ise, M 'in bir N altvektör uzayına bir G- altmodül denir.

Bu tanım ile , $Çek\varphi$ M 'nin bir G-alt modülüdür.

Örnek 3.2.11: Q bir rasyonel sayılar kümesi, G={1,-1} ve M = R olsun. O zaman M de Q üzerinde bir G-modüldür. Her bir irrasyonel sayı 'r' için, N = Q(r) M 'nin bir G-altmodülüdür.

3.3. G-Modüllerinin İndirgenemezliği, İndirgenebilirliği ve Tam İndirgenebilirliği

Tanım 3.3.1: [9] M sıfır olmayan bir G-modül olsun. O zaman, eğer M ' nin G-altmodülleri yalnızca M ve {0} ise, M ' ye indirgenemez denir. Aksi durumda M 'ye indirgenebilir denir.

Tanım 3.3.2:[9] Eğer T, M ile sağlanan bir temsil ise, o zaman M 'nin indirgenebilir ya da indirgenemez olmasına bağlı olarak, T 'nin indirgenebilir ya da indirgenemez olduğunu söyleyebiliriz.

3.3.2.Örnek. ω birimin küp kökü , S== $1, \omega$, ω^2 olsun,

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & 1 & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve}$$

G= S_3 = { φ , ψ , $\varphi.\psi$, $\psi.\varphi$, φ^2 , ψ^2 }kümesi 3. Dereceden simetrik grup olsun.

M = span(S) = $\alpha + \beta\omega + \gamma\,\omega^2 : \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{R}$ ile verilen M 'nin R üzerine vektör uzayını göz önünde bulunduralım. Her x ∈ G için, $T_x : M \to M$,

$$T_x(\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2) = \alpha x(1) + \beta x(\omega) + \gamma x(\omega^2)$$

şeklinde tanımlanır.

O zaman, T_x M ’nin kendisi üzerine bir izomorfizmidir. Ayrıca, T : G $\rightarrow$ GL(M) dönüşümü,

$$T(\mathrm{x}) = T_x \ , \ \forall \ \mathrm{x} \in \mathrm{G}$$

şeklinde tanımlanır ve G’nin bir temsilidir ve böylece M bir G-modüldür. G=S_3, olduğundan, M ’nin özaltvektör uzayları G-altmodülleri değildir, ve böylece M ’nin G-altmodülleri yalnızca M ve $\{0\}$’dır. Bu yüzden, M indirgenemezdir ve böylece T de indirgenemezdir.

Örnek 3.3.4: G = 1 ,- 1 , M = C de Q üzerinde bir vektör uzayı olsun. O zaman M , Q ve R tam G-altmodülleri olan bir G-modüldür ve bu yüzden indirgenebilirdir.

Tanım 3.3.5: [10] $M_1, M_2, ..., M_n$ bir F cismi üzerinde vektör uzayları olsun. O zaman $m_1 + m_2 + ... + m_n : m_i \in M_i$ kümesi

$$(m_1 + m_2 + ... + m_n) + (m_1' + m_2' + ... + m_n') = (m_1 + m_1') + (m_2 + m_2') + ... + (m_n + m_n')$$

ve

$$\alpha(m_1 + m_2 + ... + m_n) = \alpha m_1 + \alpha m_2 + ... + \alpha m_n ; \ \alpha \in K, m_i, m_i' \in M_i$$

işlemleri altında K üzerinde bir vektör uzayı olur.

Bu, $M_1, M_2, ..., M_n$ vektör uzaylarının direkt toplamı olarak adlandırılır ve $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$

Şeklinde gösterilir.

Örnek 3.3.6: Q ($\sqrt{2},\sqrt{3}$) kümesi $\sqrt{2},\sqrt{3}$ gerçel sayılarının Q'ya eklenmesiyle elde edilen kümedir. Bu, Q üzerinde bir vektör uzaydır ve $1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}$ kümesi Q üzerinde Q($\sqrt{2},\sqrt{3}$) için bir tabandır.

$$M_1 = \text{Q}, \quad M_2 = \text{Q}(\sqrt{2}), \quad M_3 = \text{Q}(\sqrt{3}) \text{ ve } M_4 = \text{Q}(\sqrt{6})$$

olsun.

O zaman,

$$Q = (\sqrt{2},\sqrt{3}) = \bigoplus_{i=1}^{4} M_i$$

bulunur.

Açıklama 3.3.7: [10] M_i vektör uzaylarının $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ direkt toplamı aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(i) Her m $\in M$ elemanı, M_i' nin (1≤ i ≤ n) elemanlarının toplamı olarak tek türlü yazılır.

(ii) M 'nin $M_1, M_2, ..., M_n$ altvektör uzayları bağımsızdır**.** (Ör.) $m_1 + m_2 + ... + m_n$ =0 tüm i için m_i=0'ı ifade eder.

