**GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# EVRENSEL MODÜLLERİN EKSTERİOR MODÜLLERİ

**MATEMATİK BÖLÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**EMİNE BUDAK**

**OCAK 2014**

# Evrensel Modüllerin Eksterior Modülleri

**Gaziantep Üniversitesi**

**Matematik Bölümü**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Danışman**

**Yrd.Doç.Dr.Necati OLGUN**

**Emine BUDAK**

**Ocak 2014**

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Evrensel Modüllerin Eksterior Modülleri
Öğrencinin, Adı Soyadı: Emine BUDAK
Tez Savunma Tarihi: 16.01.2014

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Doç.Dr. Metin BEDİR
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof.Dr. Fahir Talay AKYILDIZ
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd.Doç.Dr. Necati OLGUN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri | İmzası
---|---
Yrd.Doç.Dr. Recep BİNDAK | .......
Yrd.Doç.Dr. Mehmet ŞAHİN | .......
Yrd.Doç.Dr. Necati OLGUN |

**İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.**

**Emine BUDAK**

# ÖZ

## EVRENSEL MODÜLLERİN EKSTERİOR MODÜLLERİ

BUDAK, Emine

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN

Ocak 2014, 42 sayfa

Bu tezin amacı evrensel modüllerin bulunması ve bunlarla ilgili sonuçların elde edilmesidir. Bu yüzden öncelikle modül tanımları,diziler ve bazı önemli teoremleri verilmiştir. Daha sonra evrensel modüllerin bazı teoremlerinden çıkan sonuçlar verilmiştir.

Tezde ilk olarak evrensel modüllerin eksterior modüllerinin anlaşılabilmesi için bazı tanımlara yer verilmiştir.

İkinci olarak halka, evrensel modülün tanım ve önemli teoremleri incelenmiştir.

Daha sonra, evrensel modüllerin eksterior modülleri ve özellikleri hakkında genel bilgiler verilip, bu konu ile ilgili yapılan çalışmalar incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Modül, Evrensel Modül, Serbest Modül, *R*-modül, Projektif Modül, eksterior modül.

# ABSTRACT

## EXTERIOR MODULES OF UNIVERSAL MODULES



BUDAK, Emine

M.Sc. in Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Necati OLGUN


January 2014, 42 pages


The aim of this thesis, examine the symmetric derivation modules and with the help of these to obtain the results of universal modules. For that reason first modules, some definitions and important theorems of universal modules are given. After that symmetric modules and some properties of symmetric modules are studied.

First of all in thesis, the importance and historical development of universal modules are given.

Secondly modules and universal modules focuses on the basic definitions and theorems.

Then some definitions and properties of symmetric modules are given and some samples are axamined.

Finally, some results of symmetric modules are obtained


**KeyWords**: Module, *R*-module, Free Module Universal Module, Projective Module, Exterior Module

**TEŞEKKÜR**

Bu çalışma süresince gösterdiği yol ve yöntemlerle desteğini esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN' a , ayrıca bana maddi ve manevi her türlü desteği sağlayan sevgili eşime ve zamanlarını çalarken bana oldukça cömert davranan çocuklarıma sonsuz teşekkürler ederim.

**İÇİNDEKİLER**

## SEMBOLLER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $hd_R(M)$ | M,R-modülünün homolojik boyutu |
| $(G_\lambda)_{\lambda\epsilon\Lambda}$ | M nin alt modüllerinin ailesi |
| $Ann_R(J)$ | J’ nin sıfırlayanı |
| $\tau(M)$ | M modülünün torsion elemanlarının kümesi |
| $pd_R(M)$ | M, R modülünün projektif boyutu |
| $Der_R^n$ | n-inci dereceden türev modülü |
| $\Omega_n(R)$ | n-inci dereceden evrensel türev modülü |
| $J_n(R)$ | n-inci dereceden evrensel diferansiyel modülü |
| $D_R^n$ | n-inci dereceden diferansiyel operatör modülü |
| $\Lambda^2(R)$ | $R$ ’nin ikinci dereceden eksteror modülü |
| $d_n$ | n-inci dereceden türev operatörü |

# BÖLÜM 1

## GİRİŞ

Evrensel Modül, Klasik Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalında Değişmeli Cebir alanındaki en önemli konulardan birisidir. Evrensel Modüller ilk kez 1960 yılında Nakai Y. [1] tarafından tanımlanmıştır.

Bir Cebirin Yüksek Dereceden Diferansiyel Operatörlerinin Evrensel Modülleri ise ilk defa 1967 yılında Osborn H. [2] tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra benzer tanımlar 1969 yılında yapılan Heyneman ve Sweedler'in [3] çalışmalarında görülmektedir. Bu konuda en kapsamlı çalışma ise 1970 yılında Nakai Y.[4] tarafından yapılmıştır.

Daha sonraki yıllarda ise Yüksek Dereceden Diferansiyel Operatörlerin Evrensel Modülleri ile ilgili çalışmaları Erdoğan A. [5] 1993 yılında yapmış olduğu çalışmasında görmekteyiz.

Evrensel Türev Modülleri ve Simetrik Türev tanımı ise ilk olarak 1968 yılında Osborn H. [6] tarafından yapılmıştır. Aynı konu üzerinde Wolmer Vasconcelos V.[7] Heyneman ve Sweedler [8] gibi bir takım matematikçiler de çalışmıştır. Ve aynı zamanda Evrensel Türev Modülleri ve Simetrik Türev ile ilgili çalışmaları Olgun N. [9,10] çalışmalarında görmekteyiz.

Bu tezde ilk olarak simetrik evrensel modüllerin tarihcesi modüllerin üzerinde durulmuştur. Bu tezin ikinci bölümünde modül, tamdizi, projektif modülün temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Bazı teoremler tanımları ile birlikte verilmiştir.

Bu tezin üçüncü bölümünde Evrensel Modül tanımı ile bazı teoremleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise modüllerin ikinci Eksterior kuvveti tanımları verilip bunlarla ilgili teoremlerden bahsedilmiştir. Ayrıca türevin evrensel modülünün eksterior denkliği ele alınmıştır. Daha sonra ise evrensel modülün Eksterior modülü ile alakalı açıklayıcı bilgilere yer verilmiştir ve bir takım sonuçlar elde edilmiştir.

# BÖLÜM 2

Bu bölümde Evrensel Modüller ve Eksterior Türeve temel oluşturacak şekilde modül tanımları ile bazı teoremler Sharp,R.Y. [11] kullanılarak verilmiştir.

## MODÜLLER

### 2.1 Modüller

**Tanım 2.1.1** $R$ birim elemanlı ve değişmeli bir halka, $M$ değişmeli bir grup olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $M$ ‘ye $R$-modül denir.

$\cdot : R\times M \to M$

$(r,m) \to r.m$

**i)** $\forall\ r\in R$ , ve $m,m'\in M$ için $r(m+m') = rm + rm'$

**ii)** $\forall\ r,r'\in R$ , ve $m\in M$ için $(r+r')m = rm + r'm$

**iii)** $\forall\ r,r'\in R$ , ve $m\in M$ için $(r.r')m = r(r'm)$

**iv)** $\forall\ m\in M$ için $1_R m = m$

**Örnek 2.1.2**

**1-** Her değişmeli grup, tamsayılar halkası üzerinde bir $Z$-modül olarak düşünülebilir. $G$ değişmeli grup olsun.

$\mu : Z\times G \to G$

$(n,g) \to \mu(n,g) = ng = g + g + .........+ g$ , $g\in G$, $n\in Z$

modül yapısı vardır.

**2-** $R$ değişmeli halka, $I \triangleleft R$ olsun;

**i)** $R$ nin kendisi $R$-modüldür.

**ii)** $I$ , $R$-modüldür.

**iii)** $R/I$ bölüm halkası bir $R$-modüldür.

$$\begin{aligned} &R \times R/I \to R/I \\ &(r, s+I) \to rs+I \end{aligned}$$ $R$-modül yapısı vardır.

**3-** $R$ değişmeli halka ve $f : R \to S$ halka homomorfizma yapısı ile $S$ bir $R$ cebir olsun. O zaman $S$ bir $R$-modüldür ve

$$\begin{aligned} &R \times S \to S \\ &(r, s) \to f(r)s \end{aligned}$$

yapısı kurulur.

**4-** $R$, $S$ değişmeli halka ve $f : R \to S$ halka homomorfizması olsun. Eğer $G$ , $S$-modül ise $G$ aynı zamanda $R$-modüldür.

$$\begin{aligned} &R \times G \to G \\ &(r, g) \to f(r)g \end{aligned}$$

**2.2 Alt Modüller**

**Tanım 2.2.1** $M$ $R$-modül ve $G \subseteq M$ olsun. $G$ $R$-modül ise $G$ ye $M$ nin alt modülü denir.

**Önerme 2.2.2** $R$ değişmeli halka ve $G$, $M$ $R$-modülünün bir altkümesi olsun. O zaman $G$, $M$ nin alt modülüdür $\Leftrightarrow \forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall r \in R$ için $g_1 + g_2 \in G$ ve $rg \in G$ dir.

**Tanım 2.2.3** $R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül, $I$ , $J \lhd R$ ve $IM$ , $M$ nin alt modülü olsun.

$IM$ , $\{rg \ : \ \mathrm{r} \in I, \ \mathrm{g} \in M\}$ kümesi tarafından üretilir. Aşağıdaki özelliklere sahiptir;

i) $IM = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i g_i : r_i \in I, g_i \in M, n \in IN \right\}$

ii) $I(JM) = (IJ)M$

iii) $a \in R$ için $(Ra)M$ nin yerine $aM$ yazılır.

$$(Ra)M = \{am \ : \ m \in M\}$$

**Tanım 2.2.4** $R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül, $G$ $M$ nin bir alt modülü ve $J \subseteq M$ olacak şekilde $J \neq \varnothing$ olsun.

$(G : J) = (G :_R J) = \{ \ r \in R \ : \forall\, j \in J \ \textit{için}\ rj \in G\}$

ideal olarak tanımlanır.

Eğer $N$ , $J$ tarafından üretilen $M$ nin alt modülü ise $(G : J) = (G : N)$ ‘dir. $m \in M$ için $(G : \{m\})$ ‘nin yerine $(G : m)$ yazılır.

Eğer $G = 0$ ise $(0 : J) = \{ \ r \in R : \forall\, j \in J \ \ \textit{için}\ rj = 0\}$ kümesine $J$ nin sıfırlayanı denir ve $Ann_R(J)$ ya da $Ann(J)$ ile gösterilir. Aynı zamanda $m \in M$ için m nin sıfırlayanı (0 : m) ile gösterilir.

**Önerme 2.2.5** $I \lhd R$ değişmeli haka olsun. $I = Ann_R(R/I) = (0 :_R 1 + I)$

**Tanım 2.2.6** $R$ değişmeli halka , $M$ $R$-modül ve $I$ , $I \subset Ann(M)$ olacak şekilde $R$ nin ideali olsun. $M$ üzerinde $R/I$ modül yapısı kuralım.

$r, r' \in R$ $r+I = r'+I$ ve $m \in M$ olsun. O zaman $r - r' \in I \subseteq Ann(M)$ ve böylece $(r-r')m = 0$ ve $rm = r'm$ olur.

Böylece $\begin{array}{l} R/I \times M \to M \\ (r+I, m) \to rm \end{array}$ bir dönüşüm tanımlanabilir.

$M$ üzerinde $R$-modül ve $R/I$ modül yapıları aşağıdaki yolla yapılır.

Her $r \in R$ , $m \in M$ için $(r+I)m = rm$

$G$ modülü $M$ 'nin bir alt $R$-modülüdür $\Leftrightarrow$ $G$ $M$ 'nin bir alt $R/I$ modülüdür.

**Tanım 2.2.7** $R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül ve $G$ , $M$ nin bir alt modülü olsun. ($G$, $M$ toplamsal değişmeli grubunun bir alt grubudur.) $M/G = \{m+G : m \in M\}$ bölüm grubunu oluşturabiliriz.

$m + G = m' + G \Leftrightarrow m - m' \in G$

$\forall$ $m, x \in G$ için $(m+G)+(x+G) = (m+x)+G$

Böylece $\begin{array}{l} R \times M/G \to M/G \\ (r, m+G) \to rm+G \end{array}$ $M/G$ değişmeli grubu bir $R$-modüldür. Bu $M$ $R$-modüle, $M$ nin bölüm modülü denir ve $M/G$ ile gösterilir.

**Önerme 2.2.8** $R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül ve $I \lhd R$ olsun. O zaman $I \subseteq Ann_R(M/IM)$ ve $M/IM$ , her $r \in R$ ve $m \in M$ için $(r+I)(m+IM) = rm+IM$ ile $R/I$ yapısına sahiptir. .

