GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EVRENSEL MODÜLLERİN SİMETRİK MODÜLLERİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

YRD. DOÇ. DR. NECATİ OLGUN

YASEMİN GEZER

OCAK 2014

Evrensel Modüllerin Simetrik Modülleri

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN

Yasemin GEZER

Ocak 2014

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Evrensel Modüllerin Simetrik Modülleri
Öğrencinin, Adı Soyadı: Yasemin GEZER
Tez Savunma Tarihi: 16.01.2014

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Doç.Dr. Metin BEDİR
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof.Dr. Fahir Talay AKYILDIZ
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

(Yrd.Doç.Dr. Necati OLGUN)
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmzası
Yrd.Doç.Dr. Recep BİNDAK	....
Yrd.Doç.Dr. Mehmet ŞAHİN	....
Yrd.Doç.Dr. Necati OLGUN	....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Yasemin GEZER

ABSTRACT

SYMMETRİC MODULES ON UNIVERSAL MODULES

GEZER, Yasemin
M.Sc. in Department of Mathematics
Supervisor: Assist . Prof. Dr. Necati OLGUN
January 2014, 42 pages

The aim of this thesis , examine the symmetric derivation modules and with the help of these to obtain the results of universal modules. For that reason first modules, some definitions and important theorems of universal modules are given. After that symmetric modules and some properties of symmetric modules are studied.

First of all in thesis, the importance and historical development of universal modules are given.

Secondly modules and universal modules focuses on the basic definitions and theorems.

Then some definitions and properties of symmetric modules are given and some examples are axamined.

Finally, some results of symmetric derivations are obtained.

Key Words: Module, *R*-module, Free Module, Universal Module, Projective Module, Symmetric Module

ÖZ

EVRENSEL MODÜLLERİN SİMETRİK MODÜLLERİ

GEZER, Yasemin
Yüksek Lisans Tezi , Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN
Ocak 2014, 42 sayfa

Bu tezin amacı simetrik türev modüllerinin incelenmesi ve bunlar yardımıyla evrensel modüller hakkında sonuçlar elde edilmesidir. Bu yüzden öncelikle modül, evrensel modül tanımları ve bazı önemli teoremleri verilmiştir. Daha sonra simetrik modüller ve özellikleri incelenmiştir.

Tezde ilk olarak evrensel modüllerin tarihi gelişimi ve önemi verilmiştir.

İkinci olarak modül, evrensel modül ile ilgili temel tanım ve teoremler üzerinde durulmuştur.

Daha sonra, simetrik modüllerin tanımı ve özellikleri hakkında genel bilgiler verilip , bazı örnekler incelenmiştir.

Son olarak da simetrik türevlerle ilgili birtakım sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Modül, Evrensel Modül, Serbest Modül, *R*-modül, Projektif Modül, Simetrik Modül.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince gösterdiği yol ve yöntemlerle desteğini esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN' a ve bölümdeki diğer bütün hocalarıma, ayrıca bana maddi ve manevi her türlü desteği sağlayan aileme, arkadaşlarıma sonsuz teşekkürler ederim.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER LİSTESİ

$hd_R(M)$	M, R-modülünün homolojik boyutu
$(G_\lambda)_{\lambda\epsilon\Lambda}$	M' nin alt modüllerinin ailesi
$Ann_R(J)$	J' nin sıfırlayanı
$\tau(M)$	M modülünün torsion elemanlarının kümesi
$pd_R(M)$	M, R modülünün projektif boyutu
Der_R^n	n' inci dereceden türev modülü
$\Omega_n(R)$	n' inci dereceden evrensel türev modülü
$J_n(R)$	n' inci dereceden evrensel diferansiyel modül
D_R^n	n' inci dereceden diferansiyel operatör modülü
$S^2(R)$	R'nin ikinci dereceden simetrik kuvvet modülü
d_n	n' inci dereceden evrensel türev operatörü

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Evrensel Modüller, Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalında Değişmeli Cebir alanındaki en önemli konulardan birisidir. Evrensel Modüller ilk kez 1960 yılında Nakai Y. [1]tarafından tanımlanmıştır.

Bir Cebirin Yüksek Dereceden Diferansiyel Operatörlerinin Evrensel Modülleri ise ilk defa 1967 yılında Osborn H. [2] tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra benzer tanımlar 1969 yılında yapılan Heyneman ve Sweedler'in [3] çalışmalarında görülmektedir. Bu konuda en kapsamlı çalışma ise 1970 yılında Nakai Y. [4] tarafından yapılmıştır. Daha sonraki yıllarda ise Yüksek Dereceden Diferansiyel Operatörlerin Evrensel Modülleri ile ilgili çalışmaları Erdoğan A. [5] 1993 yılında yapmış olduğu çalışmasında görmekteyiz.

Evrensel Türev Modülleri ve Simetrik Türev tanımı ise ilk olarak 1968 yılında Osborn H. [6] tarafından yapılmıştır. Aynı konu üzerinde Vasconcelos W. [7] Heyneman ve Sweedler [8] gibi bir takım matematikçiler de çalışmıştır. Ve aynı zamanda Evrensel Türev Modülleri ve Simetrik Türev ile ilgili çalışmaları Olgun N. [9,10] ‘nin çalışmalarında görmekteyiz.

Bu tezde ilk olarak simetrik cebirlerin simetrik modülleri tanımı üzerinde durulmuştur. Bu tezin ikinci bölümünde modül, tam dizi, projektif modülün temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Bazı teoremler tanımları ile birlikte verilmiştir. Bu tezin üçüncü bölümünde Evrensel Modül tanımı ile bazı teoremleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise Simetrik Türev tanımı yapılmıştır. Simetrik Cebirlerin Simetrik modülleri ve bazı teoremleri, örnekleri verilmiştir. Son olarak birkaç sonuç elde edilmiştir.

BÖLÜM 2

Bu bölümde Evrensel Modüller ve Simetrik Türev' e temel oluşturacak şekilde modül tanımları ile bazı teoremleri Sharp, R.Y [11] kullanılarak verilmiştir.

MODÜLLER

2.1 Modüller

Tanım 2.1.1 R birimli ve değişmeli bir halka, S değişmeli bir grup olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan S ye R-modül denir.

$$R \times S \to S$$

$$(r, s) \to r.s$$

- **i)** $\forall\, r \in R \;\; ve \;\; s, s' \in S \; için \; r(s + s') = rs + rs'$
- **ii)** $\forall\, r, r' \in R \;\; ve \;\; s \in S \; için \; (r + r')s = rs + r's$
- **iii)** $\forall\, r, r' \in R \;\; ve \;\; s \in S \; için \; (rr')s = r(r's)$
- **iv)** $\forall s \in S \; için \; 1_R s = s$

Örnek 2.1.2 Bir T cismi üzerinde tanımlanan her modül, T üzerinde bir vektör uzayıdır.

Örnek 2.1.3 **1-** Her değişmeli grup, tamsayılar halkası üzerinde bir Z-modül olarak düşünülebilir. S değişmeli grup olsun.

$$\mu : Z \times S$$

$$(n, s) \to \mu(n, s) = ns = s + s \ldots \ldots \ldots .. + s, s \in S, n \in Z$$

modül yapısı vardır.

2-R değişmeli halka , $I \lhd R$ olsun;

- **i)** R nin kendisi R-modüldür.
- **ii)** I, R- modüldür
- **iii)** R/I bölüm halkası bir R-modüldür.

$$R \times R/I \to R/I$$
$$(r, m + I) \to rm + I$$

R-modül yapısı vardır.

3- R değişmeli halka ve $f: R \to M$ halka homomorfizma yapısı ile M bir R cebir olsun. O zaman M bir R-modüldür ve

$$R \times M \to M$$
$$(r, m) \to f(r)m$$

yapısı kurulur.

4- R, M değişmeli halka ve $f: R \to M$ halka homomorfizması olsun. Eğer G, M modül ise G aynı zamanda R-modüldür.

$$R \times G \to G$$
$$(r, g) \to f(r)g$$

2.2 Alt Modüller

Tanım 2.2.1 S R-modül ve $G \subseteq S$ olsun. G R-modül ise G ye S nin alt modülü denir.

Önerme 2.2.2 R değişmeli halka ve G, S R-modülünün bir alt kümesi olsun. O zaman G, S nin alt modülüdür $\Leftrightarrow \forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall r \in R$ için $g_1 + g_2 \in G$ ve $rg \in G$ dir.

Önerme 2.2.3 S nin alt modüllerinin boş olmayan herhangi bir ailesinin kesişimi yine bir alt modüldür.

R değişmeli halka, S R-modül, $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ S nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ tarafından üretilen S nin alt modüllerinin toplamını $\sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ ile gösterilir ve $\Lambda = \emptyset$ ise $\sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda = 0$ dır.

i) $\sum_{i=1} G_i = \{\sum_{i=1} g_i :\ g_i \in G_i\ için\ i = 1, \dots \dots .., n\}$

ii) $j_1, j_2, \dots \dots \dots .., j_n \in M$ olsun. $j_1, j_2, \dots \dots \dots .., j_n$ tarafından üretilen S nin alt modülü $Rj_1 + Rj_2 + \cdots \dots \dots .. + Rj_n$ dır.

Tanım 2.2.4 R değişmeli halka, S R-modül, $I,\ J \lhd R$ ve IS, S nin alt modülü olsun. $IS,\ rg\colon r \in I, g \in S$ kümesi tarafından üretilir. Aşağıdaki özelliklere sahiptir;

i) $IS = \{\sum_{i=1}^{n} r_i g_i\colon\ r_i \in I, g_i \in S, n \in IN\}$

ii) $I(JS) = (IJ)S$

iii) $a \in R$ için $(Ra)S$ nin yerine aS yazılır. $(Ra)S = \{as\colon\ s \in S\}$

Tanım 2.2.5 R değişmeli halka, S R-modül, G S nin bir alt modülü ve $J \subseteq S$ olacak şekilde $J \neq \emptyset$ olsun.

$$(G\colon J) = (G\colon_R J) = \{r \in R\colon\ \forall j \in J\ için\ rj \in G\}$$

ideal olarak tanımlanır.

Eğer N, J tarafından üretilen S nin alt modülü ise $(G\colon J) = (G\colon N)$ dir. $s \in S$ için $(G\colon \{s\})$ nin yerine $(G\colon s)$ yazılır.

Eğer $G = 0$ ise $(0\colon J) = \{r \in R\colon \forall j \in J\ için\ rj = 0\}$ kümesine J nin sıfırlayanı denir ve $Ann_R(J)$ ya da $Ann(J)$ ile gösterilir. Aynı zamanda $s \in S$ için s elemanının sıfırlayanı (0 : s) ile gösterilir.

Önerme 2.2.6 $I \lhd R$ değişmeli halka olsun. $I = Ann_R(R/I) = (0\colon_R 1 + I)$ dir.

Tanım 2.2.7 R değişmeli halka , S R-modül ve I, $\mathrm{I} \subset \mathrm{Ann(S)}$ olacak şekilde R nin ideali olsun. S üzerinde $\mathrm{R/I}$ modül yapısı kuralım.

$r, r' \in R\ \ r + I = r' + I\ \ ve\ \ s \in S$ olsun. O zaman $r - r' \in I \subseteq Ann(S)$ ve böylece $(r - r')s = 0$ ve $rs = r's$ olur.

Böylece $R/I \times S \to S \quad (r + I, s) \to rs$ olarak bir dönüşüm tanımlanabilir.

S üzerinde R-modül ve R/I modül yapıları aşağıdaki yolla yapılır.

Her $r \in R,\ s \in S$ için $(r + I)s = rs$

G modülü S nin bir alt R-modülüdür $\Leftrightarrow$ G modülü S nin bir alt R/I modülüdür.

Tanım 2.2.8 R değişmeli halka, S R-modül, G modülü S nin alt modülü ve

$I \lhd R$ olsun. O zaman $(G:_S I) = \{s \in S: \ \forall r \in I \ i\c{c}in \, rs \in G\} \ mod\ddot{u}l\ddot{u}$ S nin alt modülü ve $G \subseteq (G:_S I)$ dir.
Eğer $G = 0 \Rightarrow (0:_S I) = \{s \in S: \forall r \in I \ i\c{c}in \, rs = 0\}$ dır.

Tanım 2.2.9 R değişmeli halka, S R-modül ve G, S nin bir alt modülü olsun. (G , S toplamsal değişmeli grubunun bir alt grubudur.) $S/G = \{s + G: s \in S\}$ bölüm grubunu oluşturabiliriz.

$$s + G = s' + G \Leftrightarrow s - s' \in G$$

$$\forall s, x \in G \ i\c{c}in \ (s + G) + (x + G) = (s + x) + G$$

Böylece $R \times S/G \to S/G \ \ (r, s + G) \to rs + G \ \ S/G$ değişmeli grubu bir R-modüldür. Bu S R-modüle, S' nin bölüm modülü denir ve S/G ile gösterilir.

Önerme 2.2.10 R değişmeli halka, S R-modül ve $I \lhd R$ olsun. O zaman $I \subseteq Ann_R(S/IS)$ ve S/IS, her $r \in R$ ve $s \in S$ için $(r + I)(s + IS) = rs + IS$ ile R/I modül yapısına sahiptir.

Önerme 2.2.11 R değişmeli halka, S R-modül ve G, S nin bir alt modülü olsun.
i)G', S nin alt modülü yani $G' \supseteq G$ ise G'/G , S/G nin bir alt modülüdür.
ii)S/G nin herhangi bir alt modülü $G'' \supset G$ gibi S nin G'' bir alt modülü için G''/G şeklindedir.
iii)G_1, G_2 G yi içeren S nin alt modülleri $G_1 \subseteq G_2 \Leftrightarrow G_1/G \subseteq G_2/G$ dir.