(iii) Her bir 1≤ i ≤ n için, $M_j \bigcap (M_1 + M_2 + ... + M_{j-1} + M_{j+1} + ... + M_n)$ ={0}

(iv) Eğer B_i'ler M_i için taban ise, i=1,2,…,n için, o zaman $B = (B_1, B_2, ..., B_n)$ dizisi için M bir tabandır.

G modülleri vektör uzaylar olduğundan, direkt toplam kavramı da G-modüllerine uzanır. Ayrıca, yukarıdaki tüm özellikler korunur.

Tanım 3.3.8: [9] M G-modül ve N de G-altmodülü olsun. $M = N \oplus N^*$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir N^* G- altmodülü varsa, M G-modülüne tamamen indirgenebilirdir denir.

Önerme 3.3.9 [10] V F cismi üzerinde bir sonlu boyutlu vektör uzayı ve W_1 de V 'nin herhangi bir altuzayı olsun. O zaman V ' nin $V = W_1 \oplus W_2$ olacak şekilde bir W_2 alt uzayı mevcutdur.

Sonuç: Tüm sonlu boyutlu G-modülleri tamamen indirgenebilirdir.

Açıklama 3.3.10: En az iki boyutlu tüm tamamen indirgenebilir G-modülleri indirgenebilirdir; ancak tüm indirgenebilir G-modüller tamamen indirgenebilir değildir.

Örnek 3.3.11: Q üzerinde M = C G-modülünü göz önünde bulunduralım. Burada 2.3.4. örnekte verildiği üzere G={1,-1}'dir. Bunun tam G-altmodüllerine sahip olduğunu ve bu nedenle indirgenebilir olduğunu gözlemledik. Ancak, tamamen indirgenebilir değildir, çünkü M 'nin N =Q($\sqrt{2}$) G-altmodülü ile ilgili olarak, $M = N \oplus$ N*.(N^* =C-[Q($\sqrt{2}$)-{0}] olacak şekilde N* G-altmodülü mevcut değildir.

Önerme 3.3.12: Eğer M bir G-modül ve N de M 'nin bir G-altmodülü ise, o zaman M / N de bir G-modüldür ve M / N ' ye bölüm G-modülü denir.

İspat: g ∈ G ve x+ $N \in M / N$ olsun. G'nin M / N üzerine etkisi

$$g\,(x+N) = gx + N \in M / N$$ şeklinde tanımlanır.

Bu da tüm G-modülü koşullarını sağlamaktadır ve bu yüzden M / N bir G-modüldür.

Açıklama 3.3.13:[9] M , K üzerinde bir sonlu boyutlu vektör uzay ve T : G $\rightarrow$ GL(M) bir temsil olsun. N de M 'nin tam bir G-altmodülü olsun.

O zaman N için bir $\alpha_1,\alpha_2,....\alpha_r$ tabanı seçebiliriz, böylece $\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_r,\alpha_{r+1},....\alpha_n$ de M $(r \neq n)$ için bir tabandır, bu nedenle

$$N = K\alpha_1 \oplus K\alpha_2 \oplus ......\oplus K\alpha_r \text{ ve}$$

$$M = K\alpha_1 \oplus K\alpha_2 \oplus ......\oplus K\alpha_r \oplus K\alpha_{r+1} \oplus .....\oplus K\alpha_n$$

olur.

T ve T_1 , sırasıyla, bu tabanlarla ilgili olarak, M ve N tarafından sağlanan matris temsiller olsun. O zaman her x ∈ G için,

$$T(x) = \begin{pmatrix} T_1(x) & V(x) \\ 0 & T_2(x) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Burada, $V(x)$ bir $r\times(n-r)$ matrisidir.

T_2 (x)'in öneminin içyüzünü anlamak için,

$$T_2\text{(x)(m+}N\text{)=}T\text{(x)m+}N\text{ , } \forall \text{ x} \in \text{G} \qquad (2)$$

şeklinde tanımlanan bir T_2 : G → GL(M/N) temsilinin olduğunu gözlemleyebiliriz,

Burada m+N, M/N uzayındaki tüm kosetlere yayılmaktadır. T_2 (x) fonksiyonu, M/N 'nin kendi içine iyi tanımlanan bir homomorfizmidir, çünkü N M 'nin bir G-altmodülüdür. $\alpha_{k+1}+N,\alpha_{k+2}+N,....,\alpha_n+N$ kosetleri M/N için bir taban oluşturmaktadırlar, ve T_2 ise bu tabana göre T_2 matris temsilini sağlamaktadır.

Şimdi M ’nin tamamen indirgenebilir olduğunu farz edelim. O zaman M ’nin $M = N \oplus N^*$ olacak şekilde bir N^* G-altmodülü mevcuttur. Burada

$$N = K\alpha_1 \oplus K\alpha_2 \oplus ...... \oplus K\alpha_r \quad \text{ve}$$

$$M = K\alpha_{r+1} \oplus K\alpha_{r+2} \oplus ...... \oplus K\alpha_n$$

olur.