**Önerme 2.2.9** $R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül ve $G$, $M$ nin bir alt modülü olsun.

***i)*** $G'$, $M$ nin alt modülü yani $G' \supseteq G$ ise $G'/G$ , $M/G$ nin bir alt modülüdür.

***ii)*** $M/G$ nin herhangi bir alt modülü $G'' \supset G$ gibi $M$ nin $G''$ bir alt modülü için $G''/G$ şeklindedir.

***iii)*** $G_1, G_2$ $G$ yi içeren $M$ nin alt modülleri

$$G_1 \subseteq G_2 \Leftrightarrow G_1/G \subseteq G_2/G \qquad \text{dir.}$$

**Tanım 2.2.10** $R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül, $m \in M$ için $rm = 0$ olacak şekilde $0 \neq r \in R$ varsa $m$ ye $M$ nin torsion elemanı denir.

$$\tau(M) = \{m \in M : 0 \neq r \in R \; için \; rm = 0\}$$

**Önerme 2.2.11** Eğer $R$ tamlık bölgesi ise $\tau(M)$, $M$ nin bir $R$-alt modülüdür ve $\tau(M)$ ye $M$ $R$-modülünün torsion modülü denir.

$$R \times \tau(M) \to \tau(M)$$
$$(r, m) \to rm \qquad (r'(rm) = r(r'm) = 0 \quad r' \in R)$$

**Not 2.2.12** Eğer $R$ tamlık bölgesi değil ise $\tau(M)$ nin alt modül olması gerekmez. Çünkü

$$x_1, x_2 \in \tau(M)$$
$$x_1 + x_2 \in \tau(M)$$
$$r_1 x_1 \neq r_2 x_2 = 0 \quad (r_1 r_2)(x_1 + x_2) = 0$$

**Örnek 2.2.13** $\bar{2}.\bar{3} = \bar{0} \qquad R = Z_6 \qquad M(2) = \{0, 2, 4\} \qquad \tau(M) = \{0, 2, 4\}$

$$R = \mathbb{Z}_6 \quad \Rightarrow \quad X = M_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in R \right\}$$

A=$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , B=$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \tau(X)$ fakat A+B=$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \tau(X)$

**Tanım 2.2.14**

**i)** $\tau(M) = M$ ise $M$ ye torsion modül denir.

**ii)** $\tau(M) = 0$ ise $M$ ye torsion serbest modül denir.

**Önerme 2.2.15** $R$ tamlık bölgesi olsun.O zaman

**1)** $\tau(R) = 0$ dır.

**2)** $R$-modül ve $\tau(X) = X$ ve $M \subset X$ alt modül ise $\tau(M) = M$ dır.

**3)** $\tau(X) = 0$ ve $M \subset X$ alt modül ise $\tau(M) = 0$ dır.

**4)** $\tau(\tau(X)) = \tau(X)$.

## 2.3 R-Modül Homomorfizmaları

**Tanım 2.3.1** $M, N$ $R$ değişmeli halkası üzerinde modüller olsun. $f : M \to N$ dönüşümü

$\forall\ m, m' \in M$ için $f(m + m') = f(m) + f(m')$

$\forall\ m \in M$ *ve* $r \in R$ için $f(rm) = rf(m)$

şartlarını sağlıyorsa bu dönüşüme $R$-modül homomorfizması denir. $Z: M \to N$ dönüşümü her $m \in M$ için $Z(m) = 0_N$ tanımlanarak bir $R$-modül homomorfizmasıdır ve buna sıfır homomorfizma denir ve *0* ile gösterilir.

**Tanım 2.3.2** $f: M \to N$ birebir ve örten bir modül homomorfizması ise bu homomorfizmaya bir izomorfizma denir ve $M \cong N$ ile gösterilir.

**Önerme 2.3.3** $R$ değişmeli halka $M, N$ $R$-modül ve $f: M \to N$ bir izomorfizma olsun. O zaman $f^{-1}: N \to M$ de aynı zamanda bir izomorfizmadır ve $M \cong N$ ile gösterilir.

$M \cong M$ ise $M$ nin kendi üzerine $id_M$ özdeş dönüşümdür.

**Önerme 2.3.4** $f: M \to N$, $g: N \to G$ $R$-modül homomorfizmaları ise $gof$ de $R$-modül homomorfizmasıdır.

$f: M \to N$, $g: N \to G$ $R$-modül izomorfizması ise $gof$ de $R$-modül izomorfizmasıdır.

**Tanım 2.3.5** $M$ $R$ değişmeli halkası üzerinde modül ve $G$, $M$ nin alt modülü olsun. Her $m \in M$ için $m \to f(m) = m + G$ olarak tanımlanan $f: M \to M/G$ dönüşümü doğal (kanonik) homomorfizma diye adlandırılır ve $f$ örtendir.

**Tanım 2.3.6** $R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül olsun.

**i)** $N$ $R$-modül ve $f: M \to N$ $R$-modül homomorfizması ise $f$ nin çekirdeği $Çekf = \{m \in M \ : \ f(m) = 0_N\}$ ile gösterilir. $Çekf$, $M$ nin bir alt modülüdür.

$Çekf = 0 \Leftrightarrow f$ monomorfizmadır. $f$ nin görüntüsü $\operatorname{Im} f$ ile gösterilir ve $f(M) = \{ f(m) \ : \ m \in M \}$ kümesi $N$ nin alt kümesidir. $\operatorname{Im} f$ $N$ nin alt modülüdür.

**ii)** $f : M \to M/G$, $Çekf = G$ ve $M/0 \cong M$ dır. .

**iii)** $H \subseteq M$ alt kümesi $M$ nin bir alt modülüdür. $\Leftrightarrow$ $Çekf = H$ olacak şekilde $f : M \to M'$ homomorfizması vardır .

($\Leftrightarrow \exists f : M \to M'$ homomorfizma $Çekf = H$ dır.)

**Teorem 2.3.7** $R$ değişmeli halka $M, N$ $R$-modül ve $f : M \to N$ $R$-modül homomorfizması olsun. O zaman $\forall$ $m \in M$ için $\overline{f}(m + Çekf) = f(m)$ olacak şekilde $\overline{f} : M/Çekf \to \operatorname{Im} f$ izomorfizması vardır. $(M/Çekf \cong \operatorname{Im} f)$

**Teorem 2.3.8** $R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül, $G, G'$ $M$ nin $G' \supseteq G$ olacak şekilde alt modülleri olsun. $G'/G$, $M/G$ $R$-modülünün bir alt modülüdür. O zaman burada $\forall$ $m \in M$ için $\eta((m+G) + G'/G) = m + G'$ tanımıyla

$\eta : (M/G)/(G'/G) \to (M/G')$

izomorfizması vardır.

**Teorem 2.3.9** $R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül, $G, H$ $M$ nin alt modülleri olsun. O zaman burada $\forall$ $g \in G$ için $\xi(g + G \cap H) = g + H$ tanımıyla

$\xi : G/(G \cap H) \to (G + H)/H$

izomorfizması vardır.

**Tanım 2.3.10** $R$ değişmeli halka, $G, M, N$ $R$-modüller ve $g : G \to M$ ve $f : M \to N$ $R$-modül homomorfizmaları olsun.

$$G \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N$$

dizisinde $\operatorname{Im} g = Çekf$ ise bu diziye $M$ $R$-modüllerin tam dizisi denir.

Genel olarak

$$\ldots\longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} M_n \xrightarrow{d^n} M_{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} M_{n+2} \longrightarrow \ldots..$$

dizisi her $M_n$ de tam ise bu diziye $R$-modüllerin tam dizisi denir. Örneğin $\operatorname{Im} d_n = Çekd_{n+1}$ iken

$$M_{n-1} \xrightarrow{d_n} M_n \xrightarrow{d_{n+1}} M_{n+1}$$

dizisi tamdır.

**Önerme 2.3.11 1)** $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ tamdır. $\Leftrightarrow f$, $1-1$ dir.

**2)** $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ tamdır. $\Leftrightarrow f$ örtendir.

**3)** $N \subseteq M$ alt modül ise $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$ dizisi her zaman tamdır.

Genel olarak $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ dizisi için $f$ birebir, $g$ örten ve $\operatorname{Im} f = Çekg$ ise bu diziye kısa tam dizi denir.

**Tanım 2.3.12** $R$ değişmeli halka $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ $R$-modüllerinin boş olmayan bir ailesi olsun. $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ kartezyen çarpım kümesi her $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (g'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, r \in R$ için

$$(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} + (g'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (g_\lambda + g'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

$$r(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (rg_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

ile bir $R$-modüldür. Bu $R$-modüle $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ailesinin çarpımı denir.

$\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ ‘nin alt kümesi (her $\lambda\in\Lambda$ için $g_\lambda \in M_\lambda$ ile) $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ailesini içerir ve $g_\lambda$ elemanlarının sonlu sayıdaki bileşenleri sıfırdan farklı olma özelliğiyle $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ ‘nin bir $R$-alt modülüdür ve $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} M_\lambda$ ile gösterilir. Buna $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ailesinin direkt toplamıdır denir.

$\Lambda' = 0$ ise $\underset{\lambda'\in\Lambda'}{\oplus} M_{\lambda'}$ ve $\prod_{\lambda'\in\Lambda'} M_{\lambda'}$ her ikisi de sıfır $R$-modüldür.

$\Lambda$ sonlu ise $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} M_\lambda = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ elde ederiz.

**Tanım 2.3.13** $M$ **,** $R$ değişmeli halkası üzerinde bir modül olsun. $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ $M$ nin alt modüllerinin boş olmayan bir ailesi olsun. $M = \sum_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ ise her bir $m\in M$ elemanı $m = \sum_{i=1}^{n} g_{\lambda_i}$ formunda ifade edilebilir ki burada $\{\lambda_1, ......, \lambda_n\}$, her $i = 1, 2, ....., n$ için $g_{\lambda_i} \in G_{\lambda_i}$ ve $\Lambda$ nın sonlu bir alt kümesidir.

$M$ **,** $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ alt modüllerinin ailesinin direkt toplamıdır ve her bir $m\in M$ elemanı için $g_\lambda$ nın sonlu sayıda elemanı sıfırdan farklı ve her $\lambda\in\Lambda$ için $g_{\lambda_i} \in G_{\lambda_i}$ $m = \sum_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda$ formunda tek türlü yazılabilir ve bu $M = \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} G_\lambda$ ile gösterilir.

**Önerme 2.3.14** $M$ **,** $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ alt modül ailesinin direkt toplamıdır. $\Leftrightarrow$ i) $\sum_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda = M$ ii) her bir $\nu\in\Lambda$ için $G_\nu \bigcap \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ \lambda\neq\nu}} G_\lambda = 0$ elde edilir.

**Önerme 2.3.15** $R$ değişmeli halka $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ $R$-modüllerinin boş olmayan bir ailesi olsun. Herbir $\mu\in\Lambda$ için

$M_\mu^{'}=\left\{ (g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} M_\lambda : g_\lambda=0 \ her\ \lambda\in\Lambda\ ile\ \lambda\neq\mu\ için \right\}$ ile verilen $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} M_\lambda$ nin alt kümesi ile gösterilir. $M_\mu^{'}$, $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} M_\lambda$ nın bir alt modülüdür.

**Tanım 2.3.16** $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ $R$ değişmeli halkası üzerinde modüllerin boş olmayan bir ailesi ve $\mu\in\Lambda$ olsun.

$M=\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} M_\lambda$ kümesinden $M_\mu$ üzerine $P_\mu : M\to M_\mu$ dönüşümü her $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in M$ için $P_\mu((g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})=g_\mu$ tanımıyla kanonik izdüşüm dönüşümüdür.

$M_\mu$ den $M=\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} M_\lambda$ içine $q_\mu : M_\mu\to M$ dönüşümü her $\lambda\in\Lambda$ için $g_\lambda=0$ ile $\lambda\neq\mu$ ve $\forall z\in M_\mu$ $q_\mu=z$ için $q_\mu(z)=(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tanımıyla kanonik örten dönüşümdür.

Her iki $P_\mu$ ve $q_\mu$ $R$-modül homomorfizmasıdır. $P_\mu$ bir epimorfizma ve $q_\mu$ bir monomorfizmadır.

***i)*** $p_\mu o q_\mu = Id_{\mu_\lambda}$

***ii)*** Her $\nu\in\Lambda$ ile $\nu\neq\mu$ için $p_\mu o q_\nu=0$

iii) $\Lambda$ sonlu iken $\sum_{\lambda\in\Lambda} p_\mu o q_\mu = 1d_\mu$ dır.

**Önerme 2.3.17** $M, M_1, ...., M_n$ (ki burada $n \in \mathrm{N}$ ile $n \geq 2$ ) $R$ değişmeli halkası üzerinde modüller olsun.

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{q_1} \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \xrightarrow{P_1^{'}} \bigoplus_{i=2}^{n} M_i \longrightarrow 0$$

dizisi bir tam dizidir ki burada $q_1$ kanonik örten ve her $(m_1, ....., m_n) \in \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ için $P_1^{'}((m_1, ...., m_n)) = (m_2, ...., m_n)$ ile $P_1^{'}$ kanonik izdüşümdür .

**Tanım 2.3.18** $R$ değişmeli halka ve $L, M, N$ $R$-modül,

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

$R$ modül homomorfizmalarının kısa tam dizisi olsun. Bu diziye $\operatorname{Im} f = Çekg$, $M$ nin bir direkt toplamı oluyorsa bu diziye split denir. Yani; Dizi splittir $\Leftrightarrow M = Çekg \oplus G$ olacak şekilde $M$ nin bir $G$ alt modülü vardır.

**Önerme 2.3.19**

**i)** $0 \longrightarrow H \longrightarrow M \longrightarrow M/H \longrightarrow 0$ kısa tam dizidir.

**ii)** $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$ split kısa tam dizidir.

**Önerme 2.3.20** $R$ değişmeli halka ve $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ kısa tam dizi olsun. Bu dizi splittir $\Leftrightarrow h : N \to M$ ve $e : M \to L$ olacak şekilde

$eof = 1d_L$, $goh = 1d_N$, $eoh = 0$, $foe + hog = 1d_M$

R-modül homomorfizmaları vardır.

