Newtonian Olmayan Akışkanlar İçin Bazı Matematiksel Problemler

Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Prof.Dr. Fahir Talay AKYILDIZ

Yıldırım BAYAZIT
Temmuz 2014

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tez Adı: Newtonian Olmayan Akışkanlar İçin Bazı Matematiksel Problemler

Öğrencinin Adı Soyadı: Yıldırım BAYAZIT

Tez savunma Tarihi: 21.07.2014

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Doç.Dr. Metin BEDİR
FBE Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof.Dr. Fahir Talay AKYILDIZ
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş,kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Fahir Talay AKYILDIZ
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:	İmza
Prof.Dr. İbrahim Halil GÜZELBEY	…………..
Prof.Dr. Fahir Talay AKYILDIZ	…………..
Yrd. Doç.Dr. Mehmet ŞAHİN	…………..

İlgili tezin akademik ve etik kurallarına uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans göstererek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Yıldırım BAYAZIT

ÖZET

NEWTONİAN OLMAYAN AKIŞKANLAR İÇİN BAZI MATEMATİKSEL PROBLEMLER

BAYAZIT, Yıldırım

Yüksek Lisans tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Prof.Dr. Fahir Talay AKYILDIZ

Temmuz 2014, 47 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde önemli tanım ve teoremler, kütlenin korunumu ve hareket denkleminin lineer momentum prensibi üç ana başlık altında incelenmiştir.

İkinci bölümde, problemin tanım ve ortak eksenli silindirler arasındaki sarmal akışlar ve özelikleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, problemin tam çözümü ve kayma gerilmeleri hesaplanmıştır.

Dördüncü bölümde, problemin lineer olmayan denklem sisteminin analatik çözümü ve zayıf çözümlerin ve benzerliği verildi.

Anahtar Kelimeler: Maxwell sıvı, Sarmal akışları hız alanı, Zamana bağlı kayma gerilmelerin Hankel dönüşümü

ABSTRACT

SOME MATHMETICAL PROBLEMS FOR NOT BELENG TO NEWTONION FLOATING

BAYAZIT, Yıldırım

M.Sc.Thesis, Math. Department

Adviser: Associate Professor Doctor Fahir Talay AKYILDIZ

July 2014, 47 pages

This thesis has four sections. In the first section, It is examined important definitions and theorens , equations of motion , conservaton of mass and. Linear momantun.

In the second section , it is examined the problem definition and spirad flow etween coaxial cylinders and their properties.

In the third section it is counted exact problem solution and calculation of the shear stresses.

In the fourth section , it is given the analytical solution of the problem ofnan - linear systems of equations and smilarity of weat solutions.

Keywords: Maxwell fluid, Helical flows Velocity field Time dependent shear stresses Hankel transform

TEŞEKKÜRLER

Tezin oluşumunda emeği geçen deneyimlerini ve bilgilerini benle paylaşıp bana yol gösteren, bu tezin her sayfasının her satırında emegigeçen danışmanım Prof.Dr. Fahir Talay AKYILDIZ'a, tezin oluşumunda beni ailesi gibi gören Nesrin AKYILDIZ'a, manevi desteği ile hep yanımda olan eşim Meltem BAYAZIT'a ve maddi ve manevi olarak hep yanımda olan annem, babam ve kardeşlerime teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 5

SEMBOLLER LİSTESİ

$\boldsymbol{L^p}(\boldsymbol{\Omega})$	Fonksiyonel uzay
$\|\boldsymbol{u}\|_{L^p(\boldsymbol{0},\boldsymbol{T};\boldsymbol{X})}$	Banach uzayı
$\boldsymbol{H^m}(\boldsymbol{\Omega})$	Hilbert uzayı
$\boldsymbol{Lp}$	Normlu uzay
$\boldsymbol{\mathcal{L}}\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\}$	Laplace dönüşümü
$\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}}\{\bar{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{q})\}$	Ters Laplace dönüşümü
$\boldsymbol{\mathcal{H}_n}\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})\}$	Sonlu Hankel dönüşümü
$\boldsymbol{\mathcal{H}_n^{-1}}\{\tilde{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{k_i})\}$	Ters sonlu Hankel dönüşümü
$\boldsymbol{\rho}$	Yoğunluk
$\boldsymbol{a}$	Cismin ivmesi
$\boldsymbol{\lambda_1}$	Esnetme zamanı
$\boldsymbol{\lambda_2}$	Genişletme zamanı
$\overset{\nabla}{\boldsymbol{T}}$	Stres tensörünün upper convected türevi
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchy stres tensörü
$[\boldsymbol{\nabla v}]$	Hız vektörünün gradyantı
$\boldsymbol{B_w}(\boldsymbol{rr_{1n}})$	Bessel fonksiyonları
$\boldsymbol{J_m}(.),\boldsymbol{Y_m}(.)$	m nin birinci ve ikinci tür Bessel fonksiyonları
$\|\,.\,\|$	L^2 normu
$\|\,.\,\|_X$	X ile X' in dual uzayını
$\boldsymbol{H^1}$	Hilbert uzayları
$\{\boldsymbol{w_i}\}$	Feadon Galerkin yaklaşımı

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu çalışmada bir Maxwell akışkan için sarmal akımlar iki sonsuz koaksiyonel dairesel iki silindir arasında $t = 0^+$ olduğu zamana bağlı olarak kayma ve burkulma başlar. Bu oluşan matematiksel modelin çözümü için Sonlu Hankel dönüşümü yardımıyla tam çözümler başlangıç sınır şartlarını sağlar. Çalışmada mixed non homojen şartları ile uyumlu non lineer dalga denklem sistemi üzerinede Feado-Galerkin metod kullanarak zayıf çözümün varlığı, tekliği ispat edilmiştir.

1.1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1.1 X bir küme olmak üzere, $\mathcal{M}$ de X ‘in alt kümelerinin bir koleksiyonu olsun eğer

$1 - X \epsilon\, \mathcal{M}$

$2 - A \epsilon\, \mathcal{M} \;\Rightarrow\; \mathrm{A^c} \in \mathcal{M}$

$3 -$ Eğer $A_n \,\epsilon\, \mathcal{M}, n = 1,2,3, \dots$, ve eğer $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n ise \quad A \in \mathcal{M}$ oluyor ise

$\mathcal{M}$ ye X in σ cebiri adı verilir [1].

Eğer $\mathcal{M}$ X in σ cebiri ise $(X, \mathcal{M})$’ ye ölçülebilir uzay ve $\mathcal{M}$ nin elemanları da X ‘de ölçülebilir küme denir.

Tanım 1.1.2 Ω bir ölçülebilir küme olmak üzere, eğer her reel r sayısı için $\{x \in \Omega : f(x) > r\}$ kümesi ölçülebilir ise $f: \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilirdir.

$\Omega, \mathbb{R}^N$de boş olmayan ölçülebilir küme olmak üzere $f: \Omega \to \mathbb{R}$ ile tanımlı tüm integrallenebilir fonksiyonların uzayı $L^1(\Omega)$ ile gösterilir ve genel olarak

$$\int_{\Omega} f d\mu \text{ yerine } \int f \qquad \text{yazılır.}$$

Tanım 1.1.3 $p \in \mathbb{R}$ ve $1 < p < \infty$ olsun ve $f: \Omega \to \mathbb{R}; f$ ölçülebilir ve $|f|^p \in L^1(\Omega)$ kümesi, aşağıdaki norm ile birlikte

$$\|f\|_p = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu \right]^{1/p}$$

Oluşturulan fonksiyonel uzay $L^p(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.4 Kabul edelim ki $m \geq 2$ bir tam sayı ve $p \in [1, \infty)$ olsun ve tümevarım ile $W^{m,p}(\Omega)$ kümesini:

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in \; W^{m-1,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \;\; \forall i = 1,2, \dots, N \right\}$$

$W^{m,p}(\Omega)$ ile gösterelim bu küme alternatif olarak

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \middle| \begin{array}{c} \forall \alpha \text{ için } |\alpha| \leq m, \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ öyle ki} \\ \int_\Omega \; u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \; g_\alpha \varphi \; \forall \varphi \in C_c^\infty \end{array} \right\}$$

Buradaki , $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ olup $\alpha_i \geq 0$,

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \;, D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \;\; ve \;\; D^\alpha u = g_\alpha \text{ dır.}$$

Bu takdirde $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı,

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p$$

Normu ile birlikte Banach uzayıdır.[2] Özel olarak $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ ise; bu uzay Hilbert uzayı adını alır, buradaki iç çarpım

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2} \text{ şeklinde tanımlıdır.}$$

Hatırlatma: Eğer Ω bölgesi yeterince düzgün ve $\Gamma = \partial\Omega$ sınırlı ise $W^{m,p}(\Omega)$ üzerindeki norm,

$$\|u\|_p + \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|_p$$

Normuna denktir. Bu tezde $\Omega = (1, \mathrm{R})$ olup yeterince düzgün bölgedir. Yine $u: (0, T) \to X$ (Banach Uzayı) ölçülebilir reel değerli fonksiyonların Banach uzayı $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $L^p(0, T; X)$ ile gösterilir Buradaki norm

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \right)^{1/p} < \infty, 1 \leq p < \infty,$$

ve

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \|u(t)\|_X \,, p = \infty \text{ dır.}$$

Tanım1.1.5 Bir V vektör uzayı üzerindeki $\|x\|$ ve $\|x\|'$ normları için eğer $C \; ve \; D$ pozitif reel sayıları için

$$C\|x\| \leq \|x\|' \leq \Delta\|x\| \tag{1}$$

oluyor ise bu iki norm denktir denir.

Tanım 1.1.6 Ω **,** R^n üzerinde bir alan ve $u(x), \Omega$ üzerinde tanımlı fonksiyon $1 < p < \infty$ için

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

dir.

$$\|u(x)\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty$$

Koşulunu sağlayan bütün ölçülebilir R^n 'deki fonksiyonların sınıfı $Lp(\Omega)$ ile gösterilir göstermek mümkündür ki $L^p(\Omega)$, $\|u(x)\|_{L^p}$ normuna göre bir Banach uzaydır.

Tanım1.1.7 Matematiksel, bir adi veya kısmi diferansiyel denklemin zayıf yada genelleştirilmiş çözüm öyle bir fonksiyondur ki bu fonksiyonun türevleri olmaya bilir fakat bu fonksiyon verilen diferansiyel denklemi özel tanımlanmış formda sağlamalıdır.

Şimdi zayıf çözüm kavramını aşağıdaki örnekte verelim.

Örnek 1.1.1 Birinci dereceden dalga denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

kısmi türev burada $u = u\,(t, x)$ iki bir fonksiyonudur gerçek değişkenler. U olduğunu varsayalım sürekli türevlenebilir üzerinde Öklid uzayında $R^{2,}$ bir bu denklem (2) çarpma düzgün fonksiyon φ bir kompakt desteği ve integral ile elde edilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(t.x)}{\partial t}\varphi(t,x)dtdx + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(t.x)}{\partial x}\varphi(t,x)dtdx = 0.$$

kullanarak Fubini teoremi bir integrasyon düzeni, hem de değişimi sağlayan parçaları ile integrasyon *(t* ilk dönem ve ikinci dönem için *x* in) bu denklem olur.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(t.x)\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t}dtdx + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(t.x)\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x}dtdx = 0. \tag{3}$$

Biz u sürekli türevlenebilir olduğu gibi denklem (2) sürece denklem (3) ile göstermiştir. Zayıf bir çözüm kavramı için çözüm herhangi denklem (3) tahmin fonksiyonları u var olur φ ve bu nedenle U türevlenebilir ve olmayabilir, bu denklem (1) yerine yoktur. Bu fonksiyon basit bir örnek $u\,(t,x) = |\,t - x\,|$ tüm t ve x. Denkleminin bir çözümü u (3) 'dir denklem (2) zayıf bir çözüm olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.8 (Laplace Dönüşümü) Kabul edelim ki $u(x,t), a \le x \le b,\ t > 0$ aralığında tanımlı herhangi fonksiyon olsun, $u(x,t)$'nin t değişkenine göre Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\} = \bar{u}(x,s) = \int_0^\infty e^{-qt}\ u(x,t)dt, Re\ S > 0$$

Şeklinde tanımlanır, buradaki S kompleks bir sayı olup dönüşüm değişkeni olarak adlandırılır. Eğer $u(x,t)'\ t'$ye göre üstel mertebeden fonksiyon ise kolayca gösterilebiliriz ki $\bar{u}(x,s),\ Re\ S > c$ yarı düzlemde analitik fonksiyondur (Lokenath Depnath, Nonlineer Partial Differantial Equantiono).

Tanım 1.1.9 (Ters Laplace Dönüşümü) Ters Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{u}(x,s)\} = u(x,t)$$

ile gösterilir ve

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{u}(x,s)\} = u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\bar{u}(x,s)ds, \qquad c > 0$$

Kompleks integral vasıtasıyla tanımlanır[3].

Tanım 1.1.10 (Sonlu Henkel Dönüşümü) Herhangi bir $f(r)$ fonksiyonun n. mertebeden Hankel dönüşümü $\mathcal{H}_n\{f(r)\} = \tilde{f}_n(k_i)$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{H}_n\{f(r)\} = \tilde{f}_n(k_i) = \int_0^a rf(r)J_n(rk_i)dr$$

Şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.1.11 (Ters sonlu Henkel Dönüşümü) Ters Hankel dönüşümünün tanımı

$$\mathcal{H}_n^{-1}\{\tilde{f}_n(k_i)\} = f(r) = \frac{2}{a^2}\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{f}_n(k_i)\frac{J_n(rk_i)}{J_{n+1}^2(ak_i)}$$

şeklinde olup, buradaki k_i'ler $\mathrm{J_n(ak)} = 0$ nın pozitif kökleridir[4].

Teorem1.1.1 (Hölder Eşitsizliği): $p > 1\,, q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

eğer $f(x) \in L^p(\boldsymbol{\Omega})$ ve $g(x) \in L^p(\boldsymbol{\Omega})$ ise $f(x)g(x) \in L^1(\boldsymbol{\Omega})$ ve

$$\left|\int_{\boldsymbol{\Omega}} f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_{\boldsymbol{\Omega}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_{\boldsymbol{\Omega}} |g(x)|^q dx\right)^{1/q}$$

Teorem1.1.2 (Minkowski Eşitsizliği): $p > 1$ için $f(x), g(x) \in L^p(\boldsymbol{\Omega})$ ise

$$\left(\left|\int_{\boldsymbol{\Omega}} f(x) + g(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_{\boldsymbol{\Omega}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_{\boldsymbol{\Omega}} |g(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

olur .

Teorem 1.1.3 $1 < p < \infty$ ve q, p'nin eşleniği olsun. Bir $[a, b]$ aralığında tanımlı f, g sürekli fonksiyonları

$$\left|\int_{\mathbf{a}}^{b} f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_{\mathbf{a}}^{b} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbf{a}}^{b} |g(x)|^q dx\right)^{1/q}$$

eşitliğini sağlar. Buna Cauchy-Schwarz eşitsizliği denir.