Her x ∈ G için ve $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r, \alpha_{r+1}, ...\alpha_n$ ile ilgili olarak, T

$$T(x) = \begin{pmatrix} T_1(x) & 0 \\ 0 & T_2^*(x) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

matris temsilini sağlamaktadır.

(1), (2) ve (3)’ten, T_2 (x) ve T_2^* (x) matris temsilleri eşdeğerdir. Yani, T ’nin tamamen indirgenebilirliği, her bir (1) matris temsilinin form (3)’ten birine denk olduğunu göstermektedir.

Bu da matris temsilinin indirgenemezliği ve tamamen indirgenebilirliği kavramlarını tanımlamaktadır. Eğer U (1) ile verilen bir T temsiline eşdeğer ise, bir U : G → GL(n, K) matris temsili indirgenebilirdir. Eğer böyle bir indirgeme mevcut değil ise, o zaman U indirgenemez bir matris temsilidir. Eğer, U ’nun form (1) matris temsiline denk olduğu tüm yerlerde , U ayrıca bir (3) temsiline de denk ise, U : G → GL(n, K) temsili tamamen indirgenebilir bir matris temsili olarak adlandırılır.

Önerme 3.3.14: [9] Tamamen indirgenebilir bir G-modülünün bir G-altmodülü de tamamen indirgenebilirdir.

Önerme 3.3.15: [9] $T : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(M)$ G'nin tamamen indirgenebilir bir temsili olsun, böylece M tamamen indirgenebilir bir G-modülüdür. O zaman M, indirgenemez G-altmodüllerinin direkt bir toplamıdır.

Teorem 3.3.16: ([9], [11]) (Maschke) G sonlu bir grup ve $T : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(M)$ G'nin bir temsili ise ve p=char(K) $\nmid$ o(G) ise, o zaman T tamamen indirgenebilirdir.

Örnek 3.3.17: G={1,-1} ve $K = \mathrm{Z}_3$ cisminde

$T : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(2, K)$ $\qquad x \to \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlansın.

O zaman, T bir homorfizmdir, ve bu yüzden T, $M = K^{2\times 2}$ temsil uzayı ile G'nin bir temsilidir. Ayrıca açıklama 3.3.13'ten anlaşılmaktadır ki, T temsili de ayrıca indirgenebilirdir ve dolayısıyla buna karşılık gelen M temsil uzayı da indirgenebilirdir. Ancak, Char K =3 $\nmid$ o(G) = 2, böylece teorem 3.3.16' dan, matris temsili ve dolayısıyla temsil uzayı M tamamen indirgenebilirdir.

BÖLÜM 4

BULANIK G-MODÜLER VE BULANIK TAM İNDİRGENEBİLİRLİK

4.1.Giriş

Bu bölümde, G-modülleri, grup temsilleri, indirgenebilirlik, indirgenemezlik ve tamamen indirgenebilirlik kavramlarının bulanık paralellerini tanıtıyoruz ve bunların bazı temel özelliklerini gözlemliyoruz.

4.2.Bulanık G-Modül

Tanım 4.2.1: [13] G sonlu bir grup ve M de C'nin bir alt cismi olan K üzerinde bir G-modül olsun. O zaman M üzerindeki bulanık G-modül aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde M 'nin bir μ bulanık altkümesi olur.

(i) μ (ax+by) $\geq \mu$ (x) $\wedge$ μ (y) ; $\forall$ a,b $\in K$ v e x,y $\in M$ ve

(ii) μ (gm) $\geq \mu$ (m), $\forall$ g $\in$ G, m $\in M$.

Açıklama 4.2.2: Eğer T: G$\rightarrow$ GL(M), G tarafından sağlanan bir temsil ise, o zaman ikinci koşul şu şekilde yeniden yazılabilir.

$$\mu(T_g \text{m}) \geq \mu(\text{m}), \ \forall \text{g} \in \text{G}, \text{m} \in M .$$

Örnek 4.2.3: Örnek 3.2.2.'deki $M = F$ (a) G-modülünü göz önünde bulunduralım. $\mu : M \rightarrow [0,1]$,

μ (x) = 1 , eğer x = 0 ise

=1/2, Eğer x $\in F$ - {0}

=1/4, Eğer x $\in$ F (a) - F

O zaman μ bulanık bir G-modüldür.

Tanım 4.2.4: [13] G bir grup, M K üzerinde bir vektör uzay ve T : G→ GL(M) ise M 'de G'nin bir temsili olsun. μ G üzerinde bulanık bir grup ve ν ise T aralığında bulanık bir grup olsun. O zaman, eğer T μ 'nun ν üzerine bulanık bir homomorfizmi ise, T temsili bulanık bir temsildir**.**

Örnek 4.2.5: G={1,-1} ve M de R üzerinde bir vektör uzay olsun. T : G → GL(M), T (x) = T_x olarak tanımlansın, burada T_x (m) = xm, $\forall$ x $\in$ G ve $\forall$ m $\in$ M . O zaman T , M içinde G'nin bir temsili olsun.