## 2.4 Serbest R-Modüller

**Tanım 2.4.1** $R$ değişmeli halka, $M$ $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ tarafından üretilen bir $R$-modül olsun. Her $m \in M$ ve $m = \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda m_\lambda$ olarak $r_\lambda \in R$, $m_\lambda \in M$ ile tek türlü yazılabiliyorsa $(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $M$ için bir tabandır ve $M$, bir tabana sahip olduğundan bir serbest $R$-modüldür.

$R$ nin kendisi $1_R$ elemanı tarafından bir tabana sahip olduğundan bir serbest $R$-modüldür. Sıfır $R$-modülü tabanı boş küme olan bir serbest $R$-modüldür.

**Önerme 2.4.2** $R$ değişmeli halka, $M$ $R$-modül $\{M_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ $M$ nin bir ailesi olsun. O zaman $\{M_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, $\sum_{\lambda \in \Lambda} Rm_\lambda$ için bir tabandır $\Leftrightarrow$ $\forall$ $\lambda \in \Lambda$ için $\sum_{\lambda} r_y m_y = 0 \Rightarrow r_y = 0$ dır.

**Önerme 2.4.3** $R$ değişmeli halka olsun.

**i)** $(R_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, her $\lambda \in \Lambda$ için $R_\lambda = R$ ile $R$-modüllerinin bir ailesi olsun. O zaman $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$, $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tabanı ile serbest $R$-modüldür ki her $\mu \in \Lambda$ için $e_\mu \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ elemanı $R_\mu$ içinde kendisi 1 ‘e eşit ve diğer bütün elemanları sıfırdır.

$\{(1,0,0,.....)(0,1,0,0,.....)(0,0,1,0,.....),............\text{gibi}\}$

**ii)** $M$ $R$-modül, $M$ serbest $R$-modüldür $\Leftrightarrow M$, (i) deki türden bir $R$-modüle izomorftur. $M$ $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tabanına sahip ise $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$ ki $R_\lambda = R$ ‘dır. Burada $Rm_\lambda \cong R$ dır.Böylece $Rm_\lambda \cong R/(0:m_\lambda) \cong R$ dir.

$$\begin{aligned} f: R &\to Rm_\lambda \\ 1 &\to m_\lambda \end{aligned} \quad \text{olmak üzere} \quad R/(0:m_\lambda) \cong Rm_\lambda \Rightarrow Rm_\lambda \cong R$$

Böylece $M \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$ dır.

**Önerme 2.4.4** $F$ , $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tabanı ile bir serbest $R$-modül olsun. $M$ , serbest $R$-modül ve $\{m_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ $M$ nin elemanlarının bir ailesi olsun. O zaman $\forall\lambda\in\Lambda$ için $f(e_\lambda) = m_\lambda$ tanımıyla $f: F \to M$ bir $R$-modül homomorfizması vardır .

**İspat :** $M$ , $\{m_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tabanına sahip serbest $R$-modül olsun. $\Lambda = \varnothing$ ise açıktır. Böylece $\Lambda \neq \varnothing$ ise $\forall\lambda\in\Lambda$ $Rm_\lambda = R$, $\forall(r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$ için $f((r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = \sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda m_\lambda$ tanımıyla $f: \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda \to M$ dönüşümüyle $f$ bir $R$-modül homomorfizmasıdır. $M$ , $\{m_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ kümesi tarafından üretildiğinde $f$ örtendir.

**Önerme 2.4.5** $M$ , $R$ değişmeli halkası üzerinde bir modül olsun. O zaman $F$ serbest $R$-modül olmak üzere $f: F \to M$ $R$-modül epimorfizması vardır.

Ayrıca $M$ , $n$ sonlu eleman tarafından üretilirse $F$ , $n$ sonlu tabana sahip bir serbest $R$-modüldür .

**Sonuç 2.4.6** $M \cong F/Çekf$ ‘dir .

**Önerme 2.4.7** $0 \neq R$ değişmeli halka, $F$ sonlu taban ile serbest $R$-modül olsun. O zaman $F$ için her taban sonludur ve $F$ için iki tabanın elemanları aynı sayıya sahiptir. $F$ için bir taban içinde ki elemanların sayısına $F$ nin rankı denir ve $rank(F)$ ile gösterilir .

**Önerme 2.4.8** $R \neq 0$ değişmeli halka, $F$ serbest $R$-modül ve $F$ sonlu üretilmiş olsun. O zaman $F$ için her taban sonludur.

**2.5 Projektif R-Modüller**

**Tanım 2.5.1** $X$ $R$-modül ve $g : A \to B$ örten $R$-modül homomorfizması olsun. $\forall$ $f : X \to B$ $R$-modül homomorfizması için $h : X \to A$ $R$-modül homomorfizması varsa $X$ $R$-modülüne projektif $R$-modül denir.

**Teorem 2.5.2** Her serbest $R$-modül projektiftir.

**Önerme 2.5.3** $X$ projektif $R$-modül ve $X = M \oplus N$ ise $M$ projektif $R$-modüldür.

**Önerme 2.5.4** Projektif modüllerin direkt toplamı projektiftir.

**Teorem 2.5.5** $X$ $R$-modül, $i : X \to X$ için aşağıdaki durumlar denktir.

**i)** $X$ projektiftir.

**ii)** Her $0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi splittir.

**iii)** $X$ serbest $R$-modüllerinin direkt toplamına izomorftur.

**iv)** Her $g: A \to B$ epimorfizma için $g_x = Hom(i,g): Hom(X,A) \to Hom(X,B)$ aynı zamanda bir epimorfizmadır.

**v)** Her $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi için $0 \longrightarrow Hom(X,A) \longrightarrow Hom(X,B) \longrightarrow Hom(X,C) \longrightarrow 0$ dizisi aynı zamanda kısa tam dizidir.

**Önerme 2.5.6** $M$ $R$-modül olsun. $X$ projektif $R$-modül olmak üzere

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow X \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi elde edilir.

**Tanım 2.5.7** $M \in M_R$ nin projektif boyutu

$$pd(M) = pd_R(M) = \min(n : P^n[M] = 0)$$

olarak tanımlanır. Eğer böyle bir $n$ yoksa $pd_R(M)$ $\infty$ dur. $M$ bir projektif $R$-modül ise $pd_R(M) = 0$ dır.

**Önerme 2.5.8** $M \in M_R$ ve $n \geq 0$ için aşağıdaki durumlar denktir.

**1)** $pd_R(M) \leq n$

**2)** Herhangi projektif çözünürlüğü

$$P_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} P_{n-2} \longrightarrow \ldots\ldots\ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$Çek\alpha_{n-1}$ in projektiftir.

($n = 0$ durumunda $M$ nin projektif olduğu kolaylıkla gösterilebilir.)

**3)** Bir sonlu projektif çözünürlüğü vardır.

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{\alpha_n} P_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \ldots\ldots\ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$pd_R(M) = n$ dir ancak ve ancak $\alpha_n$ split değildir.

**Tanım 2.5.9** $R$ halkasının global boyutu

$$gl.\dim R = \sup\{pd_R(M) : M \in M_R\} \leq \infty$$

olarak tanımlanır.

**Teorem 2.5.10** $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ $R$ modüllerin tam dizi olsun. Eğer $pd(A)$, $pd(B)$, $pd(C)$ ‘nin ikisi sonlu ise üçüncüde sonludur. Her bir durumda

**(1)** $pd(A) < pd(B)$ ise $pd(C) = pd(B)$ dir.

**(2)** $pd(A) > pd(B)$ ise $pd(C) = pd(A) + 1$ dir.

**(3)** $pd(A) = pd(B)$ ise $pd(C) \leq pd(A) + 1$ dir.

**Sonuç 2.5.11** $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ $R$-modüllerin tam dizisi olsun. $pd(B) \leq \max\{pd(A), pd(C)\}$ iken $pd(C) = pd(A) + 1$ eşitliği vardır.

**Sonuç 2.5.12** $0 = B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots\ldots \subseteq B_n = B$ $B_R$ modülünün bir sonlu ayrışımı olsun. O zaman $pd(B) \leq \max\{pd(B_{i+1}/B_i)\}$ dir.

**Önerme 2.5.13** $M = \oplus_i M_i$ olsun. O zaman $pd(M) = \sup\{pd(M_i)\}$

## BÖLÜM 3

Bu bölümde Evrensel Modüllerin tanımı, özellikleri ve bazı sonuçları örneklerle birlikte Olgun N. [9] çalışmalarından yararlanılarak verilmiştir.

## EVRENSEL MODÜLLER

### 3.1 Diferansiyel Operatör Modülleri

Bu bölümde ilk olarak diferansiyel operatörlerin tanımı, özellikleri ve bazı sonuçları örneklerle birlikte verilerek konuya başlangıç yapılacaktır. Bu çalışmada $R$ ile birim elemanlı ve değişmeli bir halkayı gösterelim. $R$ karakteristiği 0 olan bir $k$ cismi üzerinde *k-cebir* ve $M$, $N$ de $R$ modül olsun.$Hom_k(M,N)$ , m$\in M$ ve r$\in R$ için

$rf{:}m \rightarrow rf(m)$

$fr{:}m \rightarrow fr(m)=f(rm)$

tanımları ile $Hom_k(M,N)$ üzerinde bir ikili R-modül yapısı kurulabilir.

$fr(m)\text{-}rf(m)=[f,r](m)$

olarak gösterelim. $[f,r] \in Hom_k(M,N)$ olur.

**Tanım 3.1.1** $Hom_k(M,N) = D_R^0(M,N) = \{f \in Hom_k(M,N) : \ [\mathrm{f},\mathrm{r}] = 0 \ \ \forall \mathrm{r} \in \mathrm{R}\}$ olarak tanımlayalım.

$D_R^{n-1}(M,N)$ tanımlanmış olsun.O zaman

$D_R^n(M,N) = \{f \in Hom_k(M,N) : [\mathrm{f},\mathrm{r}] \in D_R^{n-1}(M,N) \ \ \forall \mathrm{r} \in \mathrm{R}\}$ ile tanımlanır ve $D_R^n(M,N)$ ye n inci dereceden diferansiyel operatör modülü denir.

**Önerme 3.1.2** $D_R^n(M,N)$ modülü $Hom_k(M,N)$ nin bir alt $R$-modülüdür.

Bu tezde her sıfırdan küçük n tamsayısı için $D_R^n(M,N) = 0$ olarak alacağız.

Tanımdan dolayı $D_R^0(M,M) = D_R^0(M) = End_R(M)$

$$D_R^0(R,M) = Hom_R(R,M) \simeq M$$

$$D_R^0(R,R) \simeq R$$

olduğu görülür.

**Önerme3.1.3** Her n tamsayısı için $D_R^n(M,N) \subseteq D_R^{n+1}(M,N)$ dir.

Diferansiyel operatör modülünün tanımına göre eğer ;

$f \in D_R^0(M,N) = Hom_R(M,N)$ ise her $r_0 \in R$ ve her m$\in M$ için

$[f,r_0](m) = f(r_0 m) - r_0 f(m) = r_0 f(m) - r_0 f(m) = 0$ dır.

Yani f$\in D_R^0(M,N)$ ise $[f,r_0] = 0$

f$\in D_R^1(M,N)$ ise $\left[[f,r_0],r_1\right] = 0$

……

……

Benzer şekilde devam edilirse

$r_{0,} r_1, \dots \dots .., r_n \in$R için f$\in D_R^n(M,N)$ ise $\left[\dots .. \left[\left[[f,r_0] r_1\right]\right] \dots .., r_n\right] = 0$ bulunur.

Bundan sonra $\left[\dots .. \left[\left[[f,r_0] r_1\right]\right] \dots .., r_n\right]$'yi $\left[f, r_{0,} r_1, \dots \dots ., r_n\right]$ ile göstereceğiz.

**Tanım3.1.4** *M* den *N* ye olan bütün k-lineer diferansiyel operatör uzayı

$$D_R\ (M,N) = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_R^n(M,N)$$

İle tanımlanır.

Şimdi diferansiyel operatör modülleri ile ilgili örnekler verelim.

**Örnek 3.1.5** $R = k[x]$ olsun.

$$D_R^0(R) \simeq k[x]$$

$$D_R^1(R) = < \frac{\partial}{\partial x}, 1 >$$

$$D_R^2(R) = < \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, 1 >$$

$$D_R^n(R) = < 1, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \dots \dots ., \frac{\partial^n}{\partial x^n} >$$

**Örnek 3.1.6** *R*=k[x,y] olsun.

$$D_R^1(R) = < 1, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} >$$

$$D_R^2(R) =< 1, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} >$$

**Örnek 3.1.7** $R$=k$[x_1, \dots \dots .., x_s]$ polinomlar cebiri olsun. $D_R^1(R)$, bazı

$$\left\{1, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial^2}{\partial x_2}, \dots \dots .., \frac{\partial^s}{\partial x_s}\right\}$$

olan bir serbest $R$-modüldür. Bunu gösterelim.