Tanım 2.2.12 R değişmeli halka, S R-modül, $s \in S$ için $rs = 0$ olacak şekilde $0 \neq r \in R$ varsa s ye S nin torsion elemanı denir.

$$\tau(S) = \{s \in S: \ 0 \neq r \in R \ i\c{c}in \, rs = 0\}$$

Önerme 2.2.13 Eğer R tamlık bölgesi ise $\tau(S)$, S nin bir R-alt modülüdür ve $\tau(S)$ ye S R-modülünün torsion modülü denir.

$$\begin{matrix} R \times \tau(S) \to \tau(S) \\ (r, s) \to rs \end{matrix} \quad (r'(rs) = r(r's) = 0 \ \ r' \in R)$$

Not 2.2.14 Eğer R tamlık bölgesi değil ise $\tau(S)$ nin alt modül olması gerekmez.
Çünkü

$$x_1, x_2 \in \tau(S)$$
$$x_1 + x_2 \in \tau(S)$$
$$r_1 x_1 \neq r_2 x_2 = 0 \qquad (r_1 r_2)(x_1 + x_2) = 0$$

Örnek 2.2.15 $\overline{2}.\overline{3} = \overline{0}$ $\quad R = Z_6 \Rightarrow S(2) = \{0,2,4\} \quad \tau(S) = \{0,2,4\} R = Z_6 \Rightarrow$

$X = S_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R \right\}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \tau(X) \ \ fakat \quad A + B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \tau(X)$

Tanım 2.2.16

i) $\tau(S) = S$ ise S ye torsion modül denir.

ii) $\tau(S) = 0$ ise S ye torsion serbest modül denir.

Önerme 2.2.17 R tamlık bölgesi olsun. O zaman

1)$\tau(R) = 0$ dır.

2)R-modül ve $\tau(X) = X$ ve $S \subset X$ alt modül ise $\tau(S) = S$ dır.

3)$\tau(X) = 0$ ve $S \subset X$alt modül ise $\tau(S) = 0$ dır.

4)$\tau(\tau(X)) = \tau(X)$

2.3 R-Modül Homomorfizmaları

Tanım 2.3.1 S, T R değişmeli halka üzerinde modüller olsun. $f: S \to T$ dönüşümü

$$\forall\, s, s' \in S \ \ için \ \ f(s + s') = f(s) + f(s')$$
$$\forall\, s \in S \ ve \ \ r \in R \ \ için \ \ f(rs) = rf(s)$$

şartlarını sağlıyorsa bu dönüşüme R-modül homomorfizması denir. $Z: S \to T$ dönüşümü her $s \in S$ için $Z(s) = 0_N$ tanımlanarak bir R-modül homomorfizmasıdır ve buna sıfır homomorfizma denir ve *0* ile gösterilir.

Tanım 2.3.2 $f: S \to T$ birebir ve örten bir modül homomorfizması ise bu homomorfizmaya bir izomorfizma denir ve $S \simeq T$ ile gösterilir.

Önerme 2.3.3 R değişmeli halka S, T R-modül ve $f: S \to T$ bir izomorfizma olsun. O zaman $f^{-1}: T \to S$ de aynı zamanda bir izomorfizmadır ve $S \simeq T$ ile gösterilir. $S \simeq S$ ise S nin kendi üzerine id_S özdeş dönüşümdür.

Önerme 2.3.4 $f: S \to T$, $g: T \to G$ R-modül homomorfizmaları ise $g \circ f$ de R-modül homomorfizmasıdır. $f: S \to T$, $g: T \to G$ R-modül izomorfizması ise $g \circ f$ de R-modül izomorfizmasıdır.

Tanım 2.3.5 S R değişmeli halkası üzerinde modül ve G , S nin alt modülü olsun. Her $s \in S$ için $s \to f(s) = s + G$ olarak tanımlanan $f: S \to S/G$ dönüşümü doğal (kanonik) homomorfizma diye adlandırılır ve f örtendir.

Tanım 2.3.6 R değişmeli halka, S R-modül olsun.

i) T R-modül ve $f: S \to T$ R-modül homomorfizması ise f nin çekirdeği $Çekf = \{s \in S: f(s) = 0_N\}$ ile gösterilir. $Çekf$ S nin bir alt modülüdür. $Çekf = 0 \Leftrightarrow f$ monomorfizmadır. f nin görüntüsü Imf ile gösterilir ve $f(S) = \{f(s): s \in S\}$ kümesi T nin alt kümesidir. Imf T nin alt modülüdür.

ii) $f: S \to S/G$, $Çekf = G$ ve $S/0 \simeq S$ dır.

iii) $H \subseteq S$ alt kümesi S nin bir alt modülüdür. $\Leftrightarrow$ $Çekf = H$ olacak şekilde $f: S \to S'$ homomorfizması vardır .

$$(\Leftrightarrow \exists f: S \to S' \ homomorfizma \ Çekf = H \ dır)$$

Teorem 2.3.7 R değişmeli halka S, T R-modül ve $f: S \to T$ R-modül homomorfizması olsun. O zaman $\forall\, s \in S$ için $\bar{f}(s + Çekf) = f(s)$ olacak şekilde $\bar{f}: S/Çekf \to Imf$ izomorfizması vardır ve $S/Çekf \simeq Imf$ dir.

Teorem 2.3.8 R değişmeli halka, S R-modül, G, G', S nin $G' \supseteq G$ olacak şekilde alt modülleri olsun. G'/G, S/G R-modülünün bir alt modülüdür. O zaman burada $\forall\, s \in S$ için $\eta\big((s + G) + G'/G\big) = s + G'$ tanımıyla

$$\eta: ((S/G)/G'/G) \to (S/G')$$

izomorfizması vardır.

Teorem 2.3.9 Rdeğişmeli halka, S R-modül, G, H S nin alt modülleri olsun. O zaman burada $\forall g \in G$ $için$ $\varepsilon(g + G \cap H) = g + H$ tanımıyla

$$\varepsilon: G/(G \cap H) \to (G + H)/H$$

izomorfizması vardır.

Tanım 2.3.10 R değişmeli halka, G, S, T R -modüller ve $g: G \to S$ ve $f: S \to T$ R-modül homomorfizmaları olsun.

$$G \xrightarrow{g} S \xrightarrow{f} T$$

dizisinde $Img = Çekf$ ise bu diziye S R-modüllerin tam dizisi denir.
Genel olarak

$$\ldots\ldots \longrightarrow S_{t-1} \xrightarrow{d^{t-1}} S_t \xrightarrow{d^t} S_{t+1} \xrightarrow{d^{t+1}} S_{t+2} \longrightarrow \ldots\ldots.$$

dizisi her S_t de tam ise bu diziye R-modüllerin tam dizisi denir.
Örneğin $Imd_t = Çekd_{t+1}$ iken

$$S_{t-1} \xrightarrow{d_t} S_t \xrightarrow{d_{t+1}} S_{t+1}$$

dizisi tamdır.

Önerme 2.3.11 **1)** $0 \longrightarrow S \xrightarrow{f} T$ tamdır. $\Leftrightarrow$ $f, 1-1$ dir.

2) $S \xrightarrow{f} T \longrightarrow 0$ tamdır. $\Leftrightarrow$ f örtendir.

3) $T \subseteq S$ alt modül ise $0 \longrightarrow T \xrightarrow{i} S \longrightarrow S/T \xrightarrow{\pi} 0$ dizisi her zaman tamdır.

Genel olarak $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} S \longrightarrow 0$ dizisi için f birebir, g örten ve $Imf = Çekg$ ise bu diziye kısa tam dizi denir.

Tanım 2.3.12 R değişmeli halka $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ R-modüllerinin boş olmayan bir ailesi olsun. $\prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ kartezyen çarpım kümesi her

$(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (g'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda, r \in R$ için $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} + (g'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (g_\lambda + g'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$

$$r(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (rg_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

ile bir R-modüldür. Bu R-modüle $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ailesinin çarpımı denir.

$\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ ‘nin alt kümesi (her $\lambda \in \Lambda$ için $g_\lambda \in S_\lambda$ ile) $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ailesini içerir ve g_λ elemanlarının sonlu sayıdaki bileşenleri sıfırdan farklı olma özelliğiyle $\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ nin bir R-alt modülüdür ve $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ ile gösterilir. Buna $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ailesinin direkt toplamıdır denir.

$\Lambda' = 0$ ise $\bigoplus_{\lambda' \in \Lambda'} S_{\lambda'}$ ve $\prod_{\lambda' \in \Lambda'} S_{\lambda'}$ her ikisi de sıfır R-modüldür.

Λ sonlu ise $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda = \prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ elde ederiz.

Tanım 2.3.13 S, R değişmeli halkası üzerinde bir modül olsun. $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$S nin alt modüllerinin boş olmayan bir ailesi olsun. $S = \sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ ise her bir $s \in S$ elemanı $s = \sum_{i=1}^{n} g_{\lambda_i}$ formunda ifade edilebilir ki burada $\{\lambda_1, \dots \dots, \lambda_n\}$, her $i = 1, \dots \dots, n$ için $g_{\lambda_i} \in G_{\lambda_i}$ ve Λ nın sonlu bir alt kümesidir.

S, $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ alt modüllerinin ailesinin direkt toplamıdır ve her bir $s \in S$ elemanı için g_λ nın sonlu sayıda elemanı sıfırdan farklı ve her $\lambda \in \Lambda$ için $g_{\lambda_i} \in G_{\lambda_i} s = \sum_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda$ formunda tek türlü yazılabilir ve bu $S = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ ile gösterilir.

Önerme 2.3.14 S, $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ alt modül ailesinin direkt toplamıdır. $\Leftrightarrow$ $i) \sum_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda$ $ii) her\ bir\ v \in \Lambda$ için $G_v \cap \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq v}} G_\lambda = 0$ elde edilir.

Önerme 2.3.15 R değişmeli halka $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ R-modüllerinin boş olmayan bir ailesi olsun. Her bir $\mu \in \Lambda$ için

$$S'_\mu = \left\{ (g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda : \ g_\lambda = 0 \ her\ \lambda \in \Lambda \text{ ile } \lambda \neq \mu \ için \right\}$$

ile verilen $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ nin alt kümesi ile gösterilir. S'_μ, $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ nın bir alt modülüdür.

Tanım 2.3.16 $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ R değişmeli halkası üzerinde modüllerin boş olmayan bir ailesi ve $\mu \in \Lambda$ olsun.

$S = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ kümesinden S_μ üzerine $P_\mu : S \to S_\mu$ dönüşümü her $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in S$ için $P_\mu\big(((g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})\big) = g_\mu$ tanımıyla kanonik izdüşüm dönüşümüdür.

S_μ den $S = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ içine $g_\mu : S_\mu \to S$ dönüşümü her $\lambda \in \Lambda$ için $g_\lambda = 0$ ile $\lambda \neq \mu$ ve $\forall\, z \in S_\mu q_\mu = z$ için $q_\mu(z) = (g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tanımıyla kanonik dönüşümdür.
Her iki p_μ ve q_μ R-modül homomorfizmasıdır. p_μ bir epimorfizma ve q_μ bir monomorfizmadır.
i)$p_\mu \circ q_\mu = Id_{\mu\lambda}$
ii) Her $v \in \Lambda$ ile $v \neq \mu$ için $p_\mu \circ q_\mu = 0$
iii)Λ sonlu iken $\sum_{\lambda\in\Lambda} p_\mu \circ q_\mu = Id_\mu$ dır.

Önerme 2.3.17 $S, S_1, \dots\dots, S_n$ (ki burada $n \in N$ ile $n \geq 2$) R değişmeli halkası üzerinde modüller olsun.

$$0 \longrightarrow S_1 \xrightarrow{q_1} \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} S_i \xrightarrow{p_1} \overset{n}{\underset{i=2}{\oplus}} S_i \longrightarrow 0$$

dizisi bir tam dizidir ki burada q_1 kanonik ve her $(s_1, \dots\dots, s_n) \in \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} S_i$ için $p_1\big((s_1, \dots\dots, s_n)\big) = (s_1, \dots\dots, s_n)$ ile p_1 kanonik izdüşümdür.

Tanım 2.3.18 R değişmeli halka ve L, S, T R-modül,

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\ f\ } S \xrightarrow{\ g\ } T \longrightarrow 0$$

R modül homomorfizmalarının kısa tam dizisi olsun. Bu dizide $Imf = Çekg$, S nin bir direkt toplamı oluyorsa bu diziye split denir.
Yani; Dizi splittir $\Leftrightarrow S = Çekg \oplus G$ olacak şekilde S nin bir G alt modülü vardır.

Önerme 2.3.19
i) $0 \longrightarrow H \longrightarrow S \longrightarrow S/H \longrightarrow 0$ kısa tam dizidir.
ii) $0 \longrightarrow S_1 \longrightarrow S_1 \oplus S_2 \longrightarrow S_2 \longrightarrow 0$ split kısa tam dizidir.

Önerme 2.3.20 R değişmeli halka ve $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} S \xrightarrow{g} T \longrightarrow 0$ kısa tam dizi olsun. Bu dizi splittir $\Leftrightarrow$ $e \circ f = Id_L$ $\quad g \circ h = Id_T$ $\quad e \circ h = 0$
$f \circ e + h \circ g = 1d_S$ $olacak\ şekilde\ h: T \to S\ \ ve\ \ e: S \to L$
R-modül homomorfizmaları vardır.

2.4 Serbest R-Modüller

Tanım 2.4.1 R değişmeli halka, S $\{s_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ tarafından üretilen bir R-modül olsun. Her $s \in S$ ve $s = \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda s_\lambda$ olarak $r_\lambda \in R$, $s_\lambda \in S$ ile tek türlü yazılabiliyorsa $(s_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, S için bir tabandır.
S, bir tabana sahip olduğundan bir serbest R-modüldür. R nin kendisi 1_R elemanı tarafından bir tabana sahip olduğundan bir serbest R-modüldür. Sıfır R-modülü tabanı boş küme olan bir serbest R-modüldür.

Önerme 2.4.2 R değişmeli halka, S R-modül $\{s_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ S nin bir üreteç ailesi olsun. O zaman $\{s_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, $\sum_{\lambda \in \Lambda} Rs_\lambda$ için bir tabandır
$\Leftrightarrow \forall\ \lambda \in \Lambda$ için $\sum_\lambda r_\lambda s_\lambda = 0 \Rightarrow r_\lambda = 0$ dır.