μ ={(1,1), (-1,0)} olarak verilen G üzerindeki μ bulanık altgrubu gözöünde bulunduralım ve ν ={ T_1 ,1), (T_{-1} ,0)} olarak tanımlanan T , { T_1, T_{-1} } aralığı üzerinde bulanık bir alt grup olsun.

O zaman ; $\eta(T_1) = \sup\limits_{x \in T^{-1}(T_1)} \mu(x) = 1$ ve

$$\eta(T_{-1}) = \sup\limits_{x \in T^{-1}(T_{-1})} \mu(x) = 0$$

Böylece, $\eta = T(\mu) = \nu$ ve T dolayısıyla bulanık bir temsildir.

Teorem 4.2.6: T : G→ GL(M), M temsil uzayı ile G'nin bir temsili ise, o zaman G'nin herhangi bir μ bulanık grubu için, T μ 'nun T (μ) = ν içine bulanık bir homomorfizmidir.

İspat: 2.3.4. önermedeki sonuçta çıkmaktadır.

Önerme 4.2.7: Herhangi bir n-boyutlu G-modülünün, $\wedge(\mu)$ = n+1 ile, bulanık bir μ G-modülü vardır.

İspat: $m_1, m_2, ..., m_n$ M için taban olsun. O zaman, $\mu : M \rightarrow [0,1]$

$\mu\ (c_1 m_1 + c_2 m_2 + ... + c_n m_n)$ = 1, eğer $c_i = 0\ \forall$ i için,

= $1/2$, eğer $c_1 \neq 0$, $c_2 = c_3 = ... = c_n = 0$ ise,

= 1/3 eğer $c_2 \neq 0$, $c_3 = c_4 = ... = c_n = 0$ ise,

= 1/4 eğer $c_3 \neq 0$, $c_4 = c_5 = ... = c_n = 0$ ise,

…………………………………………………..

…………………………………………………..

…………………………………………………..

…………………………………………………..

= $1/n$ -1, eğer $c_{n-2} \neq 0$, $c_{n-1} = c_n = 0$ ise,

= $1/n$, eğer $c_{n-1} \neq 0$, $c_n = 0$ ise,

= $1/n$ +1, eğer $c_n \neq 0$ ise,

Şeklinde tanımlanan $| \wedge(\mu) | = n+1$ ile M üzerinde bulanık bir G-modüldür.

Örnek 4.2.8: G={1,-1}, M R üzerinde R^4 G-modülü olsun. $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$, M için standart sıralı bir taban olsun. $\mu : M \rightarrow [0,1]$;

$$\mu(c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + c_3\varepsilon_3 + c_4\varepsilon_4) = 1, \text{ eğer } c_i = 0 \ \forall \text{ i ise,}$$

$= 1/2$, eğer $c_1 \neq 0$, $c_2 = c_3 = c_4 = 0$ ise,

$= 1/3$ eğer $c_2 \neq 0, c_3 = c_4 = 0$ ise,

$= 1/4$ eğer $c_3 \neq 0$, $c_4 = 0$ ise,

$= 1/5$, eğer $c_4 \neq 0$ ise,

şeklinde tanımlanır.

O zaman μ bulanık G-modülün tüm aksiyomlarını karşılamaktadır, ve bu nedenle $|\wedge(\mu)| = 4+1 = 5$ ile bulanık bir G-modüldür.

Açıklama 4.2.9: Yukarıdaki yapı ayrıca sonsuz boyutlu G-modüllerine de genişletilebilir.

Önerme 4.2.10: M , K üzerinde bir G-modül ve $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ olsun, burada M_i 'ler M 'in G-altmodülleridir. Eğer ν_i (1≤i≤n) M_i üzerinde bulanık G-modüller ise, o zaman $\nu : M \rightarrow [0,1]$

$$\nu(m) = \wedge \ \nu_i(m_i) : i = 1, 2..., n \quad \text{olarak tanımlanır,}$$

$$m = \sum_{1}^{n} m_i \in M \quad \text{burada} \quad M \text{ üzerinde bulanık bir G-modüldür.}$$

İspat: Her ν_i M_i üzerinde bulanık bir G-modülü olduğundan, her x, y $\in M$, g $\in$G & a,b $\in K$ için,

$\nu_i(ax+by) \geq \nu_i(x) \wedge \nu_i(y)$ ve $\nu_i(gx) \geq \nu_i(x)$ olur.

$x = \sum m_i$, $y = \sum m_i' \in M$ ve a,b $\in K$ olsun.

O zaman ;

$$\nu(ax+by)=\nu(\sum(am_i+bm_i'))$$

$$= \wedge \ \nu_i\,(am_i+bm_i') : \text{i=1,2,…….n}$$

$$=\nu_j(am_j+bm_j')\text{ , bazı j' ler için (} 1\leq j\leq n \text{)}$$

$$\geq \nu_j(m_j)\wedge\nu_j(m_j')$$

$$\geq \nu(x)\wedge\nu(y)$$

olur.