D $\in D_R^1(R)$ $ve\ K = \left\{1, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial^2}{\partial x_2}, \dots \dots .., \frac{\partial^s}{\partial x_s}\right\}$ kümesi olsun. O zaman i=1,…….,s için $D({x_i}^n) = n x_i^{n-1} D(x_i)$ dir.Böylece

$\left(D - \sum_{i=1}^{n} D(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \left(x_i^{i_1} \dots \dots . x_s^{i_s}\right) = 0$

Ve buradan da

$$\left(D = \sum_{i=1}^{n} D(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

elde edilir. Böylece $D \in <K>$ olduğu görülür. Bu küme aynı zamanda lineer bağımsız olduğundan K kümesi $D_R^1(R)$ nin bir bazıdır.

**Örnek 3.1.8** $R$=$k[x_1, \dots \dots .., x_s]$ polinomlar cebiri olsun. $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} : R \to R$

$i, j = 1,2, \dots ., s$ için$\partial_i(x_j) = \delta_{i,j}\ olsun. \left(\delta_{i,j}\ Kronecker\ deltas\right.$ı$\left.\right)$

$x^\beta = x_1^{\beta_1}, \dots \dots, x_s^{\beta_s} \in R$ olmak üzere $|\alpha|'inci\ dereceden\ \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}, \dots \dots, \partial_s^{\alpha_s}$ kısmi türevi

$$\partial^\alpha(x^\beta) = \begin{cases} \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} x^{\beta - \alpha} & ; \beta \geq \alpha \\ 0, & ; diğer\ yerlerde \end{cases}$$

$R$ nin $|\alpha|$ inci dereceden diferansiyel operatörüdür.

**Tanım 3.1.9** $End_k(M)'nin\ bir\ k - alt\ cebiri\ olan\ D_R\ (M, M)'ye\ M$ üzerinde diferansiyel operatörler halkası denir ve $D_R\ (M)$ ile gösterilir.

**Önerme 3.1.10** f$\in D_R^n(M, N)$ ve g$\in D_R^m(N, K)$ ise $gf \in D_R^{m+n}(M, K)$ dir.

$R$ k-cebir ve $R \otimes_k R$ de $R$ halkasının yine kendisiyle olan tensör çarpımını göstersin.$r_i, r_j, s_i, s_j \in R$ olmak üzere

$$\left(\sum_i r_i \otimes_k s_i\right)\left(\sum_j r_j \otimes_k s_j\right) = \sum_{i.j} r_i r_j \otimes_k s_i\, s_j$$

çarpımıyla $R \otimes_k R$ birim elemanlı değişmeli bir halkadır.

Her $r$,$s \in R$, $f \in Hom_k(M, N)$ ve m$\in M$ için

$$(r \otimes_k s).f\colon m \to rf(sm)$$

olarak tanımlanırsa , $Hom_k(M, N)$ üzerinde $R \otimes_k R$-modül yapısı kurulabilir.

$\theta\colon R \otimes_k R \to R$ *çarpım dönüşüm*ü

$$\sum_i r_i \otimes s_i \to \sum_i r_i s_i$$

ile tanımlansın. Bu dönüşüm hem halka hem de $R$-modül homomorfizması ve aynı zamanda örtendir.

*I*=*Çek*$\theta$ olmak üzere

$$0 \to I \to R \otimes_k R \to R \to 0$$

$R$-modül homomorfizmalarının bir tam dizisi elde edilir.

**Lemma 3.1.11** *I* ideali $\{1 \otimes r - r \otimes 1 | r \in R\}$ kümesi tarafından üretilir.

**Önerme 3.1.12** $M$, $N$ $R$-modül ve $f \in Hom_k(M, N)$ olsun. O zaman her $r \in R$ *ve her* $m \in M$ için

$$[f, r](m) = (1 \otimes r - r \otimes 1)f(m)$$

eşitliği vardır.

Yukarıdaki tanımlarda *I* ideali $R \otimes_k R$ nin bir ideali idi. O zaman $I^{n+1}$ *de* $R \otimes_k R$ nin bir ideali olup

$$\left\{\prod_{i=0}^{n} (1 \otimes r_i - r_i \otimes 1)\colon r_i \in R\right\}$$

kümesi tarafından üretilir.

$$\prod_{i=0}^{n}(1\otimes r_i - r_i\otimes 1) = \sum_{T\subseteq\{0,1,\dots,n\}} (-1)^{|T|}(r_T\otimes r_{T'})$$

formülü ile verilir.Bu formülde $T'$ $T$ nin $\{0,1,\dots\dots,n\}$ kümesine göre tümleyenini , $r_T = \prod_{k\in T} r_k$ yı ve $|T|$ de $T$ nin eleman sayısını gösteriyor. $r_\emptyset = 1$ olarak alınacaktır.

**Önerme 3.1.13** $M, N$ $R$-modül ve $f \in Hom_k(M,N)$ olsun.f, n-inci dereceden diferansiyel operatördür $\Leftrightarrow$ $I^{n+1}f = 0$ $dır$.

**Sonuç 3.1.14**: $f \in D_R^n(M,N)$ olsun.

f$f(r_0 r_1 \dots\dots.. r_n \mathrm{m}) = \sum_{T\subseteq\{0,1,\dots,n\} ve |T|\geq 1}(-1)^{|T|-1} r_T f(r_T{}' m)$ dir.

## 3.2 EVRENSEL DİFERANSİYEL MODÜLLERİ

Bu bölümde verilen herhangi bir $M$ $R$-modül üzerinde evrensel modülün nasıl tanımlandığı gösterilecek. Evrensel modüllerin özellikleri, bazı örnekler ve diferansiyel modüllerle arasındaki bağıntılar verilecek.

$M$, $R$-modül ve r⊗s$\in R\otimes_k R$, $r'\otimes m \in R\otimes_k M$ için (r⊗s)( $r'$⊗m)=r$r'\otimes sm$ ile $R\otimes_k M$ üzerinde $R\otimes_k R - mod$ül yapısı tanımlanabilir.

$$\mu: M \to R\otimes_k M$$

$$m \to \mu(m) = 1\otimes m$$

sağ çarpım dönüşümü ve

$$\pi: R\otimes_k M \to \frac{R\otimes_k M}{I^{n+1}(R\otimes_k M)}$$

$$r\otimes m \to \pi(r\otimes m) = \overline{r\otimes m}$$

doğal dönüşümü olsun.

**Önerme 3.2.1**: $$\pi\mu: M \to \frac{R\otimes_k M}{I^{n+1}(R\otimes_k M)}$$

$\pi\mu(m) = \overline{1\otimes m}$ bileşkesi bir k-lineer dönüşümü olup n-inci dereceden diferansiyel operatördür.

**Tanım 3.2.2** $M$, $N$ ve $K$ $R$-modül ve $\Delta_n: M \to N$ $n - inci$ dereceden diferansiyel operatör olsun. Herhangi bir n-inci dereceden $f: M \to K$ diferansiyel operatörü için

$$\begin{array}{ccc} M & \rightarrow & K \\ \Delta_n\downarrow & & \downarrow 1_R \\ N & \overset{\alpha}{\rightarrow} & K \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan $\alpha\Delta_n = f$ olacak şekilde bir tek $\alpha: N \rightarrow K$ $R-modül$ homomorfizması varsa o zaman $\Delta_n: M \rightarrow N$ diferansiyel operatörüne $n$-inci dereceden evrensel diferansiyel operatörü denir.

**Teorem 3.2.3** $R$ *k*- cebir ve *M, N* $R$-modül olsun. O zaman

$$Hom_k(M,N) \underset{-}{\sim} Hom_R(R \otimes_k M, N)$$

dir. Herhangi bir $M$ $R$-modülü üzerinde $n$-inci dereceden evrensel diferansiyel operatörün varlığı aşağıdaki teoremde gösteriliyor.

**Teorem 3.2.4**

$$\pi\mu: M \rightarrow \frac{R \otimes_k M}{I^{n+1}(R \otimes_k M)}$$

$$\pi\mu(m) = \overline{1 \otimes m}$$

dönüşümü $n$-inci dereceden evrensel diferansiyel operatördür.

**Tanım 3.2.5** $\frac{R \otimes_k M}{I^{n+1}(R \otimes_k M)}$ modülüne $M$ üzerinde $n$-inci dereceden evrensel diferansiyel modülü denir ve $J_n(M)$ ile gösterilir. Burada *M R*-modülü yerine *R* nin kendisi alınırsa $J_n(R) = \frac{R \otimes_k R}{I^{n+1}}$ olur.

Herhangi bir $M$ $R$-modülü üzerinde $n$-inci dereceden evrensel diferansiyel modülün tekliği aşağıdaki teoremde gösteriliyor.

**Teorem 3.2.6** *M R*-modül olsun. Eğer $J_n'(M), M$ $R-modülünün$ başka bir evrensel diferansiyel modülü ise o zaman $J_n{}'(M) \underset{-}{\sim} J_n(M)$ dir.

Şimdi evrensel modüllerle ilgili bazı örnekler verelim.

**Örnek 3.2.7** *R*=*k*$[x_1, \dots\dots.., x_s]$ polinomlar cebiri ve $\delta_n: R \rightarrow J_n(R)$ $n$-inci dereceden evrensel diferansiyel operatörü olsun. O zaman n-inci dereceden evrensel diferansiyel modülü $J_n(R)$,

$\{\delta_n\,(x^\alpha):\quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \,\dots\dots\dots\, x_s^{\alpha_s} \quad, \quad |\alpha| \leq n \ \}$

baz kümesi ile serbest bir *R*-modüldür.

**Örnek 3.2.8** *K*= *k*$(x_1, \dots\dots.., x_s)$ cismi *R*= *k*$[x_1, \dots\dots.., x_s$'nin kesir cismi olsun. $\delta_n: K \rightarrow J_n(R)$ $n$-inci dereceden evrensel diferansiyel operatörü olmak üzere

$$\{\delta_n(x^\beta):\ x^\beta = {x_1}^{\beta_1}\ldots\ldots\ldots{x_s}^{\beta_s},\ \ |\beta| \leq n\ \}$$

baz kümesi ile $n$-inci dereceden evrensel diferansiyel modülü $J_n(K)$ bir $K$-vektör uzayıdır.

**Teorem 3.2.9** $M$ ve $N$ $R$-modül olsun. O zaman

$Hom_R(J_n(M), N) \simeq D_R^n(M, N)$

$R$-modül homomorfizması vardır.

**Sonuç 3.2.10**

$Hom_R(J_n(R), R) \simeq D_R^n(R)$

$R$-modül homomorfizması vardır.

**Teorem 3.2.11** $M$, $R$-modül olsun. O zaman $J_n(M) \simeq M \otimes_R J_n(R)$ dir.

### 3.3 Evrensel Türev Modülleri

Bu bölümde türev modülleri ve evrensel türev modüllerinin tanımı özellikleri ve evrensel diferansiyel modüllerle olan bağlantısı ve bazı sonuçlar verilecek.

**Tanım 3.3.1** $M$ , $R$-modül olsun.

$$Der_R^n(R, M) = \{D \in D_R^n(R, M):\ \ D(1) = 0\}$$

kümesine $n$-inci dereceden türev modülü denir.

**Teorem3.3.2** $J_n(R)$ $n$-inci dereceden diferansiyel operatörün evrensel modülü olsun. O zaman

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "1_R"] \arrow[d, "\Delta_n"'] & R \arrow[d, "1_R"] \\
J_n(R) \arrow[r, "f"] & \mathrm{R}
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir ve $J_n(R) \simeq Çek\ f \oplus R\Delta_n\,(1)$.

**İspat** $1_R : R \to R$ birim dönüşüm ve $\Delta_n : R \to J_n(R)$ evrensel diferansiyel operatör olsun. $J_n(R)$ nin evrensellik özelliğinden dolayı

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "1_R"] \arrow[d, "\Delta_n"'] & R \arrow[d, "1_R"] \\ J_n(R) \arrow[r, "f"] & R \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yapan $f\Delta_n = 1_R$ olacak şekilde bir tek $f : J_n(R) \to R$

$R$-modül homomorfizması vardır.Bu homomorfizma örten olup $f\Delta_n(1) = 1$ dir.

$R$ projektif $R$- modül olduğundan dolayı

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "1_R"] & \\ J_n(R) \arrow[r] & R \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan g : $R \to J_n(R)$ $g(r) = r\Delta_n(1)$ olacak şekilde R-modül homomorfizması tanımlanabilir.

$x \in J_n(R)$ *olsun. O zaman* $x = (x - gf(x) + gf(x)$ *ve* $f(x - gf(x) = 0$ *dır.*

Böylece $J_n(R) = Çek\ f + R\Delta_n(1)$ dir.

Eger $x = r\Delta_n(1) \in Çek\ f \cap R\Delta_n(1)$ *ise o zaman* $0 = f(x) = rf\Delta_n(1) =$ r ve

$x = 0$ *dır. Yani* $Çekf \cap R\Delta_n(1)$ dir.

Sonuç olarak $J_n(R) \simeq Çek\ f \oplus R\Delta_n(1)$ bulunur.

**Önerme 3.3.3** $M$, $R$-modül ve $p : J_n(R) \to Çekf$ doğal izdüşüm dönüşümü olsun.

(i) $p\Delta_n$, n-inci dereceden diferansiyel operatördür ve $p\Delta_n(1) = 0$ dır.