Önerme 2.4.3 R değişmeli halka olsun.
i)$(R_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, her $\lambda \in \Lambda$ için $R_\lambda = R$ ile R-modüllerinin bir ailesi olsun. O zaman $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$,$(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tabanı ile serbest R-modüldür ki her $\mu \in \Lambda$ için $e_\mu \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ elemanı R_μ içinde kendisi 1 e eşit ve diğer bütün elemanları sıfırdır.

$$\{(1,0,0, \ldots \ldots)(0,1,0,0, \ldots \ldots)(0,0,1,0, \ldots \ldots \ldots), \ldots \ldots \ldots \ldots gibi\}$$

ii) S R-modül, S serbest R-modüldür $\Leftrightarrow S$, (i) deki türden bir R-modüle izomorftur. $S(s_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tabanına sahip ise $S \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ ki $R_\lambda = R$ dır. Burada $Rs_\lambda \simeq R$ dır. Böylece
$Rs_\lambda \cong R/(0: s_\lambda) \cong R$ dir.

$$\begin{aligned} f: R &\to Rs_\lambda \\ 1 &\to s_\lambda \end{aligned}$$ olmak üzere $R/(0: s_\lambda) \simeq Rs_\lambda \Rightarrow Rs_\lambda \simeq R$

Böylece $S \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ dır.

Önerme 2.4.4 *F*, $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tabanı ile bir serbest *R*-modül olsun. *S*, serbest *R*-modül ve $(s_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ S nin elemanlarının bir ailesi olsun. O zaman $\forall\, \lambda \in \Lambda$ için $f(e_\lambda) = s_\lambda$ tanımıyla $f: F \to S$ bir *R*-modül homomorfizması vardır.

İspat

S, $\{s_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tabanına sahip serbest *R*-modül olsun. $\Lambda = \emptyset$ ise açıktır. Böylece $\Lambda \neq \emptyset$ ise $\forall\, \lambda \in \Lambda$ için $Rs_\lambda = R$ ve $\forall (r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$ için $f((r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = \sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda s_\lambda$ tanımıyla $f: \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda \to S$ dönüşümüyle f bir *R*-modül homomorfizmasıdır.

S, $\{s_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ kümesi tarafından üretildiğinde f örtendir.

Önerme 2.4.5 S, R değişmeli halkası üzerinde bir modül olsun. O zaman *F* serbest *R*-modül olmak üzere $f: F \to S$ *R*-modül epimorfizması vardır.
Ayrıca *S*, sonlu eleman tarafından üretilirse *F*, *n* sonlu tabana sahip bir serbest *R*-modüldür.

Sonuç 2.4.6 $S \simeq F/Çekf$ dir.

Önerme 2.4.7 0 ≠*R* değişmeli halka, *F* sonlu taban ile serbest *R*-modül olsun. O zaman *F* için her taban sonludur ve *F* için iki tabanın elemanları aynı sayıya sahiptir. *F* için bir taban içindeki elemanların sayısına *F* nin rankı denir ve $rank(F)$ ile gösterilir.

Önerme 2.4.8 *R*≠ 0 değişmeli halka, *F* serbest *R*-modül ve *F* sonlu üretilmiş olsun. O zaman *F* için her taban sonludur.

2.5 Projektif R-Modüller

Tanım 2.5.1 X R-modül ve $g: A \to B$ örten R-modül homomorfizması olsun. $\forall f: X \to B$ R-modül homomorfizması için $h: X \to A$ R-modül homomorfizması varsa X R-modülüne projektif R-modül denir.

Teorem 2.5.2 Her serbest R-modül projektiftir.

Önerme 2.5.3 X projektif R-modül ve $X = S \oplus T$ ise S projektif R-modüldür.

Önerme 2.5.4 Projektif modüllerin direkt toplamı projektiftir.

Teorem 2.5.5 X R-modül, $i: X \to X$ için aşağıdaki durumlar denktir.

i) X projektiftir.

ii) Her $0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi splittir.

iii) X serbest R-modüllerinin direkt toplamına izomorftur.

iv) Her $g: A \to B$ epimorfizma için $g_x = Hom(i, G): Hom(X, A) \to Hom(X, B)$ aynı zamanda bir epimorfizmadır.

v) Her $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi için

$0 \longrightarrow Hom(X, A) \xrightarrow{f} Hom(X, B) \xrightarrow{g} Hom(X, C) \longrightarrow 0$

dizisi aynı zamanda kısa tam dizidir.

Önerme 2.5.6 S R-modül olsun. X projektif R-modül olmak üzere

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow X \xrightarrow{g} S \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi elde edilir.

Tanım 2.5.7 $S \in S_R$ nin projektif boyutu

$$pd(S) = pd_R(S) = min\{n: P^n[S] = 0\}$$

olarak tanımlanır. Eğer böyle bir n yoksa $pd(S) = \infty$ dur. S bir projektif R-modül ise $pd_R(S) = 0$ dır.

Önerme 2.5.8 $S \in S_R$ ve $n \geq 0$ için aşağıdaki durumlar denktir.

1) $pd_R(S) \leq n$

2) Herhangi projektif çözünürlüğü

$$P_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} P_{n-2} \longrightarrow \dots\dots\dots.. \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow S \longrightarrow 0$$

için $Çek\alpha_{n-1}$ projektiftir.

(n=0 durumunda S nin projektif olduğu kolaylıkla gösterilebilir.)

3) Bir sonlu projektif çözünürlüğü vardır.

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{\alpha_n} P_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \dots\dots\dots.. \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow S \longrightarrow 0$$

$pd_R(S) = n$ dir ancak ve ancak α_n split değildir.

Tanım 2.5.9 R halkasının global boyutu $gl.dimR = sup\{pd_R(S): S \in S_R\} \leq \infty$ olarak tanımlanır.

Teorem 2.5.10 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ R modüllerin tam dizi olsun. Eğer $pd(A)$, $pd(B)$, $pd(C)$ nin ikisi sonlu ise üçüncüsü de sonludur. Her bir durumda

(1)$pd(A) < pd(B)$ ise $pd(C) = pd(B)$ dir.

(2)$pd(A) > pd(B)$ ise $pd(C) = pd(A) + 1$ dir.

(3)$pd(A) = pd(B)$ ise $pd(C) \leq pd(A) + 1$ dir.

Sonuç 2.5.11 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ R-modüllerin tam dizisi olsun. $pd(B) \leq max\{pd(A), pd(C)\}$ iken $pd(C)$=$pd(A) + 1$ eşitliği vardır.

Sonuç 2.5.12 $0 = B_0 \subseteq B_1 \subseteq ...... \subseteq B_n = B$ B_R modülünün bir sonlu ayrışımı olsun. O zaman $pd(B) \leq max\{pd(B_{i+1}/B_i)\}$ dir.

Önerme 2.5.13 $S = \bigoplus_i S_i$ olsun. O zaman $pd(S) = sup\{pd(S_i)\}$ dir.

BÖLÜM 3

Bu bölümde Evrensel Modüllerin tanımı, özellikleri ve bazı sonuçları örneklerle birlikte Olgun N. [9] çalışmalarından yararlanılarak verilmiştir.

3.1 EVRENSEL MODÜLLER

Bu bölümde ilk olarak diferansiyel operatörlerin tanımı, özellikleri ve bazı sonuçları örneklerle birlikte verilerek konuya başlangıç yapılacaktır.

3.1.1 DİFERANSİYEL OPERATÖR MODÜLLERİ

Bu çalışmada R ile birim elemanlı ve değişmeli bir halkayı gösterelim.

R karakteristiği 0 olan bir k cismi üzerinde *k-cebir* ve M, N de R-modül olsun. $Hom_k(M,N)$, m∈M ve $r \in R$ için

$$rf: m \rightarrow rf(m)$$

$$fr: m \rightarrow fr(m) = f(rm)$$

tanımları ile $Hom_k(M,N)$ üzerinde bir ikili R-modül yapısı kurulabilir.

$$fr(m) - rf(m) = [f,r](m)$$

olarak gösterelim. $[f,r] \in Hom_k(M,N)$ olur.

Tanım 3.1.1 $Hom_R(M,N) = D_R^0(M,N) = \{f \in Hom_k(M,N) : [f,r] = 0\ \forall r \in R\}$ olarak tanımlayalım. $D_R^{n-1}(M,N)$ tanımlanmış olsun.

O zaman $D_R^n(M,N) = \{f \in Hom_k(M,N) : [f,r] \in D_R^{n-1}(M,N) \forall r \in R\}$ ile tanımlanır ve $D_R^n(M,N)$ ye n inci dereceden diferansiyel operatör modülü denir.

Önerme 3.1.2 $D_R^n(M,N)$ modülü $Hom_k(M,N)$ nin bir alt R-modülüdür.

Bu tezde her sıfırdan küçük n tamsayısı için $D_R^n(M,N) = 0$ olarak alacağız.

Tanımdan dolayı

$$D_R^0(M,M) = D_R^0(M) = End_R(M)$$

$$D_R^0(R,M) = Hom_R(R,M) \simeq M$$

$$D_R^0(R,R) \simeq R$$

Olduğu görülür.

Önerme 3.1.3 Her n tamsayısı için $D_R^n(M,N) \subseteq D_R^{n+1}(M,N)$ dir.

Diferansiyel operatör modülünün tanımına göre eğer ;

$f \in D_R^0(M,N) = Hom_R(M,N)$ ise her $r_0 \in R$ ve her m∈M için

$[f,r_0](m) = f(r_0 m) - r_0 f(m) = r_0 f(m) - r_0 f(m) = 0$ dır.

Yani f∈$D_R^0(M,N)$ ise $[f,r_0] = 0$

f∈$D_R^1(M,N)$ ise $\left[[f,r_0],r_1\right] = 0$

……

……

Benzer şekilde devam edilirse

$r_{0,}r_1, \dots \dots .., r_n$∈R için f∈$D_R^n(M,N)$ ise $\left[\dots..\left[[[f,r_0]r_1]\right]\dots..,r_n\right] = 0$ bulunur.

Bundan sonra $\left[\dots..\left[[[f,r_0]r_1]\right]\dots..,r_n\right]$ yi $[f,r_{0,}r_1,\dots \dots .,r_n]$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.1.4 M den N ye olan bütün k-lineer diferansiyel operatör uzayı

$$D_R\ (M,N) = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_R\ (M,N)$$

İle tanımlanır.

Şimdi diferansiyel operatör modülleri ile ilgili örnekler verelim.

Örnek 3.1.5 $R = k[x]$ olsun.

$$D_R^0(R) \simeq k[x]$$

$$D_R^1(R) = < \frac{\partial}{\partial x}, 1 >$$

$$D_R^2(R) =< \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, 1 >$$

$$D_R^n(R) =< 1, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \dots \dots, \frac{\partial^n}{\partial x^n} >$$

Örnek 3.1.6 R=k[x,y] olsun.

$$D_R^1(R) =< 1, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} >$$

$$D_R^2(R) =< 1, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} >$$

Örnek 3.1.7 R=k[$x_1, \dots \dots .., x_s$] polinomlar cebiri olsun. $D_R^1(R), bazı$

$$\left\{1, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial^2}{\partial x_2}, \dots \dots, \frac{\partial^s}{\partial x_s}\right\}$$

olan bir serbest R-modüldür. Bunu gösterelim.

D $\in D_R^1(R)\ ve\ K = \left\{1, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial^2}{\partial x_2}, \dots \dots, \frac{\partial^s}{\partial x_s}\right\}$ kümesi olsun. O zaman i=1,…….,s için $D({x_i}^n) = n x_i^{n-1} D(x_i)$ dir. Böylece

$$\left(D - \sum_{i=1}^{n} D(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(x_i^{i_1} \dots \dots . x_s^{i_s}\right) = 0$$

Ve buradan da

$$\left(D = \sum_{i=1}^{n} D(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

elde edilir. Böylece D∈<K> olduğu görülür. Bu küme aynı zamanda lineer bağımsız olduğundan K kümesi $D_R^1(R)$ nin bir bazıdır.

Örnek 3.1.8 R=k[$x_1, \dots \dots .., x_s$] polinomlar cebiri olsun.

$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} : R \to R \quad i,j = 1,2, \dots ., s$ için

$\partial_i(x_j) = \delta_{i,j}\ olsun.\ (\delta_{i,j}\ Kronecker\ deltası) x^\beta = x_1^{\beta_1}, \dots \dots, x_s^{\beta_s} \in R$ olmak üzere $|\alpha|'inci\ dereceden\ \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}, \dots \dots, \partial_s^{\alpha_s}$ kısmi türevi

$$\partial^{\alpha}(x^{\beta}) = \begin{cases} \dfrac{\beta!}{(\beta-\alpha)!} x^{\beta-\alpha} & ; \beta \geq \alpha \\ 0, & ; diğer\ yerlerde \end{cases}$$

R'nin $|\alpha|'inci\ dereceden\ diferansiyel\ operat$örüdür.

Tanım 3.1.9 $End_k(M)$ $nin\ bir\ k-alt\ cebiri\ olan\ D_R\ (M,M)$ $ye\ M$ üzerinde diferansiyel operatörler halkası denir ve $D_R\ (M)$ ile gösterilir.

Önerme 3.1.10 $f \in D_R^n(M,N)$ ve $g \in D_R^m(N,K)$ ise $gf \in D_R^{m+n}(M,K)$ dir.

R, k-cebir ve $R \otimes_k R$ de R halkasının yine kendisiyle olan tensör çarpımını göstersin. $r_i, r_j, s_i, s_j \in R$ olmak üzere

$$\left(\sum_i r_i \otimes_k s_i\right)\left(\sum_j r_j \otimes_k s_j\right) = \sum_{i.j} r_i r_j \otimes_k s_i\, s_j$$

Çarpımıyla $R \otimes_k R$ birim elemanlı değişmeli bir halkadır.

Her r,s $\in$ R, $f \epsilon Hom_k(M,N)$ ve m$\in$M için

$$(r \otimes_k s).f : m \to rf(sm)$$

Olarak tanımlanırsa , $Hom_k(M,N)$ üzerinde $R \otimes_k R$-modül yapısı kurulabilir.

$\theta: R \otimes_k R \to R\ çarpım\ dönüşümü$

$$\sum_i r_i \otimes s_i \to \sum_i r_i s_i$$

İle tanımlansın. Bu dönüşüm hem halka hem de R-modül homomorfizması ve aynı zamanda örtendir.

I=Çekθ olmak üzere

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \otimes_k R \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

R-modül homomorfizmalarının bir tam dizisi elde edilir.

Lemma 3.1.11 I ideali $\{1 \otimes r - r \otimes 1 \mid r \in R\}$ kümesi tarafından üretilir.

Önerme 3.1.12 M, N R-modül ve $f \in Hom_k(M,N)$ olsun. O zaman her $r \in R$ $ve\ her\ m \in M$ için

$$[f,r](m) = (1 \otimes r - r \otimes 1)f(m)$$

eşitliği vardır.