Ayrıca, g $\in$ G ve $x=\sum m_i \in M$ için,

$$\nu(gx)=\nu(\sum gm_i)=\wedge\ \nu_i(\sum gm_i):i=1,2,......n$$

$$=\nu_j(gm_j)\ \text{ bazı j' ler için}$$

$$\geq \nu_j(m_j)$$

$$\geq \nu(x) \quad \text{olur.}$$

Böylece ν bulanık bir G-modüldür.

4.2.11. Açıklama. Yukarıdaki önermede, eğer $\nu_i(0)$' ın hepsi eşit ise, o zaman tüm i'ler için $\nu(0)=\wedge\ \nu_i(0):i=1,2,.....,n \quad =\nu_i(0)$ olur.

Tanım 4.2.12: [13] 4.2.10. önermedeki $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ üzerindeki, tüm i'ler için $\nu(0) = \nu_i(0)$ ile, ν bulanık G-modülü ν_i bulanık G-modüllerin direkt toplamı olarak adlandırılır ve $\nu = \bigoplus_{i=1}^{n} \nu_i$ şeklinde ifade edilir.

Örnek 4.2.13:. G={1,-1} ve M = C R üzerinde olsun. O zaman M bir G-modüldür. $M = M_1 \oplus M_2$'dir, burada M_1=R, M_2=iR'dir. $\nu : M \to [0,1]$ şu şekilde tanımlanır:

ν (x+iy) =1, eğer x=y=0 ise,

=1/2, eğer x≠0, y=0 ise,

=1/3 y≠0 ise.

O zaman ν M üzerinde bulanık bir G-modüldür.

Ayrıca,

ν_1(x) =1, eğer x=0 ise,

=1/2, eğer x≠0 ise,

şeklinde tanımlanan $\nu_1 : M_1 \to [0,1]$ dönüşümü; ve

ν_2 (y) =1, eğer y=0 ise,

=1/2, eğer y≠0 ise,

şeklinde tanımlanan $\nu_2 : M_2 \to [0,1]$ dönüşümü, sırasıyla M_1 ve M_2 bulanık G-modüllerdir ve $\nu = \nu_1 \oplus \nu_2$.

4.3. Bulanık Tam İndirgenebilirlik

Bu kısımda, indirgenebilirlik, indirgenemezlik ve tamamen indirgenebilirlik kavramlarını bulanık G-modüllerine genişletiyoruz. Bu kısımda ele alınan bulanık G-modüllerinin basit olmadıkları (ör. Sabit olmayan) varsayılmaktadır.

Tanım 4.3.1: Eğer M bir G-modül olarak indirgenebilir ise, M üzerindeki bulanık bir μ G-modülü indirgenebilirdir denir. Aksi durumda indirgenemez olduğu söylenebilir. **[13]**.

Örnek 4.3.2: G = {1,-1} ve Q üzerinde vektör uzayı olarak kabul edilen M = C olsun. O zaman örnek 3.3.4'ten, M 'nin indirgenebilir olduğunu biliyoruz. $\mu : M \rightarrow [0,1]$,

μ (m) = 1, eğer m=0 ise,

= $1/2$, eğer m ($\neq$0) gerçel ise,

=$1/4$ aksi durumda, şeklinde tanımlanır.

O zaman μ M üzerinde bulanık bir G-modüldür, ve böylece indirgenebilirdir.

Örnek 4.3.3: p herhangi bir asal sayı, M = Z_p, G=$M - 0$ olsun. O zaman M küme işlemleri altında bir G-modüldür. M 'in G-altmodülleri yalnızca M ve {0} olduğundan M üzerindeki herhangi bir μ G-modülü indirgenemezdir.

Tanım 4.3.4: [13] M üzerindeki bir ν bulanık G-modülü eğer aşağıdaki şartları sağlarsa tamamen indirgenebilirdir denir.

(i) M tamamen indirgenebilir ise,

(ii) herhangi bir $M_1 \oplus M_2$ ayrışması ile ilgili olarak, M_i ' ler üzerinde ν_i bulanık G-altmodülleri mevcut ise, öyle ki $\wedge(\nu_1) = \wedge(\nu_2)$ ile $\nu = \nu_1 \oplus \nu_2$.

Örnek 4.3.5: G={1,-1} ve Q üzerinde M =Q$\sqrt{2}$ olsun. O zaman, M bir G-modüldür ve M 'nin G-altmodülleri yalnızca {0}, M_1=Q, $M_2 = \sqrt{2}$ Q={ b$\sqrt{2}$ / b ∈ Q} ve M = Q($\sqrt{2}$)'dir. Böylece, M ayrışmaları yalnızca $M = M \oplus 0$ ve $M = M_1 \oplus M_2$'dir ve bu nedenle M tamamen indirgenebilirdir. Burada $M = M_1 \oplus M_2$'dir. $\nu : M \rightarrow [0,1]$

$$\nu(a+b\sqrt{2}) = 1, \text{ eğer } a=b=0 \text{ ise,}$$

$$= 0.8, \text{ eğer } a\neq 0, b=0 \text{ ise,}$$

$$= 0.2, \text{ eğer } b\neq 0 \text{ ise,}$$

şeklinde tanımlanır. O zaman ν M üzerinde bulanık bir G-modüldür.