(ii) $D \in Der_R^n(R, M)$ *ise o zaman*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "D"] \arrow[d, "p\Delta_n"'] & M \arrow[d, "1_M"] \\ Çekf \arrow[r, "\alpha"] & M \end{tikzcd}$$

Diyagramını değişmeli yapan bir tek $\alpha : Çekf \to M$ $R-$*modül homomorfizması vardır.*

**İspat** (i) $\Delta_n \in D_R^n(R, J_n(R))$ *ve* $p \in D_R^0(J_n(R), Çekf)$ *olsun.* $p\Delta_n \in D_R^n(R, Çekf)$ *dir.*

$p$ homomorfizmasının çekirdeği $R\Delta_n(1)$ $olup$ $p\Delta_n(1) = 0$ $dır.$

(ii) $D \in D_R^n(R, M)$ $olsun$ $.J_n(R)$ $'nin$ evrensellik özelliğinden dolayı $\beta\Delta_n(1) = 0$ $olacak$ $şekilde$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\Delta_n"'] & M \arrow[d, "1_M"] \\ J_n(R) \arrow[r, "\beta"] & M \end{tikzcd}$$

Diyagramını değişmeli yapan bir tek $\beta: J_n(R) \to M$ $R$-modül homomorfizması vardır.Sonuç olarak

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "D"] \arrow[dr, "\Delta_n"'] & M & \\ & J_n(R) \arrow[u, "\beta"] \arrow[r, "P"] & Çekf \arrow[ul, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

Diyagramını değişmeli yapan bir tek $\alpha$ : $Çekf \to M$ $R$ $-$modül homomorfizması vardır.

Bundan sonra $Çekf$ $modülünü$ $\Omega_n(R)$ .ile göstereceğiz.

**Tanım3.3.4** $\Omega_n(R)$ modülüne $R$ nin $n$-inci dereceden evrensel türev modülü ve $p\Delta_n$ dönüşümüne de $n$-inci dereceden evrensel türev operatörü denir. $J_n(R)$ yi

$$\Omega_n(R) \oplus R \simeq J_n(R)$$

şeklinde iki modülün dik toplamı olarak yazılabileceğini göstermiş olduk.

## BÖLÜM 4

## MODÜLLERİN İKİNCİ EKSTERİOR KUVVETİ

### 4.1. Tanımlar ve Evrensel Özellikler

Bu bölümde verilen temel tanım ve teoremler için H.Osborn(1967) (Modules of Diferentials)[5], N.Olgun(2005) (Sonlu üretilmiş cebirlerin evrensel diferansiyel modülleri)[4], I.Kaplansky(1970) (Commutative rings)[2], kaynaklarından faydalanıldı.

**Tanım 4.1.1** $M$, $R$ ve $N$, $R$-modülleri olsun . $m \in M$ için ;

$$\tau\big((m,m)\big) = 0 \;\; ise \;\; \tau : M \times M \to N$$

dönüşümü alterne bilineer dönüşüm denir.

$M \otimes_R M$ , $M$'nin kendisi ile tensör çarpımı olsun. $N$, $m \in M$, $m \otimes m$ formunun elemanları tarafından oluşturulan $M \otimes_R M$ nin bir alt modülü olsun. Aşağıdaki çarpım modülünü düşünebiliriz:

$$\Lambda^2 M := {}^{M \otimes M}/_{N}$$

**Tanım 4.1.2** $\Lambda^2 M$ modülüne $M$ nin ikinci eksterior kuvveti denir. Dolayısıyla

$$\otimes : M \times M \;\; \to M \otimes M$$

$$\otimes(m\, , m') = m \otimes m'$$

İle tanımlanan kanonik dönüşüm ve $\eta : \mathrm{M} \otimes \mathrm{M} \to \Lambda^2 \mathrm{M}$ dönüşümü doğal örten bir dönüşüm olup $\otimes \; ve \; \eta$ nin bileşkesi bilineer alterne dönüşümdür ve $\wedge$ ile tanımlanır.

**Lemma 4.1.3** (Evrensellik özelliği) $N$, $R$-modül ve $\tau : M \times M \to N$ bilineer alterne dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki diyagramı sağlayan

$$f : \Lambda^2 M \longrightarrow N$$

R-modül homomorfizması vardır:

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\Lambda"'] & & N \\ & \Lambda^2 M \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yapan $f\wedge = \tau$ olacak şekilde tek bir $f : \wedge^2 M \to N$ $R$ modül homomorfizması vardır.

**Önerme 4.1.4** $M$, bazı $\{e_1, e_2, \ldots e_s\}$ olan bir serbest $R$ modül ise o zaman $\wedge^2 M$ de rankı $\binom{s}{2}$ olan serbest $R$ modüldür ve bazı $\{e_i \wedge e_j \mid 1 \leq i < j \leq s\}$ kümesidir.

**Önerme 4.1.5** $S$ bir $R$-cebir ve $M$ de bir $R$-modül olsun. O zaman

$(\wedge^2 M) \otimes_R S \cong \wedge^2 (M \otimes_R S)$ dir.

**Not** Benzer şekilde herhangi bir $M$ $R$-modül için $\wedge^n M$ ifadesi $n$-inci dereceden eksterior kuvvet olarak tanımlanabilir.

**Önerme 4.1.6** $M$ bir $R$-modül ve $N$, de $M$ 'nin bir altmodülü olsun. $\mathcal{L}_N$ $\{ m \wedge n \mid m \in M \ ve \ n \in N \}$ ile üretilen $\wedge^2 M$ 'nin altmodülü ise o zaman

$$\wedge^2 M / \mathcal{L}_N \cong \wedge^2 \ (M/N)$$

izomorfizması vardır.

**İspat** $\alpha : M \times M \to \wedge^2 \ (M/N)$ bileşik dönüşüm olsun. $\pi : M \to M/N$ doğal örten dönüşüm olduğunda

$M \times M \xrightarrow{(\pi,\pi)} M/N \times M/N \xrightarrow{\wedge} \wedge^2 (M/N)$ olur.

O halde $\alpha$ bir bilineer alternatif dönüşümdür. Sonuç olarak $\wedge^2 M$ nin evrensellik özelliğinden dolayı $f\wedge = \alpha$ olacak şekildeaşağıdaki diyagramı değişmeli yapan f: $\wedge^2 M \to \wedge^2 \ (M/N)$ $R$-modül homomorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\Lambda"'] & & \wedge^2 \ (M/N) \\ & \Lambda^2 M \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Buradan $f(\mathcal{L}_N)=0$ olup bu $r_i \in R \ ve \ m_i, m_i' \in M$ için

$\bar{f} \left(\sum_i \overline{r_i m_i \wedge m_i'}\right) = f\left(\sum_i r_i m_i \wedge m_i'\right) = \sum_i r_i \overline{m_i} \wedge \overline{m_i'}$ ile tanımlanan

$$\bar{f}\ : \wedge^2 M\ /\mathcal{L}_N \to \wedge^2\ (M/N)$$

dönüşümü vardır.

$M \times M \xrightarrow{\wedge} \wedge^2\ M \xrightarrow{p} \wedge^2 M/\mathcal{L}_N$ dönüşümlerinin bileşkesi alterne bilineer dönüşümdür.Burada $p$ bir doğal dönüşümdür. m$\in M$ $ve$ $n \in N$ için

$p\wedge(m,n) \in \mathcal{L}_N$ ise

$\mathcal{L}'_N\ ye\ \ ait\ olan\ n \wedge m\ \ için$ n$\wedge m + m \wedge n = 0$ olup

buradan şunu görebiliriz: $\beta{:}\, M/N \times M/N \to \wedge^2 M/\mathcal{L}_N$ bilineer dönüşümü

$\beta(\bar{m},\bar{m}') = \overline{m \wedge m'}$ ile tanımlanır. Benzer argümentlerle $\beta$ ,

$g{:}\wedge^2 (M/N) \to \wedge^2 M/\mathcal{L}_N$ $R$ modül homomorfizması ile oluşur öyleki aşağıdaki diyagram şekline dönüşür:

$$\begin{tikzcd} M/N \times M/N \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\Lambda"'] & & \wedge^2 M/\mathcal{L}_N \\ & \Lambda^2(M/N) \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Böylece $g\bar{f}$ ve $\bar{f}g$ istendiği gibi birim dönüşümüdür.

## 4.2. Evrensel Türev Modüllerinin Eksterior Kuvvetleri

$R$= $k[x_1, \dots, x_s]$ sonlu üretilmiş $R$-cebir ve $F$ de $f_1, \dots, f_m$ elemanları tarafından üretilen R'nin bir ideali olsun. $S$=$R/I$ polinom cebiri için $\wedge^2\ \Omega_1(S)$ çalışılacaktır.

Bu bölüm boyunca $R = k[x_1, \dots, x_s]$ iken $R/I$ ile tanımlanan bir afin cebir anlamına gelen $S$ bir polinom cebiridir ve $I$=$(f_1, \dots, f_m)$ $R$'nin idealidir. Bu kısmın sonunda S nin $\wedge^2\ \Omega_1(S)$ türevinin evrensel modülünün ikinci eksterior kuvvetine çalışmış olacağız. Şimdi bir hatırlatma yapalım:

$F$ , bazı $\{d_1(x_1), \dots, d_1(x_s)\}$ verilen rankı s olan serbest $S$-modülü, ve $N$, $\{d_1(f_1), \dots, d_1(f_m)\}$ ile üretilen $F$ nin alt modülü olduğunda

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow \Omega_1(S) \longrightarrow 0$$

dizisi S-modülünün tam dizisi olur. Burada $d_1{:}\, R \to \Omega_1(R)$ evrensel türevdir.

**Önteorem 4.2.1** $K$ bir değişmeli k-cebiri olsun. Buradan $\Omega_1(K)$ ,

$\Delta: K \to \Omega_1(K)$ evrensel türeviyle $K$ nin türevlerinin evrensel modülüdür. O halde

D: $\Omega_1(K) \to \wedge^2 \Omega_1(K)$ , $D(\sum_i a_i \Delta b_i) = \sum_i \Delta a_i \wedge \Delta b_i$ dönüşümü $a_i, b_i \in K$

olduğunda $\Omega_1(K)$ üzerinde 1. Mertebeden diferansiyel dönüşümdür.

**İspat** $K$ bir k-cebiri, $\Omega_2(K)$ $K$ nın ikinci türevinin evrensel modülü olsun. $J_1(\Omega_1(K))$ ifadesi $\Delta_1: \Omega_1(K) \to J_1(\Omega_1(K))$ evrensel diferansiyel operatörüyle $\Omega_1(K)$ üzerinde 1 ‘ eşit veya daha az mertebenin diferansiyel operatörünün evrensel modülü olsun. Burada $\Delta_1 d_1$ ikinci dereceden diferansiyel operatör olup $\Omega_2(K)$ ‘nın evrensellik özelliğinden aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan $\theta : \Omega_1(K) \to J_1(\Omega_1(K))$ $K$-modül homomorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_2"'] & \Omega_1(K) \arrow[d, "\Delta_1"] \\ \Omega_2(K) \arrow[r, "\theta"] & J_1(\Omega_1(K)) \end{tikzcd}$$

D: $\Omega_1(K) \to \wedge^2 \Omega_1(K)$ ifadesi önteorem 4.2.1. deki gibi olsun. $J_1(\Omega_1(K))$ nın evrensellik özelliği kullanılırsa o zaman aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan $\varphi : J_1(\Omega_1(K)) \to \wedge^2\Omega_1(K)$ bir tek $K$-modül homomorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd} \Omega_1(K) \arrow[rr, "D"] \arrow[dr, "\Delta_1"'] & & \wedge^2 \Omega_1(K) \\ & J_1(\Omega_1(K)) \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

**Önerme 4.2.2** $S$ , $R/I$ ile belirlenen afin cebiri olsun.

$g(\overline{d_1(x_i)} \wedge \overline{d_1(x_j)}) = \overline{d_1(x_i) \wedge d_1(x_j)}$ ile tanımlanan $g$:$\wedge^2 (F/N) \to \wedge^2 F/\mathcal{L}_N$

Dönüşümü bir S-modül izomorfizmasıdır. Burada
$\wedge^2 F$ , $\{d_1(x_i) \wedge d_1(x_j) \mid 1 \le i < j \le s\}$ bazı ile serbest $S$-modül (önerme 4.1.3) ve

$\mathcal{L}_N$ $de$ $\{d(f_k) \wedge^2 d(x_j) \mid k = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, s\}$ kümesi ile üretilen $\wedge^2 F$ nin bir altmodülüdür.

**İspat** Önerme 4.1.6 deki gibi İspatlanır.

**Önerme 4.2.3** $S$ , $R/I$ ile gösterilen afin cebir olsun. O zaman

$$\Omega_1(S) \xrightarrow{\theta} J_1(\Omega_1(S)) \xrightarrow{\varphi} \wedge^2 \Omega_1(S) \longrightarrow 0$$

dizisi *S*-modül tam dizisidir.

**Önerme 4.2.4** *K* bir boyutlu lokal k-cebiri olsun. *R* bir regüler halka olsun ancak ve ancak $\Omega_1(K)$ nin ikinci eksterior kuvveti sıfırdır.

**İspat** Farz edelim ki *K* bir boyutlu regüler lakal k-cebiri olsun. O halde $\Omega_1(K)$ rankı bir olan serbest *K*-modül ve $\wedge^2 \Omega_1(K) = 0$ 'dır.