Teorem 1.1.4 (Gronwall's Lemma) Kabul edelim ki $f: IR^+ \to IR^+$fonksiyonu $[0, T]$ kapalı aralığında üsten sınırlı, $a(t)$ artan bir fonksiyon ve $b(t)$ pozitif integrallenebilir fonksiyon olmak üzere

$$f(T) \leq a(T) + \int_0^T b(t)f(t)dt \tag{4}$$

özelliğini sağlıyor ise

$$f(T) \leq a(T)e^{\int_0^T b(t)dt} \quad \text{dir.} \tag{5}$$

$$V(t) = e^{-\int_0^t b(s)ds} \int_0^t b(s)f(s)ds$$

Fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu ifadenin türevini alırsak

$$\begin{aligned} V'(t) = -b(t)e^{-\int_0^t b(s)ds} \int_0^t b(s)f(s)ds + e^{-\int_0^t b(s)ds} \int_0^t b(s)f(s)ds \\ \leq -b(t) \int_a^t b(s)ds \int_a^t b(s)f(s)ds + e^{-\int_0^t b(s)ds} b(t)f(t) \\ + b(t)e^{-\int_a^t b(s)ds} \int_a^t b(s)ds = a(t)b(t)e^{-\int_0^t b(s)ds} \end{aligned}$$

$$e^{-\int_a^T b(t)dt}\int_a^T b(t)f(t)dt = V(T)$$

$$\leq \int_0^T a(t)b(t)e^{-\int_0^t b(s)ds}dt \leq a(T)\int_0^T b(t)e^{-\int_0^t b(s)ds}dt$$

$a(t)$ artan olduğundan integral alınırsa $= a(T)\left[1 - e^{-\int_0^T b(s)ds}\right]$ bulunur. O halde bu eşitlik aşağıda kullanılır ise

$$f(T) \leq a(T) + \int_0^T b(t)f(t)dt \quad \text{ifadesi}$$

$$\leq a(T) + e^{\int_0^T b(t)dt}a(T)\left[1 - e^{-\int_0^T b(s)ds}\right] = a(T)e^{\int_0^T b(t)dt} \quad \text{bulunur.}$$

Tanım 1.1.12 (Lipschıtz koşulu): D$\subset R^2$, R^2 bir bölge olsun. $\exists K > 0$ sayısı öyle ki $\forall(x, y_1)$ ve (x, y_2) için

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

şartı sağlanıyorsa $f(x, y)$ fonksiyonu y değişkenine göre Lipschitzdir denir.

Teorem 1.1.5 (Varlık ve Teklik teoremi): Varsayalım $f(x, y)$ fonksiyonu kapalı

$$D = \{(x, y): |x - x_0| \leq a, |\, y - y_0\, | \leq b\}, \qquad (a, b) > 0$$

bölgesinde sürekli olsun.
$f(x, y)$ fonksiyonu sürekli ve R kapalı olduğundan, $f(x, y)$ R bölgesinde sınırlıdır.
Bu durumda $\forall(x, y)$ için $\exists\, K > 0$ öyle ki $|f(x, y)| \leq M$ ve $\alpha = min\{a, b/M\}$

olmak üzere $(y(x_0) = y_0)$ başlangıç değer problemi $|x - x_0| \leq \alpha$ aralığında en az bir $y = y(x)$ çözümüne sahiptir.

$f(x, y)$ fonksiyonu $(x_0, y_0) \in D \subset R^2$ nin bir komşuluğunda Lipschitz koşulunu sağlasın. Bu durumda $(y(x_0) = y_0)$ başlangıç değer problemi x_0'ın komşuluğunda tek çözüme sahiptir.

Önerme:

$$\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$D = \{(x, y): |x - x_0| \leq a, \qquad |\, y - y_0\, | \leq b\}, \qquad (a, b) > 0$$

Dörtgeninde sürekli olsun. R bölgesinde $K = max|\partial f/\partial y|$ olarak seçilirse
f fonksiyonu R dörtgeninde y değişkenine göre Lipschitz olma özelliğini sağlar.
Sonuç: Varsayalım $f\ ve\ \partial f/\partial y$, (Varlık teoreminde tanımlanan) $D \subset R^2$ de sürekli olsun. Bu durumda $f\ ve\ \partial f/\partial y$, D bölgesinde sınırlıdır. Yani D bölgesinde

$$|f(x, y)| \leq M, |\partial f/\partial y| \leq K$$

Bu durumda

$$\alpha = min\{a, b/M\}$$

olmak üzere ($y(x_0) = y_0$) başlangıç değer problemi $|x - x_0| \leq \alpha$ aralığında tek $y = y(x)$ çözümüne sahiptir.

1.2. KÜTLENİN KORUNUMU KANUNU

Bu özellik, eğer sonsuz küçüklü hacme sahip bir cismi hareketi boyunca izlersek, onun hacim dV ve yoğunluk ρ nun değişebileceğini fakat toplam kütlesinin ρdV değişmeyeceğini ifade eder.

Bunun anlamı: $$\frac{D}{Dt}(\rho dV) = 0, \tag{1.1}$$

Çarpımın türevi alınır ise

$$\rho \frac{D}{Dt}(dV) + \frac{D\rho}{Dt} dV = 0 \tag{1.2}$$

Eşitlikteki birinci türev ifadesi D burkulma tensörünün birinci skaler değişmezidir[5] bu takdirde yukarıdaki ifade

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{D\rho}{Dt} = 0 \tag{1.3}$$

Yukarıdaki uzaysal tanımlama

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \nabla \rho \tag{1.4}$$

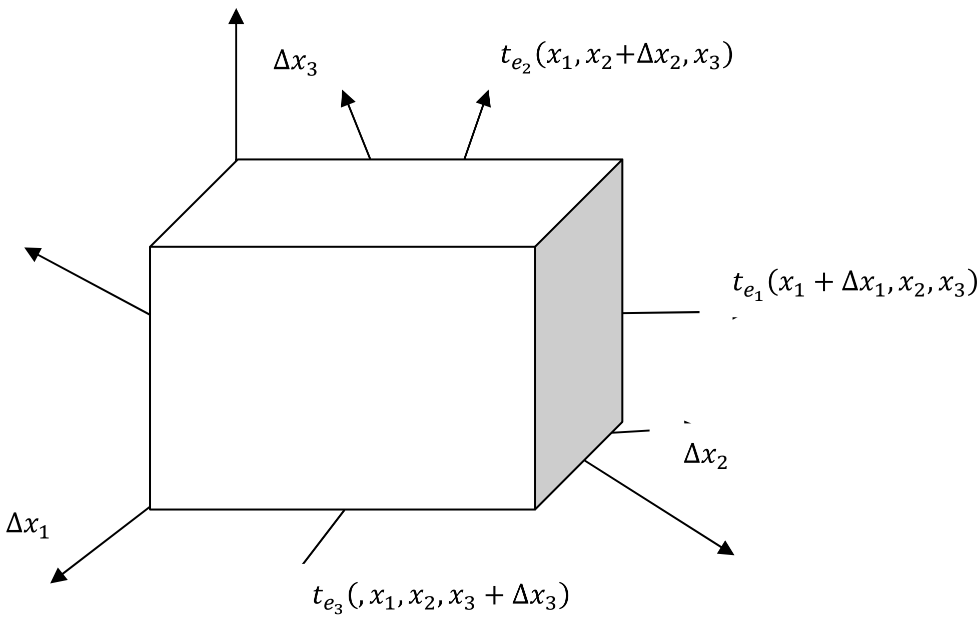
(1.4) ifadesi, kütlenin korunumu ya da süreklilik denklemi adını alır. Eğer akışkan sıkıştırılamaz ise

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \tag{1.5}$$

olup, sıkıştırılamaz akışkanın süreklilik denklemi Kartezyen koordinat sisteminde

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \text{dır.} \tag{1.6}$$

1.3. HAREKET DENKLEMİ: LİNEER MOMENTUM PRENSİBİ



Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi, Stress vektörü, sürekli ortamın seçilmiş x_i noktasının komşuluğunda küçük dikdörtgensel elemanın altı yüzüne etki etmektedir. Kabul edelim ki, birim kütleye etki eden kütle kuvveti $B = B_i e_i$, x_i nin yoğunluğu ρ, x_i pozisyonunda cismin ivmesi $\boldsymbol{a}$ olsun, bu takdirde dik Kartezyen koordinat sisteminde ikinci Newton yasası aşağıdaki formdadır.

$$\begin{aligned}&\left\{\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{e_1}}(, x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) + \boldsymbol{t}_{-\boldsymbol{e_1}}(, x_1, x_2, x_3)\right\}(\Delta x_2 \Delta x_3)\\ &+ \left\{\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{e_2}}(, x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) + \boldsymbol{t}_{-\boldsymbol{e_2}}(, x_1, x_2, x_3)\right\}(\Delta x_1 \Delta x_3)\\ &+ \left\{\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{e_3}}(, x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) + \boldsymbol{t}_{-\boldsymbol{e_3}}(, x_1, x_2, x_3)\right\}(\Delta x_1 \Delta x_2) + \rho B \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3\\ &= (\rho \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)\boldsymbol{a} \qquad (1.7)\end{aligned}$$

$\boldsymbol{t}_{-\boldsymbol{e_1}} = -\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{e_1}}$ olduğundan

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{e_1}}(, x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) + \boldsymbol{t}_{-\boldsymbol{e_1}}(, x_1, x_2, x_3)\\ &= \left\{\frac{\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{e_1}}(, x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{e_1}}(, x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1}\right\}\Delta x_1 \qquad (1.8)\end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{e_2}}(, x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) + \boldsymbol{t}_{-\boldsymbol{e_2}}(, x_1, x_2, x_3)\\ &= \left\{\frac{\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{e_2}}(, x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) - \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{e_2}}(, x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_2}\right\}\Delta x_2 \qquad (1.9)\end{aligned}$$

Diğer bileşen için aynı eşitlik yazılıp (8) de yerine yazılır ise

$$\left\{\frac{\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{e}_1}(,x_1+\Delta x_1,x_2,x_3)-\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{e}_1}(,x_1,x_2,x_3)}{\Delta x_1}\right\} + \left\{\frac{\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{e}_2}(,x_1,x_2+\Delta x_2,x_3)-\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{e}_2}(,x_1,x_2,x_3)}{\Delta x_2}\right\} + \left\{\frac{\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{e}_3}(,x_1,x_2,x_3+\Delta x_3,x_3)-\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{e}_3}(,x_1,x_2,x_3)}{\Delta x_2}\right\} + \rho\boldsymbol{B} = \rho\boldsymbol{a}$$

$\Delta x_i \to 0$ için limit alınır ise, yukarıdaki denklemden

$$\frac{\partial \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{e}_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{e}_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{e}_3}}{\partial x_3} + \rho\boldsymbol{B} = \rho\boldsymbol{a} \text{ veya } \frac{\partial \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{e}_j}}{\partial x_j} + \rho\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j}} = \rho a_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j}} \tag{1.10}$$

elde ederiz.

$\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{e}_j} \equiv \boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j}} \equiv T_{ij}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}}$ olduğundan, yukarıdaki eşitlik

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}} + \rho\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}} = \rho a_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}} \tag{1.11}$$

şeklinde yazılır, bu ise Tensörial formda

$$\text{div}\,\boldsymbol{T} = \rho\boldsymbol{B} = \rho\boldsymbol{a} \tag{1.12}$$

Kartezyen koordinat sisteminde bileşenlerin formu

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_{\boldsymbol{i}} = \rho a_{\boldsymbol{i}} \text{ dir.} \tag{1.13}$$

Sürekli ortamın katı veya akışkan olmasına bakılmaksızın bu denklemler sağlanır. Bu denklemlere Cauchy hareket denklemleri adı verilir. Eğer (1.13) denkleminde ivme sıfır ise, (1.14 denklemi statik denge denklemine dönüşür:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_{\boldsymbol{i}} = 0. \tag{1.14}$$

Hareket denklemi stres bileşenleri vasıtası ile

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_{\boldsymbol{i}} \tag{1.15}$$

şeklinde yayılabilir. Sıkıştırılamaz Newton akışkanı için bünye denklemi

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \tag{1.16}$$

dır.

Diğer taraftan

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.17}$$

olduğundan yukarıdaki bünye denklemi

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.18}$$

şeklinde elde edilir**. Oldroyd-B modeli** viskoelastik akışkan akışını tanımlamak için kullanılmış modeldir. Bu model, upper convected Maxwell modelinin bir genelleştirilmesidir. Modeli ismini yaratıcısı James G. Oldroyd'dan almıştır [6]. Model aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$T + \lambda_1 \overset{\nabla}{T} = 2\eta_0\left(D + \lambda_2 \overset{\nabla}{D}\right) \tag{1.19}$$

Buradaki

λ_1 Esnetme zamanı;

λ_2 Geciktirme yada Genişletme zamanı = $\frac{\eta_s}{\eta_0}$

$\overset{\nabla}{T}$ stres tensörünün upper convected türevi:

$$\overset{\nabla}{T} = \frac{\partial}{\partial t}T + v.\nabla T - \left((\nabla v)^T.T + T\,.(\nabla v)\right); \tag{1.20}$$

η_0 solvent ve polimer bileşenlerinin toplam yarı sıvı bütünlüğüdür,

$$\eta_0 = \eta_s + \eta_p$$

Eğer $\lambda_2 = 0$, ise bu model üst konveksiyonel Maxwell modelini azaltır. Başka bir viskoelastik modeli ikinci derece akışkan modelidir $[7-21]$. Cauchy stres tensörü σ bir gerilmesiz homojen ikinci derece akışkanı için bünye denklemi

$$\sigma = -pI + T, T = \mu\, A_1 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2 \tag{1.21}$$

dır.
α_1 ve α_2 normal stres modelleri olup, buradaki A_1 ve A_2

$$A_1 = 2D, A_2 = \frac{DA_1}{Dt} + A_1(\nabla v) + (\nabla v)^T A_1 \tag{1.22}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Termo dinamiğin esas prensibine göre , yukarıdaki sabitler

$$\mu \geq 0, \qquad \alpha_1 \geq 0 \text{ and } \alpha_1 + \alpha_2 = 0. \tag{1.23}$$

eşitsizliklerini sağlamalıdır. Gerekli bilgiler Dunn ve Rajagopal [22] da bulunabilir.

BÖLÜM 2

2.1.PROBLEMİN TANIMI

Bir Maxwell sıvı akışkanı için sarmal akımlar iki sonsuz eş merkezli dairesel silindirler arasında çalışılmıştır. $t = 0^+$ olduğu zaman dıştaki silindir sabit olmak şartıyla iç silindir kendi ekseni etrafında dönme başlar ve zamana bağlı kayma gerilmeleri nedeniyle aynı eksen üzerinde burkulma ve boylamasına kayma başlar. Bu takirde bu akım için monemtum denklemi bir lineer hiperbolik denkleme dönüşür. Bu hiperbolik denklen Sonlu Hankel dönüşümü kullanılarak adi diferansiyel denkleme dönüşür oluşan adi diferansiyel denklemin kesin çözümleri tüm başlanğıç sınır koşulları yerine bir dizi şeklinde verilmiştir. Newton tipi sıvı ile ilgili çözümlerde sınırlayıcı durumlara yer verilmiştir. Sonuç olarak, hem ilgili parametrelerin etkisi hem de Maxwell ve Newton sıvılarının karşılaştırma etkisi, hız bileşenleri ve kayma gerilmeleri grafiksel çizimlerle analiz edilmiştir. Hız alanı burkulma stres aşağıdaki formdadır.

$$v = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t}) = w(r,t)e_\theta + v(r,t)e_z, \qquad T = T(r,t) \tag{2.1}$$

olduğu yerde e_z ve e_θ'ler h ve z içinde r, h ve z silindirik koordinat sisteminin birim vektörleridir. Bu tür akışları sıkıştırılmaz olarak kabul edelim.
Eğer akış geri kalandan şu ana kadar olursa $t = 0$, olduğunda akım durur.

$$\boldsymbol{v}(r,0) = 0 \tag{2.2}$$

(2.1)'denkleminden hız vektörünün gradyantı

$$[\boldsymbol{\nabla v}] = \begin{pmatrix} 0 & -{}^{w}\!/_{r} & 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial r} & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

dır.
Öncelikle D nin tanımını kullanarak A_1 hesaplanır sonuç olarak stress bileşenlerini aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz.

$$T_{r\theta} = \mu\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right) w(r,t), \qquad T_{rz} = \mu \frac{\partial v(r,t)}{\partial r} \tag{2.4}$$

Hatırlatma: Silindirik koordinatlarda tam momentum denklemi;

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\overset{=0}{u\frac{\partial w}{\partial r}}+\overset{=0}{\frac{1}{r}w\frac{\partial w}{\partial \theta}}+v\frac{\partial w}{\partial z}+\overset{=0}{\frac{1}{r}vw}\right)=-\overset{=0}{\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}}+\underset{=0}{\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r}}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\overset{=0}{\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z}}+\overset{=0}{\frac{2}{r}T_{r\theta}}$$

=0, nedeniyle dönme simetrisine

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\overset{=0}{u\frac{\partial v}{\partial r}}+\overset{=0}{\frac{1}{r}w\frac{\partial v}{\partial \theta}}+\overset{=0}{v\frac{\partial v}{\partial z}}\right)=-\overset{=0}{\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial z}}+\frac{\partial T_{zr}}{\partial r}+\overset{=0}{\frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta}}+\overset{=0}{\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}}+\frac{1}{r}T_{zr}$$

Bu nedenle yukarıdaki denklemler azaltmak

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r}+\frac{2}{r}T_{r\theta} \tag{2.5}$$

ve

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial T_{zr}}{\partial r}+\frac{1}{r}T_{zr} \tag{2.6}$$

(2.5), (2.3) ve (2.4) eşitliklerinden (2.6), bulunur.

$$\lambda\frac{\partial^2 w(r,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial w(r,t)}{\partial t}=v\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\right)w(r,t);r\in(R_1,R_2),t>0, \tag{2.7}$$

$$\lambda\frac{\partial^2 v(r,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial v(r,t)}{\partial t}=v\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)v(r,t);\ r\in(R_1,R_2),t>0, \tag{2.8}$$

$\nu=\dfrac{\mu}{\rho}$ nin olduğu yerde kinematik viskozite akışkanıdır.