Ayrıca,

$$\nu_1(x) = 1, \text{ eğer } x=0 \text{ ise,}$$

$$=0.8, \text{ eğer } x\neq 0 \text{ ise,}$$

şeklinde tanımlanan $\nu_1 : M_1 \rightarrow [0,1]$ dönüşümü ve

$$\nu_2(y) = 1, \text{ eğer } y=0 \text{ ise,}$$

$$=0.2, \text{ eğer } y\neq 0 \text{ ise,}$$

şeklinde tanımlanan $\nu_2 : M_2 \rightarrow [0,1]$ dönüşümü, sırasıyla M_1 ve M_2 üzerinde bulanık G-modüllerdir , öyle ki $\nu = \nu_1 \oplus \nu_2$. Ayrıca $\wedge(\nu_1) \neq \wedge(\nu_2)$, ve bu yüzden ν bulanık G-modülü tamamen indirgenebilirdir.

Teorem 4.3.6: En az 2 boyutu olan herhangi bir sonlu boyutlu G-modülünün bulanık bir tamamen indirgenebilir G-modülü vardır.

İspat : M G – modül ve DimM = n olsun. $B = \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ M için bir taban olsun. O zaman M 'nin herhangi öz G-altmodülleri bazı B 'nin öz altkümelerinin aralığıdır. $\nu : M \to [0,1]$ şu şekilde tanımlanır;

$\nu(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + ... + c_{n-1}\alpha_{n-1} + c_n\alpha_n) = 1$ eğer tüm i'ler için $c_i = 0$ ise,

$= 1/2$ eğer $c_1 \neq 0, c_2 = c_3 = ... = c_n = 0$ ise,

$= 1/3$ eğer $c_2 \neq 0, c_3 = c_4 = ... = c_n = 0$ ise,

$= 1/4$ eğer $c_3 \neq 0, c_4 = c_5 = ... = c_n = 0$ ise

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

$= 1/n-1$ eğer $c_{n-2} \neq 0, c_{n-1} = c_n = 0$ ise,

$= 1/n$ eğer $c_{n-1} \neq 0, c_n = 0$ ise,

$= 1/n+1$ eğer $c_n \neq 0$ ise.

O zaman ν M üzerinde bulanık bir G-modüldür. ν 'nin gereken bulanık tamamen indirgenebilir G-modül olduğunu ispat edeceğiz.

M_1 M 'nin herhangi bir öz G-altmodülü olsun. $M_1 = Span\ \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$, burada $1 \leq r \leq n$ ve $1 \leq i_1, i_2, ..., i_r \leq n$ olsun.

O zaman $M = M_1 \oplus M_2$, burada M_2 kalan baz elemanlarının gerdiğidir..

(Ör.) $M_2 = Span\ \alpha_{i_{r+1}}, \alpha_{i_{r+2}}, ..., \alpha_{i_n}$ burada $1 \leq i_{r+1}, i_{r+2}, ..., i_n \leq n$

$\nu_1 : M_1 \to [0,1]$ ve $\nu_2 : M_2 \to [0,1]$ gönderimleri şu şekilde tanımlanır ;

$$\nu_1(c_{i_1}\alpha_{i_1} + c_{i_2}\alpha_{i_2} + ... + c_{i_r}\alpha_{i_r}) = 1 \quad \text{eğer } c_{i_1} = c_{i_2} = ... = c_{i_r} = 0 \text{ ise,}$$

$$= 1/i_1 + 1, \text{eğer } c_{i_1} \neq 0, c_{i_2} = c_{i_3} = ... = c_{i_r} = 0 \text{ ise,}$$

$$= 1/i_2 + 1, \text{eğer } c_{i_2} \neq 0, c_{i_3} = ... = c_{i_r} = 0 \text{ ise,}$$

……………………………………………

……………………………………………

$$= 1/i_r + 1, \text{ eğer } c_{i_r} \neq 0 \text{ ise;}$$

$$\nu_2(c_{i_{r+1}}\alpha_{i_{r+1}} + c_{i_{r+2}}\alpha_{i_{r+2}} + ... + c_{i_n}\alpha_{i_n}) = 1, \quad \text{eğer } c_{i_{r+1}} = c_{i_{r+2}} = ... = c_{i_n} = 0 \text{ ise,}$$

$$= 1/i_{r+2}, \text{eğer } c_{i_{r+1}} \neq 0, c_{i_{r+2}} = ... = c_{i_i} = 0 \text{ ise,}$$

$$= 1/i_{r+3}, \text{ eğer } c_{i_{r+2}} \neq 0, c_{i_{r+3}} = ... = c_{i_n} = 0 \text{ ise,}$$

……………………………………………

……………………………………………

$$= 1/i_{n+1}, \text{ eğer } c_{i_n} \neq 0 \text{ ise.}$$

O zaman ν_1 ve ν_2, sırasıyla M_1 ve M_2 üzerinde bulanık G-modüllerdir, öyle ki $\nu = \nu_1 \oplus \nu_2$ ve $\wedge(\nu_1) \neq \wedge(\nu_2)$. Böylece, ν ve dolayısıyla teorem tamamen indirgenebilirdir.