Tersine diyelim ki $\wedge^2 \Omega_1(K) = 0$. m de $K$ nin maksimal ideali olsun. O halde Önerme 4.1.4. ten $\wedge^2 (\Omega_1(K)/m\,\Omega_1(K)) = 0$.

$\Omega_1(K)/m\,\Omega_1(K)$ , $K/m$ üzerinde vektör uzayıdır, bu da $\Omega_1(K)/m\,\Omega_1(K) = 0$

veya $dim_{K/m}\,\Omega_1(K)/m\,\Omega_1(K) = 1$ olduğunu gösterir. O halde

$\Omega_1(K)/m\,\Omega_1(K) = 0$ dır.

Buradan $\Omega_1(K)$ =m$\Omega_1(K)$ olur ki bu da Nakayama'nin lemmasına göre çelişkidir. O halde $\Omega_1(K) = \mu\Omega_1(K)$ rankını elde ederiz. Böylece $\Omega_1(K)$ rankı s olan serbest *K*-modül olup *R* regülerdir.

**Teorem 4.2.5** *K* bir boyutlu afin cebiri olsun. $\theta : \Omega_2(K) \to J_1(\Omega_2(K))$ daha önce belirttiğimiz gibi olsun. O halde *K* bir regular k-cebir olsun ancak ve ancak $\theta$ bir örten *K*-modül homomorfizmadır.

**İspat** Eğer *K* bir boyutlu regüler halka ise $\theta$ izomorfizma olduğunu biliyoruz. Tersine $\theta$ örten olsun. Tam dizilerden biliyoruzki $\wedge^2 \Omega_1(K) = 0$ dır. $m$, $K$ nın maksimal ideali olsun. Önerme 4.1.4 ten $\wedge^2 \Omega_1(K_m) = \left(\Omega_1(K)\right) \otimes_K K_m = 0$. Son önermeden $K_m$ nin reguler olduğunu elde ederiz.

**Önerme 4.2.6** *K*, s$\geq 1$ boyutlu tamlık bölgesi olsun ve *M* de sonlu üretilen *K*-modül olsun öyleki $\wedge^2 M$, rankı $(s^2 - s)/2$ olan projektif modüldür. O halde, *M* nin minimal üreteçlerinin sayısı olan $\mu(M)$ , s ye eşittir.

**İspat** Genelliği kaybetmeden *K* s boyutlu tamlık bölgesi olduğunu kabul edelim. Böylece $\wedge^2 M$ , rankı $(s^2 - s)/2$ olan serbest K-modülüdür. m , *K* nin maksimal ideali olsun. Buradan $\wedge^2 M \otimes_K K/m$ , $(s^2 - s)/2$ boyutunun $K/m$ −vektör uzayıdır. Eğer $\mu(M) = t$ , t=s dir ancak ve ancak $dim_{K/m} \wedge^2 (M/mM) = \binom{t}{2} = \binom{s}{2}$. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.2.7** *R*, s$\geq 1$ boyutlu afin bölgesi olsun. $\wedge^2 \Omega_1(R)$ projektif *R*-modül ise *R* regülerdir.

**İspat** $\Omega_1(R)$ nin projektif olduğunu göstermek yeterlidir. $\Omega_1(R)$ nin rankı *s* olduğundan son önermeden $\mu(\Omega_1(R)$ )=s olup istenen elde edilir.

## 4.3.Örnekler

Bu bölümde konuyu açıklayıcı bazı örnekler vereceğiz.

**Örnek 4.3.1.** $R$=$k$[x,y] polinomlar cebiri ve $N$ de $y^2 = x^3$ elemanı tarafından üretilen r nin bir ideali olsun. O halde $F$ bir $\{e_1, e_2\}$ bazıyla serbest $R$-modül olduğunda $\Omega_1(R) = F/N$ dir, ve $N$

$$\alpha = 2ye_1 - 3x^2e_2$$

tarafından üretilen $F$ nin alt modülüdür .

$\wedge^2 F = R(e_1 \wedge e_2)$ bir serbest modül oduğundan $\wedge^2 \Omega_1(R) = \wedge^2 F/\mathcal{L}_N$ ve $\mathcal{L}_N = R(\alpha \wedge e_1) + R(\alpha \wedge e_2)$ dir. Burada $\alpha \wedge e_1 = 3x^2e_1 \wedge e_2$ $ve$ $\alpha \wedge e_2 = 2ye_1 \wedge e_2$. O halde $\wedge^2 \Omega_1(R) \cong R/(yR + x^2R) \cong J_1(\Omega_1(R))/Im\theta$ bulunur.

**Uyarı :** $\wedge^2 \Omega_1(R)$ nin projektif boyutu sonsuzdur.

**Örnek 4.3.3 :** $R = k[x,y]$ polinomlar cebiri ve $I$ da f= $y^2 - x^3$ elemanı tarafından üretilen R nin bir ideali olsun. $S = {R}/{I}$ alalım. $S$ afin tamlık bölgesi olup boyutu 1 dir. $\Omega_2(S) = {F}/{N}$ :

$F$ bazı $\{e_1 = \partial_1(y), e_2 = \partial_1(x)\}$ kümesi olan serbest $S$-modül ve

$N, F$ nin $\alpha = 2ye_1 - 3x^2e_2$ elemanı tarafından üretilen alt modülü olsun.

Buradan $S^2(\Omega_2(R)) = {S^2F}/{\delta_N}$ öyle ki $S^2F = R(e_1 \wedge e_2) \oplus R(e_1 \wedge e_1) \oplus R(e_2 \wedge e_2)$

serbest modül olup ve

$\delta_N = R(\alpha \wedge e_1) \oplus R(\alpha \wedge e_2)$ e

$\alpha \wedge e_1 = 3x^2e_1 \wedge e_2$=$2ye_1 \wedge e_1 - 3x^2e_1 \wedge e_2$

$\alpha \wedge e_2 = 2ye_1 \wedge e_2$=$2ye_1 \wedge e_2 - 3x^2e_2 \wedge e_2$

$S^2(\Omega_1(R)) \simeq {R}/{yR + x^2R} \simeq {J_1(\Omega_1(R))}/{Im\theta}$ olur.

$\Omega_2(R) = {F}/{N}$ öyle ki $F$ serbest $R$-modül ve bazı

$\{\partial_2(x), \partial_2(y), \partial_2(xy), \partial_2(x^2), \partial_2(y^2)\}$ ile birlikte $N$ ,$F$ nin alt modülü olsun. Ve

$\Omega_2(R) = {F}/{N}$ $F$ , $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ $ile\ birlikte\ serbest\ R - modül\ olsun.$

$N \quad F$ nin alt modülü şunlar tarafından üretilmiş olsun;

$\alpha = e_5 - 3xe_4 + 3x^2e_1$

$\beta = xe_5 - 6x^2e_4 + 2ye_3 + 7x^3e_1 - 2xye_2$

$\gamma = -3xye_4 + 3ye_5 - 3x^2e_3 + 6x^2ye_1 - y^2e_2$

$\alpha = \partial_2(y^2) - 3x\partial_2(x^2) + 3x^2\partial_2(x)$ yani;

$\beta = x\partial_2(y^2) - 6x^2\partial_2(x^2) + 2y\partial_2(xy) + 7x^3\partial_2(x) - 2xy\partial_2(y)$

$\gamma = 3y\partial_2(y^2) - 3xy\partial_2(x^2) - 3x^2\partial_2(xy) + 6x^2y\partial_2(x) - y^2\partial_2(y)$

$\Omega_2(R) = F/N \qquad rank\Omega_2(R) = 2 \qquad N = R_\alpha + R_\beta + R_\gamma$

$F = (\partial_2(x), \partial_2(y), \partial_2(xy), \partial_2(x^2))$

$$J_1\big(\Omega_2(R)\big) = R\Delta_1\big(\partial_2(x)\big) + R\Delta_1\big(\partial_2(y)\big) + R\Delta_1\big(x\partial_2(x)\big) + R\Delta_1\big(x\partial_2(y)\big) + R\Delta_1\big(x\partial_2(x^2)\big) + R\Delta_1\big(x\partial_2(xy)\big) + R\Delta_1\big(y\partial_2(x)\big) + R\Delta_1\big(y\partial_2(y)\big) + R\Delta_1\big(y\partial_2(x^2)\big) + R\Delta_1\big(y\partial_2(xy)\big)$$

$$\Delta^2\big(\Omega_2(R)\big) =< \partial_2(x) \wedge \partial_2(y), \partial_2(x) \wedge \partial_2(xy), \partial_2(x) \wedge \partial_2(x^2), \partial_2(x) \wedge \partial_2(x), \partial_2(y) \wedge \partial_2(y)$$

$, \partial_2(y) \wedge \partial_2(xy), \partial_2(y) \wedge \partial_2(x^2), \partial_2(xy) \wedge \partial_2(xy), \partial_2(xy) \wedge \partial_2(x^2), \partial_2(x^2) \wedge \partial_2(x^2) >$ ve şunlarla birlikte

| | | |
|---|---|---|
| $\propto \wedge \partial_2(x)$ | $\beta \wedge \partial_2(x)$ | $\gamma \wedge \partial_2(x)$ |
| $\propto \wedge \partial_2(y)$ | $\beta \wedge \partial_2(y)$ | $\gamma \wedge \partial_2(y)$ |
| $\propto \wedge \partial_2(xy)$ | $\beta \wedge \partial_2(xy)$ | $\gamma \wedge \partial_2(xy)$ |
| $\propto \wedge \partial_2(x^2)$ | $\beta \wedge \partial_2(x^2)$ | $\gamma \wedge \partial_2(x^2)$ |

$\propto \wedge \partial_2(x) = \partial_2(y^2) \wedge \partial_2(x) - 3x\partial_2(x^2) \wedge \partial_2(x) + 3x^2\partial_2(x) \wedge \partial_2(x)$

$\propto \wedge \partial_2(y) = \partial_2(y^2) \wedge \partial_2(y) - 3x\partial_2(x^2) \wedge \partial_2(y) + 3x^2\partial_2(x) \wedge \partial_2(y)$

$\propto \wedge \partial_2(xy) = \partial_2(y^2) \wedge \partial_2(xy) - 3x\partial_2(x^2) \wedge \partial_2(xy) + 3x^2\partial_2(x) \wedge \partial_2(xy)$

$\propto \wedge \partial_2(x^2) = \partial_2(y^2) \wedge \partial_2(x^2) - 3x\partial_2(x^2) \wedge \partial_2(x^2) + 3x^2\partial_2(x) \wedge \partial_2(x^2)$

$$\beta \wedge \partial_2(x) = x\partial_2(y^2) \wedge \partial_2(x) - 6x^2\partial_2(x^2) \wedge \partial_2(x) + 2y\partial_2(xy) \wedge \partial_2(x) + 7\partial_2(x) \wedge \partial_2(x) - 2xy\partial_2(y) \wedge \partial_2(x)$$

$$\beta \wedge \partial_2(y) = x\partial_2(y^2) \wedge \partial_2(y) - 6x^2\partial_2(x^2) \wedge \partial_2(y) + 2y\partial_2(xy) \wedge \partial_2(y) + 7\partial_2(x) \wedge \partial_2(y) - 2xy\partial_2(y) \wedge \partial_2(y)$$

$$\beta \wedge \partial_2(xy) = x\partial_2(y^2) \wedge \partial_2(xy) - 6x^2\partial_2(x^2) \wedge \partial_2(xy) + 2y\partial_2(xy) \wedge \partial_2(xy) + 7\partial_2(x) \wedge \partial_2(xy) - 2xy\partial_2(y) \wedge \partial_2(xy)$$

$$\beta \wedge \partial_2(x^2) = x\partial_2(y^2) \wedge \partial_2(x^2) - 6x^2\partial_2(x^2) \wedge \partial_2(x^2) + 2y\partial_2(xy) \wedge \partial_2(x^2) + 7\partial_2(x) \wedge \partial_2(x^2) - 2xy\partial_2(y) \wedge \partial_2(x^2)$$

$$\gamma \wedge \partial_2(x) = 3y\partial_2(y^2) \wedge \partial_2(x) - 3xy\partial_2(x^2) \wedge \partial_2(x) - 3x^2\partial_2(xy) \wedge \partial_2(x) + 6x^2y\partial_2(x) \wedge \partial_2(x) - y^2\partial_2(y) \wedge \partial_2(x)$$

$$\gamma \wedge \partial_2(y) = 3y\partial_2(y^2) \wedge \partial_2(y) - 3xy\partial_2(x^2) \wedge \partial_2(y) - 3x^2\partial_2(xy) \wedge \partial_2(y) + 6x^2y\partial_2(x) \wedge \partial_2(y) - y^2\partial_2(y) \wedge \partial_2(y)$$

$$\gamma \wedge \partial_2(xy) = 3y\partial_2(y^2) \wedge \partial_2(xy) - 3xy\partial_2(x^2) \wedge \partial_2(xy) - 3x^2\partial_2(xy) \wedge \partial_2(xy) + 6x^2y\partial_2(x) \wedge \partial_2(xy) - y^2\partial_2(y) \wedge \partial_2(xy)$$

$$\gamma \wedge \partial_2(x^2) = 3y\partial_2(y^2) \wedge \partial_2(x^2) - 3xy\partial_2(x^2) \wedge \partial_2(x^2) - 3x^2\partial_2(xy) \wedge \partial_2(x^2) + 6x^2y\partial_2(x) \wedge \partial_2(x^2) - y^2\partial_2(y) \wedge \partial_2(x^2)$$

$$\partial_2(f) = \partial_2(y^2) - 3x\partial_2(x^2) + 3x^2\partial_2(x) = 0$$

$$\partial_2(xf) = x\partial_2(y^2) - 6x^2\partial_2(x^2) + 2y\partial_2(xy) + 7x^3\partial_2(x) - 2xy\partial_2(y) = 0$$

$$\partial_2(yf) = -3xy\partial_2(x^2) + 3y\partial_2(y^2) - 3x^2\partial_2(xy) + 6x^2y\partial_2(x) - y^2\partial_2(y) = 0$$

$J_1(\Omega_2(R))$=$R\Delta_1(\partial_2(x)) + R\Delta_1(\partial_2(y)) + R$

$= <$
$\Delta_1(\partial_2(x)), \Delta_1(\partial_2(y)), \Delta_1(x\partial_2(x)), \Delta_1(x\partial_2(y)), \Delta_1(x\partial_2(x^2)), \Delta_1(x\partial_2(xy)),$
$\Delta_1(y\partial_2(x)), \Delta_1(y\partial_2(y)), \Delta_1(y\partial_2(x^2)), \Delta_1(y\partial_2(xy)) >$

$J_1(\Omega_2(R))$= $R\Delta_1(\partial_2(x)) + R\Delta_1(\partial_2(y)) + R, \Delta_1(x\partial_2(x)) + R\Delta_1(x\partial_2(y)) +$
$R\Delta_1(y\partial_2(x)) + R\Delta_1(y\partial_2(y)) + R\Delta_1(y\partial_2(xy)) + R\Delta_1(x\partial_2(x^2)) +$
$R\Delta_1(y\partial_2(x^2)) + R\Delta_1(\partial_2(xy)) + R\Delta_1(\partial_2(x^2)) + R\Delta_1(x\partial_2(xy))$

O halde $\Lambda^2(\Omega_2(R)) \simeq {}^{R}/_{yR + x^2R} \simeq {}^{J_1(\Omega_1(R))}/_{Im\theta}$

**Örnek 4.3.4** $R$=k[x,y,z] polinomlar cebiri ve $I$ da $f = y^2 - xz$ elemanı tarafından üretilen R nin bir ideali olsun. $S = {}^{R}/_{I}$ alalım. S afin tamlık bölgesi olup boyutu 2 dir. $\Omega_1(S) = {}^{F}/_{N}$ :

F bazı $\{e_1 = \partial_1(x), e_2 = \partial_1(y), e_3 = \partial_1(z)\}$ kümesi olan serbest $S$ modül ve $N$ de $\alpha = 2ye_2 - ze_1 - xe_3$ elemanı tarafından üretilen alt modülü olsun. Buradan $S^2(\Omega_1(R)) = {S^2F}/{\delta_N}$ öyle ki $S^2F = R(e_1 \vee e_2 \vee e_3)$ serbest modül olup ve

$\delta_N = R(\alpha \wedge e_1) \oplus R(\alpha \wedge e_2) \oplus R(\alpha \wedge e_3)$ olur.

$\alpha \wedge e_1 = 2ye_2 \wedge e_1 - ze_1 \wedge e_1 - xe_3 \wedge e_1$

$\alpha \wedge e_2 = 2ye_2 \wedge e_2 - ze_{1\wedge} e_2 - xe_3 \wedge e_2$

$\alpha \wedge e_3 = 2ye_2 \wedge e_3 - ze_1 \wedge e_3 - xe_3 \wedge e_3$

$\partial_1(f) = \partial_1(y^2 - xz) = 2y\partial_1(y) - z\partial_1(x) - x\partial_1(z)$ olup $\Omega_1(S) \cong F/N$ dir.

$rank\Omega_1(S) = 2$ olduğu için $rankN = rankF - rank\Omega_1(S) = 3 - 2 = 1$ olur. Buradan da $\Omega_1(S)$ için serbest çözünürlük olup $hd\Omega_1(S) \leq 1$ bulunur.

$\Omega_2(S)$: $F = \{\partial_2(x^2), \partial_2(xz), \partial_2(xy), \partial_2(z^2), \partial_2(yz), \partial_2(y^2), \partial_2(x), \partial_2(y), \partial_2(z)\}$ kümesi olan serbest S-modül ve $N = \{\partial_2(f), \partial_2(xf), \partial_2(yf), \partial_2(zf)\}$ elemanları tarafından üretilen F 'nin bir alt modülü olsun. Buradan

$\partial_2(f) = \partial_2(y^2) - \partial_2(xz)$

$$\partial_2(xf) = -z\partial_2(x^2) + x\partial_2(y^2) + 2y\partial_2(xy) - 2x\partial_2(xz) + xz\partial_2(x) - 2xy\partial_2(y) + x^2\partial_2(z)$$

$$\partial_2(yf) = 3y\partial_2(y^2) - z\partial_2(xy) - y\partial_2(xz) - x\partial_2(yz) + yz\partial_2(x) - 2xz\partial_2(y) + xy\partial_2(z)$$

$$\partial_2(zf) = z\partial_2(y^2) - x\partial_2(z^2) - 2z\partial_2(xz) + 2y\partial_2(yz) - z^2\partial_2(x) - 2yz\partial_2(y) + xz\partial_2(z)$$

$J_2(S) \cong F/N$ dir. Burada $\partial_2(f) = \alpha, \partial_2(xf) = \beta, \partial_2(yf) = \gamma, \partial_2(zf) = \theta$ alalım.

$$\alpha \wedge \partial_2(x^2) \beta \wedge \partial_2(x^2) \gamma \wedge \partial_2(x^2) \theta \wedge \partial_2(x^2)$$

$$\alpha \wedge \partial_2(xz) \beta \wedge \partial_2(xz) \gamma \wedge \partial_2(xz)\ \theta \wedge \partial_2(xz)$$

$$\alpha \wedge \partial_2(xy) \beta \wedge \partial_2(xy) \gamma \wedge \partial_2(xy) \theta \wedge \partial_2(xy)$$

$$\alpha \wedge \partial_2(z^2) \beta \wedge \partial_2(z^2) \gamma \wedge \partial_2(z^2) \theta \wedge \partial_2(z^2)$$

$$\alpha \wedge \partial_2(yz) \beta \wedge \partial_2(yz)\ \gamma \wedge \partial_2(yz) \theta \wedge \partial_2(yz)$$

$$\alpha \wedge \partial_2(x) \beta \wedge \partial_2(x)\ \gamma \wedge \partial_2(x)\ \ \theta \wedge \partial_2(x)$$

$$\alpha \wedge \partial_2(y)\ \beta \wedge \partial_2(y) \gamma \wedge \partial_2(y)\ \ \theta \wedge \partial_2(y)$$

$$\alpha \wedge \partial_2(z)\ \beta \wedge \partial_2(z) \gamma \wedge \partial_2(z)\ \ \theta \wedge \partial_2(z)$$

$$
\begin{aligned}
&S^2\big(\Omega_2(R)\big)\\
&= \langle \partial_2(x^2)\wedge\partial_2(xz), \partial_2(x^2)\wedge\partial_2(xy), \partial_2(x^2)\wedge\partial_2(z^2), \partial_2(x^2)\wedge\partial_2(yz),\\
&\partial_2(x^2)\wedge\partial_2(x), \partial_2(x^2)\partial_2(y), \partial_2(x^2)\wedge\partial_2(z), \partial_2(xz)\wedge\partial_2(z^2), \partial_2(xz)\wedge\partial_2(xy),\\
&\partial_2(xz)\wedge\partial_2(yz), \partial_2(xz)\wedge\partial_2(x), \partial_2(xz)\wedge\partial_2(y), \partial_2(xz)\wedge\partial_2(z), \partial_2(xy)\wedge\partial_2(z^2),\\
&\partial_2(xy)\wedge\partial_2(yz), \partial_2(xy)\wedge\partial_2(x)\partial_2(xy)\wedge\partial_2(y), \partial_2(xy)\wedge\partial_2(y), \partial_2(xy)\wedge\partial_2(z),\\
&\partial_2(z^2)\wedge\partial_2(yz), \partial_2(z^2)\wedge\partial_2(x), \partial_2(z^2)\wedge\partial_2(y), \partial_2(z^2)\wedge\partial_2(z),\\
&\partial_2(yz)\wedge\partial_2(x),\ \ \partial_2(xz)\wedge\partial_2(y), \partial_2(xz)\partial_2(z), \partial_2(x)\wedge\partial_2(y), \partial_2(x)\wedge\partial_2(z), \partial_2(y)\wedge\partial_2(z)\rangle
\end{aligned}
$$

$$\alpha\wedge\partial_2(x^2) = \partial_2(y^2)\wedge\partial_2(x^2) - \partial_2(xz)\wedge\partial_2(x^2)$$

$$\alpha\wedge\partial_2(xz) = \partial_2(y^2)\wedge\partial_2(xz) - \partial_2(xz)\wedge\partial_2(xz)$$

$$\alpha\wedge\partial_2(xy) = \partial_2(y^2)\wedge\partial_2(xy) - \partial_2(xz)\wedge\partial_2(xy)$$

$$\alpha\wedge\partial_2(z^2) = \partial_2(y^2)\wedge\partial_2(z^2) - \partial_2(xz)\wedge\partial_2(z^2)$$

$$\alpha\wedge\partial_2(yz) = \partial_2(y^2)\wedge\partial_2(yz) - \partial_2(xz)\wedge\partial_2(yz)$$

$$\alpha\wedge\partial_2(x) = \partial_2(y^2)\wedge\partial_2(x) - \partial_2(x)\wedge\partial_2(x)$$

$$\alpha\wedge\partial_2(y) = \partial_2(y^2)\wedge\partial_2(y) - \partial_2(xz)\wedge\partial_2(y)$$

$$\alpha\wedge\partial_2(z) = \partial_2(y^2)\wedge\partial_2(z) - \partial_2(xz)\wedge\partial_2(z)$$

$$
\begin{aligned}
\beta\wedge\partial_2(x^2) = {}& -z\partial_2(x^2)\wedge\partial_2(x^2) + x\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(x^2) + 2y\partial_2(xy)\wedge\partial_2(x^2)\\
&- 2x\partial_2(xz)\wedge\partial_2(x^2) + xz\partial_2(x)\wedge\partial_2(x^2) - 2xy\partial_2(y)\wedge\partial_2(x^2)\\
&+ x^2\partial_2(z)\wedge\partial_2(x^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta\wedge\partial_2(xz) = {}& -z\partial_2(x^2)\wedge\partial_2(xz) + x\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(xz) + 2y\partial_2(xy)\wedge\partial_2(xz)\\
&- 2x\partial_2(xz)\wedge\partial_2(xz) + xz\partial_2(x)\wedge\partial_2(xz) - 2xy\partial_2(y)\wedge\partial_2(xz)\\
&+ x^2\partial_2(z)\wedge\partial_2(xz)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta\wedge\partial_2(xy) = {}& -z\partial_2(x^2)\wedge\partial_2(xy) + x\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(xy) + 2y\partial_2(xy)\wedge\partial_2(xy)\\
&- 2x\partial_2(xz)\wedge\partial_2(xy) + xz\partial_2(x)\wedge\partial_2(xy) - 2xy\partial_2(y)\wedge\partial_2(xy)\\
&+ x^2\partial_2(z)\wedge\partial_2(xy)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta\wedge\partial_2(z^2) = {}& -z\partial_2(x^2)\wedge\partial_2(z^2) + x\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(z^2) + 2y\partial_2(xy)\wedge\partial_2(z^2)\\
&- 2x\partial_2(xz)\wedge\partial_2(z^2) + xz\partial_2(x)\wedge\partial_2(z^2) - 2xy\partial_2(y)\wedge\partial_2(z^2)\\
&+ x^2\partial_2(z)\wedge\partial_2(z^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta\wedge\partial_2(yz) = {}& -z\partial_2(x^2)\wedge\partial_2(yz) + x\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(yz) + 2y\partial_2(xy)\wedge\partial_2(yz)\\
&- 2x\partial_2(xz)\wedge\partial_2(yz) + xz\partial_2(x)\wedge\partial_2(yz) - 2xy\partial_2(y)\wedge\partial_2(yz)\\
&+ x^2\partial_2(z)\wedge\partial_2(yz)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\beta\wedge\partial_2(x) = {} & -z\partial_2(x^2)\wedge\partial_2(x) + x\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(x) + 2y\partial_2(xy)\wedge\partial_2(x) \\ & - 2x\partial_2(xz)\wedge\partial_2(x) + xz\partial_2(x)\wedge\partial_2(x) - 2xy\partial_2(y)\wedge\partial_2(x) \\ & + x^2\partial_2(z)\wedge\partial_2(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta\wedge\partial_2(y) = {} & -z\partial_2(x^2)\wedge\partial_2(y) + x\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(y) + 2y\partial_2(xy)\wedge\partial_2(y) \\ & - 2x\partial_2(xz)\wedge\partial_2(y) + xz\partial_2(x)\wedge\partial_2(y) - 2xy\partial_2(y)\wedge\partial_2(y) \\ & + x^2\partial_2(z)\wedge\partial_2(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta\wedge\partial_2(z) = {} & -z\partial_2(x^2)\wedge\partial_2(z) + x\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(z) + 2y\partial_2(xy)\wedge\partial_2(z) \\ & - 2x\partial_2(xz)\wedge\partial_2(z) + xz\partial_2(x)\wedge\partial_2(z) - 2xy\partial_2(y)\wedge\partial_2(z) \\ & + x^2\partial_2(z)\wedge\partial_2(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma\wedge\partial_2(x^2) = {} & 3y\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(x^2) - z\partial_2(xy)\wedge\partial_2(x^2) - y\partial_2(xz)\wedge\partial_2(x^2) \\ & - x\partial_2(yz)\wedge\partial_2(x^2) + yz\partial_2(x)\wedge\partial_2(x^2) - 2xz\partial_2(y)\wedge\partial_2(x^2) \\ & + xy\partial_2(z)\wedge\partial_2(x^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma\wedge\partial_2(xz) = {} & 3y\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(xz) - z\partial_2(xy)\wedge\partial_2(xz) - y\partial_2(xz)\wedge\partial_2(xz) \\ & - x\partial_2(yz)\wedge\partial_2(xz) + yz\partial_2(x)\wedge\partial_2(xz) - 2xz\partial_2(y)\wedge\partial_2(xz) \\ & + xy\partial_2(z)\wedge\partial_2(xz)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma\wedge\partial_2(xy) = {} & 3y\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(xy) - z\partial_2(xy)\wedge\partial_2(xy) - y\partial_2(xz)\wedge\partial_2(xy) \\ & - x\partial_2(yz)\wedge\partial_2(xy) + yz\partial_2(x)\wedge\partial_2(xy) - 2xz\partial_2(y)\wedge\partial_2(xy) \\ & + xy\partial_2(z)\wedge\partial_2(xy)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma\wedge\partial_2(z^2) = {} & 3y\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(z^2) - z\partial_2(xy)\wedge\partial_2(z^2) - y\partial_2(xz)\wedge\partial_2(z^2) \\ & - x\partial_2(yz)\wedge\partial_2(z^2) + yz\partial_2(x)\wedge\partial_2(z^2) - 2xz\partial_2(y)\wedge\partial_2(z^2) \\ & + xy\partial_2(z)\wedge\partial_2(z^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma\wedge\partial_2(yz) = {} & 3y\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(yz) - z\partial_2(xy)\wedge\partial_2(yz) - y\partial_2(xz)\wedge\partial_2(yz) \\ & - x\partial_2(yz)\wedge\partial_2(yz) + yz\partial_2(x)\wedge\partial_2(yz) - 2xz\partial_2(y)\wedge\partial_2(yz) \\ & + xy\partial_2(z)\wedge\partial_2(yz)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma\wedge\partial_2(x) = {} & 3y\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(x) - z\partial_2(xy)\wedge\partial_2(x) - y\partial_2(xz)\wedge\partial_2(x) \\ & - x\partial_2(yz)\wedge\partial_2(x) + yz\partial_2(x)\wedge\partial_2(x) - 2xz\partial_2(y)\wedge\partial_2(x) \\ & + xy\partial_2(z)\wedge\partial_2(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma\wedge\partial_2(y) = {} & 3y\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(y) - z\partial_2(xy)\wedge\partial_2(y) - y\partial_2(xz)\wedge\partial_2(y) \\ & - x\partial_2(yz)\wedge\partial_2(y) + yz\partial_2(x)\wedge\partial_2(y) - 2xz\partial_2(y)\wedge\partial_2(y) \\ & + xy\partial_2(z)\wedge\partial_2(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma\wedge\partial_2(z) = {} & 3y\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(z) - z\partial_2(xy)\wedge\partial_2(z) - y\partial_2(xz)\wedge\partial_2(z) \\ & - x\partial_2(yz)\wedge\partial_2(z) + yz\partial_2(x)\wedge\partial_2(z) - 2xz\partial_2(y)\wedge\partial_2(z) \\ & + xy\partial_2(z)\wedge\partial_2(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta\wedge\partial_2(x^2) = {}& z\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(x^2) - x\partial_2(z^2)\wedge\partial_2(x^2) - 2z\partial_2(xz)\wedge\partial_2(x^2) \\ &+ 2y\partial_2(yz)\wedge\partial_2(x^2) - z^2\partial_2(x)\wedge\partial_2(x^2) - 2yz\partial_2(y)\wedge\partial_2(x^2) \\ &+ xz\partial_2(z)\wedge\partial_2(x^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta\wedge\partial_2(xz) = {}& z\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(xz) - x\partial_2(z^2)\wedge\partial_2(xz) - 2z\partial_2(xz)\wedge\partial_2(xz) \\ &+ 2y\partial_2(yz)\wedge\partial_2(xz) - z^2\partial_2(x)\wedge\partial_2(xz) - 2yz\partial_2(y)\wedge\partial_2(xz) \\ &+ xz\partial_2(z)\wedge\partial_2(xz)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta\wedge\partial_2(xy) = {}& z\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(xy) - x\partial_2(z^2)\wedge\partial_2(xy) - 2z\partial_2(xz)\wedge\partial_2(xy) \\ &+ 2y\partial_2(yz)\wedge\partial_2(xy) - z^2\partial_2(x)\wedge\partial_2(xy) - 2yz\partial_2(y)\wedge\partial_2(xy) \\ &+ xz\partial_2(z)\wedge\partial_2(xy)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta\wedge\partial_2(z^2) = {}& z\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(z^2) - x\partial_2(z^2)\wedge\partial_2(z^2) - 2z\partial_2(xz)\wedge\partial_2(z^2) \\ &+ 2y\partial_2(yz)\wedge\partial_2(z^2) - z^2\partial_2(x)\wedge\partial_2(z^2) - 2yz\partial_2(y)\wedge\partial_2(z^2) \\ &+ xz\partial_2(z)\wedge\partial_2(z^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta\wedge\partial_2(yz) = {}& z\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(yz) - x\partial_2(z^2)\wedge\partial_2(yz) - 2z\partial_2(xz)\wedge\partial_2(yz) \\ &+ 2y\partial_2(yz)\wedge\partial_2(yz) - z^2\partial_2(x)\wedge\partial_2(yz) - 2yz\partial_2(y)\wedge\partial_2(yz) \\ &+ xz\partial_2(z)\wedge\partial_2(yz)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta\wedge\partial_2(x) = {}& z\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(x) - x\partial_2(z^2)\wedge\partial_2(x) - 2z\partial_2(xz)\wedge\partial_2(x) \\ &+ 2y\partial_2(yz)\wedge\partial_2(x) - z^2\partial_2(x)\wedge\partial_2(x) - 2yz\partial_2(y)\wedge\partial_2(x) \\ &+ xz\partial_2(z)\wedge\partial_2(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta\wedge\partial_2(y) = {}& z\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(y) - x\partial_2(z^2)\wedge\partial_2(y) - 2z\partial_2(xz)\wedge\partial_2(y) \\ &+ 2y\partial_2(yz)\wedge\partial_2(y) - z^2\partial_2(x)\wedge\partial_2(y) - 2yz\partial_2(y)\wedge\partial_2(y) \\ &+ xz\partial_2(z)\wedge\partial_2(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta\wedge\partial_2(z) = {}& z\partial_2(y^2)\wedge\partial_2(z) - x\partial_2(z^2)\wedge\partial_2(z) - 2z\partial_2(xz)\wedge\partial_2(z) \\ &+ 2y\partial_2(yz)\wedge\partial_2(z) - z^2\partial_2(x)\wedge\partial_2(z) - 2yz\partial_2(y)\wedge\partial_2(z) \\ &+ xz\partial_2(z)\wedge\partial_2(z)\end{aligned}$$

$$J_1(\Omega_2(R)) = R\Delta_1(\partial_2(x)) + R\Delta_1(\partial_2(y)) + R\Delta_1(\partial_2(z)) + R$$

$$\begin{aligned}=< {}&\Delta_1(\partial_2(x)), \Delta_1(\partial_2(y)), \Delta_1(\partial_2(z)), \Delta_1(x\partial_2(x)), \Delta_1(x\partial_2(y)), \Delta_1(x\partial_2(z)), \\ &\Delta_1(x\partial_2(x^2)), \Delta_1(x\partial_2(z^2)), \Delta_1(x\partial_2(xy)), \Delta_1(x\partial_2(yz)), \Delta_1(x\partial_2(xz)), \Delta_1(y\partial_2(x)), \\ &\Delta_1(y\partial_2(y)), \Delta_1(y\partial_2(z)), \Delta_1(y\partial_2(x^2)), \Delta_1(y\partial_2(z^2)), \Delta_1(y\partial_2(xy)), \Delta_1(y\partial_2(yz)), \\ &\Delta_1(y\partial_2(xz)), \Delta_1(z\partial_2(x)), \Delta_1(z\partial_2(y)), \Delta_1(z\partial_2(z)), \Delta_1(z\partial_2(x^2)), \Delta_1(z\partial_2(z^2)), \\ &\Delta_1(z\partial_2(xy)), \Delta_1(z\partial_2(yz)), \Delta_1(z\partial_2(xz)), \Delta_1(\partial_2(x^2)), \Delta_1(\partial_2(z^2)), \Delta_1(\partial_2(xy)), \\ &\Delta_1(\partial_2(yz)), \Delta_1(\partial_2(xz)) >\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
J_1\big(\Omega_2(R)\big) = {} & R\Delta_1\big(\partial_2(x)\big) + R\Delta_1\big(\partial_2(y)\big) + R\Delta_1\big(\partial_2(z)\big) + R\Delta_1\big(x\partial_2(x)\big) \\
& + R\Delta_1\big(x\partial_2(y)\big) + R\Delta_1\big(x\partial_2(z)\big) + R\Delta_1\big(x\partial_2(x^2)\big) + R\ \Delta_1\big(x\partial_2(z^2)\big) \\
& + R\Delta_1\big(x\partial_2(xy)\big) + R\Delta_1\big(x\partial_2(yz)\big) + R\Delta_1\big(x\partial_2(xz)\big) + R\Delta_1\big(y\partial_2(x)\big) \\
& + R\Delta_1\big(y\partial_2(y)\big) + R\Delta_1\big(y\partial_2(z)\big) + R\Delta_1\big(y\partial_2(x^2)\big) + R\Delta_1\big(y\partial_2(z^2)\big) \\
& + R\Delta_1\big(y\partial_2(xy)\big) + R\Delta_1\big(y\partial_2(yz)\big) + R\Delta_1\big(y\partial_2(xz)\big) + R\Delta_1\big(z\partial_2(x)\big) \\
& + R\Delta_1\big(z\partial_2(y)\big) + R\Delta_1\big(z\partial_2(z)\big) + R\Delta_1\big(z\partial_2(x^2)\big) + R\Delta_1\big(z\partial_2(z^2)\big) \\
& + R\Delta_1\big(z\partial_2(xy)\big) + R\Delta_1\big(z\partial_2(yz)\big) + R\Delta_1\big(z\partial_2(xz)\big) + R\Delta_1\big(\partial_2(x^2)\big) \\
& + R\Delta_1\big(\partial_2(z^2)\big) + R\Delta_1\big(\partial_2(xy)\big) + R\Delta_1\big(\partial_2(yz)\big) + R\Delta_1\big(\partial_2(xz)\big)
\end{aligned}
$$

# BÖLÜM 5

# SONUÇLAR

Cebirsel kümeler ve onların koordinat halkaları ile ilgili sonuçları İspatlamak için kullanılan yöntemlerden birisi de evrensel diferansiyel operatörleri çalışmaktır. Bu şekilde cebirsel kümelerle ilgili problemler modül teorisine taşınmış olur.

Bu tezde eksterior modül kavramı ile ilgili temel tanım ve sonuçlar verilerek evrensel türev modüllerinin eksterior kuvvet modülleri incelenmiş ve konu ile ilgili bir takım örnekler verilmiştir. Evrensel modüller konusu değişmeli cebir alanında hala güncelliğini korumakta olup matematikçiler tarafından çalışılmaktadır.

## KAYNAKLAR


[1] Nakai, Y. (1961) . On The Theory of Differantials in Commutative Rings, J.Math.Soc. Japon 13, 63-84.

[2] Osborn,H. (1967) Modules of Diferantials I, Math Ann. 170, 221-244.

[3] Sweedler, M.E. ve Heyneman, R.G. (1969). Affine Hopf Algebras, J. Algebra 13, 192-241.

[4] Nakai, Y.(1970). High Order Derivations, *Osaka Journal of Mathematic*, **7**, 1-27.

[5] Erdoğan, A. (1993). Differential Operators and Their Universal Modules, Phd.Thesis, University of Leeds.

[6] Osborn,H. (1968) Modules of Diferantials II, Math Ann. 175, 146-158.

[7] Vasconcelos, W.V. (1968). A Note on Normality and The Module of Differantials, Math.Z., 105,291-293.

[8] Sweedler, M.E. (1975) , Groups of Simple Algebras, Publ.Math.No:44

[9] Olgun, N. (2005). Sonlu Üretilmiş Cebirlerin Evrensel Diferansiyel Modülleri, Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi.

[10] Olgun, N. (2013). Symmetric Derivations on Kahler Modules, Submitted.

[11] Sharp, R. Y. (2000). *Steps in Commutative Algebra*, Second Edition, Cambridge University Press, U.K.