Kısmi diferansiyel denklemler (2,7) ve (2,8), yeterli başlangıç ve sınır şartlarıyla, çok çeşitli metodlarla prensipte çözülebilir, etkinlikleri tamamen etki alanı tanımına bağlıdır. Bizim durumumuzda integral dönüşümleri bir sistematik, etkinlik ve güçlü öğeler sunar. Sonlu Hankel dönüşümünün uzaysal değişkeni ortadan kaldırma için kullanılırken, Laplace dönüşümünde zaman değişkenini ortadan kaldırmak için kullanılır. Ancak inversiyon Laplace dönüşümü çok zor ve işlem gerektirmektedir. Bu yüzden biz bu çalışmada sonlu Hankel dönüşümünü kullanacağız.

2.2. ORTAK EKSENLİ SİLİNDİRLERİN ARASINDAKİ SARMAL AKIŞLAR

Varsayalım ki, sıkıştırılamaz Maxwell akışı sonsuz ortak eksenli R_1 ve R_2 $(R_2 > R_1)$ yarıçaplı iki dairesel silindir arasındaki dairesel bölümde bulunsun. Zaman $t = 0^+$ için iç silindir, $2\pi R_1 \tau_1(R_1, t)$ indirgenmiş momentum denklemi uzunluk torkuna bağlı olarak kendi ekseni etrafında dönmeye başlar ve kayma $\tau_1(R_1, t)$ ve $\tau_2(R_1, t)$'i aşağıdaki denklemlerle ifade edilir.

$$\tau_1(R_1, t) = f\left[t - \lambda\left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}\right)\right] \text{ ve } \tau_2(R_1, t) = \mathrm{g}\left[t - \lambda\left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}\right)\right], \qquad (2.9)$$

ve f, g ler sabitlerdir.

Kesmeye bağlı, akış kademeli olarak kendi hız formu (2.1) hareket denklemi ile ifade edilir. Sınır koşullarını sağlayan denklemler (2.7) ve (2.8) tarafından verilir. İlgili başlangıç ve sınır koşulları

$$w(r, 0) = v(r, 0) = \frac{\partial w(r, 0)}{\partial t} = \frac{\partial v(r, 0)}{\partial t} = 0; \quad \tau_1(r, 0) = \tau_2(r, 0) = 0; \quad r \in (R_1, R_2) \qquad (2.10)$$

(2.10) dur.
Sırasıyla,

$$\left(1 + \lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)\tau_1(r, t)|_{r=R_1} = \mu\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)w(r, t)\Big|_{r=R_1} = ft; \qquad t > 0 \qquad (2.11)$$

$$\left(1 + \lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)\tau_2(r, t)|_{r=R_1} = \mu\frac{\partial v(r, t)}{\partial r}\Big|_{r=R_1} = gt; \qquad t > 0 \qquad (2.12)$$

ve

$$w(R_2, t) = v(R_2, t) = 0; \quad t > 0. \qquad (2.13)$$

Denklem (2.9)'dan $\lambda \to 0$ giderken (2.11) ve (2.12) denklemlerinden sınır şartları olan $\tau_1(R_1, t)$ ve $\tau_2(R_1, t)$ ifadeleri düzenlenerek (2.14) ve (2.15) denklemleri elde edilir.

Sınır şartları:

$$\tau(R_1, t) = \mu\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)w(r, t)\Big|_{r=R_1} = ft; \qquad t > 0 \qquad (2.14)$$

$$\tau(R_2, t) = \mu\frac{\partial v(r, t)}{\partial r}\Big|_{r=R_1} = \mathrm{g}t; \qquad t > 0 \qquad (2.15)$$

ve

$$w(R_2, t) = v(R_2, t) = 0; \qquad t > 0 \qquad (2.16)$$

(2.16) Denklemi nedeniyle sınırlı lineer denklem zamana bağlı kayma gerilmeleri Newton sıvı hareketine karşılık denklemler (5.3), (4.3), (5.4)ve (4.4) dir. [23]

BÖLÜM 3

3.1 LİNEER DENKLEM SİSTEMİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde oluşan Matematiksel ifadenin Sonlu Hankel dönüşümünden yararlanırak problemin Adi difarensiyel denkleme dönüştürülmüş oluşan Adi difarensiyel denklemin çözümü bulunmuş ve Ters Hanken dönüşümü uygulanarak denklemin tam çözümü hesaplanmıştır. (2.10) Başlangıç sınır koşulları 0 dan t ye kadar integralleri alınarak $\tau_1(\mathrm{r,t})$ ve $\tau_2(\mathrm{r,t})$ kayma gerilmelerini hesaplanmıştır. Bu bölümde son olarak özel durum $\lambda \to 0$ giderken Newton akışkanı $w_N(r,t)$, $v_N(r,t)$, $\tau_{1N}(r,t)$ ve $\tau_{2N}(r,t)$ hesaplanmıştır. Bu çözülen Matematiksel modellerin grafikleri çizilerek çözümün analizi yapılmıştır.

3.2. ÇÖZÜMLER

Hız bileşenleri $w(r,t)$ ve $v(r,t)$ belirlemek amacıyla, [24,25,26] tarafından ifade edilmiştir

$$w_H(t) = \int_{R_1}^{R_2} r\, w(rt) B_w(rr_{1n})dr; \qquad 1n = 1,2,3,\ldots \tag{3.1}$$

$$v_H(t) = \int_{R_1}^{R_2} r\, v(rt) B_v(rr_{2n})dr; \qquad 2n = 1,2,3,\ldots \tag{3.2}$$

$(3.1), (3.2)$ Sonlu Hankel dönüşümünü ifade eder.

$B_w(rr_{1n}) = J_1(rr_{1n})Y_2(R_1r_{1n}) - J_2(R_1r_{1n})Y_1(rr_{1n}),$
$B_v(rr_{2n}) = J_0(rr_{2n})Y_1(R_1r_{2n}) - J_1(R_1r_{2n})Y_0(rr_{2n}),$

$w\,(r,t)$ ve $v\,(r,t)$ 'nin Sınırlı Henkel dönüşümleri, Burada r_{1n} ve r_{2n}, sırasıyla $B_w(R_2r) = 0$ ve $B_v(R_2\, r) = 0$, transandantal denkleminin pozitif kökleridir ve $J_m(.), Y_m(.)$ 'ler m nin birinci ve ikinci tür Bessel fonksiyonlarıdır.
Eşitlik (2.16), kullanarak ve Bessel fonksiyonlarının Wronskian bağlantısıdır.

$$B_w(R_1r_{1n}) = J_1(R_1r_{1n})Y_2(R_1r_{1n}) - J_2(R_1r_{1n})Y_1(R_1r_{1n}) = -\frac{2}{\pi R_1 r_{1n}},$$
$$B_v(R_1r_{2n}) = J_0(R_1r_{2n})Y_1(R_1r_{2n}) - J_1(R_1r_{2n})Y_0(R_1r_{2n}) = -\frac{2}{\pi R_1 r_{2n}},$$

İspat edebiliriz.

$$\int_{R_1}^{R_2} r\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right) w(r,t)\, B_w(rr_{1n})dr =$$

$$\frac{2}{\pi r_{1n}}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{r}\right)w(r,t)\bigg|_{r=R_1}-r_{1n}^2 w_H(r_{1n},t), \tag{3.3}$$

$$\int_{R_1}^{R_2} r\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)v(r,t)\,B_v(rr_{2n})dr =$$

$$\frac{2}{\pi r_{2n}}\frac{\partial v(r,q)}{\partial t}\bigg|_{r=R_1}-r_{2n}^2 v_H\left(r_{2n,}t\right). \tag{3.4}$$

Ters Hankel dönüşümlerini formüllere (3.1) ve (3.2)'ya karşılık gelen [24,25,26] dir;

$$w(r,t)=\frac{\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_{1n}^2 J_1^2\,(R_2r_{1n})B_w(rr_{1n})}{J_2^2\,(R_1r_{1n})-J_1^2\,(R_2r_{1n})}\;w_H(t), \tag{3.5}$$

$$v(r,t)=\frac{\pi^2}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_{2n}^2 J_0^2\,(R_2r_{2n})B_v(rr_{2n})}{J_2^2\,(R_1r_{1n})-J_0^2\,(R_2r_{2n})}\;v_H(t). \tag{3.6}$$

Denklem (2,7) ve (2,8) ile $rB_w(rr_{1n})$ ve $rB_v(rr_{2n})$'yi sırasıyla çarparak, R_1, R_2 den r ye bağlı sonucu integral alınır ve sınırlı koşulları (2.11) ve $(2.12)'$i kullanılır ve (3.3) ve (3.4)'u tanımlayarak biz (3.7) ve $(3.8)'i$ buluruz;

$$\lambda\ddot{w}_H(t)+\dot{w}_H(t)+vr_{1n}^2 w_H(t)=\frac{2ft}{\pi\rho r_{1n}}\;,\quad t>0, \tag{3.7}$$

$$\lambda\ddot{v}_H(t)+\dot{v}_H(t)+vr_{2n}^2 v_H(t)=\frac{2gt}{\pi\rho r_{2n}}\;,\quad t>0. \tag{3.8}$$

Yukarıdaki (2.10) denklemlerden sınır şartları aşağıdaki gibidir.

$$w_H(0)=v_H(0)=\dot{w}_H(0)=\dot{v}_H(0)=0 \tag{3.9}$$

Başlangıç koşulları (3,9) ile adi diferansiyel denklemler (3,7) ve (3,8)'nin çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$w_H(t)=\frac{2f}{\pi\mu r_{1n}^3}\left[t-\frac{e^{p_{2n}t}-e^{p_{1n}t}}{p_{2n}-p_{1n}}-\frac{1}{v\lambda r_{1n}^2}\left\{1-\frac{p_{2n}e^{p_{1n}t}-p_{1n}e^{p_{2n}t}}{p_{2n}-p_{1n}}\right\}\right], \tag{3.10}$$

$$v_H(t)=\frac{2g}{\pi\mu r_{2n}^3}\left[t-\frac{e^{q_{2n}t}-e^{q_{1n}t}}{q_{2n}-q_{1n}}-\frac{1}{vr_{2n}^2}\left\{1-\frac{q_{2n}e^{q_{1n}t}-q_{1n}e^{q_{2n}t}}{q_{2n}-q_{1n}}\right\}\right], \tag{3.11}$$

Burada

$$p_{2n},p_{1n}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4v\lambda r_{1n}^2}}{2\lambda},\qquad q_{2n},q_{1n}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4v\lambda r_{2n}^2}}{2\lambda},$$

Son olarak (3,5) ve (3,6)'yi kullanarak ters Hankel dönüşü kullanarak aşağıdaki ifadeleri elde edebiliriz.

$$\int_{R_1}^{R_2} (r^2 - R_2^2)\, B_w(rr_{1n})dr = \frac{4}{\pi r_{1n}^3}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2, \tag{3.12}$$

$$\int_{R_1}^{R_2} rln(\frac{r}{R_2})\, B_v(rr_{2n})dr = \frac{2}{\pi R_1 r_{2n}^3}\quad , \tag{3.13}$$

$w(r,t)$ $v(r,t)$ bu ifadeleri aşağıda elde ederiz.

$$w(r,t) = \frac{ft}{2\mu}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\left(r - \frac{R_2^2}{r}\right) - \frac{\pi f}{\mu v}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1^2\,(R_2 r_{1n})B_w(rr_{1n})}{r_{1n}^3[J_2^2\,(R_1 r_{1n}) - J_1^2\,(R_2 r_{1n})]}$$
$$+\frac{\pi f}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1^2\,(R_2 r_{1n})B_w(rr_{1n})}{r_{1n}[J_2^2\,(R_1 r_{1n}) - J_1^2\,(R_2 r_{1n})]}\left[\frac{1}{vr_{1n}^2}\frac{p_{2n}e^{p_{1n}t} - p_{1n}e^{p_{2n}t}}{p_{2n} - p_{1n}} - \frac{e^{p_{2n}t} - e^{p_{1n}t}}{p_{2n} - p_{1n}}\right]$$

(3.14)

$$v(r,t) = \frac{gt}{\mu}R_1 ln\left(\frac{r}{R_2}\right) - \frac{\pi g}{\mu v}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0^2\,(R_2 r_{2n})B_v(rr_{2n})}{r_{1n}^3[J_2^2\,(R_1 r_{1n}) - J_1^2\,(R_2 r_{1n})]}$$
$$+\frac{\pi g}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0^2\,(R_2 r_{2n})B_v(rr_{2n})}{r_{2n}[J_1^2\,(R_1 r_{2n}) - J_0^2\,(R_2 r_{2n})]}\left[\frac{1}{vr_{2n}^2}\frac{q_{2n}e^{q_{1n}t} - q_{1n}e^{q_{2n}t}}{q_{2n} - q_{1n}} - \frac{e^{q_{2n}t} - e^{q_{1n}t}}{q_{2n} - q_{1n}}\right].$$

(3.15)

(3.14) ve (3.15) denklemleri daha basit şekilde aşağıdaki gibi düzenlenmiş olarak verebiliriz.

$$w(r,t) = \frac{ft}{2\mu}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\left(r - \frac{R_2^2}{r}\right)$$
$$-\frac{\pi f}{\mu v}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1^2\,(R_2 r_{1n})B_w(rr_{1n})}{r_{1n}^3[J_2^2\,(R_1 r_{1n}) - J_1^2\,(R_2 r_{1n})]}\left[1 - \lambda\frac{p_{1n}^2 e^{p_{2n}t} - p_{2n}^2 e^{p_{1n}t}}{p_{2n} - p_{1n}}\right] \tag{3.16}$$

$$v(r,t) = \frac{gt}{\mu}R_1 ln\left(\frac{r}{R_2}\right) - \frac{\pi g}{\mu v}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0^2\,(R_2 r_{2n})B_v(rr_{2n})}{r_{1n}^3[J_2^2\,(R_1 r_{1n}) - J_1^2\,(R_2 r_{1n})]}$$
$$+\frac{\pi g}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0^2\,(R_2 r_{2n})B_v(rr_{2n})}{r_{2n}[J_1^2\,(R_1 r_{2n}) - J_0^2\,(R_2 r_{2n})]}\left[1 - \lambda\frac{q_{1n}^2 e^{q_{2n}t} - q_{2n}^2 e^{q_{1n}t}}{q_{2n} - q_{1n}}\right] \tag{3.17}$$

3.3. KAYMA GERİLMELERİNİN HESAPLANMASI

Kayma gerilmeleri $\tau_1(r,t)$ ve $\tau_2(r,t)'$yi hesaplamak için (2.10) başlangıç sınır koşulları ile (2.11) ve (2.12) denklerinden (3.18) ve (3.19) denklemleri elde edilir.

$$\tau_1(r,t) = \frac{\mu}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}} \int_0^t e^{\frac{s}{\lambda}} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) w(r,s) ds; \quad r \in (R_1, R_2), \qquad t > 0, \qquad (3.18)$$

$$\tau_2(r,t) = \frac{\mu}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}} \int_0^t e^{\frac{s}{\lambda}} \frac{\partial v(r,s)}{\partial r} ds; \qquad r \in (R_1, R_2), \qquad t > 0, \qquad (3.19)$$