Örnek 4.3.7: G={1,-1} ve Q rasyoneller alanı olsun. M = Q($\sqrt{2}, \sqrt{3}$)= {a+b√2+c√3+d√6 / a,b,d,c ∈ Q} olsun. O zaman bir G-modüldür, öyle ki

Dim M =4 ve B= { α_1 = 1, $\alpha_2 = \sqrt{2}$, $\alpha_3 = \sqrt{3}$, $\alpha_4 = \sqrt{6}$ } M için Q üzerinde bir tabandır.

$\nu : M \to [0,1]$ gönderimi şu şekilde tanımlanır:

$\nu(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4) = 1$ eğer tüm i' ler için $c_i = 0$ ise,

$= 1/2$, eğer $c_1 \neq 0, c_2 = c_3 = c_4 = 0$ ise,

$= 1/3$, eğer $c_2 \neq 0, c_3 = c_4 = 0$ ise

$= 1/4$, eğer $c_3 \neq 0, c_4 = 0$ ise $= 1/5$,

eğer $c_4 \neq 0$ ise.

O zaman ν M üzerinde bulanık bir G-modüldür. M 'nin herhangi bir öz altmodülünü göz önüne alalım, $M_1 = Span\ \alpha_1, \alpha_3$. $M_2 = Span\ \alpha_2, \alpha_4$ olsun. O zaman $M = M_1 \oplus M_2$ olur. $\nu_1 : M_1 \to [0,1]$ ve $\nu_2 : M_2 \to [0,1]$ dönüşümleri şu şekilde tanımlanır:

$\nu_1(c_1\alpha_1 + c_3\alpha_3) = 1,$ eğer $c_1 = c_3 = 0$ ise,

$= 1/2$, eğer $c_1 \neq 0, c_3 = 0$ ise,

$= 1/4$, eğer $c_3 \neq 0$ ise.

$\nu_2(c_2\alpha_2 + c_4\alpha_4) = 1,$ eğer $c_2 = c_4 = 0$ ise,

$= 1/3,$ eğer $c_2 \neq 0, c_4 = 0$ ise,

$= 1/5,$ eğer $c_4 \neq 0$ ise.

O zaman ν_1 ve ν_2, sırasıyla M_1 ve M_2 üzerinde bulanık G-modüllerdir, öyle ki $\nu = \nu_1 \oplus \nu_2$ ve $\wedge(\nu_1) \neq \wedge(\nu_2)$.

Sonuç: Bir n-boyutlu (n ≥ 2) M G-modülü üzerindeki herhangi bir μ bulanık G-modülü, yalnızca eğer $|\wedge(\mu)| \geq 3$ ise tamamen indirgenebilirdir.

İspat: M ≥ 2 boyutunun tamamen indirgenebilir bir G-modülü olduğundan, en az bir ayrışmaya $M = M_1 \oplus M_2$ sahiptir.

Eğer μ M üzerinde bulanık tamamen indirgenebilir G-modül ise, M_i (i=1,2) üzerindeki э bulanık ν_1 G-modülü, öyle ki, $\wedge\nu_1 \neq \wedge\nu_2$ ve $|\wedge(\nu_1)| \geq 2$ ile $\mu = \nu_1 \oplus \nu_2$ olur. Bu sadece $|\wedge(\nu_1) \cup \wedge(\nu_2)| \geq 3$ ör, yalnızca $|\wedge(\mu)| \geq 3$ olursa mümkündür.

Önerme 4.3.8: Her bulanık tamamen indirgenebilir G-modülü bulanık indirgenebilirdir.

İspat: μ M üzerinde bulanık tamamen indirgenebilir bir G-modül olsun. O zaman M en az iki boyutta tamamen indirgenebilir G-modüldür. Bu nedenle, açıklama 3.3.10 ile, M indirgenebilirdir ve yukarıdaki sonuçtan $|\wedge(\mu)| \geq 3$. Böylece μ M üzerinde bulanık indirgenebilir bir G-modüldür.

Önerme 4.3.9: Herhangi bir M G-modülü üzerindeki μ bulanık G-modülü için ve her $r \in [0,1]$ için, $\mu_r(x) = r.\mu(x)$, $\forall$ x $\in M$ olarak tanımlanan μ_r : $M \to [0,1]$ ayrıca M üzerindeki bulanık bir G-modüldür.

Önerme 4.3.10: En az 2 boyutlu herhangi bir sonlu boyutlu G-modül üzerinde sonsuz sayıda tamamen indirgenebilir bulanık G-modül mevcuttur.