Yukarıdaki tanımlarda I ideali $R \otimes_k R$ nin bir ideali idi. O zaman I^{n+1} $de R \otimes_k R$ nin bir ideali olup

$$\left\{ \prod_{i=0}^{n} (1 \otimes r_i - r_i \otimes 1) : r_i \in R \right\}$$

kümesi tarafından üretilir.

$$\prod_{i=0}^{n} (1 \otimes r_i - r_i \otimes 1) = \sum_{T \subseteq \{0,1,\dots,n\}} (-1)^{|T|} (r_T \otimes r_T{}')$$

Formülü ile verilir. Bu formülde T' T nin $\{0,1,\dots\dots,n\}$ kümesine göre tümleyenini , $r_T = \prod_{k \in T} r_k$ yı ve $|T|$ de T nin eleman sayısını gösteriyor. $r_\emptyset = 1$ olarak alınacaktır.

Önerme 3.1.13 M, N R-modül ve $f \in Hom_k(M,N)$ olsun. O zaman f, n-inci dereceden diferansiyel operatördür $\Leftrightarrow I^{n+1}f = 0\ dır.$

Sonuç 3.1.14 $f \in D_R^n(M,N)$ olsun.

$f(r_0 r_1 \dots \dots \dots r_n \mathrm{m}) = \sum_{T \subseteq \{0,1,\dots,n\} ve |T| \geq 1} (-1)^{|T|-1} r_T\, f(r_T{}'m)$ dir.

3.2 EVRENSEL DİFERANSİYEL MODÜLLERİ

Bu bölümde , verilen herhangi bir M R-modül üzerinde evrensel modülün nasıl tanımlandığı gösterilecek. Evrensel modüllerin özellikleri, bazı örnekler ve diferansiyel modüllerle arasındaki bağıntılar verilecek.

M, R-modül ve r⊗s $\in R \otimes_k R$, $r' \otimes m \in R \otimes_k M$ için (r⊗s)(r'⊗m)=r$r' \otimes sm$ ile $R \otimes_k M$ üzerinde $R \otimes_k R$ -modül yapısı tanımlanabilir.

$$\mu: M \to R \otimes_k M$$

$$m \to \mu(m) = 1 \otimes m$$

Sağ çarpım dönüşümü ve

$$\pi: R \otimes_k M \to \frac{R \otimes_k M}{I^{n+1}(R \otimes_k M)}$$

$$r \otimes m \to \pi(r \otimes m) = \overline{r \otimes m}$$

doğal dönüşümü olsun.

Önerme 3.2.1 $\pi\mu: M \to \frac{R \otimes_k M}{I^{n+1}(R \otimes_k M)}$

$\pi\mu(m) = \overline{1 \otimes m}$ bileşkesi bir k-lineer dönüşümü olup n inci dereceden diferansiyel operatördür.

Tanım 3.2.2 M, N ve K R-modül ve $\Delta_n: M \to N$ n $inci$ dereceden diferansiyel operatör olsun. Herhangi bir n-inci dereceden $f: M \to K$ diferansiyel operatörü için

$$\begin{array}{ccc} M & \to & K \\ \Delta_n \downarrow & & \downarrow 1_R \\ N & \overset{\alpha}{\to} & K \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan $\alpha\Delta_n = f$ olacak şekilde bir tek $\alpha: N \to K$ R-modül homomorfizması varsa o zaman $\Delta_n: M \to N$ diferansiyel operatörüne n-inci dereceden evrensel diferansiyel operatörü denir.

Teorem 3.2.3 R k- cebir ve M, N R-modül olsun. O zaman

$$Hom_k(M, N) \simeq Hom_R(R \otimes_k M, N)$$

dir. Herhangi bir M R-modülü üzerinde n-inci dereceden evrensel diferansiyel operatörün varlığı aşağıdaki teoremde gösteriliyor.

Teorem 3.2.4

$$\pi\mu: M \to \frac{R \otimes_k M}{I^{n+1}(R \otimes_k M)}$$

$$\pi\mu(m) = \overline{1 \otimes m}$$

dönüşümü n-inci dereceden evrensel diferansiyel operatördür.

Tanım 3.2.5 $\frac{R\otimes_k M}{I^{n+1}(R\otimes_k M)}$ modülüne M üzerinde n inci dereceden evrensel diferansiyel modülü denir ve $J_n(M)$ ile gösterilir. Burada M R-modülü yerine R nin kendisi alınırsa $J_n(R) = \frac{R\otimes_k R}{I^{n+1}}$ olur.

Herhangi bir M R-modülü üzerinde n-inci dereceden evrensel diferansiyel modülün tekliği aşağıdaki teoremde gösteriliyor.

Teorem 3.2.6 M R-modül olsun. Eğer $J_n'(M), M$ $R-$modülünün başka bir evrensel diferansiyel modülü ise o zaman $J_n{}'(M) \simeq J_n(M)$ dir.

Şimdi evrensel modüllerle ilgili bazı örnekler verelim.

Örnek 3.2.7 R=$k[x_1, \dots \dots .., x_s]$ polinomlar cebiri ve $\delta_n: R \to J_n(R)$ n inci dereceden evrensel diferansiyel operatörü olsun. O zaman n inci dereceden evrensel diferansiyel modülü $J_n(R)$,

$$\{\delta_n(x^\alpha) \colon x^\alpha = x_1{}^{\alpha_1} \dots \dots \dots x_s{}^{\alpha_s}, |\alpha| \leq n\}$$

baz kümesi ile serbest bir R-modüldür.

Örnek 3.2.8 K=k$(x_1, \dots \dots .., x_s)$ cismi R=$k[x_1, \dots \dots .., x_s]$ nin kesir cismi olsun.

$\delta_n: K \to J_n(R)$ n-inci dereceden evrensel diferansiyel operatörü olmak üzere

$$\{\delta_n(x^\beta) \colon x^\beta = x_1{}^{\beta_1} \dots \dots \dots x_s{}^{\beta_s}, |\beta| \leq n \}$$

baz kümesi ile n inci dereceden evrensel diferansiyel modülü $J_n(K)$ bir K-vektör uzayıdır.

Teorem 3.2.9 *M ve N* R-modül olsun. O zaman

$$Hom_R(J_n(M), N) \simeq \in D_R^n(M, N)$$

R-modül homomorfizması vardır.

Sonuç 3.2.10 $Hom_R(J_n(R), R) \simeq \in D_R^n(R)$ R-modül homomorfizması vardır.

Teorem 3.2.11 M, R-modül olsun. O zaman $J_n(M) \simeq M \otimes_R J_n(R)$ dir.

3.3 Evrensel Türev Modülleri

Bu bölümde türev modülleri ve evrensel türev modüllerinin tanımı özellikleri ve evrensel diferansiyel modüllerle olan bağlantısı ve bazı sonuçlar verilecek.

Tanım 3.3.1 M , R-modül olsun.

$$Der_R^n(R,M) = \{D \in D_R^n(R,M) : \quad D(1) = 0\}$$

kümesine n inci dereceden türev modülü denir.

Teorem3.3.2 $J_n(R), n\ inci$ dereceden diferansiyel operatörün evrensel modülü olsun.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "1_R"] \arrow[d, "\Delta_n"'] & R \arrow[d, "1_R"] \\ J_n(R) \arrow[r, "f"] & \mathrm{R} \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir ve $J_n(R) \simeq Çek\ f \oplus R\Delta_n(1)$.

İspat

$1_R : R \to R$ birim dönüşüm ve $\Delta_n : R \to J_n(R)$ evrensel diferansiyel operatör olsun. $J_n(R)$ nin evrensellik özelliğinden dolayı

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "1_R"] \arrow[d, "\Delta_n"'] & R \arrow[d, "1_R"] \\ J_n(R) \arrow[r, "f"] & \mathrm{R} \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yapan $f\Delta_\mathrm{n} = 1_\mathrm{R}$ olacak şekilde bir tek $f : J_n(R) \to R$

R-modül homomorfizması vardır. Bu homomorfizma örten olup $f\Delta_\mathrm{n}(1) = 1$ dir.

R projektif R- modül olduğundan dolayı

$$
\begin{tikzcd}
 & R \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "1_R"] & \\
J_n(R) \arrow[r] & R \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

diyagramını değişmeli yapan g : $R \to J_n(R)$ $g(r) = r\Delta_{\mathrm{n}}(1)$ olacak şekilde R-modül homomorfizması tanımlanabilir.

$x \in J_n(R)$olsun. O zaman $x = \big(x - gf(x) + gf(x)\big)$ ve $f\big(x - gf(x)\big) = 0$ $dır.$

Böylece $J_n(R) = Çek\ f + R\Delta_{\mathrm{n}}(1)$ dir.

Eğer $x = r\Delta_{\mathrm{n}}(1) \in Çek\ f \cap R\Delta_n(1)$ $ise\ o\ zaman$ $0 = f(x) = rf\Delta_{\mathrm{n}}(1) =$ r ve

$x = 0\ dır. Yani\ Çekf \cap R\Delta_{\mathrm{n}}(1)$ dir.

Sonuç olarak $J_n(R) \simeq Çek\ f \oplus R\Delta_n(1)$ bulunur.

Önerme3.3.3 M, R-modül ve $p : J_n(R) \to Çekf$ doğal izdüşüm dönüşümü olsun.

(i) $p\Delta_{\mathrm{n}}$, n-inci dereceden diferansiyel operatördür ve $p\Delta_{\mathrm{n}}(1) = 0$ dır.

(ii) D $\in Der_R^n(R, M)$ $ise\ o\ zaman$

$$
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "D"] \arrow[d, "p\Delta_{\mathrm{n}}"'] & M \arrow[d, "1_{\mathrm{M}}"] \\
Çekf \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{M}
\end{tikzcd}
$$

diyagramını değişmeli yapan bir tek $\alpha : Çekf \to M$ R-modül homomorfizması vardır.

İspat

(i)$\Delta_{\mathrm{n}} \in D_R^n\big(R, J_n(R)\big)$ ve $p \in D_R^0(J_n(R), Çekf)$ olsun.

$$p\Delta_{\mathrm{n}} \in D_R^n(R, Çekf)\ dir.$$

p homomorfizmasının çekirdeği $R\Delta_n(1)$ $olup$ $p\Delta_n(1) = 0$ $dır.$

(ii)$D \in D_R^n(R,M)$ $olsun$ $.J_n(R)$ nin evrensellik özelliğinden dolayı

$\beta\Delta_n(1) = 0$ olacak şekilde

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\Delta_n"'] & M \arrow[d, "1_M"] \\
J_n(R) \arrow[r, "\beta"] & M
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan bir tek $\beta: J_n(R) \to M$ R-modül homomorfizması vardır.

Sonuç olarak

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "D"] \arrow[dr, "\Delta_n"'] & & M \\
& J_n(R) \arrow[ur, "\beta"] \arrow[r, "P"] & Çekf \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan bir tek α : $Çekf \to M$ $R-$modül homomorfizması vardır.

Bundan sonra $Çekf$ modülünü $\Omega_n(R)$ ile göstereceğiz.

Tanım3.3.4 $\Omega_n(R)$ modülüne R nin n inci dereceden evrensel türev modülü ve $p\Delta_n$ dönüşümüne de n-inci dereceden evrensel türev operatörü denir. Böylece $J_n(R)$ yi

$$\Omega_n(R) \oplus R \simeq J_n(R)$$

şeklinde iki modülün dik toplamı olarak yazılabileceğini göstermiş olduk.

BÖLÜM 4

4.1 SİMETRİK KUVVET MODÜLLERİ

Bu bölümde R üzerinde verilen bir M modülünün ikinci dereceden simetrik kuvvet modülünün tanımı verilecek. Bu tanımdan yola çıkılarak simetrik türev tanımı ve evrensel türev modülleriyle ilişkisi araştırılacak.

TANIMLAR VE EVRENSELLİK ÖZELLİĞİ

M ,*R* modül ,$M \otimes_R M$ ise M nin kendisiyle olan tensör çarpımı ve K da *x*,*y* ∈ M için $x \otimes y - y \otimes x$ elemanları tarafından üretilen $M \otimes_R M$ nin alt modülü olsun.

$$S^2(M) = (M \otimes_R M)/K$$

alalım.

Tanım 4.1.1 [9] $S^2(M)$ ye M nin ikinci dereceden simetrik kuvvet modülü denir.

Lemma 4.1.2 [9] (Evrensellik Özelliği) M , N *R*-modül olsun. θ:$M \times M$ ikili lineer dönüşüm olsun. O zaman aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan *fg*=θ olacak şekilde bir tek $f: S^2(M) \to N$ *R*-modül homomorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[d, "1"] \\ S^2(M) \arrow[r, dotted, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Önerme 4.1.3 [9] *T*, *R*-cebir ve *M de R*-modül olsun. O zaman $S^2(M) \otimes_R T$ ile $S^2(M \otimes_R T)$ izomorfiktir.

Önerme 4.1.4 [9] *M* rankı r olan serbest *R*-modül ise o zaman $S^2(M)$ de rankı

$$\binom{r+2-1}{r-1}$$

olan serbest *R*-modüldür.

Önerme 4.1.5 [9] M ve N R-modül olsun. O zaman $S^2(M+N)$ ile $S^{\,2}(M) \otimes_R S^2(N)$ izomorfiktir.

Benzer şekilde verilen herhangi bir M R-modülü için n inci dereceden simetrik kuvvet modülü tanımlanabilir.

4.2 Simetrik Türev Operatörleri

Tanım 4.2.1 [6] R, *k-cebir* olsun. $S^2(\Omega_1(R))$ cebiri $\sum_{\wp\geq 1} S^{\wp}(\Omega_1(R))$ tarafından üretilen Ω_1(R) üzerinde simetrik cebir olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $S(\Omega_1(R))$ den yine kendisi üzerine tanımlanan $\wp$ dönüşümüne simetrik türev operatörü denir.

i) $\wp\left(S^{\wp}(\Omega_1(R))\right) \subseteq S^{\wp+1}(\Omega_1(R))$

ii) $\wp$ birinci dereceden k lineer türev operatörüdür.

iii $\wp$ nun R ye $(R = S^0(\Omega_1(R)))$ kısıtlanışı birinci dereceden evrensel türev operatörüdür.

Örnek 4.2.2 R=$k[x,y]$ polinomlar cebiri olsun.