(3.16) , (3.17) içinde (3.18) ve (3.19) ifadelerin işlemleri yapıldıktan sonra aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\tau_1(r,t) = f\left(\frac{R_1}{r}\right)^2 \left[t - \lambda\left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}\right)\right] + \frac{\pi f}{v}\left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(R_2 r_{1n}) \widetilde{B}_w(r r_{1n})}{r_{1n}^2 [J_2^2(R_1 r_{1n}) - J_1^2(R_2 r_{1n})]}$$

$$+ \frac{\pi f}{v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(R_2 r_{1n}) \widetilde{B}_w(r r_{1n})}{r_{1n}^2 [J_2^2(R_1 r_{1n}) - J_1^2(R_2 r_{1n})]} \frac{\lambda}{(p_{2n} - p_{1n})} \left[\frac{p_{2n}^2\left(e^{p_{1n}t} - e^{-\frac{t}{\lambda}}\right)}{1 + \lambda p_{1n}} - \frac{p_{1n}^2\left(e^{p_{2n}t} - e^{-\frac{t}{\lambda}}\right)}{1 + \lambda p_{2n}} \right] \quad (3.20)$$

$$\tau_2(r,t) = g\left(\frac{R_1}{r}\right) \left[t - \lambda\left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}\right)\right] + \frac{\pi g}{v}\left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(R_2 r_{2n}) \widetilde{B}_v(r r_{2n})}{r_{2n}^2 [J_1^2(R_1 r_{2n}) - J_0^2(R_2 r_{2n})]}$$

$$+ \frac{\pi g}{v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(R_2 r_{2n}) \widetilde{B}_v(r r_{2n})}{r_{2n}^2 [J_1^2(R_1 r_{2n}) - J_0^2(R_2 r_{2n})]} \frac{\lambda}{(q_{2n} - q_{1n})} \left[\frac{q_{2n}^2\left(e^{q_{1n}t} - e^{-\frac{t}{\lambda}}\right)}{1 + \lambda q_{1n}} - \frac{q_{1n}^2\left(e^{q_{2n}t} - e^{-\frac{t}{\lambda}}\right)}{1 + \lambda q_{2n}} \right] \quad (3.21)$$

Burada

$$\widetilde{B}_w(r r_{1n}) = J_2(r r_{1n}) Y_2(R_1 r_{1n}) - J_2(R_1 r_{1n}) Y_2(r r_{1n}),$$
$$\widetilde{B}_v(r r_{2n}) = J_1(r r_{2n}) Y_1(R_1 r_{2n}) - J_1(R_1 r_{2n}) Y_1(r r_{2n}).$$

Denklem (3.20) ve (3.21) işlemleri yapılarak daha basit halde aşağıdaki gibi yazarız.

$$\tau_1(r,t) = f\left(\frac{R_1}{r}\right)^2 \left[t - \lambda\left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}\right)\right]$$
$$+ \frac{\pi f}{v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(R_2 r_{1n}) \widetilde{B}_w(r r_{1n})}{r_{1n}^2 [J_2^2(R_1 r_{1n}) - J_1^2(R_2 r_{1n})]} \left[1 - \frac{p_{2n} e^{p_{1n}t} - p_{1n} e^{p_{2n}t}}{p_{2n} - p_{1n}}\right], \qquad (3.22)$$

$$\tau_2(r,t) = g\left(\frac{R_1}{r}\right)\left[t - \lambda\left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}\right)\right]$$
$$+ \frac{\pi g}{v}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0^2\,(R_2 r_{2n})\widetilde{B}_v(r r_{2n})}{r_{2n}^2[J_1^2\,(R_1 r_{2n}) - J_0^2\,(R_2 r_{2n})]}\left[1 - \frac{q_{2n}e^{q_{1n}t} - q_{1n}e^{q_{2n}t}}{q_{2n} - q_{1n}}\right] \quad (3.23)$$

3.4. ÖZEL DURUM $\lambda \to 0$ (NEWTON AKIŞKANI)

Denklem (3.16), (3.17), (3.22) ve (3.23)’de $\lambda \to 0$ giderken Newton akışkanı çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$w_N(r,t) = \frac{ft}{2\mu}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\left(r - \frac{R_2^2}{r}\right)$$
$$-\frac{\pi f}{\mu v}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1^2\,(R_2 r_{1n})B_w(r r_{1n})}{r_{1n}^3[J_2^2\,(R_1 r_{1n}) - J_1^2\,(R_2 r_{1n})]}\left(1 - e^{-v r_{1n}^2 t}\right), \quad (3.24)$$

$$v_N(r,t) = \frac{gt}{\mu}R_1 ln\left(\frac{r}{R_2}\right)$$
$$-\frac{\pi g}{\mu v}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0^2\,(R_2 r_{2n})B_v(r r_{2n})}{r_{1n}^3[J_1^2\,(R_1 r_{1n}) - J_0^2\,(R_2 r_{1n})]}\left(1 - e^{-v r_{2n}^2 t}\right) \quad (3.25)$$

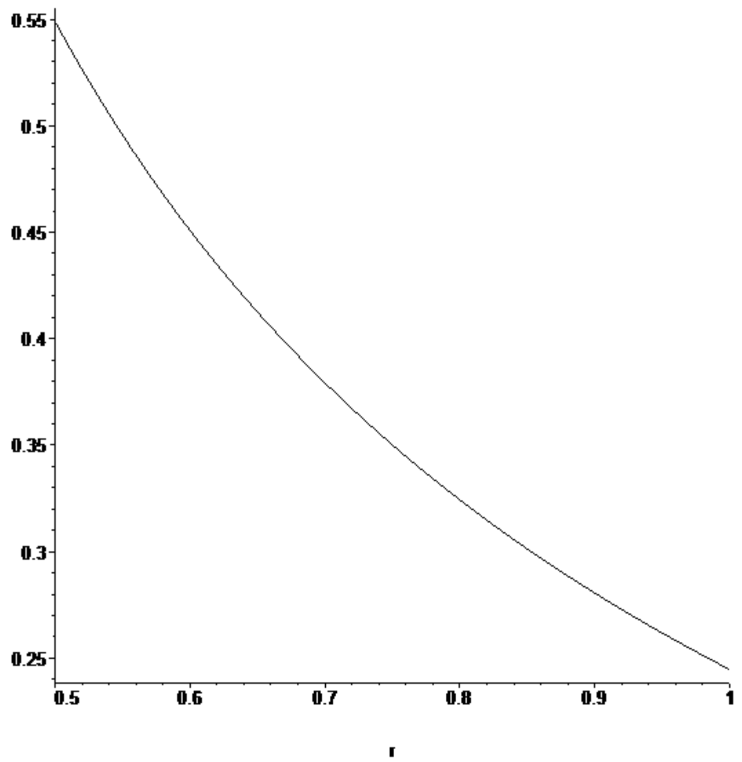
$$\tau_{1N}(r,t)$$
$$= ft\left(\frac{R_1}{r}\right)^2 + \frac{\pi f}{v}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1^2\,(R_2 r_{1n})\widetilde{B}_w(r r_{1n})}{r_{1n}^2[J_2^2\,(R_1 r_{1n}) - J_1^2\,(R_2 r_{1n})]}\left(1 - e^{-v r_{1n}^2 t}\right), \quad (3.26)$$

$$\tau_{N2}(r,t) = gt\left(\frac{R_1}{r}\right)$$
$$+\frac{\pi g}{v}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0^2\,(R_2 r_{2n})\widetilde{B}_v(r r_{2n})}{r_{2n}^2[J_1^2\,(R_1 r_{2n}) - J_0^2\,(R_2 r_{2n})]}\left(1 - e^{-v r_{2n}^2 t}\right) \quad (3.27)$$

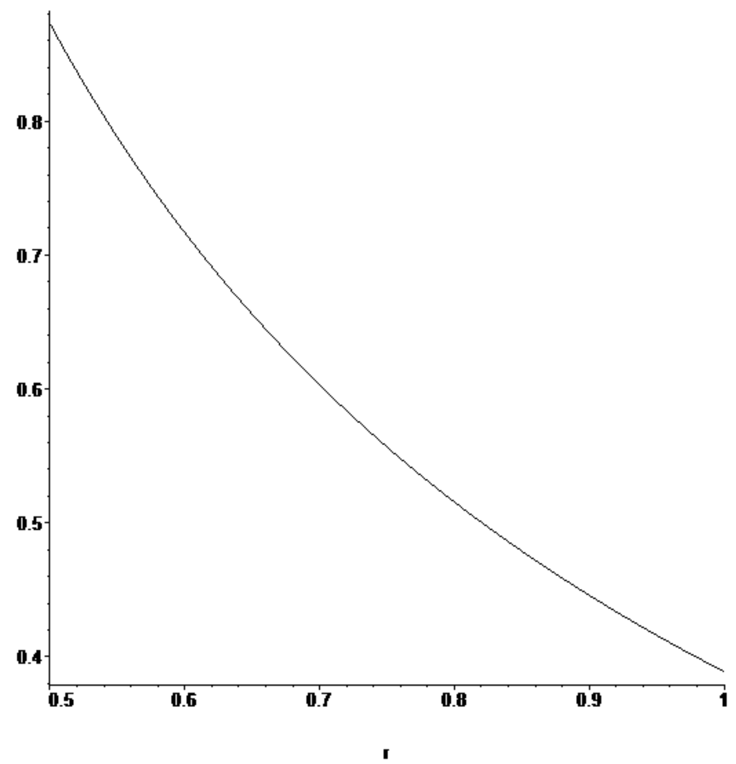
Yukarıdaki denklemler elde edilir. (8) denkleminde $\lambda \to 0$ yaklaşırken (3.28) elde edilir.

$$\tau_1(R_1,t) = ft, \quad \tau_2(R_1,t) = gt \quad (3.28)$$

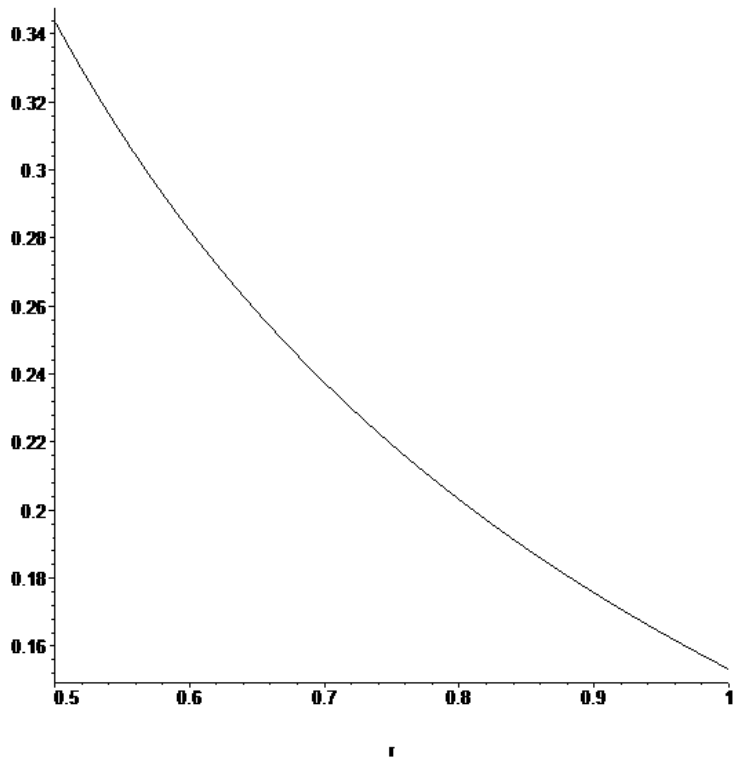
Bu (3.24) ve (3.25) denklemleri (2.14) ve (2.15) ifadelerinin (2.10) başlangıç sınır şartlarını ile çözümünde elde edilmiştir.[27]



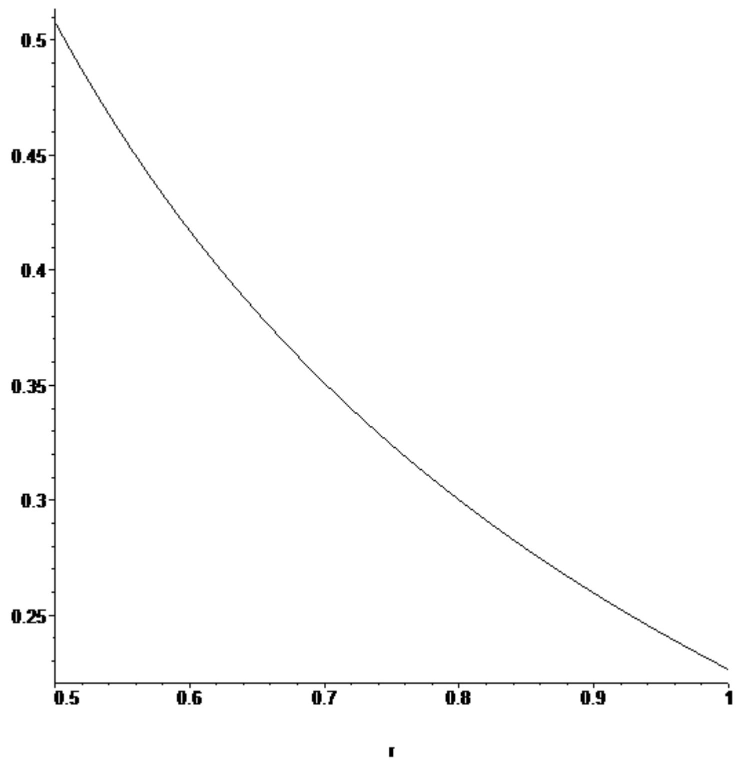
$R_1 = 0.5$, $R_2 = 0.9$ $f = -5, v = 0.0357541, \mu = 32, \lambda = 2$, $t = 10$ için denklem (3.16)$'$un $w(r)$ grafiği



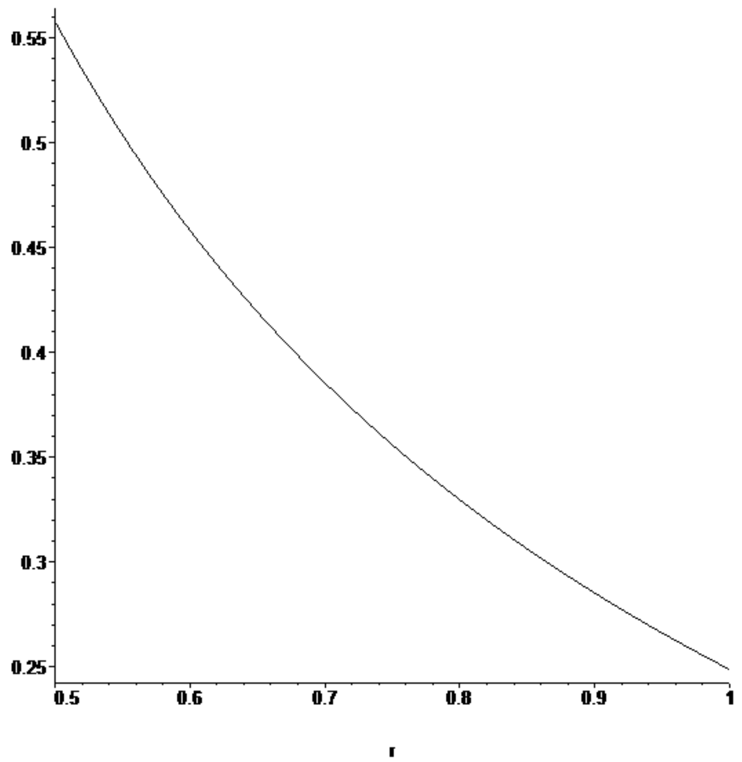
$R_1 = 0.5$, $R_2 = 0.9$ g $= -5, v = 0.0357541, \mu = 32, \lambda = 2$, $t = 10$ için denklem (3.17)$'$un $v(r)$ grafiği