İspat: M, en az 2 boyutlu bir sonlu boyutlu G-modül olsun. Teorem 4.3.9' dan $\ni$ M üzerinde bulanık tamamen indirgenebilir bir ν G-modülü vardır. r ∈ [0,1] olsun, o zaman yukarıdaki önermeden,

$$\forall x \in M \text{ için } \nu_r(x) = r.\nu(x)$$

şeklinde tanımlanan ν_r M üzerinde bulanık bir G-modüldür.

Bulanık ν G-modül ve bulanık ν_i' ler G-altmodüllerin 4.3.6. teoremindeki tanımında, r olan payı 1 ile değiştirin. O zaman M üzerindeki ν_r bulanık G-modülü ve M_i' ler (ν_{i_r}(x)=r.ν_i (x), ∀x ∈ M_i) üzerindeki ν_{i_r}' ler bulanık G-altmodülleri 4.3.6. teoreminin sonuçlarını sağlamaktadır. Böylece, her r ∈ [0,1] için, ν_r M üzerinde bulanık tamamen indirgenebilir bir G-modüldür.

Açıklama 4.3.11:

(i) Eğer r=0 ise, o zaman ν_r tüm x ∈ M için sabit ν_r(x) = 0 bulanık G-modüldür. Dolayısıyla r = 0 ile ν_r tamamen indirgenebilir bulanık bir G-modül değildir.

(ii) Teorem 4.3.6' daki bulanık tamamen indirgenebilir G-modül, yukarıdaki önermede bulanık tamamen indirgenebilir bir ν_1 G-modüldür.

(iii) Teorem 4.3.6' daki bulanık tamamen indirgenebilir G-modülü ν ($=\nu_1$) ve yukarıdaki önermedeki ν_r bulanık tamamen indirgenebilir G-modülleri tüm r ∈ [0,1] için $\nu_r \subseteq \nu$' yi sağlamaktadır.

Sonuç: M en az 2 boyutlu sonlu boyutlu bir G-modül olsun. O zaman yukarıdaki önermede bulunan ν_r, r $\in$ [0,1] bulanık tamamen indirgenebilir G-modüllerin bulanık birleşimi bulanık tamamen indirgenebilir bir G-modüldür. Ancak ν_i' lerin bulanık kesişimi ve her ν_r' in bulanık tümleyeni bulanık tamamen indirgenebilir G-modüller değildirler.

Böylece ,

$$\mu = \sup_{r \in (0,1]} (\nu_r) = \nu_1 \qquad \text{ve} \qquad \eta = \inf_{r \in (0,1]} (\nu_r) = \nu_0 \quad \text{olur.}$$

O zaman yukarıdaki açıklamadan, $\mu = \nu_1$ bulanık tamamen indirgenebilir bir G-modüldür ve $\eta = \nu_0$ bulanık tamamen indirgenebilir bir G-modül değildir.

5.BÖLÜM

SONUÇ

Bu çalışmada klasik cebirsel yapılardan G-modül kavramının bulanık küme yapıları incelenmiştir. Özellikle bu çalışmada bulanık G-modüllerde indirgenebilir, indirgenemez ve tamamen indirgenebilir kavramları üzerinde durulmuştur. Bu yapıların cebirsel özellikleri incelenmiş ve bir takım örnekler verilmiştir. Bulanık G-modüller güncel bir konu olup günümüz matematikçileri tarafından çalışılmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Zadeh Lotfi. A. (1965). Fuzzy sets, Information and Control, 8, 338-353.

[2] Klir George J. and Yuan Bo, (1995). Fuzzy sets and Fuzzy Logic, Prentice-Hall,Inc.

[3] Herstein I.N. (1990). Topics in Algebra, Wiley Eastern, Second Edition.

[4] Hungerford T.W. (1984). Algebra, Springer – Verlay, New York .

[5] Biswas. R. (1990). Fuzzy Subgroups and anti fuzzy subgroups ,Fuzzy Sets and

Systems, 35, 120-124 .

[6] Mordeson John. N . and Malik D.S. (1998). Fuzzy Commutative Algebra, World scientific publishing.

[7] Lubczonok P. (1990). Fuzzy Vector spaces , Fuzzy sets and Systems , 38, 329-343.

[8] Nanda Sudarsan. (1990). Fuzzy Algebras over fuzzy fields, Fuzzy Sets and Systems, 37, 99-103.

[9] Curties Charles.W. and Reiner Irving, (1962). Representation Theory of finite group and Associative algebra.Inc.,

[10] Hoffman Keneth and Kunze Ray. (1990). Linear Algebra, Eastern Economy Second Edition.

[11] Maschke. H. (1898). Uber den arithmetischen Character der Coefficienten der Substitutionen endlicher linearer Substitutions gruppen. Math. Ann.50.

[12] Rosenfield A. (1971). Fuzzy groups , J. Math. Anal. Appl. , 35, 512-517.

[13] Souriar Sebastian. (2010). A study of Fuzzy G-Modules.