$\Omega_1(R)$ evrensel türev modülü serbest R-modül olup $\{dx, dy\}$ baz kümesi ile rankı ikidir. $S^2(\Omega_1(R))$ de $\{dx \otimes dx, dx \otimes dy, dy \otimes dy\}$ baz kümesi ile rankı üç olan serbest R-modüldür.

Ω_2(R) evrensel türev modülü serbest R –modül olup $\{dx, dy, dx^2, dy^2, dxy\}$ baz kümesi ile rankı beştir. $S^2(\Omega_2(R))$ de $\{dx \otimes dx, dx \otimes dy, dy \otimes dy, dx \otimes dx^2, dx \otimes dy^2, dx \otimes dxy, dy \otimes dx^2, dy \otimes dy^2, dx \otimes dxy, dx^2 \otimes dx^2, dx^2 \otimes dy^2, dx^2 \otimes dxy, dy^2 \otimes dy^2, dy^2 \otimes dxy, dxy \otimes dxy\}$ baz kümesi ile rankı on beş olan serbest R-modüldür.

Teorem 4.2.3 [9] R lokal halka olsun. $\Omega_n(R)$ serbest R-modüldür ancak ve ancak $S^2(\Omega_n(R))$ serbest R-modüldür.

İspat

$\Rightarrow$) Önerme 4.1.4 ten açıktır.

$\Leftarrow$)$S^2(\Omega_n(R))$ serbest R-modül olsun. Q, R nin kesir cismi olmak üzere

$S^2\big(\Omega_n(R)\big) \otimes Q \cong S^2(\Omega_n(Q)) \cong S^2(\Omega_n(R) \otimes Q)$ dır. $\Omega_n(Q)$ nun rankı s olmak üzere $S^2(\Omega_n(R))$ ‘nun rankı $\binom{s+1}{s-1}$ dir.

Diğer taraftan *m, R* nin maksimal ideali olmak üzere

$$S^2(\Omega_n(R)) \otimes R/m \cong S^2(\frac{\Omega_n(R)}{m\Omega_n(R)})$$

R/m vektör uzayıdır. $S^2(\frac{\Omega_n(R)}{m\Omega_n(R)})$ nin boyutu $\binom{s+1}{s-1}$ dir ancak ve ancak $\frac{\Omega_n(R)}{m\Omega_n(R)}$ nin boyutu s dir. Nakayama Lemmasından $\Omega_n(R)$ modülü s tane eleman tarafından üretilir. Böylece rank$\Omega_n(Q)$=$\mu\big(\Omega_n(R)\big)$ eşit olup $\Omega_n(R)$ serbest *R*-modüldür.

Teorem 4.2.4 [9] *R* afin tamlık bölgesi olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

i)*R* regüler halkadır.

ii)$\Omega_1(R)$ projektif *R*-modüldür.

iii)$S^2\big(\Omega_1(R)\big)$ projektif *R*-modüldür.

Önerme 4.2.5 [9] $0 \longrightarrow {}^{j^2}/_{j^3} \longrightarrow \Omega_2(R) \longrightarrow \Omega_1(R) \longrightarrow 0$

Tam dizisi vardır ve $S^2(\Omega_1(R))$ ile ${}^{j^2}/_{j^3}$ izomorfiktir.

İspat

$$0 \longrightarrow {}^{j^2}/_{j^3} \longrightarrow \Omega_2(R) \longrightarrow \Omega_1(R) \longrightarrow 0$$

$$(1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1)$$

$$=1 \otimes ab - ab \otimes 1 - a(1 \otimes b - b \otimes 1) - b(1 \otimes a - a \otimes 1)$$

Olduğundan $D_1a.D_1b, D_2ab - aD_2b - bD_2a$ olarak tanımlanırsa istenen izomorfizma bulunur.■

Teorem 4.2.6 [6] $S(\Omega_1(R))$ nin simetrik türevlerinin varlığı ile

$$0 \longrightarrow S^2(\Omega_1(R)) \longrightarrow \Omega_2(R) \xrightarrow{\theta} \Omega_1(R) \longrightarrow 0$$

Tam dizisinin split olması birbirine denktir.

İspat

$S(\Omega_1(R))$üzerinde simetrik türev tanımlanmış olsun. $D_1: R \to \Omega_1(R)$ ve $D: \Omega_1(R) \to S^2(\Omega_1(R))$ birinci dereceden türev operatörü olup bileşkesini aldığımız zaman $DD_1: R \to S^2(\Omega_1(R))$ ikinci dereceden türev operatörü olur. $\Omega_2(\mathrm{R})$ nin evrensellik özelliğinden dolayı aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan $hD_2 = DD_1$ olacak şekilde bir tek h R-modül homomorfizması vardır.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{DD_1} & S^2(\Omega_1(R)) \\ D_2 \downarrow & & \downarrow 1 \\ \Omega_2(R) & \xrightarrow{h} & S^2(\Omega_1(R)) \end{array}$$

$h(D_2ab - aD_2b - bD_2a) = hD_2ab - ahD_2b - bhD_2a$

$= D(D_1ab) - aDD_1b - bDD_1a$

$= D(aD_1b + bD_1a) - aDD_1b - bDD_1a$

$= (aDD_1b + D_1bDa) + (bDD_1a + D_1aDb) - aDD_1b - bDD_1a$

$= 2D_1aD_1b$

O halde h yerine $\frac{1}{2}h$ alırsak istenen split özelliği sağlanır.

Diğer taraftan $\eta: \Omega_2(R) \to S^2(\Omega_1(R))$ split özelliğini sağlasın.

$\sum_\alpha b_\alpha D_1 a_\alpha \in \Omega_1(R)$alalım. θ örten olduğundan $\theta(\sum_\alpha b_\alpha D_2 a_\alpha) = \sum_\alpha b_\alpha D_1 a_\alpha$ olacak şekilde bir $\sum_\alpha b_\alpha D_2 a_\alpha \in \Omega_2(R)$ vardır ve

$\eta(\sum_\alpha b_\alpha D_2 a_\alpha) = 0$ dır.

Eğer $\sum_\alpha b_\alpha D_2 a_\alpha = 0$ ise o zaman

$\sum_\alpha b_\alpha(1 \otimes a_\alpha - a_\alpha \otimes 1) = \sum_\alpha b_\alpha \otimes a_\alpha - b_\alpha a_\alpha \otimes 1 \in J^3$ dir.

Buradan

$$\sum_\alpha (1 \otimes b_\alpha a_\alpha - b_\alpha a_\alpha \otimes 1) - a_\alpha(1 \otimes b_\alpha - b_\alpha \otimes 1)$$
$$= \sum_\alpha (1 \otimes b_\alpha a_\alpha - b_\alpha a_\alpha \otimes 1) - a_\alpha \otimes b_\alpha + a_\alpha b_\alpha \otimes 1$$
$$= \sum_\alpha D_2 b_\alpha a_\alpha - a_\alpha D_2 b_\alpha = 0$$

bulunur.

Sonuç olarak $\sum_\alpha b_\alpha D_1\, a_\alpha \in \Omega_1(R)$ elemanını $\sum_\alpha D_2 b_\alpha\, a_\alpha - a_\alpha D_2 b_\alpha \in \Omega_2(R)$ elemanına taşıyan bir k-lineer dönüşüm vardır.

$\eta(\sum_\alpha b_\alpha D_2\, a_\alpha) = 0$ olduğu için $\Omega_1(R) \xrightarrow{\beta} \Omega_2(R) \xrightarrow{\eta} S^2(\Omega_1(R))$ dönüşümlerinin bileşkesini alırsak $\eta\beta = D\colon \Omega_1(R) \longrightarrow S^2(\Omega_1(R))$ ve $D(\sum_\alpha b_\alpha D_1\, a_\alpha) = \sum_\alpha D_1 b_\alpha D_1\, a_\alpha$ olup istenen simetrik türev operatörü bulunur. ■

Önerme 4.2.7 [9] $S(\Omega_1(R))$ üzerinde simetrik türevler var olsun. O zaman $\Omega_2(R)$ projektif modül ise $\Omega_1(R)$ de projektif modüldür.

İspat

Bir önceki önermeden dolayı $S(\Omega_1(R))$ üzerinde simetrik türevlerin varlığı ile

$$0 \to S^2(\Omega_1(R)) \to \Omega_2(\mathrm{R}) \to \Omega_1(\mathrm{R}) \to 0$$

Tam dizisinin split olması birbirine denkti. O halde splitlik özelliğinden dolayı $\Omega_2(R)$ ile $\Omega_1(R) \oplus S^2(\Omega_1(R))$ birbirine izomorfiktir. Bu ise bize $\Omega_1(R)$ nin projektif olduğunu gösterir. Burada aynı zamanda $S^2(\Omega_1(R))$ de projektif modüldür. ■

Önerme 4.2.8 [9] R k-cebir ve $S(\Omega_1(R))$ üzerinde simetrik türevler var olsun. $\Omega_2(R)$ projektif modüldür ancak ve ancak R regülerdir.

Sonuç 4.2.9 [9] $S(\Omega_1(R))$ üzerinde simetrik türevler var olsun. $\Omega_1(R)$'nin projektif boyutu sonsuz ise $\Omega_2(R)$ nin projektif boyutu da sonsuzdur.

4.3 Yüksek Mertebeden Simetrik Türevler

Lemma 4.3.1 [10] R, *k-cebir* olsun. $S^2\left(\Omega_q(R)\right)$ cebiri $\sum_{\wp \geq 0} S^{\wp}\left(\Omega_q(R)\right)$ tarafından üretilen $\Omega_q(\mathrm{R})$ üzerinde simetrik cebir olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $S\left(\Omega_q(R)\right)$ den yine kendisi üzerine tanımlanan $\wp$ dönüşümüne simetrik türev operatörü denir.

i) $\wp\left(S^{\wp}\left(\Omega_q(R)\right)\right) \subseteq S^{\wp+1}\left(\Omega_q(R)\right)$

ii) $\wp$ birinci dereceden k lineer türev operatörüdür.

iii) $\wp$ nun R ye ($R = S^0\left(\Omega_q(R)\right)$) kısıtlanışı birinci dereceden evrensel türev operatörüdür.

Örnek 4.3.2 [10] $R = k[x_1, \dots \dots \dots, x_s]$ boyutu s olan polinomlar cebiri olsun. O zaman $\Omega_q(R)$ baz kümesi $\{\ \delta_q\left(x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots \dots . x_s^{i_s}\right): \ i_1 + i_2 + \cdots .. + i_s \leq q\ \}$ ve rankı $\binom{q+s}{s} - 1$ olan serbest bir R-modüldür.

$S^2(\Omega_q(R))$ ise baz kümesi

$\{\ \delta_q\left(x_1^{i_1} \dots \dots . x_s^{i_s}\right) \otimes\ \delta_q\left(x_1^{i_1} \dots \dots . x_s^{i_s}\right): \ i_1 + i_2 + \cdots .. + i_s \leq q\ \}$
ve $t = \binom{q+s}{s} - 1$ olmak üzere rankı $\binom{t+1}{t-1}$ olan serbest bir R-modüldür.

Teorem 4.3.3 [10] R bir afin cebir olsun. O zaman her $q \geq 0$ için R-modüllerin

$$0 \longrightarrow Çek\theta \longrightarrow \Omega_{2q}(R) \xrightarrow{\theta} J_q\left(\Omega_q(R)\right) \longrightarrow \text{EşÇek}\theta \longrightarrow 0 \quad \text{olur.}$$

bir tam dizisi vardır.

İspat

R bir k-cebir ve $\Omega_q(R)$ de R'nin q-uncu mertebeden evrensel türev modülü olsun. $J_q\left(\Omega_q(R)\right)$, $\Delta_q: \Omega_q(R) \longrightarrow J_q\left(\Omega_q(R)\right)$ diferansiyel operatörü ile $\Omega_q(R)$ üzerinde q-uncu mertebeden evrensel diferansiyel modülüdür.

$\Omega_{2q}(R)$ 'nin evrensellik özelliğinden dolayı aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan $\theta\delta_{2q} = \Delta_q\delta_q$ olacak şekilde tekbir $\theta: \Omega_{2q}(R) \longrightarrow J_q\left(\Omega_q(R)\right)$ R-modül homomorfizması vardır.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\delta_q} & \Omega_q(R) \\ \downarrow \delta_{2q} & & \downarrow \Delta_q \\ \Omega_q(R) & \xrightarrow{\theta} & J_q\left(\Omega_q(R)\right) \end{array}$$

Homolojik özellikler kullanılırsa istenen tam dizi elde edilir.

Lemma 4.3.4 [10] R değişmeli bir k-cebiri olsun. O halde $S^2(R)$;

$\partial_2 : R \to \Omega_2(R)$ evrensel türeviyle R nin türevlerinin bir evrensel modülüdür. O halde;

$D_2 : \Omega_2(R) \to S^2\big(\Omega_2(R)\big)$, $D_2(\sum a_i \partial_2(b_i)) = \sum \partial_2(a_i) \vee \partial_2(b_i)$ dönüşümü $a_i, b_i \in R$ iken $\Omega_2(R)$ de 2. dereceden diferansiyel operatördür.

İspat

$R \otimes_k R \xrightarrow{\delta} S^2\big(\Omega_2(R)\big)$ k-lineer dönüşümü olarak tanımlansın.