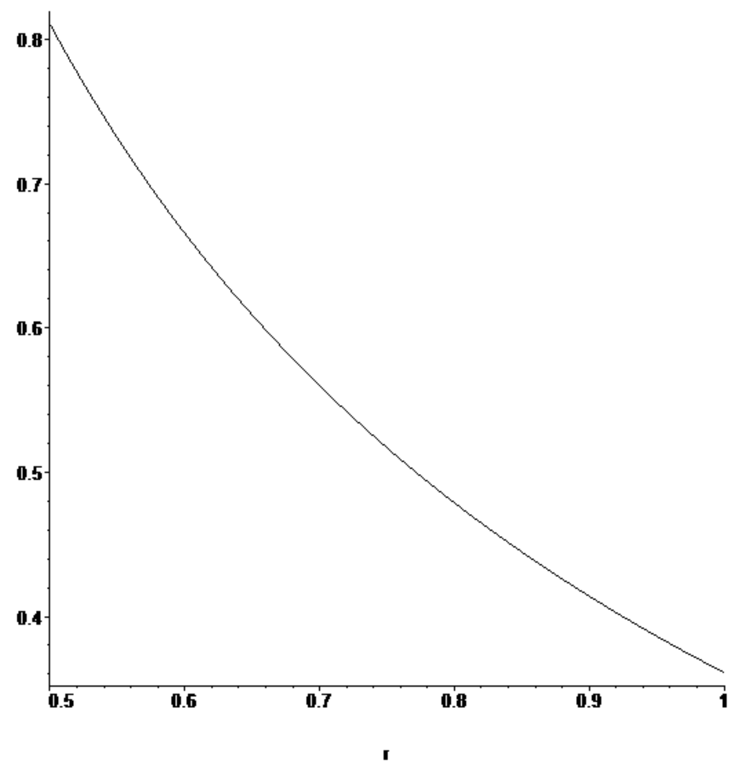
$R_1 = 0.5$, $R_2 = 0.9$ g $= -5, v = 0.0357541, \mu = 32, \lambda = 2$, $t = 12$ için denklem (3.16)'un $w(r)$ grafiği



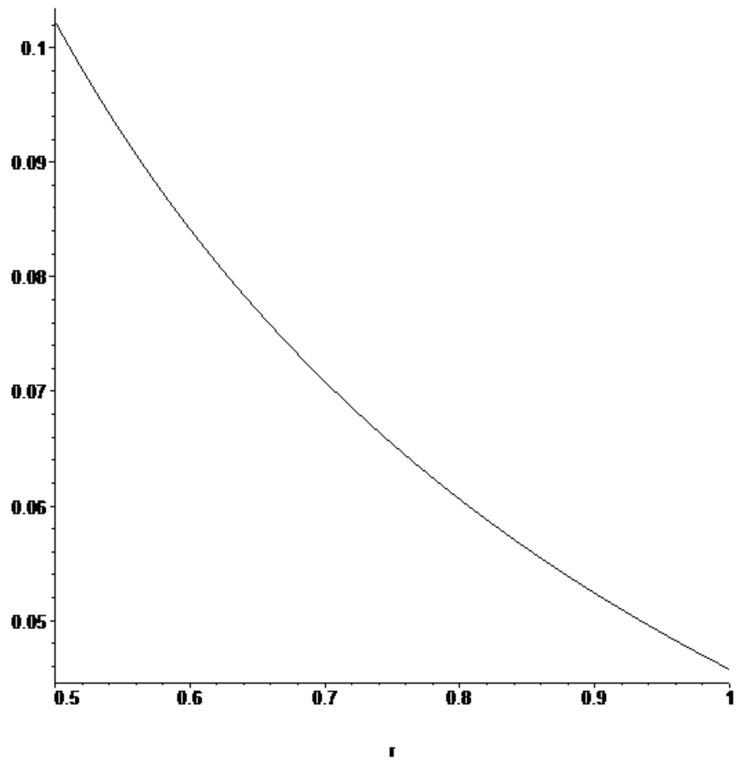
$R_1 = 0.5$, $R_2 = 0.9$ g $= -5, v = 0.0357541, \mu = 32, \lambda = 2$, $t = 12$ için denklem (3.17)'un $v(r)$ grafiği



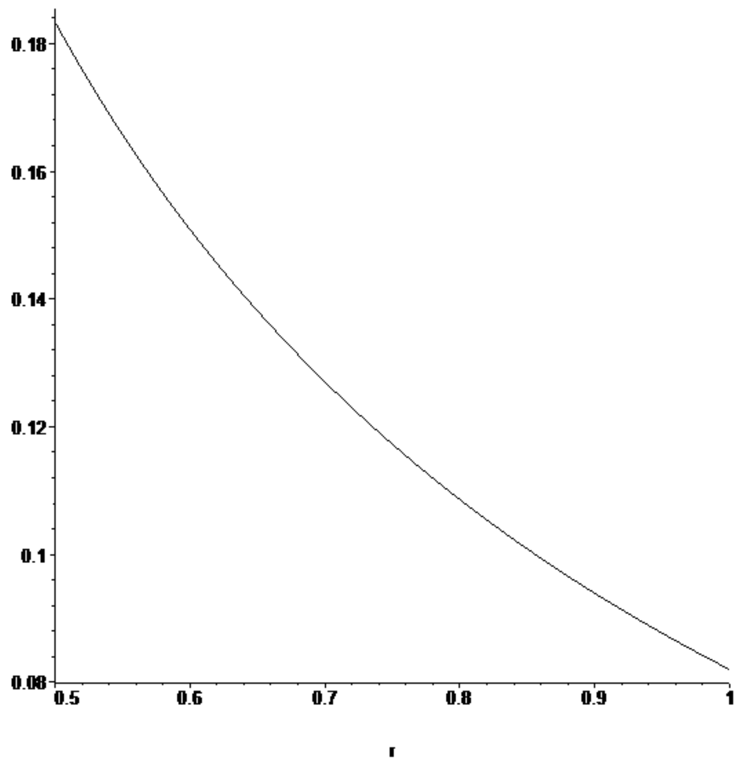
$R_1 = 0.5$, $R_2 = 0.9$ f $= -5, v = 0.02, \rho = 895, \lambda = 2$, $t = 15$ için denklem (3.16)′un $w(r)$ grafiği



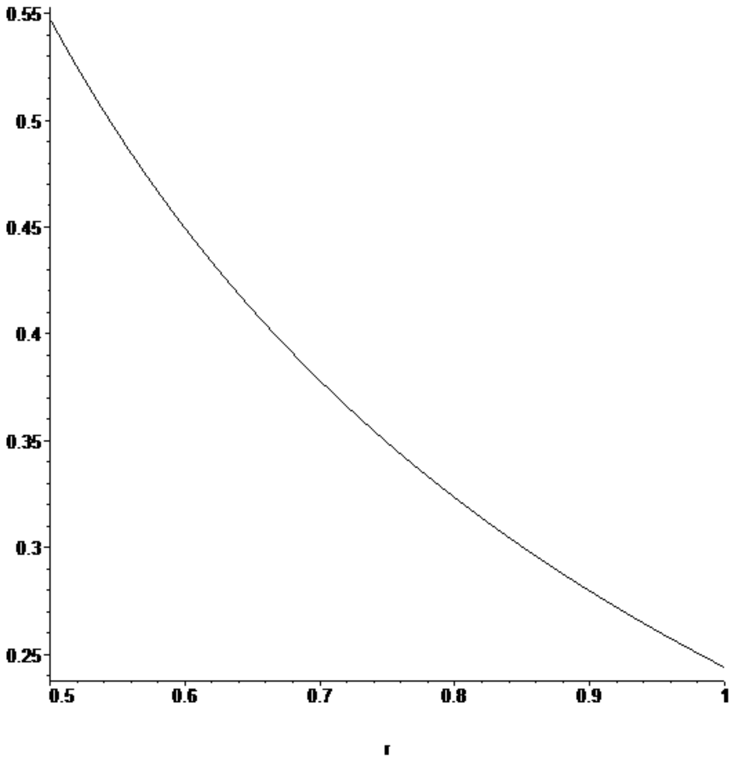
$R_1 = 0.5$, $R_2 = 0.9$ g $= -5, v = 0.02, \rho = 895, \lambda = 2$, $t = 15$ için denklem (3.17)′un $v(r)$ grafiği



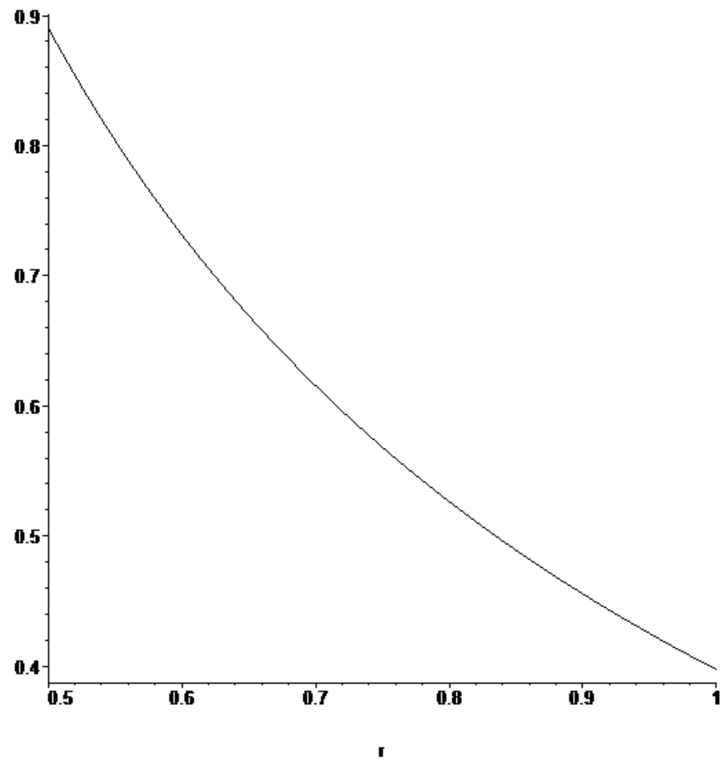
$R_1 = 0.5$, $R_2 = 0.9$ $f = -5, v = 0.0357541, \mu = 32, \lambda = 5$, $t = 5$ için denklem (3.16)′un $w(r)$ grafiği



$R_1 = 0.5$, $R_2 = 0.9$ $f = -5, v = 0.0357541, \mu = 32, \lambda = 5$, $t = 5$ için denklem (3.17)′un $v(r)$ grafiği



$R_1 = 0.5$, $R_2 = 0.9$ $f = -5, \upsilon = 0.0357541, \mu = 32, \lambda = 5$, $t = 20$ için denklem $(3.16)'$un $w(r)$ grafiği



$R_1 = 0.5$, $R_2 = 0.9$ g $= -5, \upsilon = 0.0357541, \mu = 32, \lambda = 5$, $t = 20$ için denklem $(3.17)'$un $v(r)$ grafiği

4.BÖLÜM

4.1 NON LİNEER DENKLEM SİSTEMİNİN ZAYIF ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde dalga denklemini non lineer dalga denklem sistemi için başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığını ele alacağız. Çalışmada önce lineer dalga denklemi için tam çözümlerin varlığı Bölüm 3 de gösterilmiştir. Bu bölümde lineer dalga denklemine $f_1(u,v)\ ve\ f_2(u,v)$ ifadeleri eklenerek nonlineer hale getirilmiştir. Bu bülümde oluşan Matematiksel modelin çözümün varlığı ve Feado Galerkin yaklaşımından yararlanarak çözümün tekliği gösterilmiştir.

4.2 GİRİŞ

Aşağıdaki non lineer dalga denklem sistemi için başlangıç sınır değer problemini ele alacağız.

$$\begin{cases} u_{tt} - a_1\left(u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{1}{x^2}u\right) + \lambda_1 u_t + f_1(u,v) = F_1(x,t), \\ v_{tt} - a_2\left(v_{xx} + \frac{1}{x}v_x\right) + \lambda_2 v_t + f_2(u,v) = F_2(x,t), 1 < x < R, 0 < t < T, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} u_x(1,t) = b_1 u(1,t) + h_1(t) \qquad v_x(1,t) = h_2(t) \\ u(R,t) = v(R,t) = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \\ v(x,0) = \tilde{v}_0(x), \quad v_t(x,0) = \tilde{v}_1(x), \end{cases} \tag{4.3}$$

Burada $a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ b_1 > 0,\ \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ R > 1$ verilen şartlar ve $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{v}_0, \tilde{v}_1, F_1, F_2, f_1, f_2, h_1, h_2,$ şartları sağlayan verilen fonksiyonlardır.
Sonlu Hankel transformları ve $J_0(x), Y_0(x), J_1(x), Y_1(x), J_2(x)$ ve $Y_2(x)$ Bessel fonksiyonlarının seri formlarını kullanarak, bütün başlangıç ve sınır şartlarını sağlayan tam bir çözüm elde edilmiş Daha sonraları ordinayt ve kesirli türev modelleri için Helical flowslar üzerinde çalışılmıştır.[28-32]

$$\begin{cases} \lambda u_{tt} + u_t = v\left(u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{1}{x^2}u\right), \qquad 1 < x < R, \qquad t > 0, \\ \lambda V_{tt} + V_t = V\left(V_{xx} + \frac{1}{x}V_x\right), \qquad 1 < x < R, \qquad t > 0, \\ u_x(1,t) - u(1,t) = \frac{f}{\mu}t, \qquad V_x(1,t) = \frac{g}{\mu}t, \qquad t > 0, \\ u(R,t) = V(R,t), \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \qquad 1 < x < R, \\ V(x,0) = V_t(x,0) = 0, \qquad 1 < x < R, \end{cases} \tag{4.4}$$

Burada (4,4) problemi Maxwell'in Helical flows'u olarak tanımlanan λ, μ, v, f, g verilen sabitlerdir.

4.3 ÖN BİLGİLER

$\Omega = (1, R)$, $Q_T = \Omega \mathrm{x}(0, T)$, $T > 0$, olsun. $C^m(\bar{\Omega})$, $L^p(\Omega)$, $W^{m,p}(\Omega)$. alışılmış fonksiyon uzaylarının tanımlarını vermeye gerek duymadık $W^{m,p} = W^{m,p}(\Omega)$, $L^p = W^{0,p}(\Omega)$, $H^m = W^{m,2}(\Omega), 1 \le p \le \infty, m = 0,1,2$ ... olarak tanımlayalım. L^2 normu $\|\,.\,\|$, ile gösterilir. Ayrıca $(.,.)$ ile L^2 deki skaler çarpım veya sürekli lineer fonksiyoneller ile bir fonksiyon uzayının bir elemanının dual skaler çarpım çiftini göstereceğiz. $\|\,.\,\|_X$ ile X üzerindeki normu ve X' ile X' in dual uzayını gösterecegiz. $L^p(0, T; X), 1 \le p \le \infty$ ile ölçülebilir, reel $u: (0, T) \to X$ fonksiyonlarının Banach uzayını göstereceğiz öyle ki;

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt\right)^{1/p} < \infty \quad \text{için } 1 \le p < \infty$$

ve

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \underset{0<t<T}{esssup} \|u(t)\|_X \ \text{ için } \ p = \infty$$

$\mathrm{u(t)}$, $\mathrm{u'(t)} = u_{\mathrm{t}}(\mathrm{t})$, $\mathrm{u''(t)} = \mathrm{u_{tt}(t)}$, $\mathrm{u_x(t)}$, $\mathrm{u_{xx}(t)}$ ile sırasıyla $u(x,t), \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t), \frac{\partial u}{\partial x}(x,t), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$, gösterelim. H^1 üzerinde

$$\|v\|_{H^1} = (\|v\|^2 + \|v_x\|^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4.5}$$

normunu kullanacağız.

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v(R) = 0\}. \tag{4.6}$$

olarak alacağız. V, H^1 in kapalı bir alt uzayıdır ve üzerindeki $\|v\|_{\mathrm{H}^1}$ ve $\|v_x\|^2$ normları denktir. Dikkat edilirse L^2 ve H^1 aynı zamanda aşağıdaki iç çarpımlar ile birer Hilbert uzaylarıdır.

$$\langle u, v\rangle = \int_1^R x u(x) v(x) dx, \quad \langle u, v\rangle + \langle u_x, v_x\rangle, \tag{4.7}$$

L^2 ve H^1 nin normları $\|\,.\,\|_0$ ve $\|\,.\,\|_1$ ile gösterilen uygun skaler çarpımlarından indirgenmiştir. H^1 sürekli ve yoğun olarak L^2 içine gömülmüştür. $(L^2)'$ L^2 nin dualini göstersin. Öte yandan $H^1 \hookrightarrow L^2 \hookrightarrow (H^1)'$; dir. (burada $\langle .,. \rangle$ notasyonu H^1 ve $(H^1)'$ çifti için kulanılır.