$\delta\big(\sum a_i \otimes b_j\big) = \sum \partial_2(a_i) \vee \partial_2\big(b_j\big)$ve varsayalım ki

$$\sum a_i \otimes b_i \in I \,, \sum a_i{}' \otimes b_j{}', \sum a_i{}'' \otimes b_j{}'' \ \in I$$

$$\left(R \otimes_k R \xrightarrow{\emptyset} R \,, \emptyset\left(\sum a_i \otimes b_j\right) = \sum a_i b_j \quad I = Ker\emptyset\right)$$

O halde ;$\sum a_i b_j = \sum a_i{}' b_i{}' = \sum a_i{}'' b_i{}'' = 0$

$$Ker\emptyset = j \to R \otimes_k R \xrightarrow{\emptyset} R \ \delta_2 : R \to \Omega_2(R)$$

$$\begin{tikzcd} R \otimes_k R \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & S^2\big(\Omega_2(R)\big) \\ I/I^3 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\delta(I^3) = 0$

$$\sum a \otimes b \,, \sum a' \otimes b', \sum a'' \otimes b'' = \sum a'' \otimes b'' \ = 0$$

$\partial_2(ab) = a\partial_2(b) + b\partial_2(a)$=0

$\partial_2(a'b') = a'\partial_2(b') + b'\partial_2(a')$=0

$\partial_2\big(a''b''\big) = a''\partial_2\big(b''\big) + b''\partial_2\big(a''\big)$=0

$$
\begin{aligned}
\partial\left[\left(\sum a\otimes b\right)\left(\sum a'\otimes b'\right)\left(\sum a''\otimes b''\right)\right] &= \partial\left(\sum\left(\sum\left(\sum aa'a''\vee bb'b''\right)\right)\right)\\
&= \sum\sum\sum \delta\left(aa'a''\vee bb'b''\right)\\
&= \sum\sum\sum \partial_2\left(aa'a''\right)\vee\partial_2\left(bb'b''\right)\\
&= \sum\sum\sum\left[a\partial_2\left(a'a''\right)+a'\partial_2\left(aa''\right)+a''\partial_2(aa')-aa'\partial_2\left(a''\right)\right.\\
&\quad\left.-aa''\partial_2(a')-a'a''\partial_2(a)\right]\vee\left[b\partial_2\left(b'b''\right)+b'\partial_2\left(bb''\right)+b''\partial_2(bb')\right.\\
&\quad\left.-bb'\partial_2\left(b''\right)-bb''\partial_2(b')-b'b''\partial_2(b)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=\sum ab\,\partial_2\left(a'a''\right)\vee\partial_2\left(b'b''\right)+\sum ab'\,\partial_2\left(a'a''\right)\vee\partial_2\left(bb''\right)+\sum ab''\,\partial_2\left(a'a''\right)\vee\partial_2(bb')\\
-\sum abb'\,\partial_2\left(a'a''\right)\vee\partial_2\left(b''\right)-\sum abb''\,\partial_2\left(a'a''\right)\vee\partial_2(b')\\
-\sum ab'\,b''\partial_2\left(a'a''\right)\vee\partial_2(b)+\sum a'b\,\partial_2\left(aa''\right)\vee\partial_2\left(b'b''\right)\\
+\sum a'b'\,\partial_2\left(aa''\right)\vee\partial_2\left(bb''\right)+\sum a'b''\,\partial_2\left(aa''\right)\vee\partial_2(bb')\\
-\sum a'bb'\,\partial_2\left(aa''\right)\vee\partial_2\left(b''\right)-\sum a'bb''\,\partial_2\left(aa''\right)\vee\partial_2(b')\\
-\sum a'b'\,b''\partial_2\left(aa''\right)\vee\partial_2(b)+\sum a''b\,\partial_2(aa')\vee\partial_2\left(b'b''\right)\\
+\sum a''b'\,\partial_2(aa')\vee\partial_2\left(bb''\right)+\sum a''b''\,\partial_2(aa')\vee\partial_2(bb')\\
-\sum a''bb'\,\partial_2(aa')\vee\partial_2\left(b''\right)-\sum a''bb''\,\partial_2(aa')\vee\partial_2(b')\\
-\sum a''b'\,b''\partial_2(aa')\vee\partial_2(b)-\sum aa'b\,\partial_2\left(a''\right)\vee\partial_2\left(b'b''\right)\\
-\sum aa'b'\,\partial_2\left(a''\right)\vee\partial_2\left(bb''\right)-\sum aa'b''\,\partial_2\left(a''\right)\vee\partial_2(bb')\\
+\sum aa'b\,b'\partial_2\left(a''\right)\vee\partial_2\left(b''\right)+\sum aa'b\,b''\partial_2\left(a''\right)\vee\partial_2(b')\\
+\sum aa'\,b'b''\partial_2\left(a''\right)\vee\partial_2(b)-\sum aa''b\,\partial_2(a')\vee\partial_2\left(b'b''\right)\\
-\sum aa''b'\,\partial_2(a')\vee\partial_2\left(bb''\right)-\sum aa''b''\,\partial_2(a')\vee\partial_2(bb')\\
+\sum aa''b\,b'\partial_2(a')\vee\partial_2\left(b''\right)+\sum aa''b\,b''\partial_2(a')\vee\partial_2(b')\\
+\sum aa''\,b'b''\partial_2(a')\vee\partial_2(b)-\sum a'a''b\,\partial_2(a)\vee\partial_2\left(b'b''\right)\\
-\sum a'a''b'\,\partial_2(a)\vee\partial_2\left(bb''\right)-\sum a'a''b''\,\partial_2(a)\vee\partial_2(bb')\\
+\sum a'a''b\,b'\partial_2(a)\vee\partial_2\left(b''\right)+\sum a'a''b\,b''\partial_2(a)\vee\partial_2(b')\\
+\sum a'a''\,b'b''\partial_2(a)\vee\partial_2(b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\textstyle\sum ab'\,\partial_2(a'a'')\vee\partial_2(bb'') + \sum ab''\,\partial_2(a'a'')\vee\partial_2(bb') - \sum ab'\,b''\partial_2(a'a'')\vee\partial_2(b) + \\
&\textstyle\sum a'b\,\partial_2(aa'')\vee\partial_2(b'b'') + \sum a'b''\,\partial_2(aa'')\vee\partial_2(bb') - \sum a'bb''\,\partial_2(aa'')\vee\partial_2(b') + \\
&\textstyle\sum a''b\,\partial_2(aa')\vee\partial_2(b'b'') + \sum a''b'\,\partial_2(aa')\vee\partial_2(bb'') - \sum a''bb'\,\partial_2(aa')\vee\partial_2(b'') - \\
&\textstyle\sum aa'b''\,\partial_2(a'')\vee\partial_2(bb') - \sum aa''b'\,\partial_2(a')\vee\partial_2(bb'') - \sum a'a''b\,\partial_2(a)\vee\partial_2(b'b'')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \sum aa'b'b\,\partial_2(a'')\vee\partial_2(b'') + \sum aa'b'b''\,\partial_2(a'')\vee\partial_2(b) \\
+ \sum aa''b'b\,\partial_2(a')\vee\partial_2(b'') + \sum aa''b'b''\,\partial_2(a')\vee\partial_2(b) \\
+ \sum aa'b'b\,\partial_2(a'')\vee\partial_2(b'') + \sum aa''b'b''\,\partial_2(a')\vee\partial_2(b) \\
+ \sum aa''bb''\,\partial_2(a')\vee\partial_2(b') + \sum aa''b'b''\,\partial_2(a')\vee\partial_2(b) \\
- \sum aa'b'b''\,\partial_2(a'')\vee\partial_2(b) - \sum aa''b'b''\,\partial_2(a')\vee\partial_2(b) \\
+ \sum aa'b'b\,\partial_2(a'')\vee\partial_2(b'') + \sum aa'b''b\,\partial_2(a'')\vee\partial_2(b') \\
+ \sum a''a'b'b\,\partial_2(a)\vee\partial_2(b'') + \sum a'a''bb''\,\partial_2(a)\vee\partial_2(b') \\
+ \sum aa'b''b\,\partial_2(a'')\vee\partial_2(b') + \sum aa'b'b''\,\partial_2(a'')\vee\partial_2(b) \\
+ \sum a'a''bb''\,\partial_2(a)\vee\partial_2(b') + \sum a'a''b'b''\,\partial_2(a)\vee\partial_2(b) \\
- \sum aa'b''b\,\partial_2(a'')\vee\partial_2(b') - \sum a'a''bb''\,\partial_2(a)\vee\partial_2(b') \\
+ \sum aa''b'b\,\partial_2(a')\vee\partial_2(b'') + \sum a''a'b'b\,\partial_2(a)\vee\partial_2(b'') \\
+ \sum aa''bb''\,\partial_2(a')\vee\partial_2(b') + \sum a'a''bb''\,\partial_2(a)\vee\partial_2(b') \\
+ \sum aa''b'b\,\partial_2(a')\vee\partial_2(b'') + \sum aa''b'b''\,\partial_2(a')\vee\partial_2(b) \\
+ \sum a''a'b'b\,\partial_2(a)\vee\partial_2(b'') + \sum a'a''b'b''\,\partial_2(a)\vee\partial_2(b) \\
- \sum aa''b'b\,\partial_2(a')\vee\partial_2(b'') - \sum a''a'b'b\,\partial_2(a)\vee\partial_2(b'') \\
- \sum aa'b''b\,\partial_2(a'')\vee\partial_2(b') - \sum aa'b'b''\,\partial_2(a'')\vee\partial_2(b) \\
- \sum aa''b'b\,\partial_2(a')\vee\partial_2(b'') - \sum aa''b'b''\,\partial_2(a')\vee\partial_2(b) \\
- \sum a''a'b'b\,\partial_2(a)\vee\partial_2(b'') - \sum a'a''bb''\,\partial_2(a)\vee\partial_2(b') = 0
\end{aligned}
$$

Örnek 4.3.5 $R = k[x, y]$ polinomlar cebiri ve I da f= $y^2 - x^3$ elemanı tarafından üretilen R nin bir ideali olsun. $S = {}^{R}/_{I}$ alalım. S afin tamlık bölgesi olup boyutu 1 dir.

$\Omega_1(S) = {}^{F}/_{N}$:

F bazı $\{e_1 = \partial_1(y), e_2 = \partial_1(x)\}$ kümesi olan serbest S-modül ve

N, F nin $\alpha = 2ye_1 - 3x^2e_2$ elemanı tarafından üretilen alt modülü olsun.

Buradan $S^2(\Omega_2(R)) = {}^{S^2F}/_{\delta_N}$ öyle ki $S^2F = R(e_1 \vee e_2) \oplus R(e_1 \vee e_1) \oplus R(e_2 \vee e_2)$ serbest modül olup ve

$\delta_N = R(\alpha \vee e_1) \oplus R(\alpha \vee e_2)$ e

$\alpha \vee e_1 = 3x^2e_1 \vee e_2 = 2ye_1 \vee e_1 - 3x^2e_1 \vee e_2$

$\alpha \vee e_2 = 2ye_1 \vee e_2 = 2ye_1 \vee e_2 - 3x^2e_2 \vee e_2$

$S^2(\Omega_1(R)) \simeq {}^{R}/_{yR + x^2R} \simeq {}^{J_1(\Omega_1(R))}/_{Im\theta}$ olur.

$\Omega_2(R) = {}^{F}/_{N}$ öyle ki F serbest R-modül ve bazı

$\{\partial_2(x), \partial_2(y), \partial_2(xy), \partial_2(x^2), \partial_2(y^2)\}$ ile birlikte N ,F nin alt modülü olsun. Ve

$\Omega_1(R) = {}^{F}/_{N}$ F ,$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ *ile birlikte serbest* $R -$ *modül olsun.*

N F nin alt modülü şunlar tarafından üretilmiş olsun;

$\propto = e_5 - 3xe_4 + 3x^2e_1$

$\beta = xe_5 - 6x^2e_4 + 2ye_3 + 7x^3e_1 - 2xye_2$

$\gamma = -3xye_4 + 3ye_5 - 3x^2e_3 + 6x^2ye_1 - y^2e_2$ yani;

$\propto = \partial_2(y^2) - 3x\partial_2(x^2) + 3x^2\partial_2(x)$

$\beta = x\partial_2(y^2) - 6x^2\partial_2(x^2) + 2y\partial_2(xy) + 7x^3\partial_2(x) - 2xy\partial_2(y)$

$\gamma = 3y\partial_2(y^2) - 3xy\partial_2(x^2) - 3x^2\partial_2(xy) + 6x^2y\partial_2(x) - y^2\partial_2(y)$

$\Omega_2(R) = {}^{F}/_{N}$ $rank\Omega_2(R) = 2$ $N = R_\propto + R_\beta + R_\gamma$

$F = \langle \partial_2(x), \partial_2(y), \partial_2(xy), \partial_2(x^2) \rangle$

$J_1(\Omega_2(R))$=$R\Delta_1(\partial_2(x)) + R\Delta_1(\partial_2(y)) + R\Delta_1(x\partial_2(x))$+ $R\Delta_1(x\partial_2(y)) +$
$R\Delta_1(x\partial_2(x^2)) + R\Delta_1(x\partial_2(xy)) + R\Delta_1(y\partial_2(x))$+ $R\Delta_1(y\partial_2(y)) +$
$R\Delta_1(y\partial_2(x^2)) + R\Delta_1(y\partial_2(xy))$

$S^2(\Omega_2(R)) =$
$< \partial_2(x)\vee\partial_2(y), \partial_2(x)\vee\partial_2(xy), \partial_2(x)\vee\partial_2(x^2), \partial_2(x)\vee\partial_2(x), \partial_2(y)\vee\partial_2(y)$

$, \partial_2(y)\vee\partial_2(xy), \partial_2(y)\vee\partial_2(x^2), \partial_2(xy)\vee\partial_2(xy), \partial_2(xy)\vee\partial_2(x^2), \partial_2(x^2)\vee\partial_2(x^2) >$
ve şunlarla birlikte

$\propto \vee\partial_2(x)$	$\beta\vee\partial_2(x)$	$\gamma\vee\partial_2(x)$
$\propto \vee\partial_2(y)$	$\beta\vee\partial_2(y)$	$\gamma\vee\partial_2(y)$
$\propto \vee\partial_2(xy)$	$\beta\vee\partial_2(xy)$	$\gamma\vee\partial_2(xy)$
$\propto \vee\partial_2(x^2)$	$\beta\vee\partial_2(x^2)$	$\gamma\vee\partial_2(x^2)$

$$\propto \vee\partial_2(x) = \partial_2(y^2)\vee\partial_2(x) - 3x\partial_2(x^2)\vee\partial_2(x) + 3x^2\partial_2(x)\vee\partial_2(x)$$

$$\propto \vee\partial_2(y) = \partial_2(y^2)\vee\partial_2(y) - 3x\partial_2(x^2)\vee\partial_2(y) + 3x^2\partial_2(x)\vee\partial_2(y)$$

$$\propto \vee\partial_2(xy) = \partial_2(y^2)\vee\partial_2(xy) - 3x\partial_2(x^2)\vee\partial_2(xy) + 3x^2\partial_2(x)\vee\partial_2(xy)$$

$$\propto \vee\partial_2(x^2) = \partial_2(y^2)\vee\partial_2(x^2) - 3x\partial_2(x^2)\vee\partial_2(x^2) + 3x^2\partial_2(x)\vee\partial_2(x^2)$$

$$\begin{aligned}\beta\vee\partial_2(x) = {} & x\partial_2(y^2)\vee\partial_2(x) - 6x^2\partial_2(x^2)\vee\partial_2(x) + 2y\partial_2(xy)\vee\partial_2(x) \\ & + 7\partial_2(x)\vee\partial_2(x) - 2xy\partial_2(y)\vee\partial_2(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta\vee\partial_2(y) = {} & x\partial_2(y^2)\vee\partial_2(y) - 6x^2\partial_2(x^2)\vee\partial_2(y) + 2y\partial_2(xy)\vee\partial_2(y) \\ & + 7\partial_2(x)\vee\partial_2(y) - 2xy\partial_2(y)\vee\partial_2(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta\vee\partial_2(xy) = {} & x\partial_2(y^2)\vee\partial_2(xy) - 6x^2\partial_2(x^2)\vee\partial_2(xy) + 2y\partial_2(xy)\vee\partial_2(xy) \\ & + 7\partial_2(x)\vee\partial_2(xy) - 2xy\partial_2(y)\vee\partial_2(xy)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta\vee\partial_2(x^2) = {} & x\partial_2(y^2)\vee\partial_2(x^2) - 6x^2\partial_2(x^2)\vee\partial_2(x^2) + 2y\partial_2(xy)\vee\partial_2(x^2) \\ & + 7\partial_2(x)\vee\partial_2(x^2) - 2xy\partial_2(y)\vee\partial_2(x^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma\vee\partial_2(x) = {} & 3y\partial_2(y^2)\vee\partial_2(x) - 3xy\partial_2(x^2)\vee\partial_2(x) - 3x^2\partial_2(xy)\vee\partial_2(x) \\ & + 6x^2y\partial_2(x)\vee\partial_2(x) - y^2\partial_2(y)\vee\partial_2(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma\vee\partial_2(y) = {} & 3y\partial_2(y^2)\vee\partial_2(y) - 3xy\partial_2(x^2)\vee\partial_2(y) - 3x^2\partial_2(xy)\vee\partial_2(y) \\ & + 6x^2y\partial_2(x)\vee\partial_2(y) - y^2\partial_2(y)\vee\partial_2(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma\vee\partial_2(xy) = {} & 3y\partial_2(y^2)\vee\partial_2(xy) - 3xy\partial_2(x^2)\vee\partial_2(xy) - 3x^2\partial_2(xy)\vee\partial_2(xy) \\ & + 6x^2y\partial_2(x)\vee\partial_2(xy) - y^2\partial_2(y)\vee\partial_2(xy)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma\vee\partial_2(x^2) = {} & 3y\partial_2(y^2)\vee\partial_2(x^2) - 3xy\partial_2(x^2)\vee\partial_2(x^2) - 3x^2\partial_2(xy)\vee\partial_2(x^2) \\ & + 6x^2y\partial_2(x)\vee\partial_2(x^2) - y^2\partial_2(y)\vee\partial_2(x^2)\end{aligned}$$

$$\partial_2(f) = \partial_2(y^2) - 3x\partial_2(x^2) + 3x^2\partial_2(x) = 0$$

$$\partial_2(xf) = x\partial_2(y^2) - 6x^2\partial_2(x^2) + 2y\partial_2(xy) + 7x^3\partial_2(x) - 2xy\partial_2(y) = 0$$

$\partial_2(yf) = -3xy\partial_2(x^2) + 3y\partial_2(y^2) - 3x^2\partial_2(xy) + 6x^2y\partial_2(x) - y^2\partial_2(y) = 0$

$J_1(\Omega_2(R))$=$R\Delta_1(\partial_2(x)) + R\Delta_1(\partial_2(y)) + R$

$$= \left\langle \begin{matrix} \Delta_1(\partial_2(x)), \Delta_1(\partial_2(y)), \Delta_1(x\partial_2(x)), \Delta_1(x\partial_2(y)), \Delta_1(x\partial_2(x^2)), \Delta_1(x\partial_2(xy)), \\ \Delta_1(y\partial_2(x)), \Delta_1(y\partial_2(y)), \Delta_1(y\partial_2(x^2)), \Delta_1(y\partial_2(xy)), \Delta_1(\partial_2(xy)), \Delta_1(\partial_2(x^2)) \end{matrix} \right\rangle$$

$J_1(\Omega_2(R))$= $R\Delta_1(\partial_2(x)) + R\Delta_1(\partial_2(y)) + R, \Delta_1(x\partial_2(x)) + R\Delta_1(x\partial_2(y)) +$
$R\Delta_1(y\partial_2(x)) + R\Delta_1(y\partial_2(y)) + R\Delta_1(y\partial_2(xy)) + R\Delta_1(x\partial_2(x^2)) +$
$R\Delta_1(y\partial_2(x^2)) + R\Delta_1(\partial_2(xy)) + R\Delta_1(\partial_2(x^2)) + R\Delta_1(x\partial_2(xy))$

Örnek 4.3.6 *R*=k[x,y,z] polinomlar cebiri ve *I* da $f = y^2 - xz$ elemanı tarafından üretilen R nin bir ideali olsun. $S = {}^{R}/_{I}$ alalım. S afin tamlık bölgesi olup boyutu 2 dir. $\Omega_1(S) = {}^{F}/_{N}$:
F bazı $\{e_1 = \partial_1(x), e_2 = \partial_1(y), e_3 = \partial_1(z)\}$ kümesi olan serbest *S* modül ve *N* de $\alpha = 2ye_2 - ze_1 - xe_3$ elemanı tarafından üretilen alt modülü olsun. Buradan $S^2(\Omega_1(R)) = {}^{S^2F}/_{\delta_N}$ öyle ki $S^2F = R(e_1 \vee e_2 \vee e_3)$ serbest modül olup ve

$\delta_N = R(\alpha \vee e_1) \oplus R(\alpha \vee e_2) \oplus R(\alpha \vee e_3)$ olur.

$\alpha \vee e_1 = 2ye_2 \vee e_1 - ze_1 \vee e_1 - xe_3 \vee e_1$

$\alpha \vee e_2 = 2ye_2 \vee e_2 - ze_1 \vee e_2 - xe_3 \vee e_2$

$\alpha \vee e_3 = 2ye_2 \vee e_3 - ze_1 \vee e_3 - xe_3 \vee e_3$

$\partial_1(f) = \partial_1(y^2 - xz) = 2y\partial_1(y) - z\partial_1(x) - x\partial_1(z)$ olup $\Omega_1(S) \cong F/N$ dir.

$rank\Omega_1(S) = 2$ olduğu için $rankN = rankF - rank\Omega_1(S) = 3 - 2 = 1$ olur.
Buradan da $\Omega_1(S)$ için serbest çözünürlük olup $hd\Omega_1(S) \leq 1$ bulunur.

$\Omega_2(S)$: $F = \{\partial_2(x^2), \partial_2(xz), \partial_2(xy), \partial_2(z^2), \partial_2(yz), \partial_2(y^2), \partial_2(x), \partial_2(y), \partial_2(z)\}$ kümesi olan serbest S-modül ve $N = \{\partial_2(f), \partial_2(xf), \partial_2(yf), \partial_2(zf)\}$ elemanları tarafından üretilen F 'nin bir alt modülü olsun. Buradan

$\partial_2(f) = \partial_2(y^2) - \partial_2(xz)$

$$\partial_2(xf) = -z\partial_2(x^2) + x\partial_2(y^2) + 2y\partial_2(xy) - 2x\partial_2(xz) + xz\partial_2(x) - 2xy\partial_2(y) + x^2\partial_2(z)$$

$$\partial_2(yf) = 3y\partial_2(y^2) - z\partial_2(xy) - y\partial_2(xz) - x\partial_2(yz) + yz\partial_2(x) - 2xz\partial_2(y) + xy\partial_2(z)$$

$$\partial_2(zf) = z\partial_2(y^2) - x\partial_2(z^2) - 2z\partial_2(xz) + 2y\partial_2(yz) - z^2\partial_2(x) - 2yz\partial_2(y) + xz\partial_2(z)$$

$J_2(S) \cong F/N$ dir. Burada $\partial_2(f) = \alpha, \partial_2(xf) = \beta, \partial_2(yf) = \gamma, \partial_2(zf) = \theta$ alalım.

$$\alpha \vee \partial_2(x^2)\beta \vee \partial_2(x^2)\gamma \vee \partial_2(x^2)\theta \vee \partial_2(x^2)$$

$$\alpha \vee \partial_2(xz)\beta \vee \partial_2(xz)\gamma \vee \partial_2(xz)\ \theta \vee \partial_2(xz)$$

$$\alpha \vee \partial_2(xy)\beta \vee \partial_2(xy)\gamma \vee \partial_2(xy)\theta \vee \partial_2(xy)$$

$$\alpha \vee \partial_2(z^2)\beta \vee \partial_2(z^2)\gamma \vee \partial_2(z^2)\theta \vee \partial_2(z^2)$$

$$\alpha \vee \partial_2(yz)\beta \vee \partial_2(yz)\ \gamma \vee \partial_2(yz)\theta \vee \partial_2(yz)$$

$$\alpha \vee \partial_2(x)\beta \vee \partial_2(x)\ \gamma \vee \partial_2(x)\ \ \theta \vee \partial_2(x)$$

$$\alpha \vee \partial_2(y)\ \beta \vee \partial_2(y)\gamma \vee \partial_2(y)\ \ \theta \vee \partial_2(y)$$

$$\alpha \vee \partial_2(z)\ \beta \vee \partial_2(z)\gamma \vee \partial_2(z)\ \ \theta \vee \partial_2(z)$$

$$S^2\big(\Omega_2(R)\big) = \langle \partial_2(x^2) \vee \partial_2(xz), \partial_2(x^2) \vee \partial_2(xy), \partial_2(x^2) \vee \partial_2(z^2), \partial_2(x^2) \vee \partial_2(yz), \partial_2(x^2) \vee \partial_2(x), \partial_2(x^2) \vee \partial_2(y), \partial_2(x^2) \vee \partial_2(z), \partial_2(xz) \vee \partial_2(z^2), \partial_2(xz) \vee \partial_2(xy), \partial_2(xz) \vee \partial_2(yz), \partial_2(xz) \vee \partial_2(x), \partial_2(xz) \vee \partial_2(y), \partial_2(xz) \vee \partial_2(z), \partial_2(xy) \vee \partial_2(z^2), \partial_2(xy) \vee \partial_2(yz), \partial_2(xy) \vee \partial_2(x)\partial_2(xy) \vee \partial_2(y), \partial_2(xy) \vee \partial_2(y), \partial_2(xy) \vee \partial_2(z), \partial_2(z^2) \vee \partial_2(yz), \partial_2(z^2) \vee \partial_2(x), \partial_2(z^2) \vee \partial_2(y), \partial_2(z^2) \vee \partial_2(z), \partial_2(yz) \vee \partial_2(x), \partial_2(xz) \vee \partial_2(y), \partial_2(xz) \vee \partial_2(z), \partial_2(x) \vee \partial_2(y), \partial_2(x) \vee \partial_2(z), \partial_2(y) \vee \partial_2(z)\rangle$$

$$\alpha \vee \partial_2(x^2) = \partial_2(y^2) \vee \partial_2(x^2) - \partial_2(xz) \vee \partial_2(x^2)$$

$$\alpha \vee \partial_2(xz) = \partial_2(y^2) \vee \partial_2(xz) - \partial_2(xz) \vee \partial_2(xz)$$

$$\alpha \vee \partial_2(xy) = \partial_2(y^2) \vee \partial_2(xy) - \partial_2(xz) \vee \partial_2(xy)$$

$$\alpha \vee \partial_2(z^2) = \partial_2(y^2) \vee \partial_2(z^2) - \partial_2(xz) \vee \partial_2(z^2)$$

$$\alpha \vee \partial_2(yz) = \partial_2(y^2) \vee \partial_2(yz) - \partial_2(xz) \vee \partial_2(yz)$$

$$\alpha \vee \partial_2(x) = \partial_2(y^2) \vee \partial_2(x) - \partial_2(x) \vee \partial_2(x)$$

$$\alpha \vee \partial_2(y) = \partial_2(y^2) \vee \partial_2(y) - \partial_2(xz) \vee \partial_2(y)$$

$$\alpha \vee \partial_2(z) = \partial_2(y^2) \vee \partial_2(z) - \partial_2(xz) \vee \partial_2(z)$$