Lemma 4.3.1 Aşağıdaki eşitlikler doğrudur.
(i) $||v|| \le ||v||_0 \le \sqrt{R}||v||$, her $v \in L^2$,

(ii) $||v||_{H^1} \le ||v||_1 \le \sqrt{R}||v||_{H^1}$, her $v \in H^1$. (4.8)

İspat Lemma 4.3.1

$(i)\ \int_1^R v^2\,(x)dx$

$v^2(x) > 0$ ve $x \in [1, R]$ olup $v^2(x) \leq xv^2(x)$ dır. Bu nedenle,

Her $v \in L^2$ için, $\int_1^R v^2\,(x)dx \leq \int_1^R xv^2\,(x)dx \leq R\int_1^R v^2\,(x)dx$

(ii) $v \in H^1$ için , yukarıdakine benzer şekilde

$$\int_1^R (v^2\,(x) + v_x^2(x))dx \leq \int_1^R x(v^2\,(x) + v_x^2(x))dx$$

$$\leq R\int_1^R (v^2\,(x) + v_x^2(x))dx, \text{her } v \in H^1 \tag{4.9}$$

elde edilir.

Lemma 4.3.2 $H^1 \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ Gömülmesi kompakttır ve

$$||v||_{C^0(\bar{\Omega})} \leq \alpha_0 ||v||_{H^1} \text{ her } v \in H^1, \tag{4.10}$$

Burada $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2(R-1)}}\sqrt{1 + \sqrt{1 + 16(R-1)^2}}$.

İspat Lemma 4.2.2 Bilindiği gibi $H^1 \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ gömülmesi kompakttır.[32] $C^1(\overline{\Omega})$, H^1 ‘de yoğun olduğundan biz sadece bütün $v \in C^1(\bar{\Omega})$ için (4.10) nın sağladığını göstereceğiz.

Her $v \in C^1(\overline{\Omega})$ ve $x, y \in \overline{\Omega}$, için

$$v^2(x) = v^2(y) + 2\int_y^x v(t)v'(t)dt. \tag{4.11}$$

0’ dan s’ ye kadar t üzerinden integral alınırsa,

$$(R-1)v^2(x) = ||v||^2 + 2\int_1^R dy\int_y^x v(t)v'(t)dt$$

$$= ||v||^2 + 2\int_1^R dy\int_1^x v(t)v'(t)dt - 2\int_1^R dy\int_1^y v(t)v'(t)dt$$

$$= ||v||^2 + 2(R-1)\int_1^x v(t)v'(t)dt - 2\int_1^R (R-t)v(t)v'(t)dt$$

$$\leq ||v||^2 + 4(R-1)\int_1^R \left|v(t)v'(t)\right|dt. \tag{4.12}$$

$0 \leq (\alpha a - b)^2$ Eşitliğinden her $a, b \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, için (4.8) den

$$(R-1)v^2(x) \leq ||v||^2 + 2(R-1)\left[\alpha||v'||^2 + \frac{1}{\alpha}||v||^2\right]$$

$$= \left[1 + 2(R-1)\frac{1}{\alpha}\right]||v||^2 + 2(R-1)\alpha||v'||^2, \tag{4.13}$$

sonucuna varırız.

$1 + 2(R-1)\dfrac{1}{\alpha} = 2(R-1)\alpha$ olacak şekilde $\alpha > 0$ seçilir veya

$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{1+16(R-1)^2}}{4(R-1)}$ alınırsa (4.10) sağlanır.

Lemma 4.3.3

$V \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ gömülmesi kompakttır ve

(i) $\quad ||v||_{C^0(\overline{\Omega})} \leq \sqrt{R-1}\,||v_x||$ $\quad$ her $v \in V$,

(ii) $\quad ||v|| \leq \dfrac{R-1}{\sqrt{2}}\left||v_x|\right|$ $\quad$ her $v \in V$, $\quad$ (4.14)

(iii) $\quad ||v||_0 \leq \sqrt{\dfrac{R}{2}}\,(R-1)\,||v_x||_0$ $\quad$ her $v \in V$,

İspat Lemma 4.3.3

$V \hookrightarrow H^1$ sürekli ve $H^1 \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ kompakttır. Böylece $V \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ kompakttır.

(i) $\quad$ her $v \in V$ ve $x \in [1, R]$, için

$$|v(x)| = \left|-\int_x^R v'(y)dy\right| \leq \int_1^R \left|v'(y)\right|dy \leq \sqrt{R-1}\left(\int_1^R \left|v'(y)\right|^2 dy\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{R-1}\|v_x\|. \tag{4.15}$$

(ii) her $v \in V$ ve $x \in [1.R]$, $için$

$$v^2(x) = \left| -\int_x^R v'(y)dy \right|^2 \leq (R-x)\int_x^R \left|v'(y)\right|^2 dy = (R-x)\,\|v_x\|^2. \tag{4.16}$$

1 ‘den R ‘ye kadar x üzerinden integral alınırsa

$$\|v\|^2 = \int_1^R v^2(x)dx \leq \int_1^R (R-x)\,\|v_x\|^2 dx = \frac{(R-1)^2}{2}\|v_x\|^2 \tag{4.17}$$

elde edilir.

(iii) her $v \in V$ için,

$$\|v\|_0 \leq \sqrt{R}\|v\| \leq \sqrt{\frac{R}{2}}\;(R-1)\|v_x\| \leq \sqrt{\frac{R}{2}}\;(R-1)\;||v_x||_0 \tag{4.18}$$

Remark 4.3.1: L^2 üzerinde $v \to \|v\|$ ve $v \to \|v\|_0$ normları denktir. Böylece H^1 üzerindeki bu iki norm $v \to \|v\|_{H^1}$ ve $v \to \|v\|_1$, $v \to \|v_x\|$ ve $v \to \|v_x\|_0$ H_0^1 üzerinde dört norm ve $v \to \|v\|_{H^1}$, $v \to \|v\|_1$, $v \to \|v_x\|$ ve $v \to \|v_x\|_0$ V üzerinde dört norm vardır.

Remark 4.3.2: Başlangıç sınır değer probleminin zayıf formulasyonu aşağıdaki gibi verilebilir.

$$(u,v) \in \widetilde{W} = \left\{ \begin{matrix} (u,v) \in L^\infty(0,T;VxV) : (u_t\,, v_t) \in L^\infty(0,T;L^2xL^2), \\ (u_{tt}, v_{tt}) \in L^1(0,T;V'xV' \end{matrix} \right\}$$

(u,v) Aşağıdaki varyansyonel denklemi sağlar.

$$\begin{cases} \langle u_{tt}(t), w\rangle + a_1 a(u(t),w) + a_1 h_1(t) w(1) + \lambda_1 \langle u_t(t), w\rangle + a_1 \langle \frac{1}{x^2} u(t), w\rangle \\ \;+\langle f_1(u,v), w\rangle = \langle F_1(t), w\rangle, \\ \langle v_{tt}(t), \emptyset\rangle + a_2 b(v(t),\emptyset) + a_2 h_2(t)\emptyset(1) + \lambda_2\langle v_t(t), \emptyset\;\rangle \\ +\langle f_2(u,v), \emptyset\rangle = \langle F_2(t), \emptyset\rangle, \end{cases} \tag{4.19}$$

Her $(w,\emptyset) \in V \times V$, hemen hemen her yerde , $t \in (0,T)$, başlangıç şartları ile birlikte

$$\begin{cases} u(x,0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \\ v(x,0) = \tilde{v}_0(x), \quad v_t(x,0) = \tilde{v}_1(x), \end{cases} \tag{4.20}$$

Burada $a(.,.), b(.,.)$ $V\mathrm{x}V$ üzerinde her $u,w \in V,\ b_1 > 0$ için $a(u,w) = b(u,w) + b_1 u(1)w(1),\ b(u,w)$=$\langle u_x, w_x\rangle$ şeklinde tanımlı biliner formdur.

4.4. ZAYIF ÇÖZÜMLERİN VAROLUŞ VE BENZERSİZLİĞİ

Aşağıdakileri ifadeleri kabul edelim.

(H_0) $a_1, a_2, \lambda_1, \lambda_2$ pozitif sabitlerdir

(H_1) $(\tilde{u}_o, \tilde{u}_1), (\tilde{v}_o, \tilde{v}_1) \in VxL^2$;

(H_2) $F_{1\,,}\, F_2 \in L^1(0,T;L^2)$;

(H_3) $h_1, h_2 \in W^{1.1}(0,T)$;

(H_4) (i) ve (ii) olacak şekilde $F \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ vardır.

(i) $\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = f_1(u,v)$, $\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = f_2(u,v)$,

(ii) $-F(u,v) \le C_1(1 + u^2 + v^2), \forall\, u,v \in \mathbb{R};$ olacak şekilde C_1 sabiti vardır.

(H_5) Her $M > 0$ için $|f_i(u_1,v_1) - f_i(u_2,v_2)| \le L_M(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|)$, olacak şekilde bir $L_M > 0$ sabiti vardır. Her $u_1, v_1, u_2, v_2 \in [-M, M]$, $i = 1{,}2$.

Remark 4.4.1

f_1 ve f_2 fonksiyonlarının (H_4) ve (H_5) şartlarını sağladığı bir örnek verelim.
Aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım.

$$f_1(u,v) = 2\left(\frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + u^2)^2} + \frac{1}{\beta^2 + v^2}\right)v^2 u,$$

$$f_2(u,v) = 2\left(\frac{\beta^2}{(\beta^2 + v^2)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + u^2}\right)u^2 v,$$

Burada α ve β sabitlerdir. $(*)$ eşitlikleri sağlayacak şekilde $(**)$ ile tanımlı $F \in C^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ var olduğundan (H_4) ve (H_5) şartlarını sağladığı açıktır.

$$(**)\ \left\{F(u,v) = \left(\frac{1}{\alpha^2 + u^2} + \frac{1}{\beta^2 + v^2}\right)u^2 v^2\right.$$

$$(*)\ \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) = 2\left(\dfrac{\alpha^2}{(\alpha^2 + u^2)^2} + \dfrac{1}{\beta^2 + v^2}\right)v^2 u = f_1(u,v), \\ \dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v) = 2\left(\dfrac{\beta^2}{(\beta^2 + v^2)^2} + \dfrac{1}{\alpha^2 + u^2}\right)u^2 v = f_2(u,v), \\ F(u,v) = \left(\dfrac{1}{\alpha^2 + u^2} + \dfrac{1}{\beta^2 + v^2}\right)u^2 v^2 \le u^2 + v^2, \text{her } (u,v) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Diğer taraftan $2F(u,v) \le uf_1(u,v) + vf_2(u,v) \le 4F(u,v)$, her $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ eşitliği ile f_1 ve f_2 yi H_4'' nü de aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.4.1 Her $T > 0$ için $(H_0) - (H_4)$ sağlasın Bu durumda (*) 'nın sağlandığı $(4.1) - (4.3)$ denkleminin

$$(u, v) \in L^\infty(0, T; VxV), (u_t, v_t) \in L^\infty(0, T; L^2xL^2),$$
$$(u_{tt}, v_{tt}) \in L^1(0, T; V'xV'). \tag{4.21}$$

En az bir (u, v) zayıf çözümü vardır.
Ek olarak (H_5) de sağlıyorsa çözüm tektir.

Teorem ispatı 4.4.1
İspat 4 basamaktan oluşmaktadır.
Basamak 1 :
Feadon Galerkin yaklaşımı $\{w_i\}$, V'nin sayılabilir bir bazı olsun (4.1), (4.3) probleminin (4.22) formunda yaklaşık çözümünü buluruz.

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t) w_j , \qquad v_m(t) = \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t) w_j , \tag{4.22}$$

Burada $\left(c_{mj}, d_{mj}\right)$ fonksiyonları (4.23) denklemini sağlayan fonksiyonlardır.

$$\begin{cases} \int_1^R \sum_{j=1}^m c''_{mj}(t) w_j\, w_i dx - a_1 \int_1^R \sum_{j=1}^m c_{mj}(t) w_j\, w_i'' dx - a_1 \int_1^R \frac{1}{x} \sum_{j=1}^m c_{mj}(t) w_j\, w_i' dx \\ +a_1 \int_1^R \frac{1}{x^2} \sum_{j=1}^m c_{mj}(t) w_j\, w_i dx + \lambda_1 \int_1^R \sum_{j=1}^m c'_{mj}(t) w_j\, w_i dx \\ +f_1\left(\int_1^R \sum_{j=1}^m c_{mj}(t) w_j\, w_i dx, \int_1^R \sum_{j=1}^m d_{mj}(t) w_j\, w_i dx \right) = \int_1^R \sum_{j=1}^m F_{1mj}(t) w_j\, w_i dx \\ \int_1^R \sum_{j=1}^m d''_{mj}(t) w_j\, w_i dx - a_2 \int_1^R \sum_{j=1}^m d_{mj}(t) w_j\, w_i'' dx - a_2 \int_1^R \frac{1}{x} \sum_{j=1}^m d_{mj}(t) w_j\, w_i' dx \\ \lambda_2 \int_1^R \sum_{j=1}^m d'_{mj}(t) w_j\, w_i dx + f_2\left(\int_1^R \sum_{j=1}^m c_{mj}(t) w_j\, w_i dx, \int_1^R \sum_{j=1}^m d_{mj}(t) w_j\, w_i dx \right) \\ = \int_1^R \sum_{j=1}^m F_{2mj}(t) w_j\, w_i dx \end{cases}$$

$$= \sum_{j=1}^m c''_{mj}(t) \int_1^R w_j\, w_i dx - a_1 \sum_{j=1}^m c_{mj}(t) \int_1^R w_j\, w_i'' dx - a_1 \sum_{j=1}^m c_{mj}(t) \int_1^R \frac{1}{x} w_j w_i' dx$$

$$+a_1 \sum_{j=1}^m c_{mj}(t) \int_1^R \frac{1}{x^2} w_j\, w_i dx + \lambda_1 \sum_{j=1}^m c'_{mj}(t) \int_1^R w_j\, w_i dx$$

$$+f_1\left(\sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t)\int_1^R w_j\, w_i dx, \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t)\int_1^R w_j\, w_i dx\right) = \sum_{j=1}^{m} F_{1mj}(t)\int_1^R w_j\, w_i dx$$

$i = j$ olduğunda $\int_1^R w_j\, w_i dx$, $\int_1^R w'_j\, w'_i dx$ ifadeleri ortanormal oldugundan $1'$e eşit olur.