$$\begin{aligned}\beta \vee \partial_2(x^2) = &-z\partial_2(x^2) \vee \partial_2(x^2) + x\partial_2(y^2) \vee \partial_2(x^2) + 2y\partial_2(xy) \vee \partial_2(x^2) \\ &- 2x\partial_2(xz) \vee \partial_2(x^2) + xz\partial_2(x) \vee \partial_2(x^2) - 2xy\partial_2(y) \vee \partial_2(x^2) \\ &+ x^2\partial_2(z) \vee \partial_2(x^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta \vee \partial_2(xz) = &-z\partial_2(x^2) \vee \partial_2(xz) + x\partial_2(y^2) \vee \partial_2(xz) + 2y\partial_2(xy) \vee \partial_2(xz) \\ &- 2x\partial_2(xz) \vee \partial_2(xz) + xz\partial_2(x) \vee \partial_2(xz) - 2xy\partial_2(y) \vee \partial_2(xz) \\ &+ x^2\partial_2(z) \vee \partial_2(xz)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta \vee \partial_2(xy) = &-z\partial_2(x^2) \vee \partial_2(xy) + x\partial_2(y^2) \vee \partial_2(xy) + 2y\partial_2(xy) \vee \partial_2(xy) \\ &- 2x\partial_2(xz) \vee \partial_2(xy) + xz\partial_2(x) \vee \partial_2(xy) - 2xy\partial_2(y) \vee \partial_2(xy) \\ &+ x^2\partial_2(z) \vee \partial_2(xy)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta \vee \partial_2(z^2) = &-z\partial_2(x^2) \vee \partial_2(z^2) + x\partial_2(y^2) \vee \partial_2(z^2) + 2y\partial_2(xy) \vee \partial_2(z^2) \\ &- 2x\partial_2(xz) \vee \partial_2(z^2) + xz\partial_2(x) \vee \partial_2(z^2) - 2xy\partial_2(y) \vee \partial_2(z^2) \\ &+ x^2\partial_2(z) \vee \partial_2(z^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta \vee \partial_2(yz) = &-z\partial_2(x^2) \vee \partial_2(yz) + x\partial_2(y^2) \vee \partial_2(yz) + 2y\partial_2(xy) \vee \partial_2(yz) \\ &- 2x\partial_2(xz) \vee \partial_2(yz) + xz\partial_2(x) \vee \partial_2(yz) - 2xy\partial_2(y) \vee \partial_2(yz) \\ &+ x^2\partial_2(z) \vee \partial_2(yz)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta \vee \partial_2(x) = &-z\partial_2(x^2) \vee \partial_2(x) + x\partial_2(y^2) \vee \partial_2(x) + 2y\partial_2(xy) \vee \partial_2(x) \\ &- 2x\partial_2(xz) \vee \partial_2(x) + xz\partial_2(x) \vee \partial_2(x) - 2xy\partial_2(y) \vee \partial_2(x) \\ &+ x^2\partial_2(z) \vee \partial_2(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta \vee \partial_2(y) = &-z\partial_2(x^2) \vee \partial_2(y) + x\partial_2(y^2) \vee \partial_2(y) + 2y\partial_2(xy) \vee \partial_2(y) \\ &- 2x\partial_2(xz) \vee \partial_2(y) + xz\partial_2(x) \vee \partial_2(y) - 2xy\partial_2(y) \vee \partial_2(y) \\ &+ x^2\partial_2(z) \vee \partial_2(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta \vee \partial_2(z) = &-z\partial_2(x^2) \vee \partial_2(z) + x\partial_2(y^2) \vee \partial_2(z) + 2y\partial_2(xy) \vee \partial_2(z) \\ &- 2x\partial_2(xz) \vee \partial_2(z) + xz\partial_2(x) \vee \partial_2(z) - 2xy\partial_2(y) \vee \partial_2(z) \\ &+ x^2\partial_2(z) \vee \partial_2(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma \vee \partial_2(x^2) = &\,3y\partial_2(y^2) \vee \partial_2(x^2) - z\partial_2(xy) \vee \partial_2(x^2) - y\partial_2(xz) \vee \partial_2(x^2) \\ &- x\partial_2(yz) \vee \partial_2(x^2) + yz\partial_2(x) \vee \partial_2(x^2) - 2xz\partial_2(y) \vee \partial_2(x^2) \\ &+ xy\partial_2(z) \vee \partial_2(x^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma \vee \partial_2(xz) = &\,3y\partial_2(y^2) \vee \partial_2(xz) - z\partial_2(xy) \vee \partial_2(xz) - y\partial_2(xz) \vee \partial_2(xz) \\ &- x\partial_2(yz) \vee \partial_2(xz) + yz\partial_2(x) \vee \partial_2(xz) - 2xz\partial_2(y) \vee \partial_2(xz) \\ &+ xy\partial_2(z) \vee \partial_2(xz)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma \vee \partial_2(xy) = &\,3y\partial_2(y^2) \vee \partial_2(xy) - z\partial_2(xy) \vee \partial_2(xy) - y\partial_2(xz) \vee \partial_2(xy) \\ &- x\partial_2(yz) \vee \partial_2(xy) + yz\partial_2(x) \vee \partial_2(xy) - 2xz\partial_2(y) \vee \partial_2(xy) \\ &+ xy\partial_2(z) \vee \partial_2(xy)\end{aligned}$$

$$\gamma \vee \partial_2(z^2) = 3y\partial_2(y^2) \vee \partial_2(z^2) - z\partial_2(xy) \vee \partial_2(z^2) - y\partial_2(xz) \vee \partial_2(z^2) - x\partial_2(yz) \vee \partial_2(z^2) + yz\partial_2(x) \vee \partial_2(z^2) - 2xz\partial_2(y) \vee \partial_2(z^2) + xy\partial_2(z) \vee \partial_2(z^2)$$

$$\gamma \vee \partial_2(yz) = 3y\partial_2(y^2) \vee \partial_2(yz) - z\partial_2(xy) \vee \partial_2(yz) - y\partial_2(xz) \vee \partial_2(yz) - x\partial_2(yz) \vee \partial_2(yz) + yz\partial_2(x) \vee \partial_2(yz) - 2xz\partial_2(y) \vee \partial_2(yz) + xy\partial_2(z) \vee \partial_2(yz)$$

$$\gamma \vee \partial_2(x) = 3y\partial_2(y^2) \vee \partial_2(x) - z\partial_2(xy) \vee \partial_2(x) - y\partial_2(xz) \vee \partial_2(x) - x\partial_2(yz) \vee \partial_2(x) + yz\partial_2(x) \vee \partial_2(x) - 2xz\partial_2(y) \vee \partial_2(x) + xy\partial_2(z) \vee \partial_2(x)$$

$$\gamma \vee \partial_2(y) = 3y\partial_2(y^2) \vee \partial_2(y) - z\partial_2(xy) \vee \partial_2(y) - y\partial_2(xz) \vee \partial_2(y) - x\partial_2(yz) \vee \partial_2(y) + yz\partial_2(x) \vee \partial_2(y) - 2xz\partial_2(y) \vee \partial_2(y) + xy\partial_2(z) \vee \partial_2(y)$$

$$\gamma \vee \partial_2(z) = 3y\partial_2(y^2) \vee \partial_2(z) - z\partial_2(xy) \vee \partial_2(z) - y\partial_2(xz) \vee \partial_2(z) - x\partial_2(yz) \vee \partial_2(z) + yz\partial_2(x) \vee \partial_2(z) - 2xz\partial_2(y) \vee \partial_2(z) + xy\partial_2(z) \vee \partial_2(z)$$

$$\theta \vee \partial_2(x^2) = z\partial_2(y^2) \vee \partial_2(x^2) - x\partial_2(z^2) \vee \partial_2(x^2) - 2z\partial_2(xz) \vee \partial_2(x^2) + 2y\partial_2(yz) \vee \partial_2(x^2) - z^2\partial_2(x) \vee \partial_2(x^2) - 2yz\partial_2(y) \vee \partial_2(x^2) + xz\partial_2(z) \vee \partial_2(x^2)$$

$$\theta \vee \partial_2(xz) = z\partial_2(y^2) \vee \partial_2(xz) - x\partial_2(z^2) \vee \partial_2(xz) - 2z\partial_2(xz) \vee \partial_2(xz) + 2y\partial_2(yz) \vee \partial_2(xz) - z^2\partial_2(x) \vee \partial_2(xz) - 2yz\partial_2(y) \vee \partial_2(xz) + xz\partial_2(z) \vee \partial_2(xz)$$

$$\theta \vee \partial_2(xy) = z\partial_2(y^2) \vee \partial_2(xy) - x\partial_2(z^2) \vee \partial_2(xy) - 2z\partial_2(xz) \vee \partial_2(xy) + 2y\partial_2(yz) \vee \partial_2(xy) - z^2\partial_2(x) \vee \partial_2(xy) - 2yz\partial_2(y) \vee \partial_2(xy) + xz\partial_2(z) \vee \partial_2(xy)$$

$$\theta \vee \partial_2(z^2) = z\partial_2(y^2) \vee \partial_2(z^2) - x\partial_2(z^2) \vee \partial_2(z^2) - 2z\partial_2(xz) \vee \partial_2(z^2) + 2y\partial_2(yz) \vee \partial_2(z^2) - z^2\partial_2(x) \vee \partial_2(z^2) - 2yz\partial_2(y) \vee \partial_2(z^2) + xz\partial_2(z) \vee \partial_2(z^2)$$

$$\theta \vee \partial_2(yz) = z\partial_2(y^2) \vee \partial_2(yz) - x\partial_2(z^2) \vee \partial_2(yz) - 2z\partial_2(xz) \vee \partial_2(yz) + 2y\partial_2(yz) \vee \partial_2(yz) - z^2\partial_2(x) \vee \partial_2(yz) - 2yz\partial_2(y) \vee \partial_2(yz) + xz\partial_2(z) \vee \partial_2(yz)$$

$$\theta \vee \partial_2(x) = z\partial_2(y^2) \vee \partial_2(x) - x\partial_2(z^2) \vee \partial_2(x) - 2z\partial_2(xz) \vee \partial_2(x) + 2y\partial_2(yz) \vee \partial_2(x) - z^2\partial_2(x) \vee \partial_2(x) - 2yz\partial_2(y) \vee \partial_2(x) + xz\partial_2(z) \vee \partial_2(x)$$

$$\theta \vee \partial_2(y) = z\partial_2(y^2) \vee \partial_2(y) - x\partial_2(z^2) \vee \partial_2(y) - 2z\partial_2(xz) \vee \partial_2(y) + 2y\partial_2(yz) \vee \partial_2(y) - z^2\partial_2(x) \vee \partial_2(y) - 2yz\partial_2(y) \vee \partial_2(y) + xz\partial_2(z) \vee \partial_2(y)$$

$$\theta \vee \partial_2(z) = z\partial_2(y^2) \vee \partial_2(z) - x\partial_2(z^2) \vee \partial_2(z) - 2z\partial_2(xz) \vee \partial_2(z) + 2y\partial_2(yz) \vee \partial_2(z) - z^2\partial_2(x) \vee \partial_2(z) - 2yz\partial_2(y) \vee \partial_2(z) + xz\partial_2(z) \vee \partial_2(z)$$

$$J_1(\Omega_2(R)) = R\Delta_1(\partial_2(x)) + R\Delta_1(\partial_2(y)) + R\Delta_1(\partial_2(z)) + R$$

$$=< \Delta_1(\partial_2(x)), \Delta_1(\partial_2(y)), \Delta_1(\partial_2(z)), \Delta_1(x\partial_2(x)), \Delta_1(x\partial_2(y)), \Delta_1(x\partial_2(z)),$$

$$\Delta_1(x\partial_2(x^2)), \Delta_1(x\partial_2(z^2)), \Delta_1(x\partial_2(xy)), \Delta_1(x\partial_2(yz)), \Delta_1(x\partial_2(xz)), \Delta_1(y\partial_2(x)),$$

$$\Delta_1(y\partial_2(y)), \Delta_1(y\partial_2(z)), \Delta_1(y\partial_2(x^2)), \Delta_1(y\partial_2(z^2)), \Delta_1(y\partial_2(xy)), \Delta_1(y\partial_2(yz)),$$

$$\Delta_1(y\partial_2(xz)), \Delta_1(z\partial_2(x)), \Delta_1(z\partial_2(y)), \Delta_1(z\partial_2(z)), \Delta_1(z\partial_2(x^2)), \Delta_1(z\partial_2(z^2)),$$

$$\Delta_1(z\partial_2(xy)), \Delta_1(z\partial_2(yz)), \Delta_1(z\partial_2(xz)), \Delta_1(\partial_2(x^2)), \Delta_1(\partial_2(z^2)), \Delta_1(\partial_2(xy)),$$

$$\Delta_1(\partial_2(yz)), \Delta_1(\partial_2(xz)) >$$

$$\begin{aligned}
J_1(\Omega_2(R)) = {} & R\Delta_1(\partial_2(x)) + R\Delta_1(\partial_2(y)) + R\Delta_1(\partial_2(z)) + R\Delta_1(x\partial_2(x)) \\
& + R\Delta_1(x\partial_2(y)) + R\Delta_1(x\partial_2(z)) + R\Delta_1(x\partial_2(x^2)) + R\,\Delta_1(x\partial_2(z^2)) \\
& + R\Delta_1(x\partial_2(xy)) + R\Delta_1(x\partial_2(yz)) + R\Delta_1(x\partial_2(xz)) + R\Delta_1(y\partial_2(x)) \\
& + R\Delta_1(y\partial_2(y)) + R\Delta_1(y\partial_2(z)) + R\Delta_1(y\partial_2(x^2)) + R\Delta_1(y\partial_2(z^2)) \\
& + R\Delta_1(y\partial_2(xy)) + R\Delta_1(y\partial_2(yz)) + R\Delta_1(y\partial_2(xz)) + R\Delta_1(z\partial_2(x)) \\
& + R\Delta_1(z\partial_2(y)) + R\Delta_1(z\partial_2(z)) + R\Delta_1(z\partial_2(x^2)) + R\Delta_1(z\partial_2(z^2)) \\
& + R\Delta_1(z\partial_2(xy)) + R\Delta_1(z\partial_2(yz)) + R\Delta_1(z\partial_2(xz)) + R\Delta_1(\partial_2(x^2)) \\
& + R\Delta_1(\partial_2(z^2)) + R\Delta_1(\partial_2(xy)) + R\Delta_1(\partial_2(yz)) + R\Delta_1(\partial_2(xz))
\end{aligned}$$

BÖLÜM 5

SONUÇLAR

Cebirsel kümeler ve onların koordinat halkaları ile ilgili sonuçları ispatlamak için kullanılan yöntemlerden birisi de evrensel diferansiyel operatörleri çalışmaktır. Bu şekilde cebirsel kümelerle ilgili problemler modül teorisine taşınmış olur.

Bu tezde simetrik modül kavramı ile ilgili temel tanım ve sonuçlar verilerek evrensel türev modüllerinin simetrik kuvvet modülleri incelenmiş ve konu ile ilgili bir takım örnekler verilmiştir. Evrensel modüller konusu değişmeli cebir alanında hala güncelliğini korumakta olup matematikçiler tarafından çalışılmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Nakai, Y. (1961) . On The Theory of Differantials in Commutative Rings, J.Math.Soc. Japon 13, 63-84.

[2] Osborn,H. (1967). Modules of Diferantials I, Math Ann. 170, 221-244.

[3] Sweedler, M.E. ve Heyneman, R.G. (1969). Affine Hopf Algebras, J. Algebra 13, 192-241.

[4] Nakai, Y.(1970). High Order Derivations, *Osaka Journal of Mathematic*, **7**, 1-27.

[5] Erdoğan, A. (1993). Differential Operators and Their Universal Modules, Phd.Thesis, University of Leeds.

[6] Osborn,H. (1968). Modules of Diferantials II, Math Ann. 175, 146-158.

[7] Vasconcelos, W.V. (1968). A Note on Normality and The Module of Differantials, Math.Z., 105,291-293.

[8] Sweedler, M.E. (1975) , Groups of Simple Algebras, Publ.Math.No:44

[9] Olgun, N. (2005). Sonlu Üretilmiş Cebirlerin Evrensel Diferansiyel Modülleri, Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi.

[10] Olgun, N. (2013). Symmetric Derivations on Kahler Modules, Submitted.

[11] Sharp, R. Y. (2000). *Steps in Commutative Algebra*, Second Edition, Cambridge University Press, U.K.