$i \neq j$ olduğunda $\int_1^R w_j\, w_i dx$, $\int_1^R w'_j\, w'_i dx$, $w_j . w_i'|_1^R$ ve $w_j . w_i|_1^R$ ifadeleri $0'$a eşit dir.

$$= \sum_{j=1}^{m} c''_{mj}(t) . 1 - a_1 \sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t)\left\{ w_j . w_i'|_1^R - \int_1^R w'_j\, w'_i dx \right\}$$

$$-a_1 \sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t)\left\{ \frac{1}{x} w_j . w_i|_1^R - \int_1^R \left(-\frac{1}{x^2} w_j . w_i + \frac{1}{x} w'_j . w_i\right) dx \right\}$$
$$+ a_1 \sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t) \int_1^R \frac{1}{x^2} w_j . w_i dx$$

$$+\lambda_1 \sum_{j=1}^{m} c'_{mj}(t) . 1 + f_1\left(\sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t) . 1, \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t) . 1\right) = \sum_{j=1}^{m} F_{1mj}(t) . \{1\}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} c''_{mj}(t) - a_1 \sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t)\{0 - 1\}$$
$$- a_1 \sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t)\left\{ \int_1^R \frac{1}{x^2} w_j w_i dx - \int_1^R \frac{1}{x} w'_j . w_i\, dx \right\}$$

$$+a_1 \sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t) \int_1^R \frac{1}{x^2} w_j w_i dx . +\lambda_1 \sum_{j=1}^{m} c'_{mj}(t) + f_1\left(\sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t) , \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t)\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} F_{1mj}(t)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} c''_{mj}(t) + a_1 \sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t)\{1\} - a_1 \sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t)\left\{ -\int_1^R \frac{1}{x} w'_j . w_i\, dx \right\}$$

$$+\lambda_1\sum_{j=1}^{m} c'_{mj}(t) + f_1\left(\sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t), \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t)\right) = \sum_{j=1}^{m} F_{1mj}(t)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} c''_{mj}(t) + a_1\sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t) + a_1\sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t)\left\{\frac{1}{2x}w'_j w_i|_1^R + \int_1^R \frac{1}{2x^2}.w_j w_i\,dx\right\}$$

$$+\lambda_1\sum_{j=1}^{m} c'_{mj}(t) + f_1\left(\sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t), \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t)\right) = \sum_{j=1}^{m} F_{1mj}(t)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} c''_{mj}(t) + \lambda_1\sum_{j=1}^{m} c'_{mj}(t)$$
$$+ a_1\sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t) + a_1\sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t)\left\{0 + \int_1^R \frac{1}{2x^2}w_j.w_i\,dx\right\}$$

$$+f_1\left(\sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t), \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t)\right) = \sum_{j=1}^{m} F_{1mj}(t)$$

$1 < l \le m$ alınırsa

$$c_{mj}^{l}{}''(t) + \lambda_1 c_{mj}^{l}{}'(t) + a_1 c_{mj}^{l}(t) + \frac{a_1}{2}\sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t)\int_1^R \frac{1}{x^2}w_j.w_i\,dx + f_1\left(c_{mj}^l, d_{mj}^l\right) = F^l{}_{1mj}(t)$$

$$\sum_{j=1}^{m} d''_{mj}(t)\int_1^R w_j\,w_i dx - a_2\sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t)\int_1^R w_j\,w''_i dx - a_2\sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t)\int_1^R \frac{1}{x}w_j w'_i dx$$

$$+\lambda_2\sum_{j=1}^{m} d'_{mj}(t)\int_1^R w_j\,w_i dx + f_2\left(\sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t)\int_1^R w_j\,w_i dx, \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t)\int_1^R w_j\,w_i dx\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} F_{2mj}(t)\int_1^R w_j\,w_i dx$$

$i = j$ olduğunda $\int_1^R w_j\,w_i dx$, $\int_1^R w'_j\,w'_i dx$ ifadeleri ortanormal oldugundan

$1'$e eşit olur.

$i \neq j$ olduğunda $\int_1^R w_j\, w_i dx$, $\int_1^R w'_j\, w'_i dx$, $w_j . w_i'|_1^R$ ve $w_j . w_i|_1^R$ ifadeleri

$0'$a eşit dir.

$$= \sum_{j=1}^{m} d''_{mj}(t) . 1 - a_2 \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t) \int_1^R w_j\, w''_i dx - a_2 \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t) \int_1^R \frac{1}{x} w_j w'_i dx$$

$$+\lambda_2 \sum_{j=1}^{m} d'_{mj}(t) . 1 + f_2\left(\sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t) . 1, \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t) . 1 \right) = \sum_{j=1}^{m} F_{2mj}(t) . 1$$

$$= \sum_{j=1}^{m} d''_{mj}(t) . -a_2 \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t) \left\{ w_j . w_i'|_1^R - \int_1^R w'_j\, w'_i dx \right\}$$

$$-a_2 \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t) \left\{ \frac{1}{x} w_j . w_i|_1^R - \int_1^R (-\frac{1}{x^2} w_j . w_i + \frac{1}{x} w'_j . w_i)\, dx \right\} + \lambda_2 \sum_{j=1}^{m} d'_{mj}(t)$$

$$+f_2\left(\sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t) , \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t) \right) = \sum_{j=1}^{m} F_{2mj}(t)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} d''_{mj}(t) - a_2 \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t) \{0 - 1\}$$

$$- a_2 \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t) \left\{ 0 + \int_1^R \frac{1}{x^2} w_j\, w_i dx - \int_1^R (\frac{1}{x} w'_j . w_i)\, dx \right\}$$

$$+\lambda_2 \sum_{j=1}^{m} d'_{mj}(t) + f_2\left(\sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t) , \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t) \right) = \sum_{j=1}^{m} F_{2mj}(t)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} d''_{mj}(t) + a_2 \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t)$$

$$- a_2 \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t) \left\{ 0 + \int_1^R \frac{1}{x^2} w_j\, w_i dx - \int_1^R (\frac{1}{x} w'_j . w_i)\, dx \right\}$$

$$+\lambda_2 \sum_{j=1}^{m} d'_{mj}(t) + f_2\left(\sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t) , \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t) \right) = \sum_{j=1}^{m} F_{2mj}(t)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} d''_{mj}(t) + a_2 \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t) - a_2 \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t) \left\{ \int_1^R \frac{1}{2x^2} w_j \, w_i dx \right\}$$

$$+\lambda_2 \sum_{j=1}^{m} d'_{mj}(t) + f_2 \left(\sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t) \, , \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t) \right) = \sum_{j=1}^{m} F_{2mj}(t)$$

$1 < l \leq m$ alınırsa

$$d_{mj}^{l}{}''(t) + \lambda_2 d_{mj}^{l}{}'(t) + a_2 d_{mj}^{l}(t)$$
$$- \frac{a_2}{2} \sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t) \int_1^R \frac{1}{x^2} w_j . w_i \, dx + f_2\left(c_{mj}^l, d_{mj}^l\right) = F^{l}{}_{2mj}(t)$$

elde edilir .

$$\begin{cases} c_{mj}^{l}{}''(t) + \lambda_1 c_{mj}^{l}{}'(t) + a_1 c_{mj}^{l}(t) + \dfrac{a_1}{2} \displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t) \int_1^R \frac{1}{x^2} w_j . w_i \, dx + f_1\left(c_{mj}^l, d_{mj}^l\right) = F^{l}{}_{1mj}(t) \\ d_{mj}^{l}{}''(t) + \lambda_2 d_{mj}^{l}{}'(t) + a_2 d_{mj}^{l}(t) - \dfrac{a_2}{2} \displaystyle\sum_{j=1}^{m} d_{mj}(t) \int_1^R \frac{1}{x^2} w_j . w_i \, dx + f_2\left(c_{mj}^l, d_{mj}^l\right) = F^{l}{}_{2mj}(t) \end{cases}$$

burada $(\mathrm{c_{mj}}, \mathrm{d_{mj}})$fonksiyonları (4.23)denklemini sağlayan fonksiyonlardır.

$$\begin{cases} \langle u''_m(t), w_j \rangle + a_1 a\big(u_m(t), w_j\big) + a_1 h_1(t) w_j(1) + \lambda_1 \langle u'_m(t), w_j \rangle \\ +a_1 \langle \dfrac{1}{x^2} u_m(t), w_j \rangle + \langle f_1\big(u_m(t), v_m(t)\big), w_j \rangle = \langle F_1(t), w_j \rangle, \\ \langle v''_m(t), w_j \rangle + a_2 b\big(v_m(t), w_j\big) + a_2 h_2(t) w_j(1) + \lambda_2 \langle v'_m(t), w_j \rangle \\ +\langle f_2\big(u_m(t), v_m(t)\big), w_j \rangle \ = \langle F_2(t), w_j \rangle, \qquad 1 \leq j \leq m, \end{cases} \tag{4.23}$$

$$u_m(0) = u_{0m\,,} \quad u'_m(0) = u_{1m\,,} \quad v_m(0) = v_{0m\,,} \ \ v'_m(0) = v_{1m\,,} \tag{4.24}$$

burada

$$\begin{cases} u_{0m} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} u_{mj}^{(0)} w_j \to \tilde{u}_0 \quad \text{güçlü bir } V, \\ u_{1m} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} u_{mj}^{(1)} w_j \to \tilde{u}_1 \quad \text{güçlü bir } L^2, \\ v_{0m} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} v_{mj}^{(0)} \emptyset_j \to \tilde{v}_0 \quad \text{güçlü bir } V\ , \\ v_{1m} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} v_{mj}^{(1)} \emptyset_j \to \tilde{v}_1 \quad \text{güçlü bir } \ L^2, \end{cases} \tag{4.25}$$

Teorem 4.4.1'in kabullerinden (4.23) ve (4.24) sistemi için Cauchy problemi $[0, T_m]$ üzerinde en az bir $\big(u_m(t), v_m(t)\big)$ lokal çözümüne sahiptir. Bu Caratheodory teoreminin bir sonucudur. Lokal çözümün $[0, T_m]$ den $[0, T]$ ye genişlemesi tahminlerin bir sonucudur.(bakınız [8,p.34])

Adım 2: $(4.14)_1$, $c'_{mj}(t)$ ve $(4.23)_2$, $d'_{mj}(t)$ ve de j'nin zaman değişkeninin 0'dan t'ye kadar integrali ile bazı düzenlemelerden sonra (4.26) 'yı elde ederiz.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \sum_{j=1}^m c''_{mj}(s)w_j(x)c'_{mj}(t)\,ds + a_1\int_0^t \sum_{j=1}^m c_{mj}(s)w_j''(x)c'_{mj}(s)\,ds \\
&\quad + a_1b_1u(1)w(1)\int_0^t \sum_{j=1}^m c'_{mj}(s)\,ds + a_1w(1)\int_0^t \sum_{j=1}^m h_1(s)c'_{mj}(s)\,ds \\
&\quad + \lambda_1\int_0^t \sum_{j=1}^m c'_{mj}(s)w_j(x)c'_{mj}(s)\,ds \\
&\quad + a_1\int_0^t \frac{1}{x^2}\sum_{j=1}^m c_{mj}(s)w_j(x)c'_{mj}(s)\,ds \\
&\quad + \int_0^t f_1\left(\sum_{j=1}^m c_{mj}(s)w_j(x), \sum_{j=1}^m d_{mj}(s)w_j(x)\right)c'_{mj}(s)ds \\
&\quad = \int_0^t \sum_{j=1}^m F_{1mj}(s)w_j(x)c'_{mj}(s)ds,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \sum_{j=1}^m d''_{mj}(s)w_j(x)d'_{mj}(t)\,ds + a_2\int_0^t \sum_{j=1}^m d_{mj}(s)w_j''(x)d'_{mj}(s)\,ds \\
&\quad + a_2w(1)\int_0^t \sum_{j=1}^m h_2(s)d'_{mj}(s)\,ds + \lambda_2\int_0^t \sum_{j=1}^m d'_{mj}(s)w_j(x)d'_{mj}(s)\,ds \\
&\quad + \int_0^t f_2\left(\sum_{j=1}^m c_{mj}(s)w_j(x), \sum_{j=1}^m d_{mj}(s)w_j(x)\right)d'_{mj}(s)ds \\
&\quad = \int_0^t \sum_{j=1}^m F_{2mj}(t)w_j(x)d'_{mj}(s)ds
\end{aligned}
$$

olur ifadelerin integralleri alınırsa

$$
\frac{1}{2}w_j(x)\left(\sum_{j=1}^m c'_{mj}(s)\right)^2 + \frac{1}{2}a_1w_j''(x)\left(\sum_{j=1}^m c_{mj}(s)\right)^2 + a_1b_1u(1)w(1)\sum_{j=1}^m c_{mj}(s)
$$

$$+a_1 w(1)\int_0^t \sum_{j=1}^m h_1(s)c'_{mj}(s)\,ds+\lambda_1\int_0^t \sum_{j=1}^m w_j(x)\left(c'_{mj}(s)\right)^2 ds$$

$$+a_1\int_0^t \frac{1}{x^2}\sum_{j=1}^m c_{mj}(s)w_j(x)c'_{mj}(s)\,ds$$

$$+\int_0^t f_1\left(\sum_{j=1}^m c_{mj}(s)w_j(x),\sum_{j=1}^m d_{mj}(s)w_j(x)\right)c'_{mj}(s)d$$

$$=\int_0^t \sum_{j=1}^m F_{1mj}(s)w_j(x)c'_{mj}(s)ds,$$

$$\frac{1}{2}w_j(x)\left(\sum_{j=1}^m d'_{mj}(s)\right)^2+\frac{1}{2}a_2 w_j{}''(x)\left(\sum_{j=1}^m c_{mj}(s)\right)^2$$

$$+a_2 w(1)\int_0^t \sum_{j=1}^m h_2(s)d'_{mj}(s)\,ds+\lambda_2\int_0^t \sum_{j=1}^m w_j(x)\left(d'_{mj}(s)\right)^2 ds$$

$$+\int_0^t f_2\left(\sum_{j=1}^m c_{mj}(s)w_j(x),\sum_{j=1}^m d_{mj}(s)w_j(x)\right)d'_{mj}(s)ds$$

$$=\int_0^t \sum_{j=1}^m F_{2mj}(s)w_j(x)d'_{mj}(s)ds$$

çıkar 1. ve 2. Denklemi 2 ile çarpıp taraf tarafa toplarsak (4.26) ve (4.27) denklemlerini buluruz.

$$S_m(t)=S_m(0)-2\int_0^t \left[\langle f_1\left(u_m(s),v_m(s)\right),u'_m(s)\rangle+\langle f_2\left(u_m(s),v_m(s)\right),v'_m(s)\rangle\right]ds$$

$$+2\int_0^t \langle F_1(s),u'_m(s)\rangle\,ds+2\int_0^t \langle F_2(s),v'_m(s)\rangle\,ds-2a_1\int_0^t h_1(s)\,u'_m(1,s)ds$$

$$-2a_2\int_0^t h_2(s)\, v_m'(1,s)ds - 2a_1\int_0^t \langle \frac{1}{x^2} u_m(s), u_m'(s)\rangle\, ds$$

$$= S_m(0) + \sum_{j=1}^{6} \mathrm{I_j}, \qquad (4.26)$$

Burada

$$S_m(t) = \|u_m'(t)\|_0^2 + \|v_m'(t)\|_0^2 + a_1 a\big(u_m(t), u_m(t)\big) + a_2 b\big(v_m(t), v_m(t)\big)$$

$$+2\lambda_1\int_0^t \|u_m'(s)\|_0^2 ds + 2\lambda_2\int_0^t \|v_m'(s)\|_0^2 ds. \qquad (4.27)$$

Öte yandan (4.27) ‘den

$S_m(t) \geq \bar{S}_m(t)$, elde edilir. (4.28)

$$\bar{S}_m(t) = \|u_m'(t)\|_0^2 + \|v_m'(t)\|_0^2 + a_*(\|u_{mx}(t)\|_0^2 + \|v_{mx}(t)\|_0^2)$$

$$+ 2\lambda_*\int_0^t (\|u_m'(s)\|_0^2 + \|v_m'(s)\|_0^2)\, ds, \qquad (4.29)$$

ve

$a_* = min\{a_1, a_2\}, \quad \lambda_* = min\{\lambda_1, \lambda_2\}.$ (4.30)

(4.25) ve $H^1 \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ ‘dan

$$S_m(0) + |u_{0m}(1)| + |v_{0m}(1)| \leq C_0 \qquad (4.31)$$

olacak şekilde, sadece $\tilde{u}_o, \tilde{u}_1, \tilde{v}_o, \tilde{v}_1$ ya bağlı olan bir pozitif C_0 sabiti ve a_1, a_2, b_1 vardır.

Öte yandan

$$\|u_m(t)\|_0^2 = \left\| u_m(0) + \int_0^t u_m'(s)ds \right\|_0^2 \leq 2\|u_{0m}\|_0^2 + 2t\int_0^t \|u_m'(s)\|_0^2 ds. \qquad (4.32)$$

Böylece (4.29), (4.31) ve (4.32) den aşağıdaki çıkarılır.

$$\|u_m(t)\|_0^2 + \|v_m(t)\|_0^2 \leq C_0 + 2T\int_0^t \bar{S}_m(s)ds. \qquad (4.33)$$

(4.26) nın sağ tarafındaki aşağıdaki integralleri hesaplayacağız.

Birinci integral. (H_4) ve $H^1 \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ ‘dan (4.29), (4.31) ve (4.32) ‘ü kullanarak (4.34)’ü çıkarırız.

$$I_1 = -2\int_0^t [\langle f_1(u_m(s), v_m(s)), u_m'(s)\rangle + \langle f_2(u_m(s), v_m(s)), v_m'(s)\rangle]\, ds$$

$$= -2\int_0^t \frac{d}{ds}\int_1^R xF(u_m(x,s), v_m(x,s))\, dx$$

$$= 2\int_1^R xF(u_{0m}(x), v_{0m}(x))dx - 2\int_1^R xF(u_m(x,t), v_m(x,t))\, dx$$

$$\leq (R^2-1) \sup_{|y|,|z|\leq\sqrt{C_0}} |F(y,z)| + 2C_1\int_1^R x[1 + u_m^2(x,t) + v_m^2(x,t)]dx$$

$$\leq C_0 + C_T\int_0^t \bar{S}_m(s)ds, \tag{4.34}$$

Burada C_T , T 'ye bağlı bir sınırdır. Kısalık için aşağıda C_T 'yi genellikle aynı sabit olarak düşüneceğiz.

İkinci integral. (H_2) kabulü kullanılırsa Cauchy-Schwartz eşitliğini sağlanır.

$$I_2 = 2\int_0^t \langle F_1(s), u_m'(s)\rangle ds \leq 2\int_0^t \|F_1(s)\|_0 \|u_m'(s)\|_0 ds$$

$$\leq \int_0^t \|F_1(s)\|_0 ds + \int_0^t \|F_1(s)\|_0 \|u_m'(s)\|_0^2 ds$$

$$\leq \|F_1\|_{L^1(0,T;L^2)} + \int_0^t \|F_1(s)\|_0 \bar{S}_m(s)ds \leq C_T + \int_0^t \|F_1(s)\|_0 \bar{S}_m(s)ds. \tag{4.35}$$

Üçüncü integral. Benzer olarak

$$I_3 = 2\int_0^t \langle F_2(s), v_m'(s)\rangle ds \leq \|F_2\|_{L^1(0,T;L^2)} + \int_0^t \|F_2(s)\|_0 \bar{S}_m(s)ds$$

$$\leq C_T + \int_0^t \|F_2(s)\|_0 \bar{S}_m(s)ds. \tag{4.36}$$

Dördüncü integral. İntegrasyonu kullanarak

$$I_4 = -2a_1\int_0^t h_1(s)u_m'(1,s)ds = 2a_1 h_1(0)u_{0m}(1) - 2a_1 h_1(t)u_m(1,t)$$

$$+2a_1\int_0^t h_1'(s)u_m ds. \tag{4.37}$$

4.4.3 lemmasını ve aşağıdaki eşitsizliği

$$2ab \le \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon}b^2, \qquad \text{her } a.b \ge 0, \varepsilon > 0, \tag{4.38}$$

ve

$$|u_m(1,t)| \le \|u_m(t)\|_{C^0(\bar{\Omega})} \le \sqrt{\mathrm{R}-1}\|u_{mx}(t)\|_0 \le \sqrt{\frac{\mathrm{R}-1}{\mathrm{a}_*}}\sqrt{\bar{S}_m(t)} \tag{4.39}$$

kullanılırsa aşağıdaki ifadeye varılır.

$$I_4 \le 2a_1|h_1(0)||u_{0m}(1)| + 2a_1|h_1(t)|\sqrt{\frac{\mathrm{R}-1}{\mathrm{a}_*}}\sqrt{\bar{S}_m(t)}$$

$$+2a_1\sqrt{\frac{\mathrm{R}-1}{\mathrm{a}_*}}\int_0^t |h_1'(s)|\sqrt{\bar{S}_m(s)}\mathrm{ds}$$

$$\le 2a_1|h_1(0)|C_0 + \frac{1}{\varepsilon}a_1^2\frac{\mathrm{R}-1}{\mathrm{a}_*}h_1^2(t) + \varepsilon\bar{S}_m(t)$$

$$+a_1^2\frac{\mathrm{R}-1}{\mathrm{a}_*}\int_0^t |h_1'(s)|ds + \int_0^t |h_1'(s)|\bar{S}_m(s)ds$$

$$\le 2a_1|h_1(0)|C_0 + \frac{1}{\varepsilon}a_1^2\frac{\mathrm{R}-1}{\mathrm{a}_*}\|h_1\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,\mathrm{T})} + a_1^2\frac{\mathrm{R}-1}{\mathrm{a}_*}\|\mathrm{h}_1'\|_{\mathrm{L}^1(0,\mathrm{T})}$$

$$+\int_0^t |h_1'(s)|\bar{S}_m(s)ds + \varepsilon\bar{S}_m(t)$$

$$\le \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left[2a_1C_0|h_1(0)| + a_1^2\frac{\mathrm{R}-1}{\mathrm{a}_*}\left(\|h_1\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,\mathrm{T})} + \|\mathrm{h}_1'\|_{\mathrm{L}^1(0,\mathrm{T})}\right)\right]$$

$$+\int_0^t |h_1'(s)|\bar{S}_m(s)ds + \varepsilon\bar{S}_m(t)$$

$$\le \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)C_T + \int_0^t |h_1'(s)|\bar{S}_m(s)ds + \varepsilon\bar{S}_m(t), \tag{4.40}$$

Her $\varepsilon > 0$, için $C_T \ge 2a_1C_0|h_1(0)| + a_1^2\frac{\mathrm{R}-1}{\mathrm{a}_*}\left(\|h_1\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,\mathrm{T})} + \|\mathrm{h}_1'\|_{\mathrm{L}^1(0,\mathrm{T})}\right)$.

Beşinci integral benzer olarak

$$I_5 \leq -2a_1 \int_0^t h_2(s) v_m'(1,s) ds \leq 2a_2 |h_2(0)| C_0 + \frac{1}{\varepsilon} a_2^2 \frac{\mathrm{R}-1}{\mathrm{a}_*} \|h_2\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,\mathrm{T})}$$

$$+a_2^2 \frac{\mathrm{R}-1}{\mathrm{a}_*} \|\mathrm{h}_2'\|_{\mathrm{L}^1(0,\mathrm{T})} + \int_0^t |h_2'(s)| \bar{S}_m(s) ds + \varepsilon \bar{S}_m(t)$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \left[2C_0 a_2 |h_2(0)| + a_2^2 \frac{\mathrm{R}-1}{\mathrm{a}_*} \left(\|h_2\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,\mathrm{T})} + \|\mathrm{h}_2'\|_{\mathrm{L}^1(0,\mathrm{T})} \right) \right]$$

$$+ \int_0^t |h_2'(s)| \bar{S}_m(s) ds + \varepsilon \bar{S}_m(t)$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) C_T + \int_0^t |h_2'(s)| \bar{S}_m(s) ds + \varepsilon \bar{S}_m(t), \qquad (4.41)$$

her $\varepsilon > 0$ $\;C_T \geq 2C_0 a_2 |h_2(0)| + a_2^2 \dfrac{\mathrm{R}-1}{\mathrm{a}_*} \left(\|h_2\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,\mathrm{T})} + \|\mathrm{h}_2'\|_{\mathrm{L}^1(0,\mathrm{T})} \right)$.

Altıncı integral. Lemma 4.2.3’ü kullanarak (4.29) ‘dan (4.42) ‘yi çıkarırız.

$$I_6 \leq -2a_1 \int_0^t \langle \frac{1}{x^2} u_m(s) u_m'(s) \rangle \, ds \leq 2a_1 \int_0^t \|u_m(s)\|_0 \, \|u_m'(s)\|_0 ds$$

$$\leq 2a_1 \sqrt{\frac{\mathrm{R}}{2}} (\mathrm{R}-1) \int_0^t \|u_{mx}(s)\|_0 \, \|u_m'(s)\|_0 ds$$

$$\leq 2a_1 \sqrt{\frac{\mathrm{R}}{2\mathrm{a}_*}} (\mathrm{R}-1) \int_0^{\mathrm{t}} \bar{S}_m(s) ds. \qquad (4.42)$$

(4.26), (4.28), (4.29), (4.31), (4.34)– (4.36) ve (4.40)– (4.42),

birlikte düşünülürse (4.43)’ü elde ederiz.

$$(1-2\varepsilon) \bar{S}_m(t) \leq \frac{1}{2} C_T{}^{(1)}(\varepsilon) + \frac{1}{2} \int_0^t C_T{}^{(2)}(s) \bar{S}_m(s) ds, \qquad (4.43)$$

Her $\varepsilon > 0$,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} C_T{}^{(1)}(\varepsilon) = 2C_0 + 2\left(2 + \dfrac{1}{\varepsilon}\right) C_T & (4.44) \\ \dfrac{1}{2} C_T{}^{(2)}(s) = \displaystyle\sum_{i=1}^{2} (|h_i'(s)| + \|F_i(s)\|_0) + 2a_1 \sqrt{\frac{\mathrm{R}}{2\mathrm{a}_*}} (\mathrm{R}-1) + C_T \quad C_T{}^{(2)} \in L^1(0,T). & \end{cases}$$

$\varepsilon = \frac{1}{4}$ seçilirse Gronwall Lemmasını kullanarak (4.43) ‘dan (4.45) elde ederiz.

$$\bar{S}_m(t) \le C_T{}^{(1)}(\varepsilon)\exp\left(\int_0^t C_T{}^{(2)}(s)ds\right) \le C_T,$$

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \forall\, t \in [0,T], \forall\, T > 0. \tag{4.45}$$

BÖLÜM 5

SONUÇ

Bu çalışmada Maxwell akışı için merkezleri eş iki dairesel silindir arasında $t = 0^+$ oldugu zaman kayma ve dönme matematiksel model için başlangıç sınır şartlarını sağladığı ve oluşan modelin tam çözümleri, kayma gerilmeleri hesaplanmıştır.

4. Bölümde ise bu lineer dalga denklemi nonlineer dalga deklemi sistemi olduğunda nonlineer dalga denkleminin üzerinde Feado- Galerkin metodu kullanılarak zayıf çözümün varlığı ve bu çözümün tek olduğu ispat edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Brezis,Haim. 2010. Functional Analysis Sobolev Spaces and Partial Differential Equations:1.Baskı. New York: Springer.

[2] Banach, Stefan. (1932). Theoriedes operations lineaires, Monografie Matematyczne 1.*WarszawaSubwencji Funduszu Kultury Narodowej*. **1,** 0005-20901

[3] Routes of Learning. (2009). Highways, Pathways, and Byways in the History of *Mathematics. Johns Hopkins University Press*. ISBN **1,** 8018-9248

[4] Magnus, Wilhelm. Oberhettinger, Fritz. Soni, Raj Pal. (1966). Formulas and Theorems for Special Functions of Mathematical Physics. *Berlin: Springer*

[5] Acheson, D. J. (1990). Elementary Fluid Dynamics, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, *Oxford University Press*, ISBN **1**-19-859679

[6] JG Oldroyd.(1950). "Devlet Reolojik Denklem Formülasyonu Üzerine". Londra Royal Society of Proceedings. Seri A, *Matematik ve Fizik Bilimleri.* **200,** 523-541.

[7] Nemenyi, PF. (1951). Recent developments in inverse and semi-inverse methods in the mechanics of continua. *Adv Appl Math*. **2,** 123–51.

[8] Hayat T, Mohyuddin MR. (2005). Asghar S. Some inverse solutions for unsteanian fluid. *Tamsui Oxf J Manag Sci* **21,** 1–20.

[9] Asghar S, Mohyuddin MR, Hayat T, Siddiqui AM. (2006). On inverse solutions of unsteady riabouchinsky flows of second grade fluid. *Tamsui Oxf J Manage Sci* **22,** 221–9.

[10] Labropulu F. (2000). A few more exact solutions of a second grade fluid via inverse method. *Mech Res Commun*. **27,** 713–20.

[11] Mohyuddin MR, Ahmad A. (2007). Corrigendum to inverse solutions for a second-grade fluid for porous medium channel and Hall current effects by Muhammad R. Mohyuddin and Ehsan Ellahi Ashraf. *Proc Indian Acad Sci (Math Sci).* **117,** 283–5.

[12] Siddiqui AM, Mohyuddin MR, Hayat T, Asghar S. (2003). Some more inverse solutions for steady flows of a second-grade fluid. *Arch Mech*, **55**, 373–87.

[13] Siddiqui AM, Islam S, Ghori QK. (2006). Two dimensional viscous incompressible flows in a porous medium. *J Porous Media.* **9,** 591–6.

[14] Xie SB. (2001). Some inverse soluitions for non-Newtonian fluid. *J Beijing Normal Univ (Natur Sci)*. **37**.19–21.

[15] Liu CQ, Huang JQ. (1989). Analytical solutions for equations of unsteady flow of non- Newtonian fluids in tube. *Appl Math Mech Engl Ed*. **10**, 989–96.

[16] Zhu WH, Liu CQ. (1993). Analytical solution of flow of second-order non-Newtonian fluid through annular pipes. *Appl Math Mech Engl Ed*.**14**, 209–15.

[17] Huang JQ, Liu CQ. (1997). An analytical solution and analysis of characters for viscoelastic fluid flow in annular pipe. Appl Math *Mech Engl Ed*. **18,** 535–41

[18] Yürüsoy M. (2004). Similarity solutions for creeping flow and heat transfer in second grade fluids. *Appl Math Mech Engl Ed.* **25**, 467–74.

[19] Shen F, Tan WC, Zhao YH, Masuoka T. (2004). Decay of vortex velocity and diffusion of temperature in a generalized second grade fluid. *Appl Math Mech Engl Ed*. **25,** 1151–1171.

[20] Tan WC, Xian F, Wei L. (2002). An exact solution of unsteady Couette flow of generalized second grade fluid. *Chin Sci Bull.* **47**, 1783–1805.

[21] Xu MY, Tan WC. (2001). Theoretical analysis of the velocity field, stress field and vortex sheet of generalized second order fluid with fractional anomalous diffusion. *Sci Chin (Ser A).* **44,** 1387–1421.

[22] Dunn JE, Rajagopal KR. (1995). Fluids of differential type: critical review and thermodynamic analysis. *Int J Eng Sci*. **33,** 689–729.

[23] R. Bandelli, K.R. Rajagopal. (1995). Start-up flows of second grade fluids in domains with one finite dimension, *Internat J. Non-Linear Mech*. **30**, 817-839.

[24] D. Tong, Y. Liu. (2005). Exact solutions for the unsteady rotational flow of non-Newtonian fluid in an annular pipe, *Int. J. Eng. Sci*. **43**, 281-289.

[25] D. Tong, R. Wang, H. Yang. (2005). Exact solutions for the flow of non-Newtonian fluid with fractional derivative in an annular pipe, *Sci China, Ser. G* **48,** 485-495.

[26] L. Debnath, D. Bhatta. (2007). Integral Transforms and Their Applications, Second ed. Chapman, Hall/CRC.

[27] R. Bandelli, K.R. Rajagopal. (1995). Start-up flows of second grade fluids in domains with one finite dimension, *Internat J. Non-Linear Mech.* **30**, 817-839.

[28] Corina Fetecau, C. Fetecau, M. Khan, D. Vieru. (2008). Decay of a potential vortex in a generalized Oldroyd-B fluid, *Appl. Math. Comput.* 2**05**, 497–506.

[29] H. Qi, H. Jin. (2009). Unsteady helical flow of a generalized Oldroyd-B fluid with fractional derivative, *Nonlinear Anal. RWA.* **10**, 2700–2708.

[30] S.H.A.M. Shah. (2010). Some helical flows of a Burgers' fluid with fractional derivative, *Meccanica*. **45**, 143–151.

[31] D. Tong, X. Zhang, Xinhong Zhang. (2009). Unsteady helical flows of a generalized Oldroyd-B fluid, J. Non-Newton. *Fluid Mech*. **156**, 75–83.

[32] D. Tong. (2010). Starting solutions for oscillating motions of a generalized Burgers' fluid in cylindrical domains, *Acta Mech*. **214**, 395–407.

[33] Haim Brezis. (2010). Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, London.

[34] E.L.A. Coddington, N. Levinson. (1955). Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill.