ARALIK 2015 YÜKSEK LİSANS - MATEMATİK BÖLÜMÜ MEHMET AKİF ÇETİN

T.C.

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$\delta -$ ETKİLEŞİMLİ STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN SONLU SPEKTRUMU VE MATRİS GÖSTERİMLERİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHMET AKİF ÇETİN

ARALIK 2015

$\delta -$ Etkileşimli Sturm-Liouville Problemlerinin Sonlu Spektrumu ve Matris Gösterimleri

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Abdullah KABLAN

Mehmet Akif ÇETİN

Aralık 2015

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: δ – Etkileşimli Sturm-Liouville Problemlerinin Sonlu Spektrumu ve Matris Gösterimleri

Öğrencinin, Adı Soyadı: Mehmet Akif ÇETİN

Tez Savunma Tarihi: 21.12.2015

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Metin BEDİR

FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca (tarafımızca) okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Abdullah KABLAN

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri: İmzası

Prof. Dr. Ali İhsan HASÇELİK ....

Doç. Dr. Erdal BAŞ ....

Doç. Dr. Abdullah KABLAN ....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Mehmet Akif ÇETİN

ÖZET

$\delta -$ ETKİLEŞİMLİ STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN SONLU SPEKTRUMU VE MATRİS GÖSTERİMLERİ

ÇETİN, Mehmet Akif

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Abdullah KABLAN

Aralık 2015, 70 sayfa

Bu tezin amacı, $\delta -$ etkileşimli Sturm-Liouville problemlerinin sonlu spektruma sahip olduğunu gösterip matris gösterimlerini yapmaktır. Bu problem aslında n tane geçiş şartıyla verilmiş bir Sturm-Liouville problemine denktir. Buradan yola çıkarak ilk olarak, $j = 0,1,\ldots,n$ olmak üzere herhangi pozitif m_j tamsayıları için en fazla $d+1$ tane özdeğere sahip bir $\delta -$ etkileşimli Sturm-Liouville probleminin inşaa edilebileceğini gösterdik. Burada m_j ler iki etkileşim noktası arasında kalan aralığın parçalanışı ile ilgili sayılar olup d de m_j lerin toplamıdır. İkinci olarak ise, $\delta -$ etkileşimli bir Sturm-Liouville probleminin sonlu boyutlu bir matris özdeğer problemine denk olduğunu gösterdik.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville problemi, $\delta -$ etkileşimli Sturm-Liouville problemi, geçiş şartı, matris özdeğer problemi.

ABSTRACT

FINITE SPECTRUM OF STURM-LIOUVILLE PROBLEMS WITH $\delta-$ INTERACTIONS AND MATRIX REPRESENTATIONS

ÇETİN, Mehmet Akif

M.Sc.Thesis, Mathematics Department

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Abdullah KABLAN

December 2015, 70 pages

The goal of this thesis is to study the finite spectrum and their matrix representations of Sturm-Liouville problems with $\delta-$ interactions. Indeed, such a problem is equivalent to a Sturm-Liouville problem which has n transmission conditions. Firstly, we show that for any positive numbers m_j $\left(j=0,1,\ldots,n\right)$ that are related to number of the partition of the intervals between two successive interaction points, we can construct a Sturm-Liouville problem with $\delta-$ interactions, which has exactly at most $d+1$ eigenvalues. Where d is the sum of m_j's. Secondly, we also show that the Sturm-Liouville problem with $\delta-$ interactions is equivalent to a finite dimensional matrix eigenvalue problem.

Key Words: Sturm-Liouville problem, Sturm-Liouville problem with $\delta-$ interactions, transmission condition, matrix eigenvalue problem.

Çok kıymetli aileme…

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince desteğini, deneyimini ve emeğini hiçbir zaman benden esirgemeyen ve aynı zamanda kişiliğiyle de bana örnek olan Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden saygıdeğer hocam Doç. Dr. Abdullah KABLAN'a minnettarlığımı sunarım.

2210-A Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında bu çalışmaya sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

Maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda bulunarak bu günlere gelmemde en büyük pay sahibi olan aileme sonsuz şükranları borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET v

ABSTRACT vi

TEŞEKKÜR viii

İÇİNDEKİLER ix

SEMBOLLER LİSTESİ x

BÖLÜM 1 - GİRİŞ 1

BÖLÜM 2 - GENEL BİLGİLER 3

2.1. Temel Tanım ve Teoremler 3

2.2. İki Noktalı Düzenli Sturm-Liouville Probleminin Özdeğerleri 5

2.3. Schrödinger Denklemi ile Sturm-Liouville Denklemi Arasındaki İlişki 11

BÖLÜM 3 - STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN SONLU SPEKTRUMU VE MATRİS GÖSTERİMLERİ 15

3.1. Sonlu Spektrumlu Sturm-Liouville Problemleri 15

3.2. Sonlu Spektrumlu Sturm-Liouville Problemlerinin Matris Gösterimleri 22

BÖLÜM 4 - $\delta-$ ETKİLEŞİMLİ STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN SONLU SPEKTRUMU 36

4.1. $\delta-$ Etkileşimli Sturm-Liouville Problemi 36

4.2. $\delta-$ Etkileşimli Sturm-Liouville Problemlerinin Sonlu Spektrumu 37

BÖLÜM 5 - $\delta-$ ETKİLEŞİMLİ STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN MATRİS GÖSTERİMLERİ 52

5.1. $\delta-$ Etkileşimli Sturm-Liouville Problemlerinin Matris Gösterimleri 52

BÖLÜM 6 - SONUÇLAR 67

KAYNAKLAR 68

SEMBOLLER LİSTESİ

λ	Özdeğer
w	Ağırlık fonksiyonu
$\delta(x)$	Dirac Delta fonksiyonu
Δ	Karakteristik fonksiyon
$\hbar$	Planck sabiti
$V(x)$	Potansiyel fonksiyonu
$\Phi(x,\lambda)$	Temel matris çözümü

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Kendine eş bir Sturm-Liouville probleminin spektrumunun sınırsız ve bu yüzden sonsuz olması Sturm-Liouville teorisinin iyi bilinen sonuçlarındandır [1]. Bu sonuç,

$$-\left(py'\right)' + qy = \lambda wy$$

Sturm-Liouville problemindeki baş katsayı p ve ağırlık fonksiyonu w nun pozitif kabul edilmesiyle verilmiştir. Özellikle [2] deki Teorem 8.4.6 ya göre; ayrık sınır koşullarıyla verilmiş düzenli bir Sturm-Liouville probleminin sonsuz sayıda özdeğere sahip olabilmesi için hem p hem de w nun ortak bir alt aralıkta pozitif olması yeterlidir. Yine [2] de Atkinson bu pozitiflik şartlarını büyük oranda rahatlatmıştır. Atkinson, p ve w nun bütün aralıkta negatif olmadığını kabul etmesine rağmen hem $1/p$ hem de w nun bazı alt aralıklar üzerinde sadece sıfıra sahip olmalarına değil aynı zamanda sıfıra özdeş olmalarına da izin vermiştir. Ayrıca Atkinson $n = 0,1,2,\ldots$ için n. özfonksiyonun n tane köke sahip olduğunu göstermiştir.

[3] de Q. Kong, H. Wu ve A. Zettl, Atkinson'un bu fikrinden faydalanarak, Sturm-Liouville problemindeki katsayıların bazı alt aralıklarda sıfır olmasıyla bu denklemin sonlu sayıda spektruma sahip olabileceğini göstermişlerdir. Yani verilen bir n tamsayısı için tam olarak n tane özdeğere sahip ayrık veya ayrık olmayan sınır koşullarıyla verilmiş bir Sturm-Liouville probleminin inşaa edilebileceğini göstermişlerdir. Daha sonra [4] de Q. Kong, H. Volkmer ve A. Zettl, sonlu spektruma sahip Sturm-Liouville problemlerinin yine sonlu spektruma sahip olan özel tipte sonlu boyutlu matris özdeğer problemleriyle aynı özdeğerlere sahip olabileceğini göstermiş ve bu benzerliğe iki problemin denkliği ismini vermiştir. Bu iki çalışma sonraki yıllarda birçok Sturm-Liouville problem tiplerine uygulanmıştır. [5] de geçiş şartlı Sturm-Liouville problemlerinin, [6] da sınır şartlarında spektral

parametre bulunan Sturm-Liouville problemlerinin, [7] de dördüncü mertebeden sınır değer problemlerinin ve yine [8] de geçiş şartı içeren dördüncü mertebeden sınır değer problemlerinin sonlu spektruma sahip oldukları gösterilmiştir. Diğer taraftan da sonlu spektruma sahip bu problemlerin birer matris özdeğer problemine denk olabileceği de [9-16] çalışmalarında gösterilmiştir.

Bu tez, giriş bölümü olarak verilen bu bölüm haricinde beş bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde genel teori hakkında bilgi verilmiş ve kendi içerisinde üç kısma ayrılmıştır. Birinci kısımda literatürde yer alan bazı temel tanımlar ve bir de teorem verilmiştir. İkinci kısımda [17] den faydalanılarak Sturm-Liouville probleminin tanıtımı yapılıp bu problemin özdeğer ve özfonksiyonları ile ilgili çeşitli tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Üçüncü kısımda ise [18] den faydalanılarak zamandan bağımsız Schrödinger problemi tanıtılmış ve Sturm-Liouville probleminin bu probleme denk olduğu gösterilmiştir. Üçüncü bölüm ise kendi içerisinde iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda [3] den faydalanılarak sonsuz spektruma sahip Sturm-Liouville problemlerinin çeşitli kısıtlamalar altında aslında sonlu spektruma sahip olduğu gösterilmiştir. Yani, negatif olmayan her n tamsayısı için n tane özdeğere sahip bir Sturm-Liouville probleminin var olduğu gösterilmiştir. İkinci kısımda ise [4] takip edilerek sonlu spektruma sahip Sturm-Liouville problemlerinin matris gösterimi yapılmıştır. Yani, sonlu spektrumlu bir Sturm-Liouville problemi verildiğinde özdeğerleri bu problemle aynı olan bir matris özdeğer probleminin varlığı gösterilmiştir. Dördüncü bölüm özgün bir bölüm olup bu bölümde öncelikle, $\delta-$ etkileşimli Sturm-Liouville probleminin tanıtımı yapılıp bu problemin n tane geçiş şartıyla verilmiş bir Sturm-Liouville problemine denk olduğundan söz edilmiştir ve daha sonra $\delta-$ etkileşimli Sturm-Liouville probleminin sonlu spektruma sahip olduğu gösterilmiştir. Yine özgün olan beşinci bölümde de sonlu spektruma sahip $\delta-$ etkileşimli Sturm-Liouville problemlerinin matris gösterimi yapılmış ve sonlu spektrumlu $\delta-$ etkileşimli bir Sturm-Liouville problemi verildiğinde, özdeğerleri bu problemle aynı olan bir matris özdeğer probleminin varlığı gösterilmiştir. Ayrıca dördüncü ve beşinci bölümler bazı örneklerle desteklenmiştir. Son olarak altıncı bölümde ise, bu tezde elde edilen sonuçlardan söz edilmiştir.

BÖLÜM 2

GENEL BİLGİLER

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, tezde gerekli olacak bazı temel tanımlar ve bir de teorem verilecektir. Burada vereceğimiz teorem, sıkça karşılaşılan teoremler arasında olduğundan ispatı verilmeyip yalnızca kaynak gösterilmiştir.

Tanım 2.1.1. H reel veya kompleks vektör uzayı olsun. H üzerinde bir iç çarpım, $(,)$ şeklinde gösterilen ve H uzayındaki vektörlerin her sıralı çiftini bir skalerle eşleyen aşağıdaki özelliklere sahip bir fonksiyondur:

1. $(x,x) \geq 0$; $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. $(y,x) = \overline{(x,y)}$

3. $(\beta x, y) = \beta (x,y)$

4. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$

Böyle bir iç çarpım fonksiyonu ile verilen H uzayına bir iç çarpım uzayı denir [19].

Tanım 2.1.2. H reel veya kompleks vektör uzayı olsun. H üzerinde bir norm, $\|\cdot\|$ şeklinde gösterilen ve aşağıdaki özelliklere sahip olan reel değerli fonksiyondur:

1. $\|x\| \geq 0$

2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Böyle bir norm fonksiyonu ile verilen H uzayına bir normlu vektör uzayı denir. $\|x\| = (x,x)^{1/2}$ ifadesi H üzerinde bir norm belirtir. Eğer H bu norma göre tam ise H uzayına Hilbert uzayı denir [19].

Tanım 2.1.3. Bir L fonksiyonunun tanım ve değer kümesi aynı cisim üzerinde vektör uzaylar olsun. Cisimdeki her α ve L nin tanım kümesindeki her $x,\ y$ vektör çifti için

$$\begin{aligned} L(x+y) &= L(x) + L(y) \\ L(\alpha x) &= \alpha L(x) \end{aligned}$$

koşulları gerçekleşiyor ise L fonksiyonuna lineer operatör denir [19].

Tanım 2.1.4. H Hilbert uzayı ve L bu uzayda lineer operatör olsun. L nin tanım kümesi olan $D(L)$, H Hilbert uzayında yoğun olsun. $f \in D(L)$ için

$$(Lf,g) = (f,L^* g)$$

koşulunu sağlayan L^* operatörüne L nin eşlenik operatörü denir. Bu şartı sağlayan $g \in H$ vektörler kümesine L^* operatörünün tanım kümesi denir ve $D(L^*)$ ile gösterilir [19].

Tanım 2.1.5. Eğer $L = L^*$ ise L ye kendine eş operatör adı verilir [19].

Tanım 2.1.6. L operatörü $D(L)$ tanım kümesinde lineer operatör olmak üzere

$$Ly = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x) \neq 0$ fonksiyonu mevcut ise λ parametresine L operatörünün özdeğeri, $y(x) \neq 0$ fonksiyonuna ise bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonu denir [19].

Tanım 2.1.7. Yeterince büyük x değerleri için $g(x) \neq 0$ olmak üzere

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

şartı sağlanıyorsa

$$f(x)=o\big(g(x)\big)$$

yazılır ve " $f(x)$ küçük o $g(x)$ " diye okunur [20].

Tanım 2.1.8. $f(x)$ keyfi bir fonksiyon ve x bir bağımsız değişken olmak üzere

1. $x \neq a$ için $\delta(x-a)=0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,dx = f(a)$

şartlarını sağlayan $\delta(x)$ fonksiyonuna Dirac Delta fonksiyonu denir [21].

Teorem 2.1.1. (Rouche Teoremi) Kompleks düzlemdeki basit kapalı Γ eğrisinin içinde ve üzerinde analitik olan $f(z)$ ve $\varphi(z)$ kompleks fonksiyonları verilsin. Eğer her $z\in\Gamma$ için

$$|f(z)|>|\varphi(z)|$$

oluyorsa, o zaman Γ eğrisinin içinde $f(z)+\varphi(z)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısı ile $f(z)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısı eşittir [22].

2.2. İki Noktalı Düzenli Sturm-Liouville Probleminin Özdeğerleri

Bu kısımda iki noktalı düzenli Sturm-Liouville probleminden bahsedilecektir. Bu problem hakkında ayrıntılı bilgi [17] den alınabilir. İki noktalı düzenli Sturm-Liouville problemi $J=(a,b)$ aralığında aşağıdaki denklemden oluşmaktadır:

$$-\left(py'\right)' + qy = \lambda wy, \quad -\infty \le a < b \le \infty. \tag{2.2.1}$$

Burada $\lambda \in \mathbb{C}$ spektral parametre ve katsayılar aşağıdaki minimal şartı sağlamaktadır:

$$r = 1/p, \; q, \; w \in L\left(J, \mathbb{C}\right). \tag{2.2.2}$$

Yine burada $L\left(J, \mathbb{C}\right)$, J aralığında kompleks değerli Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların uzayını göstermektedir. (2.2.1) denkleminin sınır koşulları

$$AY\left(a\right) + BY\left(b\right) = 0, \; Y = \begin{bmatrix} y \\ py' \end{bmatrix}, \; A, \; B \in M_2\left(\mathbb{C}\right) \tag{2.2.3}$$

şeklindedir. Burada $M_2\left(\mathbb{C}\right)$, 2×2 tipindeki kompleks değerli matrisleri gösterir. Şimdi

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/p \\ q & 0 \end{bmatrix}, \; W = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{bmatrix} \tag{2.2.4}$$

olsun. Buna göre (2.2.1) skaler denklemi aşağıdaki birinci mertebeden sisteme denktir:

$$Y' = \left(P - \lambda W\right)Y = \begin{bmatrix} 0 & 1/p \\ q - \lambda w & 0 \end{bmatrix} Y, \; Y = \begin{bmatrix} y \\ py' \end{bmatrix}. \tag{2.2.5}$$

Tanım 2.2.1. $x \in J$ için J de tanımlı $\Phi\left(x, \lambda\right)$, $n \times n$ tipinde bir matris fonksiyonu olsun. Eğer bu matris fonksiyonunun her bir sütunu (2.2.1) denkleminin bir çözümü ise bu matrise (2.2.1) in matris çözümü denir. Buna ek olarak, $u \in J$ için $\Phi\left(u, \lambda\right) = I$ oluyorsa Φ ye (2.2.1) in temel matris çözümü denir. Eğer $\Psi\left(x, \lambda\right)$, (2.2.1) in başka bir temel matris çözümü ise o zaman her bir $x, \; u \in J$ için

$$\Phi\left(x, \lambda\right) = \Psi\left(x, \lambda\right)\Psi^{-1}\left(u, \lambda\right)$$

veya

$$\Psi(u,\lambda) = \Phi^{-1}(x,\lambda)\Psi(x,\lambda)$$

yazılır.

$\Phi(\cdot,u,P,w,\lambda)$, (2.2.5) in temel matrisi olsun. Bu durumda J de

$$\Phi' = (P-\lambda W)\Phi,\ \Phi(u,u,\lambda) = I,\ a \le u \le b,\ \lambda \in \mathbb{C} \qquad (2.2.6)$$

yazılır. Δ karakteristik fonksiyonunu

$$\Delta(\lambda) = \Delta(a,b,A,B,P,w,\lambda) = \det\left[A + B\Phi(b,a,P,w,\lambda)\right],\ \lambda \in \mathbb{C} \quad (2.2.7)$$

şeklinde tanımlayalım. Şimdi bu fonksiyonun sıfırlarının tam olarak problemin özdeğerleri olduğunu gösterelim.

Tanım 2.2.2. Herhangi bir I aralığında (2.2.1) denkleminin bir y çözümü demek, I aralığında y nin ve onun quasi-türevi olan $z = py'$ nün özdeş sıfır olması demektir. (Burada I, J nin bir alt aralığı veya tüm J aralığı olabilir.) Ayrıca, (2.2.2) genel hipotezi altında, bir y çözümü I aralığında özdeş sıfır iken onun quasi-türevi olan py' bu I aralığında sıfır olmayabilir.

Tanım 2.2.3. (2.2.2) şartı sağlansın. Eğer (2.2.1) denklemi J aralığında (2.2.3) sınır şartını sağlayan aşikar olmayan bir çözüme sahipse bu durumda λ kompleks sayısı (2.2.1), (2.2.3) sınır değer probleminin bir özdeğeri olarak adlandırılır. Böyle bir çözüme, λ nın özfonksiyonu denir. Bu özfonksiyonun herhangi bir katı yine bir özfonksiyondur. Eğer aynı λ değeri için iki lineer bağımsız özfonksiyon mevcutsa bu durumda λ iki geometrik katlılığa sahiptir deriz. Eğer λ nın tek bir lineer bağımsız özfonksiyonu varsa λ bir basit özdeğerdir veya λ bir geometrik katlılığa sahiptir deriz. Her bir $\lambda \in \mathbb{C}$ için (2.2.1) denklemi iki lineer bağımsız çözüme sahip olduğu için, her özdeğer bir ya da iki geometrik katlılığa sahiptir.

Uyarı 2.2.1. (2.2.2) şartı katsayıları reel değerli olarak sınırlamaz, eğer katsayılar reel ise, r, q, w katsayılarından herhangi birinin işaretini sınırlamaz. Ayrıca her bir r, q, w nun J nin bir ya da daha fazla alt aralığında özdeş sıfır olmasına izin verilir. Eğer r, I nın bir alt aralığında özdeş sıfır ise bu durumda tüm y çözümleri I da sabittir. Ayrıca herhangi bir y çözümü için bu sabit sıfır ise bu durumda y nin quasi-türevi olan $z = py'$, I da sıfır olmayan bir sabit olabilir. Benzer olarak, eğer q ve w, I nın bir alt aralığında özdeş sıfır ise bu durumda herhangi bir y çözümü için py', I da sabittir. y, I aralığında özdeş sıfır olsa bile bu sabit sıfır olmayabilir. Bu açıklamalar (2.2.1) denkleminin aşağıda verilen sistem gösteriminden açık bir şekilde görülüp yorumlanabilir: J de

$$y' = rz,\ z' = \left(q - \lambda w\right)y,\ z = py',\ r = 1/p. \tag{2.2.8}$$

eşitlikleri yazılabilir.

Yardımcı Teorem 2.2.1. (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) sağlansın. Bu durumda Δ karakteristik fonksiyonu iyi tanımlıdır ve belirlenmiş $\left(a,b,A,B,P,W\right)$ için λ nın bir tam fonksiyonudur.

Yardımcı Teorem 2.2.2. (2.2.2) sağlansın. Bu durumda

1. λ kompleks sayısının (2.2.1), (2.2.3) sınır değer probleminin bir özdeğeri olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\Delta\left(\lambda\right) = 0$ olmasıdır.
2. λ özdeğerinin geometrik katlılığı aşağıdaki lineer cebir sisteminin lineer bağımsız $C = Y\left(a\right)$ vektör çözümlerinin sayısına eşittir:

$$\left[A + B\Phi\left(b,a,\lambda\right)\right]C = 0. \tag{2.2.9}$$

İspat: $\Delta\left(\lambda\right) = 0$ olsun. Bu durumda (2.2.9), C için aşikar olmayan bir vektör çözümüne sahiptir. J de

$$Y' = \left(P - \lambda W\right)Y,\ \ Y\left(a\right) = C$$

başlangıç değer problemi çözülürse

$$Y\left(b\right) = \Phi\left(b,a,\lambda\right)Y\left(a\right) \text{ ve } \left[A + B\Phi\left(b,a,\lambda\right)\right]Y\left(a\right) = 0$$

yazılır. Buradan, Y nin üst bileşeni olan y (2.2.1), (2.2.3) sınır değer probleminin bir özfonksiyonudur. Bu da λ nın bu sınır değer probleminin bir özdeğeri olduğu anlamına gelir. Tersine, eğer λ bir özdeğer ve y, λ nın bir özfonksiyonu ise bu durumda $Y = \begin{bmatrix} y \\ py' \end{bmatrix}$, $Y(b) = \Phi(b,a,\lambda)Y(a)$ ifadesini sağlar ve sonuç olarak $\left[A + B\Phi(b,a,\lambda)\right]Y(a) = 0$ elde edilir. Bu son eşitlikte $Y(a) = 0$ olması y nin aşikar çözüm olması anlamına gelir ki bu da y nin özfonksiyon olmasıyla çelişir. O halde $\det\left[A + B\Phi(b,a,\lambda)\right] = 0$ dır. Eğer (2.2.9), C için iki lineer bağımsız çözüme sahipse, bunlara C_1 ve C_2 diyelim, bu durumda Y_1 ve Y_2 çözümlerini elde etmek için $Y(a) = C_1$, $Y(a) = C_2$ başlangıç koşullarıyla başlangıç değer problemi çözülür. Bu durumda Y_1, Y_2 (2.2.5) in lineer bağımsız vektör çözümleridir ve bunların üst bileşenleri olan y_1, y_2 (2.2.1) in lineer bağımsız çözümleridir. Tersine y_1, y_2 (2.2.1) in lineer bağımsız çözümleri ise (2.2.9) cebirsel sisteminin lineer bağımsız iki vektör çözümünü elde edebilmek için yukardaki adımları tersten uygulayabiliriz.

Yardımcı Teorem 2.2.3. $B = -I$ olmak üzere (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) sağlansın. Verilen bir $\lambda \in \mathbb{C}$ kompleks sayısının geometrik katlılığı iki olan bir özdeğer olması için gerek ve yeter şart

$$A = \Phi(b,a,\lambda)$$

olmasıdır.

İspat: Bu durum Yardımcı Teorem 2.2.2 ve onun ispatının bir sonucudur.

Yardımcı Teorem 2.2.4. (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) sınır değer problemi için aşağıdaki dört durumdan biri tam olarak sağlanır:

1. $\mathbb{C}$ de hiç özdeğer yoktur.
2. Her kompleks sayı bir özdeğerdir.

3. $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ için $\mathbb{C}$ de tam olarak n tane özdeğer vardır.

4. $\mathbb{C}$ de sonsuz fakat sayılabilir sayıda özdeğer vardır ve bunlar $\mathbb{C}$ de yığılma noktasına sahip değildir.

İspat: Bu durum Yardımcı Teorem 2.2.1 ve Yardımcı Teorem 2.2.2 nin yanı sıra, bir tam fonksiyonun sıfırlarının izole edilmesi ve bu yüzden $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde hiçbir yığılma noktasına sahip olmaması gerçeğinden görülür.

Uyarı 2.2.2. Pozitif ağırlık fonksiyonu w ile verilmiş her kendine eş düzenli Sturm-Liouville problemi Yardımcı Teorem 2.2.4 deki dört kategoriden birinde yer alır.

(2.2.3) sınır şartlarını ayrık ve ayrık olmayan şeklinde iki sınıfa ayırmak mümkündür. Ayrıca, sınır koşulları homojen olduğundan sıfır olmayan bir sabitle veya tekil olmayan bir matrisle çarpılması denk sınır koşulları oluşturur.

Yardımcı Teorem 2.2.5. (Ayrık Sınır Koşulları) (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) sağlansın. P, W, J belirlenmiş ve

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix} \tag{2.2.10}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\Delta(\lambda) = -A_2 B_1 \phi_{11}(b, a, \lambda) - A_2 B_2 \phi_{21}(b, a, \lambda) + A_1 B_1 \phi_{12}(b, a, \lambda) + A_1 B_2 \phi_{22}(b, a, \lambda)$$

dır.

İspat: Bu durum Δ nın tanımından kolaylıkla görülebilir.

Yardımcı Teorem 2.2.6. (Ayrık Olmayan Kendine Eş Sınır Koşulları) (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) sağlansın ve $\Phi = (\phi_{ij})$, (2.2.5) sisteminin temel matrisi olsun. P, W, J belirlenmiş ve

$$B = -I, \; A = e^{i\gamma} K, \; -\pi < \gamma \le \pi, \; K \in SL_2(\mathbb{R}) \tag{2.2.11}$$

şartı sağlansın. (Burada K determinantı 1 olan 2×2 tipinde bir reel matristir.) $K=\left(k_{ij}\right)$ olsun ve $\lambda\in\mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} D\left(\lambda,K\right) &= k_{11}\phi_{22}\left(b,a,\lambda\right)-k_{12}\phi_{21}\left(b,a,\lambda\right) \\ &\quad -k_{21}\phi_{12}\left(b,a,\lambda\right)+k_{22}\phi_{11}\left(b,a,\lambda\right) \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $D\left(\lambda,K\right)$ nın γ ya bağlı olmadığına dikkat edelim. Buna göre

1. λ kompleks sayısının (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3), (2.2.11) sınır değer probleminin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter şart

$$D\left(\lambda,K\right)=2\cos\gamma,\quad -\pi<\gamma\leq\pi \tag{2.2.13}$$

olmasıdır.

2. Eğer $p,\ q,\ w$ reel değerli ve $A=e^{i\gamma}K,\ B=-I,\ 0<\gamma<\pi$ için λ, u özfonksiyonuna karşılık gelen özdeğer ise $A=e^{-i\gamma}K,\ B=-I$ için $\overline{u}$ özfonksiyonuna karşılık gelen özdeğer yine λ dır.

İspat: $\det\Phi\left(b,a,\lambda\right)=1$ olduğunu biliyoruz. $\left(\phi_{ij}\left(b,a,\lambda\right)\right)$ ifadesini kısaca ϕ_{ij} ile gösterelim. (2.2.7), (2.2.12) den ve $\det K=1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \Delta\left(\lambda\right) &= \begin{vmatrix} e^{i\gamma}k_{11}-\phi_{11} & e^{i\gamma}k_{12}-\phi_{12} \\ e^{i\gamma}k_{21}-\phi_{21} & e^{i\gamma}k_{22}-\phi_{22} \end{vmatrix} \\ &= \det\left(e^{i\gamma}K-\Phi\right) \\ &= 1+e^{2i\gamma}-e^{i\gamma}D\left(\lambda\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzden $\Delta\left(\lambda\right)=0$ olması için gerek ve yeter şart (2.2.13) ün sağlanmasıdır.

2.3. Schrödinger Denklemi ile Sturm-Liouville Denklemi Arasındaki İlişki

Bir parçacığın t anındaki durumu $\Psi\left(x,t\right)$ dalga fonksiyonu ile belirlenir. Klasik mekanikte bir parçacığın durumunun zaman içindeki değişimi Newton'un ikinci yasası $F = ma$ ile verilir. Kuantum mekaniğinde ise parçacığın durumunun zaman içindeki değişimi dalga fonksiyonunun değişimini veren ve kuantum mekaniğinin temel denklemi olarak bilinen Schrödinger denklemi ile verilir. Schrödinger denklemi, Sturm-Liouville denkleminin özel bir alt sınıfını teşkil eder. Zamana bağlı Schrödinger denklemi

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V\left(x\right)\Psi \tag{2.3.1}$$

şeklindedir. Burada $i^2 = -1$, m parçacığın kütlesi ve $\hbar$ Planck sabitidir. $V\left(x\right)$ bir potansiyel alanı tanımlayan potansiyel fonksiyonu olup reel değerli, sınırlı ve süreklidir. $V\left(x\right)$ fonksiyonunun t değişkeninden bağımsız olduğunu kabul ettiğimizden dolayı (2.3.1) kısmi diferansiyel denklemi değişkenlerine ayırma metoduyla çözülebilir. Buna göre

$$\Psi\left(x,t\right) = y\left(x\right)f\left(t\right) \tag{2.3.2}$$

şeklinde çözüm arayalım. Burada y yalnızca x e bağlı bir fonksiyon ve f de yalnızca t ye bağlı bir fonksiyondur. (2.3.2) denkleminden

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = y\frac{df}{dt},\quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{d^2y}{dx^2}f$$

yazılabilir. Bu değerleri (2.3.1) denkleminde kullanırsak

$$i\hbar y\frac{df}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2y}{dx^2}f + V\left(x\right)yf$$

elde edilir. Bu son eşitliğin her iki yanını yf ye bölerek

$$i\hbar\frac{1}{f}\frac{df}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} + V\left(x\right) \tag{2.3.3}$$

ifadesini elde ederiz. (2.3.3) denkleminin sol yanı yalnızca t ye bağlı bir fonksiyon ve sağ yanı ise yalnızca x e bağlı bir fonksiyondur. Bunun gerçekleşebilmesinin tek yolu eşitliğin her iki yanının da aynı sabit fonksiyona eşit olmasıdır. Bu sabite E dersek

$$i\hbar \frac{1}{f}\frac{df}{dt} = E$$

veya

$$\frac{df}{dt} = -\frac{iE}{\hbar} f \tag{2.3.4}$$

ve

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} + V\left(x\right) = E$$

veya

$$-\frac{\hbar}{2m} y''\left(x\right) + \left(V\left(x\right) - E\right) y\left(x\right) = 0 \tag{2.3.5}$$

yazılabilir. Böylelikle değişkenlerine ayırma metodu, bir kısmi diferansiyel denklemi (2.3.4) ve (2.3.5) adi diferansiyel denklemlerine dönüştürmüş oldu. (2.3.5) denklemi zamandan bağımsız Schrödinger denklemi olarak adlandırılır. Burada E özdeğeri bir enerji seviyesini ve onun özfonksiyonları bir parçacığa karşılık gelen dalga fonksiyonunu ifade eder. Düzenli bir Schrödinger problemi için sınır koşulları

$$\begin{aligned} a_0 y\left(a\right) + b_0 y'\left(a\right) &= 0 \\ a_1 y\left(b\right) + b_1 y'\left(b\right) &= 0 \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu sınır koşullarında a_0, b_0 ve aynı şekilde a_1, b_1 in her ikisi birden sıfır değildir.

Schrödinger denklemi doğal birimlerde aşağıdaki şekilde alınır ve Liouville normal formu olarak adlandırılır:

$$y''(x) = (V(x) - E)y(x).$$

Şimdi Sturm-Liouville denklemini Schrödinger formunda yazalım. Bunu Liouville dönüşümünü kullanarak yapabiliriz:

$$x = \int_{r_{\min}}^{r} \sqrt{\frac{w(r')}{p(r')}} dr'$$

ve

$$m = (pw)^{-1/4}$$

olmak üzere

$$-\frac{d}{dr}\left(p(r)\frac{dz}{dr}\right) + q(r)z = Ew(r)z,\ r_{\min} < r < r_{\max}$$

Sturm-Liouville denklemi x değişkeninde Schrödinger formunda olur. Yani

$$y'' = (V(x) - E)y,\ 0 = x_{\min} < x < x_{\max}$$

şeklini alır. Burada $V(x)$ potansiyel fonksiyonu

$$V(x) = \frac{q}{w} + m\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{m}\right)$$

şeklindedir. x ile r nin yukarda ilişkilendirildiği gibi orjinal $z(r)$ ve yeni $y(x)$ de aşağıdaki gibi ilişkilendirilir:

$$z(r) = m(r)y(x),\ \frac{dz}{dr} = m'(r)y(x) + y'(x)\big/\big(m(r)p(r)\big)$$

Kısaca orjinal düzenli Sturm-Liouville problemi Schrödinger sınır değer problemine denktir.

BÖLÜM 3

STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN SONLU SPEKTRUMU VE MATRİS GÖSTERİMLERİ

3.1. Sonlu Spektrumlu Sturm-Liouville Problemleri

Bu bölümde, herhangi bir negatif olmayan n tamsayısı için n tane özdeğere sahip kendine eş veya kendine eş olmayan Sturm-Liouville problemi inşaa edeceğiz. Atkinson'un giriş bölümünde bahsedilen sonucu bakımından bu inşaa, kendine eş durum için $1/p$ ve w nun herhangi bir ortak alt aralıkta pozitif olmamasına dayanır. Bu yüzden p ve w yu birbirini takip eden alt aralıklar üzerinde $1/p$ ve w sırasıyla sıfır olacak şekilde seçeceğiz.

(2.2.3) sınır şartıyla verilmiş (2.2.1) Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım. Bu problemin katsayılarının (2.2.2) şartını sağladığını kabul edelim.

Yardımcı Teorem 3.1.1. (2.2.2) sağlansın. $\Phi(a,\lambda) = I$ başlangıç şartıyla verilen $\Phi(t,\lambda) = \left[\phi_{ij}(t,\lambda)\right]$, (2.2.8) sisteminin temel matris çözümü olsun. Buna göre bir λ kompleks sayısının (2.2.1), (2.2.3) Sturm-Liouville probleminin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul

$$\Delta(\lambda) = \det\left[A + B\Phi(b,\lambda)\right] = 0$$

olmasıdır. Eğer

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} & a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11} \\ a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22} & a_{11}b_{22} - a_{21}b_{12} \end{bmatrix} \qquad (3.1.1)$$

denirse bu durumda her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\Delta(\lambda) = \det(A) + \det(B) + h_{11}\phi_{11}(b,\lambda) + h_{12}\phi_{12}(b,\lambda) + h_{21}\phi_{21}(b,\lambda) + h_{22}\phi_{22}(b,\lambda) \tag{3.1.2}$$

şeklinde yazılabilir.

İspat: Teoremin birinci kısmının ispatı, Yardımcı Teorem 2.1.2 nin ispatında verilmişti. Diğer taraftan $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in M_2(\mathbb{C})$ olmak üzere

$$\det(A+B) = \det(A) + \det(B) + P(A,B)$$

şeklinde yazılabileceğini biliyoruz. Burada $P(A,B)$, A ve B matrislerinin farklı satır ve sütunlarına ait elemanların olası çarpımlarının toplamını gösterir. Buna göre

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= \det\left[A + B\Phi(b,\lambda)\right] \\ &= \det(A) + \det(B\Phi(b,\lambda)) + P(A, B\Phi(b,\lambda))\end{aligned}$$

yazılabilir. $\Phi(a,\lambda) = I$ olduğundan $\det(\Phi(b,\lambda)) = 1$ olup $P(A, B\Phi(b,\lambda))$, aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$P(A, B\Phi(b,\lambda)) = h_{11}\phi_{11}(b,\lambda) + h_{12}\phi_{12}(b,\lambda) + h_{21}\phi_{21}(b,\lambda) + h_{22}\phi_{22}(b,\lambda).$$

Burada $h_{11},\ h_{12},\ h_{21}$ ve h_{22}; A ve B matrislerine bağlı sabitlerdir. Dolayısıyla $\Delta(\lambda)$, (3.1.2) formunda karşımıza çıkar.

Tanım 3.1.1. Eğer (3.1.2) eşitliğinde her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\Delta(\lambda) \equiv 0$ veya herhangi bir $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\Delta(\lambda) \neq 0$ oluyorsa (2.2.1), (2.2.3) veya buna denk olarak (2.2.8), (2.2.3) Sturm-Liouville probleminin dejenere olduğu (özdeğerinin olmadığı) söylenir.

Atkinson [2] de, $p > 0,\ w > 0$ pozitiflik şartlarını aşağıdaki şartlarla değiştirerek kendine eş Sturm-Liouville problemi teorisini genişletmiştir. Bu şartlar şu şekildedir:

$$1/p,\ q,\ w \in L(J,\mathbb{R}); \tag{3.1.3}$$

$$J \text{ de } 1/p \geq 0,\ w \geq 0;\ (c,d) \subset J \text{ de } w = 0 \text{ ise } q = 0 \text{ dır;} \tag{3.1.4}$$

$$\int_a^b 1/p > 0; \text{ herhangi bir } t \in J \text{ için } \int_a^t w > 0,\ \int_t^b w > 0\,. \tag{3.1.5}$$

w üzerindeki integral şartları, uç noktalarda spektral parametrenin sınır koşulları üzerine bir etkisi olduğunu garanti eder. Atkinson [2] de kendine eş sınır şartlarıyla birlikte bu şartların, özdeğerlerin sayısının sonsuz olmasını garanti etmek için yeterli olmadığını ileri sürmüştür. Ancak ne bir örnek ne de bir teoremle bu durumun üzerinde durmamıştır. Daha sonra ilave bir şart verme yoluna gitmiştir. Bu şart aşağıda verilmiştir:

J deki noktaların $\{c_i :\ i \in \mathbb{N} = \{0,1,\ldots\}\}$ şeklinde sonsuz bir dizisi vardır öyle ki

$$\int_{c_{2i}}^{c_{2i+1}} w > 0,\ \int_{c_{2i+1}}^{c_{2i+2}} 1/p > 0,\ i \in \mathbb{N}. \tag{3.1.6}$$

Burada p ve w nun ortak bir alt aralıkta pozitif olması durumunda (3.1.6) nın sağlanacağını belirtelim.

Atkinson, düzenli kendine eş ayrık sınır şartlarının kanonik gösterimini aşağıdaki şekilde ele almıştır:

$$\begin{aligned} &\cos\alpha y(a) - \sin\alpha\,(py')(a) = 0,\ 0 \leq \alpha < \pi \\ &\cos\beta y(b) - \sin\beta\,(py')(b) = 0,\ 0 < \beta \leq \pi \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Teorem 3.1.1. (2.2.2) ve (3.1.3)-(3.1.5) sağlansın. Bu durumda (2.2.1), (3.1.7) Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri reel, basit ve alttan sınırlıdır. Ayrıca aşağıdaki gibi sonlu ya da sonsuz bir dizi formunda sıralanabilir:

$$-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$$

Eğer y_j, λ_j özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon ise bu durumda y_j, J açık aralığında j tane sıfıra sahiptir.

Teorem 3.1.2. (2.2.2), (3.1.3)-(3.1.6) sağlansın. Bu durumda (2.2.1), (3.1.7) Sturm-Liouville problemi sonsuz fakat sayılabilir sayıda özdeğere sahiptir. Bu özdeğerler reel, basit ve alttan sınırlı olup aşağıdaki gibi sıralanabilir:

$$-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

Teorem 3.1.2, baş katsayı p ve ağırlık fonksiyonu w nun negatif olmadığı durum için sonsuz sayıda özdeğerin varlığını veren en genel sonuçtur.

Bu bölümde (2.2.2) nin sağlandığını ve $n = 2m + 1$ tek sayısı için

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b \tag{3.1.8}$$

olduğunu kabul edelim. Ayrıca

$$\left(a_{2i}, a_{2i+1}\right) \text{ de } r = 0,\ w_{2i} = \int_{a_{2i}}^{a_{2i+1}} w \neq 0,\ i \in \mathbb{N}_0,\ 2i + 1 \leq n \tag{3.1.9}$$

ve

$$\left(a_{2i+1}, a_{2i+2}\right) \text{ de } w = q = 0,\ r_{2i+1} = \int_{a_{2i+1}}^{a_{2i+2}} r \neq 0,\ i \in \mathbb{N}_0,\ 2i + 2 \leq n \tag{3.1.10}$$

şartlarının sağlandığını kabul edelim.

Öncelikle (2.2.8) sisteminin temel matris çözümünün yapısı hakkında bilgi vereceğiz.

Yardımcı Teorem 3.1.2. (2.2.2), (3.1.9) ve (3.1.10) sağlansın. Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\Phi\left(a, \lambda\right) = I$ başlangıç şartıyla verilen $\Phi\left(t, \lambda\right) = \left[\phi_{ij}\left(t, \lambda\right)\right]$, (2.2.8) sisteminin temel matris çözümü olsun. Buna göre

$$\phi_{21}\left(a_3, \lambda\right) = \left(q_0 - \lambda w_0\right) + \left(q_2 - \lambda w_2\right) + \left(q_0 - \lambda w_0\right)\left(q_2 - \lambda w_2\right) r_1$$

olmak üzere

$$\Phi\left(a_1,\lambda\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_0-\lambda w_0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.1.11}$$

$$\Phi\left(a_3,\lambda\right)=\begin{bmatrix} 1+\left(q_0-\lambda w_0\right)r_1 & r_1 \\ \phi_{21}\left(a_3,\lambda\right) & 1+\left(q_2-\lambda w_2\right)r_1 \end{bmatrix} \tag{3.1.12}$$

şeklindedir. Bunu genelleyecek olursak $i\le m$ için

$$\Phi\left(a_{2i+1},\lambda\right)=\begin{bmatrix} 1 & r_{2i-1} \\ q_{2i}-\lambda w_{2i} & 1+\left(q_{2i}-\lambda w_{2i}\right)r_{2i-1} \end{bmatrix}\Phi\left(a_{2i-1},\lambda\right) \tag{3.1.13}$$

şeklinde yazılabilir.

İspat: (2.2.8) sisteminden r nin özdeş sıfır olduğu her bir alt aralıkta y nin sabit, q ve w nun özdeş sıfır olduğu her bir alt aralıkta da z nin sabit olduğu görülebilir.

$R=\prod_{i=0}^{m-1} r_{2i+1}$ diyelim ve $b=a_{2m+1}$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda Yardımcı Teorem 3.1.2 de verilen Φ nin yapısı ve tümevarımdan aşağıdaki sonucu elde ederiz:

Sonuç 3.1.1. Belirlenmiş q, w ve λ için $\min\left\{r_{2i+1}\ :\ i=0,\ldots,m-1\right\}\to\infty$ iken $\tilde{\phi}_{ij}=o\left(R\right)$ ($i,\ j=1,2$) olmak üzere Φ temel matrisi için aşağıdakileri yazabiliriz:

$$\phi_{11}\left(b,\lambda\right)=R\prod_{i=0}^{m-1}\left(q_{2i}-\lambda w_{2i}\right)+\tilde{\phi}_{11}\left(\lambda\right), \tag{3.1.14}$$

$$\phi_{12}\left(b,\lambda\right)=R\prod_{i=1}^{m-1}\left(q_{2i}-\lambda w_{2i}\right)+\tilde{\phi}_{12}\left(\lambda\right), \tag{3.1.15}$$

$$\phi_{21}\left(b,\lambda\right)=R\prod_{i=0}^{m}\left(q_{2i}-\lambda w_{2i}\right)+\tilde{\phi}_{21}\left(\lambda\right), \tag{3.1.16}$$

$$\phi_{22}\left(b,\lambda\right)=R\prod_{i=1}^{m}\left(q_{2i}-\lambda w_{2i}\right)+\tilde{\phi}_{22}\left(\lambda\right). \tag{3.1.17}$$

Şimdi her bir $m \in \mathbb{N}$ için tam olarak m tane özdeğere sahip kendine eş veya kendine eş olmayan sınır koşullarıyla verilmiş düzenli Sturm-Liouville problemleri oluşturacağız.

Teorem 3.1.3. $m \in \mathbb{N}$ için $n = 2m+1$ olmak üzere (2.2.2), (3.1.3)-(3.1.5), (3.1.9) ve (3.1.10) sağlansın. Ayrıca $H = \left(h_{ij}\right)_{2\times 2}$, (3.1.1) deki gibi tanımlansın. Buna göre

1. Eğer $h_{21} \neq 0$ ise, bu durumda (2.2.1), (2.2.3) Sturm-Liouville problemi $j = 0,1,\ldots,m$ olmak üzere $m+1$ tane λ_j özdeğerine sahiptir.
2. Eğer $h_{21} = 0$ ve $h_{11}w_0 + h_{22}w_{2m} \neq 0$ ise, bu durumda (2.2.1), (2.2.3) Sturm-Liouville problemi $j = 0,1,\ldots,m-1$ olmak üzere m tane λ_j özdeğerine sahiptir.
3. Eğer $h_{21} = h_{11} = h_{22} = 0$ fakat $h_{12} \neq 0$ ise, bu durumda (2.2.1), (2.2.3) Sturm-Liouville problemi $j = 0,1,\ldots,m-2$ olmak üzere $m-1$ tane λ_j özdeğerine sahiptir.
4. Eğer yukardaki şartların hiç biri sağlanmazsa, bu durumda (2.2.1), (2.2.3) Sturm-Liouville problemi ya $l \in \left\{1,\ldots,m-1\right\}$ için l tane özdeğere sahiptir ya da özdeğeri yoktur.

İspat: (3.1.9), (3.1.10) şartlarına bakarak $\phi_{11}\left(b,\lambda\right)$, $\phi_{12}\left(b,\lambda\right)$, $\phi_{21}\left(b,\lambda\right)$ ve $\phi_{22}\left(b,\lambda\right)$ nın derecelerinin sırasıyla $m,\ m-1,\ m+1$ ve m olduğunu söyleyebiliriz. Buna göre Yardımcı Teorem 3.1.1 ve Sonuç 3.1.1 den istenilen elde edilir.

Teorem 3.1.3 ün özel durumları olarak aşağıdaki sınır koşullarıyla verilen Sturm-Liouville problemlerini ele alabiliriz:

1) Ayrık Sınır Koşulu:

$$\begin{aligned} A_1 y\left(a\right) + A_2\left(py'\right)\left(a\right) = 0,\ A_1,\ A_2 \in \mathbb{C},\ \left(A_1, A_2\right) \neq \left(0,0\right) \\ B_1 y\left(b\right) + B_2\left(py'\right)\left(b\right) = 0,\ B_1,\ B_2 \in \mathbb{C},\ \left(B_1, B_2\right) \neq \left(0,0\right) \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

2) Ayrık Olmayan Sınır Koşulu:

$$Y(b) = A\,Y(a), \quad Y = \begin{bmatrix} y \\ py' \end{bmatrix}, \quad A \in M_2(\mathbb{C}) \tag{3.1.19}$$

Aşağıda Teorem 3.1.3 ün sonucu verilmiştir.

Sonuç 3.1.2. Teorem 3.1.3 deki kabuller sağlansın.

1. (3.1.18) ayrık sınır koşuluyla verilmiş (2.2.1) problemi; $A_2B_2 \neq 0$ iken $m+1$ tane, $A_2B_2 = 0$ ve $(A_2, B_2) \neq (0,0)$ iken m tane, $A_2 = B_2 = 0$ iken $m-1$ tane özdeğere sahiptir.

2. (3.1.19) ayrık olmayan sınır koşuluyla verilmiş (2.2.1) problemi; $a_{12} \neq 0$ iken $m+1$ tane, $a_{12} = 0$ ve $a_{22}w_0 + a_{11}w_{2m} \neq 0$ iken m tane, $a_{12} = a_{22} = a_{11} = 0$ ve $a_{21} \neq 0$ iken $m-1$ tane özdeğere sahiptir.

İspat: (3.1.18) ayrık sınır koşulları için

$$H = \begin{bmatrix} -A_2B_1 & A_1B_1 \\ -A_2B_2 & A_1B_2 \end{bmatrix}$$

ve (3.1.19) ayrık olmayan sınır koşulları için

$$H = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

olduğunu görmek kolaydır. Bu yüzden Teorem 3.1.3 den sonuç görülür.

Teorem 3.1.3 den, her bir pozitif m tamsayısı için tam olarak m tane özdeğere sahip Sturm-Liouville problemi bulunabilir. Aşağıda vereceğimiz teorem bu m tane özdeğerin kendine eş olmayan durum için kompleks düzlemin herhangi bir yerine, kendine eş durum için de reel eksen boyunca yerleştirilebileceğini gösterir.

Teorem 3.1.4. $\mathbb{C}$ de k tane ayrık açık N_i kümesi ve k tane n_i tam sayısı verilsin. Bu durumda $i = 1, 2, \ldots, k$ için N_i kümesinde n_i tane özdeğere sahip bir Sturm-

Liouville problemi vardır. $\mathbb{R}$ de k tane ayrık açık J_i aralığı ve k tane n_i tam sayısı verilsin. Bu durumda $i = 1, 2, \ldots, k$ için J_i aralığında n_i tane özdeğere sahip kendine eş bir Sturm-Liouville problemi vardır.

İspat: Teoremde verilen ilk durumu ispatlayacağız. İkinci durum da benzer yolla ispatlanabilir. $m = \sum_{i=1}^{k} n_i$ ve $n = 2m+1$ olsun. (2.2.1) ve (3.1.18) formunda bir Sturm-Liouville problemini; (3.1.8), (2.2.2), (3.1.9), (3.1.10) ve $A_1 = B_2 = 0$, $A_2 = B_1 = 1$ kabulleriyle birlikte ele alalım. Buna göre Sonuç 3.2.1 den; belirlenmiş q, w ve λ için $\min\{r_0, \ldots, r_{2m-1}\} \to \infty$ iken $\tilde{\phi}_{11} = o(R)$ olmak üzere (3.1.2) ile tanımlanan karakteristik fonksiyon

$$\Delta(\lambda) = \phi_{11}(b, \lambda) = R \prod_{i=0}^{m-1} (q_{2i} - \lambda w_{2i}) + \tilde{\phi}_{11}(\lambda)$$

şeklini alır. q ve w keyfi seçilebileceğinden dolayı onları, $\tilde{\Delta}(\lambda) = \prod_{i=0}^{m-1} (q_{2i} - \lambda w_{2i})$ fonksiyonu $i = 1, \ldots, k$ için N_i de n_i tane köke sahip ve bu köklerin hiç biri N_i nin sınırında olmayacak şekilde, seçebiliriz. $i = 0, \ldots, m-1$ için r_{2i+1} i o kadar büyük seçelim ki

$$\left|\tilde{\phi}_{11}(\lambda)\right| < R \prod_{i=0}^{m-1} \left|q_{2i} - \lambda w_{2i}\right|$$

sağlansın. Bu durumda Rouche teoremi gereğince $\Delta(\lambda)$ nın $i = 1, \ldots, k$ için N_i de n_i tane kökü olduğunu söyleyebiliriz.

3.2. Sonlu Spektrumlu Sturm-Liouville Problemlerinin Matris Gösterimleri

Bu bölümde Atkinson tipindeki düzenli kendine eş Sturm-Liouville problemleri ile

$$DX = \lambda WX \tag{3.2.1}$$

formundaki matris özdeğer problemleri arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz. Burada D ve W matrisleri $\mathbb{R}$ de $n \times n$ tipinde olup W köşegenseldir.

$-\infty < a < b < \infty$ olmak üzere $J = (a,b)$ aralığında verilmiş (2.2.1) Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım. Bu probleminin katsayılarının aşağıdaki şartı sağladığını kabul edelim:

$$r = \frac{1}{p},\ q,\ w \in L(J,\mathbb{R}). \tag{3.2.2}$$

$L(J,\mathbb{R})$, J aralığında reel değerli Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların uzayını gösterir.

(2.2.1) probleminin sınır koşulları (2.2.3) ile tanımlansın. Eğer aşağıdaki şart sağlanıyorsa bu (2.2.3) sınır koşuluna kendine eş denir:

$$rank(A,B) = 2,\ AEA^* = BEB^*,\ E = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.2.3}$$

[17] den bilindiği üzere (3.2.3) şartı altında (2.2.3) sınır koşulları ayrık ve ayrık olmayan sınır koşulları olarak iki sınıfa ayrılır. Ayrık sınır koşullarının kanonik gösterimi (3.1.7) ile verilmiştir. Reel ayrık olmayan sınır koşullarının kanonik gösterimi ise aşağıdaki şekildedir:

$$Y(b) = KY(a),\ K = (k_{ij}),\ k_{ij} \in \mathbb{R},\ 1 \le i,j \le 2,\ \det(K) = 1. \tag{3.2.4}$$

$u = y$ ve $v = py'$ dersek J aralığında (2.2.1) denkleminin sistem gösteriminin

$$u' = rv,\ v' = (q - \lambda w)u \tag{3.2.5}$$

olduğunu biliyoruz.

Şimdi; Atkinson tipindeki Sturm-Liouville denklem sınıfının herhangi bir üyesi kendine eş ayrık ya da ayrık olmayan sınır koşulları ile verildiğinde, özdeğerleri bu (2.2.1), (2.2.3) Sturm-Liouville problemi ile aynı olan (3.2.1) formunda bir matris özdeğer probleminin var olduğunu göstereceğiz.

Tanım 3.2.1. $n > 1$ tamsayısı için J aralığının bir parçalanışı

$$a = a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < \ldots < a_n < b_n = b \tag{3.2.6}$$

olmak üzere eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (2.2.1) Sturm-Liouville problemine Atkinson tipinde denir:

1. $k = 0,\ldots,n$ için $\left[a_k, b_k\right]$ aralığında $r = 0$; fakat $k = 0,\ldots,n$ için $\int\limits_{a_k}^{b_k} w dt \neq 0$,

$$\int\limits_{a_k}^{b_k} q dt \neq 0, \tag{3.2.7}$$

2. $k = 1,\ldots,n$ için $\left[b_{k-1}, a_k\right]$ aralığında $q = w = 0$; fakat $k = 1,\ldots,n$ için

$$\int\limits_{b_{k-1}}^{a_k} r dt \neq 0. \tag{3.2.8}$$

Tanım 3.2.2. Eğer Atkinson tipindeki bir Sturm-Liouville problemi ile bir matris özdeğer problemi aynı özdeğerlere sahipse bu iki probleme denktir denir.

Bu bölümle alakalı teoremlerimizi vermeden önce ilave bazı gösterimler vereceğiz. (3.2.6)-(3.2.8) verilsin. Buna göre aşağıdakileri tanımlayalım:

$$\begin{aligned} p_k &= \left(\int\limits_{b_{k-1}}^{a_k} r dt \right)^{-1}, \quad k = 1,\ldots,n; \\ q_k &= \int\limits_{a_k}^{b_k} q dt, \quad w_k = \int\limits_{a_k}^{b_k} w dt, \quad k = 0,\ldots,n. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

(3.2.7) ve (3.2.8) den; (3.2.5) in herhangi u ve v çözümleri için $k = 0,\ldots,n$ iken $\left[a_k, b_k\right]$ aralığında u nun sabit, $k = 1,\ldots,n$ için $\left[b_{k-1}, a_k\right]$ aralığında da v nin sabit olduğunu söyleyebiliriz. Buna göre

$$\begin{aligned} u_k &= u(t), \quad t \in \left[a_k, b_k\right], \quad k = 0,\ldots,n; \\ v_k &= v(t), \quad t \in \left[b_{k-1}, a_k\right], \quad k = 1,\ldots,n \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

ve

$$v_0 = v(a_0) = v(a), \; v_{n+1} = v(b_n) = v(b) \tag{3.2.11}$$

olarak tanımlayalım.

Yardımcı Teorem 3.2.1. (2.2.1) denkleminin Atkinson tipinde olduğunu kabul edelim. Buna göre (3.2.5) sisteminin herhangi $u,\; v$ çözümleri için

$$p_k(u_k - u_{k-1}) = v_k, \; k = 1,\ldots,n \tag{3.2.12}$$

ve

$$v_{k+1} - v_k = u_k(q_k - \lambda w_k), \; k = 0,\ldots,n \tag{3.2.13}$$

yazılabilir. Tersine (3.2.12), (3.2.13) sisteminin $k = 0,\ldots,n$ iken u_k ve $k = 0,\ldots,n+1$ iken v_k çözümleri için (3.2.5) sisteminin (3.2.10) ve (3.2.11) i sağlayan tek bir $u(t)$ ve $v(t)$ çözümü vardır.

İspat: $k = 1,\ldots,n$ için (3.2.5) sisteminin ilk denkleminden

$$u_k - u_{k-1} = u(a_k) - u(a_{k-1}) = \int_{a_{k-1}}^{a_k} u' = \int_{a_{k-1}}^{a_k} rv = v_k \int_{b_{k-1}}^{a_k} r = \frac{v_k}{p_k}$$

yazılabilir. Bu da bize (3.2.12) yi verir. Benzer yolla (3.2.5) sisteminin ikinci denkleminden

$$v_{k+1} - v_k = v(a_{k+1}) - v(a_k) = \int_{a_k}^{a_{k+1}} (q - \lambda w)u = u_k \int_{a_k}^{b_k} (q - \lambda w) = u_k(q_k - \lambda w_k)$$

yazılabilir. Bu da bize (3.2.13) eşitliğini verir. Diğer taraftan u_k ve v_k (3.2.12) ve (3.2.13) ü sağlasın. Buna göre (3.2.5) sistemindeki denklemleri alt aralıklar üzerine integralleyerek, (3.2.10) ve (3.2.11) den tanımladığımız $u(t)$ ve $v(t)$ yi (3.2.5) in çözümü olacak şekilde tüm J aralığına sürekli olarak genişletebiliriz.

Teorem 3.2.1. $\alpha \in [0,\pi)$ ve $\beta \in (0,\pi]$ olsun. $(n+1)\times(n+1)$ tipinde üç köşegensel

$$P_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} p_1 \sin\alpha + \cos\alpha & -p_1 \sin\alpha & & & \\ -p_1 & p_1 + p_2 & -p_2 & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & -p_{n-1} & p_{n-1} + p_n & -p_n \\ & & & -p_n \sin\beta & p_n \sin\beta - \cos\beta \end{bmatrix}$$

matrisini ve köşegensel

$$Q_{\alpha\beta} = diag\left(q_0 \sin\alpha, q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n \sin\beta\right)$$

$$W_{\alpha\beta} = diag\left(w_0 \sin\alpha, w_1, \ldots, w_{n-1}, w_n \sin\beta\right)$$

matrislerini tanımlayalım. Buna göre (2.2.1), (3.1.7) Sturm-Liouville problemi aşağıdaki matris özdeğer problemine denktir:

$$\left(P_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta}\right)U = \lambda W_{\alpha\beta} U. \tag{3.2.14}$$

Burada

$$U = \left[u_0, u_1, \ldots, u_n\right]^T$$

şeklindedir. Dahası, tüm özdeğerler geometrik olarak basit olup (2.2.1), (3.1.7) Sturm-Liouville probleminin $u(t)$ özfonksiyonu ve buna karşılık gelen (3.2.14) matris özdeğer probleminin U özvektörü $k = 0,\ldots,n$ için $t \in [a_k, b_k]$ olmak üzere aynı $u(t) = u_k$ özdeğeri ile ilişkilidirler.

İspat: (3.2.12), (3.2.13) sisteminin çözümleri ile aşağıda verilen sistemin çözümleri arasında bire-bir örtüşme vardır:

$$p_1\left(u_1 - u_0\right) - v_0 = u_0\left(q_0 - \lambda w_0\right), \tag{3.2.15}$$

$$p_{k+1}\left(u_{k+1}-u_k\right)-p_k\left(u_k-u_{k-1}\right)=u_k\left(q_k-\lambda w_k\right),\ k=1,\ldots,n-1, \quad (3.2.16)$$

$$v_{n+1}-p_n\left(u_n-u_{n-1}\right)=u_n\left(q_n-\lambda w_n\right). \quad (3.2.17)$$

$k=0,\ldots,n$ için u_k ve $k=0,\ldots,n+1$ için v_k (3.2.12), (3.2.13) sisteminin birer çözümleri olsun. Buna göre (3.2.15)-(3.2.17) sistemi (3.2.12), (3.2.13) sisteminden elde edilir. Diğer taraftan $k=0,\ldots,n$ için u_k nın (3.2.15)-(3.2.17) sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Buna göre v_0 ve v_{n+1} sırasıyla (3.2.15) ve (3.2.17) ile belirlenir. $k=1,\ldots,n$ için v_k, (3.2.12) ile tanımlansın. Bu durumda (3.2.15)-(3.2.17) sistemini kullanarak (3.2.13) ü elde ederiz.

Bu yüzden Yardımcı Teorem 3.2.1 e göre (3.2.5) sisteminin ve dolayısıyla (3.1.7) nin herhangi bir çözümü (3.2.15)-(3.2.17) sisteminin bir çözümü tarafından tek türlü belirlenir. (3.1.7) sınır şartını

$$u_0\cos\alpha=v_0\sin\alpha,\ u_n\cos\beta=v_{n+1}\sin\beta \quad (3.2.18)$$

şeklinde yazabiliriz. Buna göre teoremde söz edilen denklik (3.2.15)-(3.2.18) ifadelerinden görülür.

Sonuç 3.2.1. $\alpha,\ \beta\in\left(0,\pi\right)$ olsun. $\left(n+1\right)\times\left(n+1\right)$ tipinde simetrik üç köşegensel

$$P_{\alpha\beta}=\begin{bmatrix} p_1\cot\alpha & -p_1 & & & \\ -p_1 & p_1+p_2 & -p_2 & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & -p_{n-1} & p_{n-1}+p_n & -p_n \\ & & & -p_n & p_n-\cot\beta \end{bmatrix}$$

matrisini ve köşegensel

$$Q_{\alpha\beta}=diag\left(q_0,q_1,\ldots,q_{n-1},q_n\right)$$

$$W_{\alpha\beta}=diag\left(w_0,w_1,\ldots,w_{n-1},w_n\right)$$

matrislerini tanımlayalım. Buna göre (2.2.1), (3.1.7) Sturm-Liouville problemi aşağıdaki matris özdeğer problemine denktir:

$$\left(P_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta}\right)U = \lambda W_{\alpha\beta}U. \tag{3.2.19}$$

Burada

$$U = \left[u_0, u_1, \ldots, u_n\right]^T$$

şeklindedir.

İspat: (3.2.19) eşitliğini elde edebilmek için (3.2.14) sisteminin ilk ve son satırlarını sırasıyla $\sin\alpha$ ve $\sin\beta$ ya böleriz.

Sonuç 3.2.2. $\alpha = 0$ ve $\beta = \left(0, \pi\right)$ olsun. $n \times n$ tipinde simetrik üç köşegensel

$$P_{0\beta} = \begin{bmatrix} p_1 + p_2 & -p_2 & & & \\ -p_2 & p_2 + p_3 & -p_3 & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & -p_{n-1} & p_{n-1} + p_n & -p_n \\ & & & -p_n & p_n - \cot\beta \end{bmatrix}$$

matrisini ve köşegensel

$$Q_{0\beta} = diag\left(q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n\right)$$

$$W_{0\beta} = diag\left(w_1, \ldots, w_{n-1}, w_n\right)$$

matrislerini tanımlayalım. Buna göre (2.2.1), (3.1.7) Sturm-Liouville problemi aşağıdaki matris özdeğer problemine denktir:

$$\left(P_{0\beta} + Q_{0\beta}\right)U = \lambda W_{0\beta}U. \tag{3.2.20}$$

Burada

$$U = \left[u_0, u_1, \ldots, u_n\right]^T$$

şeklindedir. Dahası, (2.2.1), (3.1.7) Sturm-Liouville probleminin $u(t)$ özfonksiyonu ve (3.2.20) matris özdeğer probleminin U özvektörü, $t \in [a_0, b_0]$ için $u(t) = 0$, $k = 0, \ldots, n$ ve $t \in [a_k, b_k]$ için $u(t) = u_k$ şartını sağlayan aynı özdeğerle ilişkilidir.

İspat: Burada $\sin\alpha = 0$ ve $u_0 = 0$ olduğundan (3.2.14) sistemindeki $P_{\alpha\beta}$, $Q_{\alpha\beta}$ ve $W_{\alpha\beta}$ matrislerinin birinci satır ve birinci sütunlarını çıkarabiliriz. Daha sonra sistemin son satırını $\sin\beta$ ya bölerek (3.2.20) yi elde ederiz.

Sonuç 3.2.3. $\alpha \in (0, \pi)$ ve $\beta = \pi$ olsun. $n \times n$ tipinde simetrik üç köşegensel

$$P_{\alpha\pi} = \begin{bmatrix} p_1 + \cot\alpha & -p_1 & & & \\ -p_1 & p_1 + p_2 & -p_2 & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & -p_{n-2} & p_{n-2} + p_{n-1} & -p_{n-1} \\ & & & -p_{n-1} & p_{n-1} + p_n \end{bmatrix}$$

matrisini ve köşegensel

$$Q_{\alpha\pi} = diag(q_0, q_1, \ldots, q_{n-1})$$

$$W_{\alpha\pi} = diag(w_0, w_1, \ldots, w_{n-1})$$

matrislerini tanımlayalım. Buna göre (2.2.1), (3.1.7) Sturm-Liouville problemi aşağıdaki matris özdeğer problemine denktir:

$$(P_{\alpha\pi} + Q_{\alpha\pi})U = \lambda W_{\alpha\pi} U. \qquad (3.2.21)$$

Burada

$$U = [u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}]^T$$

şeklindedir. Dahası, (2.2.1), (3.1.7) Sturm-Liouville probleminin $u(t)$ özfonksiyonu ve (3.2.21) matris özdeğer probleminin U özvektörü, $t \in [a_n, b_n]$ için $u(t) = 0$, $k = 0, \ldots, n-1$ ve $t \in [a_k, b_k]$ için $u(t) = u_k$ şartını sağlayan aynı özdeğerle ilişkilidir.

İspat: Burada $\sin\beta = 0$ ve $u_n = 0$ olduğundan (3.2.14) sistemindeki $P_{\alpha\beta}$, $Q_{\alpha\beta}$ ve $W_{\alpha\beta}$ matrislerinin sonuncu satır ve sonuncu sütunlarını çıkarabiliriz. Daha sonra sistemin ilk satırını $\sin\alpha$ ya bölerek (3.2.21) ü elde ederiz.

Sonuç 3.2.4. $\alpha = 0$ ve $\beta = \pi$ olsun. $(n-1)\times(n-1)$ tipinde simetrik üç köşegensel

$$P_{0\pi} = \begin{bmatrix} p_1 + p_2 & -p_2 & & & \\ -p_2 & p_2 + p_3 & -p_3 & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & -p_{n-2} & p_{n-2} + p_{n-1} & -p_{n-1} \\ & & & -p_{n-1} & p_{n-1} + p_n \end{bmatrix}$$

matrisini ve köşegensel

$$Q_{0\pi} = diag(q_1, q_2, \ldots, q_{n-1})$$

$$W_{0\pi} = diag(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1})$$

matrislerini tanımlayalım. Buna göre (2.2.1), (3.1.7) Sturm-Liouville problemi aşağıdaki matris özdeğer problemine denktir:

$$(P_{0\pi} + Q_{0\pi})U = \lambda W_{0\pi} U \qquad (3.2.22)$$

Burada

$$U = [u_1, \ldots, u_{n-1}]^T$$

şeklindedir. Dahası (2.2.1), (3.1.7) Sturm-Liouville probleminin $u(t)$ özfonksiyonu ve (3.2.22) matris özdeğer probleminin U özvektörü, $t \in [a_0, b_0] \cup [a_n, b_n]$ için $u(t) = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$ ve $t \in [a_k, b_k]$ için $u(t) = u_k$ şartını sağlayan aynı özdeğerle ilişkilidir.

İspat: Burada $\sin\alpha = \sin\beta = 0$ ve $u_0 = u_n = 0$ olduğundan (3.2.14) sistemindeki $P_{\alpha\beta}$, $Q_{\alpha\beta}$ ve $W_{\alpha\beta}$ matrislerinin birinci ve sonuncu satır ve sütunlarını çıkardığımızda (3.2.22) sistemini elde ederiz.

Teorem 3.2.1 ve onun sonuçlarına bakarak, kendine eş ayrık sınır koşullarıyla verilmiş Atkinson tipindeki tüm Sturm-Liouville problemlerinin üç köşegensel matris özdeğer problemleriyle ifade edilebileceğini söyleyebiliriz. Şimdi ise kendine eş reel ayrık olmayan sınır koşullarıyla verilmiş Atkinson tipindeki tüm Sturm-Liouville problemlerinin de matris özdeğer problemleriyle ifade edilebileceğini göstereceğiz. Bu durum için P matrisi hem simetriktir hem de en üst sağ ve en alt sol köşelerindeki bileşenleri haricinde üç köşegenseldir.

Teorem 3.2.2. $k_{12} = 0$ olmak üzere (3.2.4) sınır şartını ele alalım. $(1,n)$ ve $(n,1)$ bileşenleri haricinde üç köşegensel olan $n \times n$ tipinde simetrik

$$P_0 = \begin{bmatrix} -k_{11}k_{21} + p_1 + k_{11}^2 p_n & -p_1 & & & -k_{11}p_n \\ -p_1 & p_1 + p_2 & -p_2 & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & -p_{n-2} & p_{n-2} + p_{n-1} & -p_{n-1} \\ -k_{11}p_n & & & -p_{n-1} & p_{n-1} + p_n \end{bmatrix}$$

matrisini ve köşegensel

$$Q_0 = diag\left(q_0 + k_{11}^2 q_n, q_1, \ldots, q_{n-1}\right)$$

$$W_0 = diag\left(w_0 + k_{11}^2 w_n, w_1, \ldots, w_{n-1}\right)$$

matrislerini tanımlayalım. Buna göre (2.2.1), (3.2.4) Sturm-Liouville problemi aşağıdaki matris özdeğer problemine denktir:

$$\left(P_0 + Q_0\right)U = \lambda W_0 U. \qquad (3.2.23)$$

Burada

$$U = \left[u_0, \dots, u_{n-1}\right]^T$$

şeklindedir. Dahası, (2.2.1), (3.2.4) Sturm-Liouville probleminin $u(t)$ özfonksiyonu ve (3.2.23) matris özdeğer probleminin U özvektörü, $k = 0, \dots, n-1$ ve $t \in [a_k, b_k]$ için $u(t) = u_k$, $t \in [a_n, b_n]$ için $u(t) = k_{11}u_0$ şartını sağlayan aynı özdeğerle ilişkilidir.

İspat: $k_{12} = 0$ olduğundan $k_{11}k_{22} = 1$ olup (3.2.4) sınır koşulu

$$u_n = k_{11}u_0, \; v_{n+1} = k_{21}u_0 + k_{22}v_0 \qquad (3.2.24)$$

şeklinde yazılabilir. (3.2.12), (3.2.13) eşitlikleri ve (3.2.24) sınır koşulundan oluşan sistemin çözümleri ile aşağıda verilen sistemin çözümleri arasında bire-bir örtüşme vardır:

$$\begin{aligned}&\left[-k_{11}k_{21} + \left(p_1 + q_0 - \lambda w_0\right) + k_{11}{}^2\left(p_n + q_n - \lambda w_n\right)\right]u_0 \\ &= p_1 u_1 + k_{11}p_n u_{n-1}\end{aligned} \qquad (3.2.25)$$

$$p_{k+1}\left(u_{k+1} - u_k\right) - p_k\left(u_k - u_{k-1}\right) = u_k\left(q_k - \lambda w_k\right), \; k = 1, \dots, n-1. \qquad (3.2.26)$$

$k = 0, \dots, n$ için u_k ve $k = 0, \dots, n+1$ için v_k nın (3.2.12), (3.2.13), (3.2.24) sisteminin çözümü olduğunu kabul edelim. Buna göre (3.2.12), (3.2.13) den (3.2.26) kolayca elde edilir. (3.2.12) de $k = 1$ ve (3.2.13) de $k = 0$ alırsak

$$v_0 = p_1\left(u_1 - u_0\right) - u_0\left(q_0 - \lambda w_0\right) \qquad (3.2.27)$$

elde ederiz. (3.2.12) ve (3.2.13) de $k = n$ alırsak

$$v_{n+1} = p_n\left(u_n - u_{n-1}\right) + u_n\left(q_n - \lambda w_n\right) \tag{3.2.28}$$

elde ederiz. (3.2.24), (3.2.27) ve (3.2.28) i birleştirirsek

$$\begin{aligned} &p_n\left(k_{11}u_0 - u_{n-1}\right) + k_{11}u_0\left(q_n - \lambda w_n\right) \\ &= k_{21}u_0 + k_{22}\left[p_1\left(u_1 - u_0\right) - u_0\left(q_0 - \lambda w_0\right)\right] \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

elde ederiz. (3.2.29) eşitliğinin her iki yanını k_{11} ile çarparsak (3.2.25) i elde ederiz. Diğer taraftan $k = 0,\ldots,n$ için u_k nın (3.2.25), (3.2.26) sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda u_n, v_0 ve v_{n+1} sırasıyla (3.2.24), (3.2.27) ve (3.2.28) ile belirlenir. $k = 1,\ldots,n$ için v_k, (3.2.12) ile tanımlansın. (3.2.27) eşitliğini ve (3.2.28) üzerine tümevarımı kullanırsak (3.2.13) elde edilir. (3.2.27)-(3.2.29) dan $v_{n+1} = k_{21}u_0 + k_{22}v_0$ olduğunu söyleyebiliriz. O halde (3.2.24) sınır koşulu sağlanır. Buna göre Yardımcı Teorem 3.2.1 e bakarak; (3.2.5), (3.2.4) ve dolayısıyla (2.2.1), (3.2.4) Sturm-Liouville probleminin herhangi bir çözümünün (3.2.25), (3.2.26) sisteminin bir çözümü tarafından tek türlü belirleneceğini söyleyebiliriz.

Uyarı 3.2.1. Teorem 3.2.2 de ele alınan $k_{12} = 0$ özel durumu aşağıda verilen genelleştirilmiş periyodik tipten sınır koşullarını içerir:

$$k_{12} = k_{21} = 0,\; k_{11} = c \text{ ve } c \neq 0 \text{ için } k_{22} = \frac{1}{c}$$

Bu şart $c = 1$ iken periyodik, $c = -1$ iken yarı-periyodik olarak adlandırılır.

Teorem 3.2.3. $k_{12} \neq 0$ olmak üzere (3.2.4) sınır şartını ele alalım. $\left(1, n+1\right)$ ve $\left(n+1, 1\right)$ bileşenleri haricinde üç köşegensel olan $\left(n+1\right)\times\left(n+1\right)$ tipinde simetrik

$$P_1 = \begin{bmatrix} p_1 - k_{11}/k_{12} & -p_1 & & & 1/k_{12} \\ -p_1 & p_1 + p_2 & -p_2 & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & -p_{n-1} & p_{n-1} + p_n & -p_n \\ 1/k_{12} & & & -p_n & p_n - k_{22}/k_{12} \end{bmatrix}$$

matrisini ve köşegensel

$$Q_1 = diag\left(q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n\right)$$

$$W_1 = diag\left(w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}, w_n\right)$$

matrislerini tanımlayalım. Buna göre (2.2.1), (3.2.4) Sturm-Liouville problemi aşağıdaki matris özdeğer problemine denktir:

$$\left(P_1 + Q_1\right)U = \lambda W_1 U. \tag{3.2.30}$$

Burada

$$U = \left[u_0, \ldots, u_{n-1}\right]^T$$

şeklindedir. Dahası, (2.2.1), (3.2.4) Sturm-Liouville probleminin $u\left(t\right)$ özfonksiyonu ve (3.2.30) matris özdeğer probleminin U özvektörü, $k = 0, \ldots, n$ ve $t \in \left[a_k, b_k\right]$ için $u\left(t\right) = u_k$ şartını sağlayan aynı özdeğerle ilişkilidir.

İspat: (3.2.4) sınır koşulu

$$u_n = k_{11}u_0 + k_{12}v_0, \;\; v_{n+1} = k_{21}u_0 + k_{22}v_0$$

olarak yazılabilir. $k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} = 1$ olduğundan bu ifade aşağıdaki şekilde düzenlenebilir:

$$v_0 = -\frac{k_{11}}{k_{12}}u_0 + \frac{1}{k_{12}}u_n, \;\; v_{n+1} = -\frac{1}{k_{12}}u_0 + \frac{k_{22}}{k_{12}}u_n \tag{3.2.31}$$

(3.2.12), (3.2.13) eşitlikleri ve (3.2.31) sınır koşulundan oluşan sistemin çözümleri ile aşağıda verilen sistemin çözümleri arasında bire-bir örtüşme vardır:

$$\left(p_1 - \frac{k_{11}}{k_{22}} + q_0 - \lambda w_0\right)u_0 - p_1 u_1 + \frac{1}{k_{12}} u_n = 0 \tag{3.2.32}$$

$$p_{k+1}\left(u_{k+1} - u_k\right) - p_k\left(u_k - u_{k-1}\right) = u_k\left(q_k - \lambda w_k\right),\ k = 1,\ldots,n-1 \tag{3.2.33}$$

$$\frac{1}{k_{12}} u_0 - p_n u_{n-1} + \left(p_n - \frac{k_{22}}{k_{12}} + q_n - \lambda w_n\right)u_n = 0 \tag{3.2.34}$$

$k = 0,\ldots,n$ için u_k ve $k = 1,\ldots,n$ için v_k nın (3.2.12), (3.2.13), (3.2.31) sisteminin çözümü olduğunu kabul edelim. Buna göre (3.2.12), (3.2.13) den (3.2.33) kolayca elde edilir. Teorem 3.2.2 nin ispatında olduğu gibi v_0 ve v_{n+1} sırasıyla (3.2.27) ve (3.2.28) i sağlar. Buna göre (3.2.32) ve (3.2.34) eşitlikleri (3.2.27), (3.2.28) ve (3.2.31) eşitliklerinden elde edilir. Diğer taraftan, $k = 0,\ldots,n$ için u_k nın (3.2.32)-(3.2.34) sisteminin bir çözümü olsun. Buna göre v_0 ve v_{n+1} sırasıyla (3.2.27) ve (3.2.28) ile belirlenir. $k = 1,\ldots,n$ için v_k, (3.2.12) ile tanımlansın. (3.2.27), (3.2.28) eşitliklerini ve (3.2.33) üzerine tümevarımı kullanırsak (3.2.13) ü elde ederiz. Ayrıca (3.2.27), (3.2.28), (3.2.32) ve (3.2.34) eşitliklerini kullanarak (3.2.31) sınır şartının sağlandığını söyleyebiliriz. Buna göre Yardımcı Teorem 3.2.1 e bakarak; (3.2.5), (3.2.4) ve dolayısıyla (2.2.1), (3.2.4) Sturm-Liouville probleminin herhangi bir çözümünün (3.2.32)-(3.2.34) sisteminin bir çözümü tarafından tek türlü belirleneceğini söyleyebiliriz.

BÖLÜM 4

$\delta -$ ETKİLEŞİMLİ STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN SONLU SPEKTRUMU

4.1. $\delta -$ Etkileşimli Sturm-Liouville Problemi

$\delta -$ etkileşimli Sturm-Liouville problemi J aralığında aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$-\left(py'\right)' + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \delta\left(x - x_j\right) y + qy = \lambda wy. \tag{4.1.1}$$

Burada

$$J = \left(a, x_1\right) \cup \left(x_1, x_2\right) \cup \ldots \cup \left(x_n, b\right), \quad -\infty < a < b < \infty$$

ve ayrıca $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \left(a, b\right)$, α_j ler reel sayı, $\delta\left(x\right)$ Dirac Delta fonksiyonu ve λ spektral parametredir. (4.1.1) denklemi bir boyutlu zamandan bağımsız Schrödinger denkleminden elde edilir. Bir veya daha fazla boyuttaki nokta etkileşimli Schrödinger operatörleri, birçok durumda çözülebilir modeller olarak kullanılabildiğinden, kuantum ve atom fiziğinin uygulamalarında geniş şekilde yer almaktadır [23-26].

(4.1.1) denklemi J aralığında aşağıda verilen sınır değer problemine denktir. Dolayısıyla (4.1.1) denklemiyle çalışmak demek aslında

$$-\left(py'\right)' + qy = \lambda wy \tag{4.1.2}$$

ve n tane geçiş şartı

$$C_j Y\left(x_j -\right) - Y\left(x_j +\right) = 0, \; j = 1, 2, \ldots, n \tag{4.1.3}$$

şeklinde tanımlanan denklemle çalışmış olmak demektir. (4.1.3) denkleminde x_j ler iç süreksizlik noktalarıdır ve

$$C_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_j & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu denklemin sınır koşullarını ise

$$AY(a) + BY(b) = 0,\ \ Y = \begin{bmatrix} y \\ py' \end{bmatrix},\ A,\ B \in M_2(\mathbb{C}) \tag{4.1.4}$$

olarak tanımlayalım. (4.1.4) denkleminde $A = (a_{ij})_{2\times 2}$, $B = (b_{ij})_{2\times 2}$; 2×2 tipinde kompleks değerli matrislerdir ve $M_2(\mathbb{C})$, $\mathbb{C}$ de kare matrislerin kümesidir. (4.1.2) denklemindeki katsayılar (2.2.2) minimal şartını sağlar. (2.2.2) şartı başlangıç değer probleminin çözümünün tekliği için gerekli ve yeterli şarttır. $u = y,\ v = py'$ denirse (4.1.2) denkleminin J aralığında sistem gösteriminin aşağıdaki gibi olduğunu biliyoruz:

$$u' = rv,\ \ v' = (q - \lambda w)u. \tag{4.1.5}$$

4.2. $\delta-$ Etkileşimli Sturm-Liouville Problemlerinin Sonlu Spektrumu

Bu bölüm boyunca (2.2.2) şartının sağlandığını kabul edelim. $j = 0,1,\ldots,n$ için m_j ler tamsayı olmak üzere J aralığını

$$\begin{array}{ccccc} a & = & x_{00} < x_{01} < x_{02} < \ldots < x_{0,2m_0+1} & = & x_1, \\ x_1 & = & x_{10} < x_{11} < x_{12} < \ldots < x_{1,2m_1+1} & = & x_2, \\ & \vdots & & & \\ x_{n-1} & = & x_{n-1,0} < x_{n-1,1} < x_{n-1,2} < \ldots < x_{\mathrm{n}-1,2m_{n-1}+1} & = & x_n, \\ x_n & = & x_{n0} < x_{n1} < x_{n2} < \ldots < x_{\mathrm{n},2m_n+1} & = & b \end{array} \tag{4.2.1}$$

şeklinde parçalayalım. Her bir $j \in \{0,1,\ldots,n\}$ için; $(x_{j,2k}; x_{j,2k+1})$ aralığında

$$r = 1/p = 0, \quad \int_{x_{j,2k}}^{x_{j,2k+1}} w dx \neq 0, \quad \int_{x_{j,2k}}^{x_{j,2k+1}} q dx \neq 0, \quad k = 0,1,\dots,m_j \tag{4.2.2}$$

ve $\left(x_{j,2k+1}; x_{j,2k+2}\right)$ aralığında

$$q = w = 0, \quad \int_{x_{j,2k+1}}^{x_{j,2k+2}} r dx \neq 0, \quad k = 0,1,\dots,m_j - 1 \tag{4.2.3}$$

olduğunu kabul edelim. Buna göre her bir $j \in \{0,1,\dots,n\}$ için (4.2.1)-(4.2.3) ifadelerinden yola çıkarak aşağıdakileri kabul edelim:

$$\begin{aligned} r_{jk} &= \int_{x_{j,2k+1}}^{x_{j,2k+2}} r dx, \quad k = 0,1,\dots,m_j - 1, \\ q_{jk} &= \int_{x_{j,2k}}^{x_{j,2k+1}} q dx, \quad w_{jk} = \int_{x_{j,2k}}^{x_{j,2k+1}} w dx, \quad k = 0,1,\dots,m_j. \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Şimdi (4.1.5) sisteminin temel matris çözümünün yapısını verelim.

Yardımcı Teorem 4.2.1. (2.2.2) ve (4.2.1)-(4.2.3) sağlansın. Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\Phi(x,\lambda) = \left[\phi_{st}(x,\lambda)\right]$, (4.1.5) sisteminin $\Phi(x_{00},\lambda) = I$ (burada $\Phi(x_{00},\lambda) = \Phi(x_{00}+,\lambda)$, x_{00} noktasına sağdan yaklaşmak anlamındadır), başlangıç şartıyla verilen temel matris çözümü olsun. Bu durumda

$$\Phi(x_{01},\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_{00} - \lambda w_{00} & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.2.5}$$

$$\Phi(x_{03},\lambda) = \begin{bmatrix} 1 + (q_{00} - \lambda w_{00}) r_{00} & r_{00} \\ \phi_{21}(x_{03},\lambda) & 1 + (q_{01} - \lambda w_{01}) r_{00} \end{bmatrix} \tag{4.2.6}$$

yazılabilir. Burada

$$\phi_{21}(x_{03},\lambda) = (q_{00} - \lambda w_{00}) + (q_{01} - \lambda w_{01}) + (q_{00} - \lambda w_{00})(q_{01} - \lambda w_{01}) r_{00}$$

şeklindedir. Buna göre genel durumda $k = 1,2,\ldots,m_0$ için

$$\Phi\left(x_{0,2k+1},\lambda\right) = \begin{bmatrix} 1 & r_{0,k-1} \\ q_{0k} - \lambda w_{0k} & 1 + \left(q_{0k} - \lambda w_{0k}\right) r_{0,k-1} \end{bmatrix} \Phi\left(x_{0,2k-1},\lambda\right) \qquad (4.2.7)$$

şeklinde yazılabilir.

İspat: (4.1.5) sisteminden; r nin özdeş sıfır olduğu tüm alt aralıklarda u nun sabit, q ve w nun özdeş sıfır olduğu tüm alt aralıklarda da v nin sabit olduğu söylenebilir. Buna göre (4.1.5) in tekrarlı uygulamalarından sonuç görülebilir.

Yardımcı Teorem 4.2.2. (2.2.2) ve (4.2.1)-(4.2.3) sağlansın. Her $\lambda \in \mathbb{C}$ ve her bir $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ için $\Psi_j\left(x,\lambda\right) = \left[\psi_{st}^j\left(x,\lambda\right)\right]$, (4.1.5) sisteminin $\Psi_j\left(x_j,\lambda\right) = I$ (burada $\Psi_j\left(x_j,\lambda\right) = \Psi_j\left(x_j+,\lambda\right)$, x_j noktasına sağdan yaklaşmak anlamındadır), başlangıç şartıyla verilen temel matris çözümü olsun. Bu durumda her bir $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ için

$$\Psi_j\left(x_{j1},\lambda\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_{j0} - \lambda w_{j0} & 1 \end{bmatrix}, \qquad (4.2.8)$$

$$\Psi_j\left(x_{j3},\lambda\right) = \begin{bmatrix} 1 + \left(q_{j0} - \lambda w_{j0}\right) r_{j0} & r_{j0} \\ \psi_{21}^j\left(x_{j3},\lambda\right) & 1 + \left(q_{j1} - \lambda w_{j1}\right) r_{j0} \end{bmatrix} \qquad (4.2.9)$$

yazılabilir. Burada

$$\psi_{21}^j\left(x_{j3},\lambda\right) = \left(q_{j0} - \lambda w_{j0}\right) + \left(q_{j1} - \lambda w_{j1}\right) + \left(q_{j0} - \lambda w_{j0}\right)\left(q_{j1} - \lambda w_{j1}\right) r_{j0}$$

şeklindedir. Buna göre genel durumda $k = 1,2,\ldots,m_j$ için

$$\Psi_j\left(x_{j,2k+1},\lambda\right) = \begin{bmatrix} 1 & r_{j,k-1} \\ q_{jk} - \lambda w_{jk} & 1 + \left(q_{jk} - \lambda w_{jk}\right) r_{j,k-1} \end{bmatrix} \Psi_j\left(x_{j,2k-1},\lambda\right) \quad (4.2.10)$$

şeklinde yazılır.

İspat: Yardımcı Teorem 4.2.1 in ispatına benzer olarak istenen sonuç elde edilebilir.

Yardımcı Teorem 4.2.3. (2.2.2) ve (4.2.1)-(4.2.3) sağlansın. Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için (4.1.5) sisteminin, $\Phi\left(x_{00},\lambda\right)=I$ başlangıç şartıyla verilen $\Phi\left(x,\lambda\right)=\left[\phi_{st}\left(x,\lambda\right)\right]$ ve her bir $j \in \left\{1,2,\ldots,n\right\}$ için $\Psi_j\left(x_j,\lambda\right)=I$ başlangıç şartıyla verilen $\Psi_j\left(x,\lambda\right)=\left[\psi_{st}^j\left(x,\lambda\right)\right]$ temel matris çözümlerini ele alalım. Bu durumda

$$\Phi\left(b,\lambda\right)=\prod_{j=0}^{n}\Psi_{n-j}\left(x_{n-j+1},\lambda\right)C_{n-j} \tag{4.2.11}$$

yazılabilir. Burada kolaylık olması açısından $\Phi\left(x,\lambda\right)=\Psi_0\left(x,\lambda\right)$ ve $C_0=I$ diyeceğiz ve $j=0,1,\ldots,n$ için $\Psi_j\left(x_{j+1},\lambda\right)=\Psi_j\left(x_{j+1}-,\lambda\right)$, x_{j+1} noktasına soldan yaklaşmak anlamındadır.

İspat: $j=1$ için (4.1.3) geçiş şartından

$$\Phi\left(x_1+,\lambda\right)=C_1\Psi_0\left(x_1-,\lambda\right)$$

yazılır. Temel matris çözümünün tanımından $\Phi\left(x_1+,\lambda\right)=\left(\Psi_1\left(x_2,\lambda\right)\right)^{-1}\Phi\left(x_2-,\lambda\right)$ olmak üzere

$$\Phi\left(x_2-,\lambda\right)=\Psi_1\left(x_2,\lambda\right)C_1\Psi_0\left(x_1,\lambda\right) \tag{4.2.12}$$

elde edilir. Benzer olarak $j=2$ için (4.1.3) geçiş şartından

$$\Phi\left(x_2+,\lambda\right)=C_2\Phi\left(x_2-,\lambda\right)$$

yazılır ve yine temel matris çözümünün tanımına göre $\Phi\left(x_2+,\lambda\right)=\left(\Psi_2\left(x_3,\lambda\right)\right)^{-1}\Phi\left(x_3-,\lambda\right)$ olmak üzere (4.2.12) eşitliğini de dikkate alırsak

$$\Phi\left(x_3-,\lambda\right)=\Psi_2\left(x_3,\lambda\right)C_2\Psi_1\left(x_2,\lambda\right)C_1\Psi_0\left(x_1,\lambda\right)$$

eşitliği elde edilir. Bu sürecin tekrarlanmasıyla istenilen sonuç bulunacaktır.

Yardımcı Teorem 4.2.1 de verilen Φ nin yapısı ve tümevarımdan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.2.1. Φ temel matrisi için aşağıdakiler yazılabilir:

$$\phi_{11}(b,\lambda) = R_{11}\lambda^{d} + \tilde{\phi}_{11}(\lambda), \tag{4.2.13}$$

$$\phi_{12}(b,\lambda) = R_{12}\lambda^{d-1} + \tilde{\phi}_{12}(\lambda), \tag{4.2.14}$$

$$\phi_{21}(b,\lambda) = R_{21}\lambda^{d+1} + \tilde{\phi}_{21}(\lambda), \tag{4.2.15}$$

$$\phi_{22}(b,\lambda) = R_{22}\lambda^{d} + \tilde{\phi}_{22}(\lambda). \tag{4.2.16}$$

Burada

$$d = \sum_{j=0}^{n} m_j \tag{4.2.17}$$

ve her bir $j \in \{0,1,\dots,n\}$ için $R_{11},\ R_{12},\ R_{21}$ ve $R_{22};\ r_{jk},\ k = 0,1,\dots,m_j - 1,\ w_{jk}$ ve $q_{jk},\ k = 0,1,\dots,m_j,\ \alpha_j$ ve a ve b uç noktalarına bağlı birer terimdir. Ayrıca $\tilde{\phi}_{11}(\lambda),\ \tilde{\phi}_{12}(\lambda),\ \tilde{\phi}_{21}(\lambda)$ ve $\tilde{\phi}_{22}(\lambda);\ \lambda$ nın birer fonksiyonu olup bu fonksiyonlarda λ nın derecesi sırasıyla $d,\ d-1,\ d+1$ ve d den küçüktür.

Şimdi her bir $d \in \mathbb{N}$ için d tane özdeğere sahip olan düzenli $\delta-$ etkileşimli Sturm-Liouville problemlerini inşaa edelim.

Teorem 4.2.1. Her bir $j \in \{0,1,\dots,n\}$ için $m_j \in \mathbb{N}$ ve (2.2.2) ve (4.2.1)-(4.2.3) sağlansın. Ayrıca $H = (h_{ij})_{2\times 2}$ matrisi (3.1.1) ve d sayısı (4.2.17) ile tanımlansın. Buna göre

1. Eğer $h_{21} \neq 0$ ise (4.1.1) $\delta-$ etkileşimli Sturm-Liouville problemi $k = 0,1,\dots,d$ için $d+1$ tane λ_k özdeğerine sahiptir.

2. Eğer $h_{21} = 0,\ h_{11} \neq 0$ ve/veya $h_{22} \neq 0$ ise (4.1.1) $\delta -$ etkileşimli Sturm-Liouville problemi $k = 0,1,\ldots,d-1$ için d tane λ_k özdeğerine sahiptir.
3. Eğer $h_{21} = h_{11} = h_{22} = 0$ fakat $h_{12} \neq 0$ ise (4.1.1) $\delta -$ etkileşimli Sturm-Liouville problemi $k = 0,1,\ldots,d-2$ için $d-1$ tane λ_k özdeğerine sahiptir.
4. Eğer yukardaki şartların hiç biri sağlanmazsa, bu durumda (4.1.1) $\delta -$ etkileşimli Sturm-Liouville problemi ya $l \in \{1,2,\ldots,d-2\}$ için l tane özdeğere sahiptir ya da özdeğeri yoktur.

İspat: Yalnızca ilk durumun ispatını vereceğiz. Diğer durumların ispatı ise benzer şekilde yapılabilir. Yarımcı Teorem 3.1.1 den

$$\Delta(\lambda) = \det(A) + \det(B) + h_{11}\phi_{11}(b,\lambda) + h_{12}\phi_{12}(b,\lambda) + h_{21}\phi_{21}(b,\lambda) + h_{22}\phi_{22}(b,\lambda)$$

olduğunu biliyoruz. (4.2.2) ve (4.2.3) şartlarını göz önünde bulundurarak buradaki $\phi_{11}(b,\lambda),\ \phi_{12}(b,\lambda),\ \phi_{21}(b,\lambda)$ ve $\phi_{22}(b,\lambda)$ terimlerinin λ ya göre derecelerinin sırasıyla $d,\ d-1,\ d+1$ ve d olduğunu söyleyebiliriz. O halde, $h_{21} \neq 0$ olduğunda Sonuç 4.2.1 den $\Delta(\lambda)$ karakteristik polinomunun derecesinin $d+1$ olduğu sonucuna varırız. Bu yüzden Cebirin Esas Teoremi'nden $\Delta(\lambda)$ nın $d+1$ tane kökünün olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla ilk durum ispatlanmış olur.

Örnek 4.2.1. $J = (-6,-3) \cup (-3,2) \cup (2,5)$ aralığı üzerinde aşağıdaki gibi verilmiş $\delta -$ etkileşimli Sturm-Liouville problemini ele alalım:

$$-(py')' + \big(2\delta(x+3) + \delta(x-2)\big)y + qy = \lambda wy. \tag{4.2.18}$$

Bu problemin aşağıdaki geçiş şartlarıyla verilmiş Sturm-Liouville problemine denk olduğunu biliyoruz:

$$-(py')' + qy = \lambda wy, \tag{4.2.19}$$

$$\begin{cases} y(-3-) - y(-3+) = 0, \\ 2y(-3-) + py'(-3-) - py'(-3+) = 0, \end{cases} \tag{4.2.20}$$

$$\begin{cases} y(2-) - y(2+) = 0, \\ y(2-) + py'(2-) - py'(2+) = 0. \end{cases} \tag{4.2.21}$$

Diğer taraftan aşağıdaki sınır şartını ele alalım:

$$\begin{cases} y(-6) = 0, \\ y(5) = 0. \end{cases} \tag{4.2.22}$$

Buna göre (4.2.22) şartından

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.2.23}$$

ve (4.2.20), (4.2.21) geçiş şartlarından

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \; C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.2.24}$$

olduğu görülür. Ayrıca J aralığının bir parçalanışını

$$\begin{array}{ccccccc} a & = & -6 < -5 < -4 < -3 & = & x_1 & & \\ x_1 & = & -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 & = & x_2 & & \\ x_2 & = & 2 < 3 < 4 < 5 & = & x_3 & = & b \end{array}$$

olarak ele alırsak $m_0 = 1,\ m_1 = 2$ ve $m_2 = 1$ olup $p,\ q$ ve w parçalı sürekli fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$p(x)=\begin{cases}\infty, & (-6,-5)\\ \frac{1}{2}, & (-5,-4)\\ \infty, & (-4,-3)\\ \infty, & (-3,-2)\\ \frac{1}{4}, & (-2,-1)\\ \infty, & (-1,0)\\ 1, & (0,1)\\ \infty, & (1,2)\\ \infty, & (2,3)\\ \frac{1}{3}, & (3,4)\\ \infty, & (4,5)\end{cases},\quad q(x)=\begin{cases}4, & (-6,-5)\\ 0, & (-5,-4)\\ 1, & (-4,-3)\\ \frac{1}{2}, & (-3,-2)\\ 0, & (-2,-1)\\ 2, & (-1,0)\\ 0, & (0,1)\\ 1, & (1,2)\\ \frac{1}{4}, & (2,3)\\ 0, & (3,4)\\ 3, & (4,5)\end{cases},\quad w(x)=\begin{cases}1, & (-6,-5)\\ 0, & (-5,-4)\\ 2, & (-4,-3)\\ 1, & (-3,-2)\\ 0, & (-2,-1)\\ 3, & (-1,0)\\ 0, & (0,1)\\ \frac{1}{2}, & (1,2)\\ \frac{1}{8}, & (2,3)\\ 0, & (3,4)\\ 1, & (4,5)\end{cases}$$

Şimdi (4.2.11) ifadesini göz önüne alalım:

$$\begin{aligned}\Phi(5,\lambda)&=\begin{bmatrix}\phi_{11}(5,\lambda) & \phi_{12}(5,\lambda)\\ \phi_{21}(5,\lambda) & \phi_{22}(5,\lambda)\end{bmatrix}\\ &=\prod_{j=0}^{2}\Psi_{2-j}\left(x_{2-j+1},\lambda\right)C_{2-j}\\ &=\Psi_2(x_3,\lambda)C_2\Psi_1(x_2,\lambda)C_1\Psi_0(x_1,\lambda)\\ &=\Psi_2(5,\lambda)C_2\Psi_1(2,\lambda)C_1\Psi_0(-3,\lambda)\end{aligned}$$

olmak üzere, burada (4.2.24) ifadesini ve

$$\Psi_2(5,\lambda)=\begin{bmatrix}\psi_{11}^2(5,\lambda) & \psi_{12}^2(5,\lambda)\\ \psi_{21}^2(5,\lambda) & \psi_{22}^2(5,\lambda)\end{bmatrix},$$

$$\Psi_1(2,\lambda)=\begin{bmatrix}\psi_{11}^1(2,\lambda) & \psi_{12}^1(2,\lambda)\\ \psi_{21}^1(2,\lambda) & \psi_{22}^1(2,\lambda)\end{bmatrix},$$

$$\Psi_0(-3,\lambda)=\begin{bmatrix}\psi_{11}^0(-3,\lambda) & \psi_{12}^0(-3,\lambda)\\ \psi_{21}^0(-3,\lambda) & \psi_{22}^0(-3,\lambda)\end{bmatrix}$$

değerlerini yerine yazıp gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$\phi_{12}\left(5,\lambda\right)=\left\{\left[\psi_{11}^{2}\left(5,\lambda\right)+\psi_{12}^{2}\left(5,\lambda\right)\right]\psi_{11}^{1}\left(2,\lambda\right)+\psi_{12}^{2}\left(5,\lambda\right)\psi_{21}^{1}\left(2,\lambda\right)\right.$$
$$\left.+2\left[\psi_{11}^{2}\left(5,\lambda\right)+\psi_{12}^{2}\left(5,\lambda\right)\right]\psi_{12}^{1}\left(2,\lambda\right)+2\psi_{12}^{2}\left(5,\lambda\right)\psi_{22}^{1}\left(2,\lambda\right)\right\}\psi_{12}^{0}\left(-3,\lambda\right)$$
$$+\left\{\left[\psi_{11}^{2}\left(5,\lambda\right)+\psi_{12}^{2}\left(5,\lambda\right)\right]\psi_{12}^{1}\left(2,\lambda\right)+\psi_{12}^{2}\left(5,\lambda\right)\psi_{22}^{1}\left(2,\lambda\right)\right\}\psi_{22}^{0}\left(-3,\lambda\right)$$

olarak bulunur. Yardımcı Teorem 4.2.1 ve Yardımcı Teorem 4.2.2 den

$$\psi_{11}^{2}\left(5,\lambda\right)=1+\left(q_{20}-\lambda w_{20}\right)r_{20},$$

$$\psi_{12}^{2}\left(5,\lambda\right)=r_{20},$$

$$\psi_{11}^{1}\left(2,\lambda\right)=1+\left(q_{10}-\lambda w_{10}\right)r_{10}+r_{11}\psi_{21}^{1}\left(0,\lambda\right),$$

$$\psi_{12}^{1}\left(2,\lambda\right)=r_{10}+r_{11}+\left(q_{11}-\lambda w_{11}\right)r_{10}r_{11},$$

$$\psi_{21}^{1}\left(2,\lambda\right)=\left(q_{12}-\lambda w_{12}\right)\left[1+\left(q_{10}-\lambda w_{10}\right)r_{10}\right]+\left[1+\left(q_{12}-\lambda w_{12}\right)r_{11}\right]\psi_{21}^{1}\left(0,\lambda\right),$$

$$\psi_{22}^{1}\left(2,\lambda\right)=\left(q_{12}-\lambda w_{12}\right)r_{10}+\left[1+\left(q_{12}-\lambda w_{12}\right)r_{11}\right]\left[1+\left(q_{11}-\lambda w_{11}\right)r_{10}\right],$$

$$\psi_{12}^{0}\left(-3,\lambda\right)=r_{00},$$

$$\psi_{22}^{0}\left(-3,\lambda\right)=1+\left(q_{01}-\lambda w_{01}\right)r_{00}$$

yazılır ve burada

$$\psi_{21}^{1}\left(0,\lambda\right)=\left(q_{10}-\lambda w_{10}\right)+\left(q_{11}-\lambda w_{11}\right)+\left(q_{10}-\lambda w_{10}\right)\left(q_{11}-\lambda w_{11}\right)r_{10}$$

olmak üzere (4.2.4) ifadesini dikkate alarak

$$q_{20}=\int_{2}^{3}q\,dx=\frac{1}{4},\ w_{20}=\int_{2}^{3}w\,dx=\frac{1}{8},\ r_{20}=\int_{3}^{4}r\,dx=3,$$

$$q_{10}=\int_{-3}^{-2}q\,dx=\frac{1}{2},\ w_{10}=\int_{-3}^{-2}w\,dx=1,\ r_{10}=\int_{-2}^{-1}r\,dx=4,$$

$$q_{11} = \int_{-1}^{0} q dx = 2, \ w_{11} = \int_{-1}^{0} w dx = 3, \ r_{11} = \int_{0}^{1} r dx = 1,$$

$$q_{12} = \int_{1}^{2} q dx = 1, \ w_{12} = \int_{1}^{2} w dx = \frac{1}{2},$$

$$q_{01} = \int_{-4}^{-3} q dx = 1, \ w_{01} = \int_{-4}^{-3} w dx = 2, \ r_{00} = \int_{-5}^{-4} r dx = 2$$

elde edilir. O halde çeşitli düzenlemelerin ardından

$$\psi_{11}^{2}\left(5,\lambda\right) = \frac{7}{4} - \frac{3}{8}\lambda,$$

$$\psi_{12}^{2}\left(5,\lambda\right) = 3,$$

$$\psi_{11}^{1}\left(2,\lambda\right) = 12\lambda^{2} - 22\lambda + \frac{19}{2},$$

$$\psi_{12}^{1}\left(2,\lambda\right) = 13 - 12\lambda,$$

$$\psi_{21}^{1}\left(2,\lambda\right) = -6\lambda^{3} + 35\lambda^{2} - \frac{179}{4}\lambda + 16,$$

$$\psi_{22}^{1}\left(2,\lambda\right) = 6\lambda^{2} - \frac{61}{2}\lambda + 22,$$

$$\psi_{12}^{0}\left(-3,\lambda\right) = 2,$$

$$\psi_{22}^{0}\left(-3,\lambda\right) = 3 - 4\lambda$$

olarak bulunacaktır. Bu son bulduğumuz değerleri $\phi_{12}\left(5,\lambda\right)$ ifadesinde kullanırsak

$$\phi_{12}\left(5,\lambda\right) = -135\lambda^{3} + \frac{2223}{2}\lambda^{2} - \frac{8277}{4}\lambda + \frac{2161}{2}$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.2.23) deki matrislerin (3.1.2) de kullanılmasıyla karakteristik denklemin

$$\Delta(\lambda) = \phi_{12}(5,\lambda) = -135\lambda^3 + \frac{2223}{2}\lambda^2 - \frac{8277}{4}\lambda + \frac{2161}{2} = 0$$

biçiminde olduğu görülür. Bu $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun kökleri ise

$$\lambda_1 = 0.95658, \qquad \lambda_2 = 1.43138, \qquad \lambda_3 = 5.84537$$

olarak bulunur. Bu kökler (4.2.18) denkleminin özdeğerleridir. Sonuç olarak; (4.2.18) $\delta -$ etkileşimli Sturm-Liouville probleminin $m_0 + m_1 + m_2 - 1 = d - 1 = 3$ tane özdeğere sahip olduğu görülmüş olur.

Örnek 4.2.2. $J = (-3,0) \cup (0,4) \cup (4,9) \cup (9,12)$ aralığı üzerinde aşağıdaki gibi verilen $\delta -$ etkileşimli Sturm-Liouville problemini ele alalım:

$$-(py')' + \left(\delta(x-0) + \delta(x-4) + \delta(x-9)\right)y + qy = \lambda wy. \qquad (4.2.25)$$

Bu problemin aşağıdaki geçiş şartlarıyla verilmiş Sturm-Liouville problemine denk olduğunu biliyoruz:

$$-(py')' + qy = \lambda wy, \qquad (4.2.26)$$

$$\begin{cases} y(0-) - y(0+) = 0, \\ y(0-) + py'(0-) - py'(0+) = 0, \end{cases} \qquad (4.2.27)$$

$$\begin{cases} y(4-) - y(4+) = 0, \\ y(4-) + py'(4-) - py'(4+) = 0, \end{cases} \qquad (4.2.28)$$

$$\begin{cases} y(9-) - y(9+) = 0, \\ y(9-) + py'(9-) - py'(9+) = 0. \end{cases} \qquad (4.2.29)$$

Diğer taraftan aşağıdaki sınır şartını ele alalım:

$$\begin{cases} py'(-3) + py'(12) = 0, \\ py'(-3) = 0. \end{cases} \tag{4.2.30}$$

Buna göre (4.2.30) şartından

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.2.31}$$

ve ayrıca (4.2.27), (4.2.28) ve (4.2.29) geçiş şartlarından ise

$$C_1 = C_2 = C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.2.32}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan J aralığının bir parçalanışını

$$\begin{array}{ccccccc} a & = & -3 < -2 < -1 < 0 & = & x_1 & & \\ x_1 & = & 0 < 2 < 3 < 4 & = & x_2 & & \\ x_2 & = & 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 & = & x_3 & & \\ x_3 & = & 9 < 10 < 11 < 12 & = & x_4 & = & b \end{array}$$

olarak ele alırsak $m_0 = 1,\ m_1 = 1,\ m_2 = 2,$ ve $m_3 = 1$ olup $p,\ q$ ve w parçalı sürekli fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$p(x)=\begin{cases}\infty, & (-3,-2)\\ 1, & (-2,-1)\\ \infty, & (-1,0)\\ \infty, & (0,2)\\ 2, & (2,3)\\ \infty, & (3,4)\\ \infty, & (4,5)\\ \frac{1}{2}, & (5,6)\\ \infty, & (6,7)\\ 3, & (7,8)\\ \infty, & (8,9)\\ \infty, & (9,10)\\ \frac{1}{3}, & (10,11)\\ \infty, & (11,12)\end{cases},\quad q(x)=\begin{cases}1, & (-3,-2)\\ 0, & (-2,-1)\\ 2, & (-1,0)\\ \frac{1}{4}, & (0,2)\\ 0, & (2,3)\\ 4, & (3,4)\\ 1, & (4,5)\\ 0, & (5,6)\\ 3, & (6,7)\\ 0, & (7,8)\\ 0, & (8,9)\\ \frac{1}{2}, & (9,10)\\ 0, & (10,11)\\ 1, & (11,12)\end{cases},\quad w(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (-3,-2)\\ 0, & (-2,-1)\\ 1, & (-1,0)\\ \frac{1}{2}, & (0,2)\\ 0, & (2,3)\\ 2, & (3,4)\\ 2, & (4,5)\\ 0, & (5,6)\\ 5, & (6,7)\\ 0, & (7,8)\\ 1, & (8,9)\\ 3, & (9,10)\\ 0, & (10,11)\\ \frac{1}{5}, & (11,12)\end{cases}$$

Şimdi (4.2.11) ifadesini göz önüne alalım:

$$\begin{aligned}\Phi(12,\lambda)&=\prod_{j=0}^{3}\Psi_{3-j}\left(x_{3-j+1},\lambda\right)C_{3-j}\\ &=\Psi_3(x_4,\lambda)C_3\Psi_2(x_3,\lambda)C_2\Psi_1(x_2,\lambda)C_1\Psi_0(x_1,\lambda)C_0\\ &=\Psi_3(12,\lambda)C_3\Psi_2(9,\lambda)C_2\Psi_1(4,\lambda)C_1\Psi_0(0,\lambda)\end{aligned}$$

olmak üzere, burada yapılacak olan gerekli düzenlemelerin ardından

$$\begin{aligned}E=&\Big\{\big(\psi_{21}^3(x_4,\lambda)+\psi_{22}^3(x_4,\lambda)\big)\big(\psi_{11}^2(x_3,\lambda)+\psi_{12}^2(x_3,\lambda)\big)\\ &+\psi_{22}^3(x_4,\lambda)\psi_{21}^2(x_3,\lambda)+\psi_{22}^3(x_4,\lambda)\psi_{22}^2(x_3,\lambda)\Big\}\psi_{11}^1(x_2,\lambda)\\ &+\Big\{\big(\psi_{21}^3(x_4,\lambda)+\psi_{22}^3(x_4,\lambda)\big)\psi_{12}^2(x_3,\lambda)+\psi_{22}^3(x_4,\lambda)\psi_{22}^2(x_3,\lambda)\Big\}\psi_{21}^1(x_2,\lambda)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}F=&\Big\{\big(\psi_{21}^3(x_4,\lambda)+\psi_{22}^3(x_4,\lambda)\big)\big(\psi_{11}^2(x_3,\lambda)+\psi_{12}^2(x_3,\lambda)\big)\\ &+\psi_{22}^3(x_4,\lambda)\psi_{21}^2(x_3,\lambda)+\psi_{22}^3(x_4,\lambda)\psi_{22}^2(x_3,\lambda)\Big\}\psi_{12}^1(x_2,\lambda)\\ &+\Big\{\big(\psi_{21}^3(x_4,\lambda)+\psi_{22}^3(x_4,\lambda)\big)\psi_{12}^2(x_3,\lambda)+\psi_{22}^3(x_4,\lambda)\psi_{22}^2(x_3,\lambda)\Big\}\psi_{22}^1(x_2,\lambda)\end{aligned}$$

dersek

$$\phi_{21}\left(12,\lambda\right)=\left(E+F\right)\psi_{11}^{0}\left(x_1,\lambda\right)+F\psi_{21}^{0}\left(x_1,\lambda\right)$$

olarak bulunur. Örnek 4.2.1 de yapılan işlemlerin benzeri buraya taşınırsa

$$\Psi_3\left(x_4,\lambda\right)=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}-9\lambda & 3\\ \frac{9}{5}\lambda^2-\frac{25}{2}\lambda+3 & 4-\frac{3}{5}\lambda\end{bmatrix},$$

$$\Psi_2\left(x_3,\lambda\right)=\begin{bmatrix}\frac{20}{3}\lambda^2-\frac{41}{3}\lambda+\frac{19}{3} & \frac{13}{3}-\frac{10}{3}\lambda\\ -\frac{20}{3}\lambda^3+\frac{101}{3}\lambda^2-\frac{106}{3}\lambda+10 & \frac{10}{3}\lambda^2-\frac{43}{3}\lambda+7\end{bmatrix},$$

$$\Psi_1\left(x_2,\lambda\right)=\begin{bmatrix}\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\lambda & \frac{1}{2}\\ \lambda^2-\frac{11}{2}\lambda+\frac{11}{2} & 3-\lambda\end{bmatrix},$$

$$\Psi_0\left(x_1,\lambda\right)=\begin{bmatrix}2-\frac{1}{2}\lambda & 1\\ \frac{1}{2}\lambda^2-\frac{7}{2}\lambda+5 & 3-\lambda\end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu değerler $\phi_{21}\left(12,\lambda\right)$ ifadesinde kullanılır ve diğer taraftan (4.2.31) ve (3.1.2) de göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\Delta\left(\lambda\right)&=\phi_{21}\left(12,\lambda\right)\\ &=16\lambda^6-\frac{1484}{5}\lambda^5+\frac{125389}{60}\lambda^4-\frac{340565}{48}\lambda^3+\frac{291595}{24}\lambda^2-\frac{195309}{20}\lambda+\frac{8168}{3}\\ &=0\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu $\Delta\left(\lambda\right)$ karakteristik fonksiyonunun kökleri ise

$$\begin{aligned}&\lambda_1=0.56528, &&\lambda_2=1.66858, &&\lambda_3=1.93014,\\ &\lambda_4=2.93511, &&\lambda_5=4.75851, &&\lambda_6=6.69238\end{aligned}$$

olarak karşımıza çıkar. Bu kökler (4.2.25) denkleminin özdeğerleridir. Sonuç olarak şunu söyleyebiliriz: Verilen $\delta -$ etkileşimli Sturm-Liouville probleminin $m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + 1 = d + 1 = 6$ tane özdeğere sahip olduğu görülmüş olur.

BÖLÜM 5

$\delta-$ ETKİLEŞİMLİ STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN MATRİS GÖSTERİMLERİ

5.1. $\delta-$ Etkileşimli Sturm-Liouville Probleminin Matris Gösterimleri

Bu bölümde, $\delta-$ etkileşimli bir Sturm-Liouville problemi verildiğinde özdeğerleri bu problemle aynı olan bir matris özdeğer probleminin var olduğu gösterilecektir. (4.1.1) problemini ve buna denk olarak (4.1.2)-(4.1.5) problemini ele alalım. A. Zettl, [17] de (2.2.2) şartı altında (4.1.4) sınır koşullarını ayrık ve ayrık olmayan sınır koşulları şeklinde iki gruba ayırmıştır. Ayrık sınır koşullarının kanonik gösterimi (3.1.7), ayrık olmayan sınır koşullarının kanonik gösterimi ise (3.2.4) ile verilmiştir.

Tanım 5.1.1. $j=0,1,\ldots,n$ olmak üzere $m_j \geq 1$ tamsayıları için J aralığının bir parçalanışı (4.2.1) şeklinde olsun. Buna göre her bir $j=0,1,\ldots,n$ için eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (4.1.3) geçiş şartlarıyla verilmiş (4.1.2) problemine Atkinson tipinde denir:

1. $k=0,1,\ldots,m_j-1$ için $\left(x_{j,2k};x_{j,2k+1}\right]$ ve $\left[x_{j,2m_j};x_{j,2m_j+1}\right)$ aralıklarında $r=0$,

fakat $k=0,1,\ldots,m_j$ için $\int\limits_{x_{j,2k}}^{x_{j,2k+1}} w dx \neq 0,\ \int\limits_{x_{j,2k}}^{x_{j,2k+1}} q dx \neq 0;$ (5.1.1)

2. $k=0,1,\ldots,m_j-1$ için $\left[x_{j,2k+1};x_{j,2k+2}\right]$ aralığında $q=w=0$, fakat

$$\int\limits_{x_{j,2k+1}}^{x_{j,2k+2}} r \neq 0. \tag{5.1.2}$$

Tanım 5.1.2. Eğer geçiş şartlarıyla verilmiş Atkinson tipindeki bir Sturm-Liouville problemi ile bir matris özdeğer problemi aynı özdeğerlere sahipse bu durumda bu problemlere denktir denir.

Temel teoremlerimizi vermeden önce ilave bazı gösterimlere ihtiyacımız olacaktır. (4.2.1), (5.1.1) ve (5.1.2) verilsin. Buna göre her bir $j = 0,1,\ldots,n$ için aşağıdakileri tanımlayalım:

$$
\begin{aligned}
p_{jk} &= \left(\int_{x_{j,2k-1}}^{x_{j,2k}} r\,dx \right)^{-1}, \quad k = 1,2,\ldots,m_j; \\
q_{jk} &= \int_{x_{j,2k}}^{x_{j,2k+1}} q\,dx, \quad w_{jk} = \int_{x_{j,2k}}^{x_{j,2k+1}} w\,dx, \quad k = 0,1,\ldots,m_j.
\end{aligned}
\tag{5.1.3}
$$

(5.1.1) ve (5.1.2) şartlarından (4.1.5) denkleminin herhangi $u,\ v$ çözümleri için; r nin özdeş sıfır olduğu tüm aralıklarda u nun sabit, q ve w nun özdeş sıfır olduğu tüm aralıklarda da v nin sabit olduğunu söyleyebiliriz. Buna göre

$$
\begin{array}{lllll}
u_{0k} & = & u(x), & x \in \left[x_{0,2k}; x_{0,2k+1} \right], & k = 0,\ldots,m_0 - 1 \\
u_{0m_0} & = & u(x), & x \in \left[x_{0,2m_0}; x_{0,2m_0+1} \right), & \\
u_{j0} & = & u(x), & x \in \left(x_{j0}; x_{j1} \right], & j = 1,\ldots,n \\
u_{jk} & = & u(x), & x \in \left[x_{j,2k}; x_{j,2k+1} \right], & k = 1,\ldots,m_j - 1,\ j = 1,\ldots,n-1 \\
u_{jm_j} & = & u(x), & x \in \left[x_{j,2m_j}; x_{j,2m_j+1} \right), & j = 1,\ldots,n-1 \\
u_{nk} & = & u(x), & x \in \left[x_{n,2k}; x_{n,2k+1} \right] & k = 1,\ldots,m_n \\
v_{jk} & = & v(x) & x \in \left[x_{j,2k-1}; x_{j,2k} \right], & k = 1,\ldots,m_j,\ j = 0,\ldots,n
\end{array}
\tag{5.1.4}
$$

ve

$$
v_{j0} = v\left(x_{j0}+\right),\ v_{j,m_j+1} = v\left(x_{j,2m_j+1}-\right),\ j = 0,\ldots,n \tag{5.1.5}
$$

olarak tanımlayalım.

Yardımcı Teorem 5.1.1. (4.1.2) denkleminin Atkinson tipinde olduğunu kabul edelim. Buna göre her bir $j = 0,1,\ldots,n$ ve (4.1.5) sisteminin herhangi $u,\ v$ çözümleri için aşağıdakileri elde ederiz:

$$
p_{jk}\left(u_{jk} - u_{j,k-1}\right) = v_{jk},\ k = 1,2,\ldots,m_j, \tag{5.1.6}
$$

$$
v_{j,k+1} - v_{jk} = u_{jk}\left(q_{jk} - \lambda w_{jk}\right),\ k = 0,1,\ldots,m_j. \tag{5.1.7}
$$

Tersine (5.1.6), (5.1.7) sisteminin $k = 0,1,\ldots,m_j$ için u_{jk} ve $k = 0,1,\ldots,m_j + 1$ için v_{jk} şeklinde herhangi iki çözümü için; (4.1.5) sisteminin (5.1.4) ve (5.1.5) ifadelerini sağlayan tek bir $u(x)$ ve $v(x)$ çözümü vardır.

İspat: $k = 1,2,\ldots,m_j$ için (4.1.5) sistemindeki ilk denklemden

$$\begin{aligned} u_{jk} - u_{j,k-1} &= u\left(x_{j,2k}\right) - u\left(x_{j,2k-2}\right) \\ &= \int_{x_{j,2k-2}}^{x_{j,2k}} u' = \int_{x_{j,2k-2}}^{x_{j,2k}} rv = \int_{x_{j,2k-1}}^{x_{j,2k}} rv = v_{jk} \int_{x_{j,2k-1}}^{x_{j,2k}} r = \frac{v_{jk}}{p_{jk}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu bize (5.1.6) eşitliğini verir. Benzer olarak $k = 0,1,\ldots,m_j$ için (4.1.5) sistemindeki ikinci denklemden ise

$$\begin{aligned} v_{j,k+1} - v_{jk} &= v\left(x_{j,2k+1}\right) - v\left(x_{j,2k-1}\right) \\ &= \int_{x_{j,2k-1}}^{x_{j,2k+1}} \left(q - \lambda w\right) u = \int_{x_{j,2k}}^{x_{j,2k+1}} \left(q - \lambda w\right) u \\ &= u_{jk} \int_{x_{j,2k}}^{x_{j,2k+1}} \left(q - \lambda w\right) = u_{jk} \left(q_{jk} - \lambda w_{jk}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da bize (5.1.7) eşitliğini verir. Diğer taraftan (4.1.5) sistemindeki denklemleri alt aralıklar üzerine integralleyerek, (5.1.4) ve (5.1.5) den tanımladığımız $u(x)$ ve $v(x)$ i (4.1.5) in çözümü olacak şekilde tüm J aralığına sürekli olarak genişletebiliriz.

Öncelikle (3.1.7) ayrık sınır koşulları için (4.1.2)-(4.1.4) problemini ele alacağız.

Teorem 5.1.1. $\alpha \in [0,\pi)$ ve $\beta \in (0,\pi]$ olsun. $\left(\sum_{j=0}^{n} m_j + 1\right) \times \left(\sum_{j=0}^{n} m_j + 1\right)$ tipindeki üç köşegensel

$$P_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} M_0 & & & & & \\ N_1 & M_1 & & & & \\ & N_2 & M_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & N_n & M_n & \\ & & & & N_{n+1} & M_{n+1} \end{bmatrix}$$

matrisini ve köşegensel

$$Q_{\alpha\beta} = \left(q_{00}\sin\alpha, q_{01}, \ldots, q_{0,m_0-1}, q_{0m_0} + q_{10}, q_{11}, \ldots, q_{n,m_n-1}, q_{nm_n}\sin\beta\right)$$

$$W_{\alpha\beta} = \left(w_{00}\sin\alpha, w_{01}, \ldots, w_{0,m_0-1}, w_{0m_0} + w_{10}, w_{11}, \ldots, w_{n,m_n-1}, w_{nm_n}\sin\beta\right)$$

matrislerini göz önüne alalım. Buna göre (4.1.2), (4.1.3), (3.1.7) problemi aşağıdaki matris özdeğer problemine denktir:

$$\left(P_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta}\right)U = \lambda W_{\alpha\beta} U \tag{5.1.8}$$

Burada

$$U = \left[u_{00}, u_{01}, \ldots, u_{0m_0}, u_{11}, \ldots, u_{1m_1}, \ldots, u_{n1}, \ldots, u_{nm_n}\right]^T$$

şeklindedir. Şimdi $P_{\alpha\beta}$ matrisinin elemanlarını tanımlayalım. 1×2 tipindeki

$$M_0 = \left[p_{01}\sin\alpha + \cos\alpha \quad -p_{01}\sin\alpha\right],$$

her bir $j = 0,1,\ldots,n$ için $m_j \times 2$ tipindeki

$$N_{j+1} = \begin{bmatrix} -p_{j1} & p_{j1} + p_{j2} \\ 0 & -p_{j2} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

her bir $j = 0,1,\dots,n-1$ için $m_j \times m_j$ tipindeki

$$M_{j+1} = \begin{bmatrix} -p_{j2} & & & & \\ p_{j2}+p_{j3} & -p_{j3} & & & \\ -p_{j3} & p_{j3}+p_{j4} & -p_{j4} & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & -p_{j,m_j-1} & p_{j,m_j-1}+p_{j,m_j} & -p_{j,m_j} & \\ & & -p_{j,m_j} & p_{j,m_j}+p_{j+1,1}+\alpha_{j+1} & -p_{j+1,1} \end{bmatrix},$$

ve $m_n \times \left(m_n - 1\right)$ tipindeki

$$M_{n+1} = \begin{bmatrix} -p_{n2} & & & \\ p_{n2}+p_{n3} & -p_{n3} & & \\ -p_{n3} & p_{n3}+p_{n4} & -p_{n4} & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & -p_{n,m_n-1} & p_{n,m_n-1}+p_{nm_n} & -p_{nm_n} \\ & & -p_{nm_n}\sin\beta & p_{nm_n}\sin\beta-\cos\beta \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat: Her bir $j = 0,1,\dots,n$ ve $k = 1,2,\dots,m_j - 1$ için (5.1.6), (5.1.7) sisteminin çözümleri ile aşağıdaki sistemin çözümleri arasında bire-bir örtüşme vardır:

$$p_{j1}\left(u_{j1} - u_{j0}\right) - v_{j0} = u_{j0}\left(q_{j0} - \lambda w_{j0}\right) \tag{5.1.9}$$

$$p_{j,k+1}\left(u_{j,k+1} - u_{jk}\right) - p_{jk}\left(u_{jk} - u_{j,k-1}\right) = u_{jk}\left(q_{jk} - \lambda w_{jk}\right) \tag{5.1.10}$$

$$v_{j,m_j+1} - p_{jm_j}\left(u_{jm_j} - u_{jm_{j-1}}\right) = u_{jm_j}\left(q_{jm_j} - \lambda w_{jm_j}\right) \tag{5.1.11}$$

Bu yüzden Yardımcı Teorem 5.1.1 e göre; (4.1.5) sisteminin ve dolayısıyla (4.1.2) denkleminin herhangi bir çözümü (5.1.9)-(5.1.11) sisteminin bir çözümü tarafından tek türlü belirlenir. Ayrıca (3.1.7) sınır koşulu

$$\begin{aligned} u_{00}\cos\alpha &= v_{00}\sin\alpha \\ u_{nm_n}\cos\beta &= v_{n,m_n+1}\sin\beta \end{aligned} \tag{5.1.12}$$

olarak ve her bir $j = 0,1,\dots,n-1$ için (4.1.3) geçiş şartı

$$\begin{aligned} u_{j+1,0} &= u_{jm_j} \\ v_{j+1,0} &= \alpha_{j+1} u_{jm_j} + v_{j,m_j+1} \end{aligned} \tag{5.1.13}$$

olarak ifade edilebilir. Buna göre her bir $j = 0,1,\dots,n-1$ için (5.1.9), (5.1.10), (5.1.11), (5.1.12), (5.1.13) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} & p_{j+1,1}\left(u_{j+1,1} - u_{jm_j}\right) - p_{jm_j}\left(u_{jm_j} - u_{j,m_j-1}\right) - u_{jm_j}\left(q_{jm_j} - \lambda w_{jm_j}\right) \\ & = \alpha_{j+1} u_{jm_j} + u_{jm_j}\left(q_{j+1,0} - \lambda w_{j+1,0}\right) \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

$$p_{j+1,2}\left(u_{j+1,2} - u_{j+1,1}\right) - p_{j+1,1}\left(u_{j+1,1} - u_{jm_j}\right) = u_{j+1,1}\left(q_{j+1,1} - \lambda w_{j+1,1}\right) \tag{5.1.15}$$

yazılabilir. O halde aranan denklik (5.1.9)-(5.1.12) ve (5.1.14), (5.1.15) ifadelerinden görülebilir.

Sonuç 5.1.1. $\alpha,\ \beta \in (0,\pi)$ olsun. $\left(\sum_{j=0}^{n} m_j + 1\right) \times \left(\sum_{j=0}^{n} m_j + 1\right)$ tipindeki üç köşegensel

$$P_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} M_0 & & & & & \\ N_1 & M_1 & & & & \\ & N_2 & M_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & N_n & M_n & \\ & & & & N_{n+1} & M_{n+1} \end{bmatrix}$$

matrisini ve köşegensel

$$Q_{\alpha\beta} = \left(q_{00}, q_{01}, \dots, q_{0,m_0-1}, q_{0m_0} + q_{10}, q_{11}, \dots, q_{n,m_n-1}, q_{nm_n}\right)$$

$$W_{\alpha\beta} = \left(w_{00}, w_{01}, \dots, w_{0,m_0-1}, w_{0m_0} + w_{10}, w_{11}, \dots, w_{n,m_n-1}, w_{nm_n}\right)$$

matrislerini göz önüne alalım. Buna göre (4.1.2), (4.1.3), (3.1.7) problemi aşağıdaki matris özdeğer problemine denktir:

$$\left(P_{\alpha\beta}+Q_{\alpha\beta}\right)U=\lambda W_{\alpha\beta}U \tag{5.1.16}$$

Burada

$$U=\left[u_{00},u_{01},\ldots,u_{0m_0},u_{11},\ldots,u_{1m_1},\ldots,u_{n1},\ldots,u_{nm_n}\right]^T$$

şeklindedir. Şimdi $P_{\alpha\beta}$ matrisinin elemanlarını tanımlayalım. Her bir $j=0,1,\ldots,n$ için N_{j+1} matrisi ve her bir $j=0,1,\ldots,n-1$ için M_{j+1} matrisi Teorem 5.2.1 deki gibi tanımlıdır. Diğer taraftan 1×2 tipindeki

$$M_0=\begin{bmatrix} p_{01}+\cot\alpha & -p_{01}\end{bmatrix},$$

ve $m_n\times\left(m_n-1\right)$ tipindeki

$$M_{n+1}=\begin{bmatrix} -p_{n2} & & & \\ p_{n2}+p_{n3} & -p_{n3} & & \\ -p_{n3} & p_{n3}+p_{n4} & -p_{n4} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & -p_{n,m_n-1} & p_{n,m_n-1}+p_{nm_n} & -p_{nm_n} \\ & & -p_{nm_n} & p_{nm_n}-\cot\beta \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat: (5.1.8) sisteminin ilk ve son satırları sırasıyla $\sin\alpha$ ve $\sin\beta$ ya bölünürse (5.1.16) sistemi elde edilir.

Teorem 5.1.1 ve onun sonucundan; (3.1.7) ayrık sınır koşulları ile verilen Atkinson tipindeki (4.1.2)-(4.1.3) probleminin üç köşegensel matris özdeğer problemi ile ifade edilebileceği görülür. Şimdi ise (3.2.4) ayrık olmayan sınır koşulları ile verilen Atkinson tipindeki (4.1.2)-(4.1.4) probleminin de matris özdeğer problemi ile ifade edilebileceğini göstereceğiz.

Teorem 5.1.2. $k_{12} = 0$ için (3.2.4) sınır koşulunu ele alalım. $\left(1, \sum_{j=0}^{n} m_j\right)$ ve $\left(\sum_{j=0}^{n} m_j, 1\right)$ bileşenleri haricinde üç köşegensel olan $\left(\sum_{j=0}^{n} m_j\right) \times \left(\sum_{j=0}^{n} m_j\right)$ tipindeki

$$P_2 = \begin{bmatrix} M_0 & & & & & -k_{11} p_{nm_n} \\ N_1 & M_1 & & & & \\ & N_2 & M_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & N_n & M_n & \\ -k_{11} p_{nm_n} & & & & N_{n+1} & M_{n+1} \end{bmatrix}$$

matrisini ve köşegensel

$$Q_2 = \left(q_{00} + k_{11}{}^2 q_{nm_n}, q_{01}, \ldots, q_{0,m_0-1}, q_{0m_0} + q_{10}, q_{11}, \ldots, q_{n,m_n-1}\right)$$

$$W_2 = \left(w_{00} + k_{11}{}^2 w_{nm_n}, w_{01}, \ldots, w_{0,m_0-1}, w_{0m_0} + w_{10}, w_{11}, \ldots, w_{n,m_n-1}\right)$$

matrislerini göz önüne alalım. Buna göre (4.1.2), (4.1.3), (3.2.4) problemi aşağıdaki matris özdeğer problemine denktir:

$$\left(P_2 + Q_2\right) U = \lambda W_2 U \tag{5.1.17}$$

Burada

$$U = \left[u_{00}, u_{01}, \ldots, u_{0m_0}, u_{11}, \ldots, u_{1m_1}, \ldots, u_{n1}, \ldots, u_{n,m_n-1}\right]^T$$

şeklindedir. Şimdi P_2 matrisinin elemanlarını tanımlayalım. 1×2 tipindeki

$$M_0 = \left[-k_{11}k_{21} + p_{01} + k_{11}{}^2 p_{nm_n} \quad -p_{01}\right],$$

her bir $j = 0,1,\ldots,n-1$ için $m_j \times 2$ ve $j = n$ için $\left(m_n - 1\right) \times 2$ tipindeki

$$N_{j+1}=\begin{bmatrix} -p_{j1} & p_{j1}+p_{j2} \\ 0 & -p_{j2} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

her bir $j=0,1,\ldots,n-1$ için $m_j\times m_j$ tipindeki

$$M_{j+1}=\begin{bmatrix} -p_{j2} & & & & \\ p_{j2}+p_{j3} & -p_{j3} & & & \\ -p_{j3} & p_{j3}+p_{j4} & -p_{j4} & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & -p_{j,m_j-1} & p_{j,m_j-1}+p_{j,m_j} & -p_{j,m_j} & \\ & & -p_{j,m_j} & p_{j,m_j}+p_{j+1,1}+\alpha_{j+1} & -p_{j+1,1} \end{bmatrix},$$

ve $(m_n-1)\times(m_n-2)$ tipindeki

$$M_{n+1}=\begin{bmatrix} -p_{n2} & & & \\ p_{n2}+p_{n3} & -p_{n3} & & \\ -p_{n3} & p_{n3}+p_{n4} & -p_{n4} & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & -p_{n,m_n-2} & p_{n,m_n-2}+p_{n,m_n-1} & -p_{n,m_n-1} \\ & & -p_{n,m_n-1} & p_{n,m_n-1}+p_{nm_n} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat: Her bir $j=0,1,\ldots,n-1$ için (4.1.3) geçiş şartının (5.1.13) ile ifade edilebileceğini belirtmiştik. Diğer taraftan $k_{12}=0$ olduğundan $k_{11}k_{22}=1$ olup (3.2.4) sınır koşulu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} u_{nm_n} &= k_{11}u_{00} \\ v_{n,m_n+1} &= k_{21}u_{00}+k_{22}v_{00} \end{aligned} \tag{5.1.18}$$

Buna göre her bir $j = 0,1,\ldots,n-1$ ve $k = 1,2,\ldots,m_j - 1$ için (5.1.13) geçiş şartı ve (5.1.18) sınır koşulu ile birlikte (5.1.6), (5.1.7) sisteminin çözümleri ile aşağıdaki sistemin çözümleri arasında bire-bir örtüşme vardır:

$$\begin{aligned}&\left[-k_{11}k_{21} + k_{11}^{2}\left(p_{j+1,m_{j+1}} + q_{j+1,m_{j+1}} - \lambda w_{j+1,m_{j+1}}\right)\right]u_{j0} \\ &= \left(\lambda w_{j0} - p_{j1} - q_{j0}\right)u_{j0} + p_{j1}u_{j1} + k_{11}p_{j+1,m_{j+1}}u_{j+1,m_{j+1}-1}\end{aligned} \tag{5.1.19}$$

$$p_{j,k+1}\left(u_{j,k+1} - u_{jk}\right) - p_{jk}\left(u_{jk} - u_{j,k-1}\right) = u_{jk}\left(q_{jk} - \lambda w_{jk}\right) \tag{5.1.20}$$

$$p_{j+1,1}\left(u_{j+1,1} - u_{j+1,0}\right) - v_{j+1,0} = u_{j+1,0}\left(q_{j+1,0} - \lambda w_{j+1,0}\right) \tag{5.1.21}$$

$$\begin{aligned}&p_{j+1,m_{j+1}}\left(k_{11}u_{j0} - u_{j+1,m_{j+1}-1}\right) - p_{j+1,m_{j+1}-1}\left(u_{j+1,m_{j+1}-1} - u_{j+1,m_{j+1}-2}\right) \\ &= u_{j+1,m_{j+1}-1}\left(q_{j+1,m_{j+1}-1} - \lambda w_{j+1,m_{j+1}-1}\right)\end{aligned} \tag{5.1.22}$$

Buna göre Yardımcı Teorem 5.1.1 e göre; (4.1.5) sisteminin ve dolayısıyla (4.1.2) denkleminin herhangi bir çözümü (5.1.19)-(5.1.22) sisteminin bir çözümü tarafından tek türlü belirlenir. Böylelikle aranan denklik görülür.

Teorem 5.1.3. $k_{12} \neq 0$ için (3.2.4) sınır koşulunu ele alalım. $\left(1, \sum_{j=0}^{n} m_j + 1\right)$ ve $\left(\sum_{j=0}^{n} m_j + 1, 1\right)$ bileşenleri haricinde üç köşegensel olan $\left(\sum_{j=0}^{n} m_j + 1\right) \times \left(\sum_{j=0}^{n} m_j + 1\right)$ tipindeki

$$P_3 = \begin{bmatrix} M_0 & & & & & \frac{1}{k_{12}} \\ N_1 & M_1 & & & & \\ & N_2 & M_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & N_n & M_n & \\ \frac{1}{k_{12}} & & & & N_{n+1} & M_{n+1} \end{bmatrix}$$

matrisini ve köşegensel

$$Q_{\alpha\beta} = \left(q_{00}, q_{01}, \dots, q_{0,m_0-1}, q_{0m_0} + q_{10}, q_{11}, \dots, q_{n,m_n-1}, q_{nm_n} \right)$$

$$W_{\alpha\beta} = \left(w_{00}, w_{01}, \dots, w_{0,m_0-1}, w_{0m_0} + w_{10}, w_{11}, \dots, w_{n,m_n-1}, w_{nm_n} \right)$$

matrislerini göz önüne alalım. Buna göre (4.1.2), (4.1.3), (3.2.4) problemi aşağıdaki matris özdeğer problemine denktir:

$$\left(P_3 + Q_3 \right) U = \lambda W_3 U \tag{5.1.23}$$

Burada

$$U = \left[u_{00}, u_{01}, \dots, u_{0m_0}, u_{11}, \dots, u_{1m_1}, \dots, u_{n1}, \dots, u_{nm_n} \right]^T$$

şeklindedir. Şimdi P_3 matrisinin elemanlarını tanımlayalım. Her bir $j = 0,1,\dots,n$ için $m_j \times 2$ tipindeki N_{j+1} matrisi ve her bir $j = 0,1,\dots,n-1$ için $m_j \times m_j$ tipindeki M_{j+1} matrisi Teorem 5.1.2 deki gibi tanımlıdır. Diğer taraftan 1×2 tipindeki

$$M_0 = \begin{bmatrix} p_{01} - \dfrac{k_{11}}{k_{12}} & -p_{01} \end{bmatrix}$$

ve $m_n \times \left(m_n - 1 \right)$ tipindeki

$$M_{n+1} = \begin{bmatrix} -p_{n2} & & & \\ p_{n2} + p_{n3} & -p_{n3} & & \\ -p_{n3} & p_{n3} + p_{n4} & -p_{n4} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & -p_{n,m_n-1} & p_{n,m_n-1} + p_{nm_n} & -p_{nm_n} \\ & & -p_{nm_n} & p_{nm_n} - \dfrac{k_{22}}{k_{12}} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat: (3.2.4) sınır koşulu

$$\begin{aligned} u_{nm_n} &= k_{11}u_{00} + k_{12}v_{00} \\ v_{n,m_n+1} &= k_{21}u_{00} + k_{22}v_{00} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} = 1$ olduğundan bu koşul

$$\begin{aligned} v_{00} &= -\frac{k_{11}}{k_{12}}u_{00} + \frac{1}{k_{12}}u_{nm_n} \\ v_{n,m_n+1} &= -\frac{1}{k_{12}}u_{00} + \frac{k_{22}}{k_{12}}u_{nm_n} \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenebilir. Diğer taraftan (5.1.13) geçiş şartı da göz önüne alınırsa ispat, Teorem 5.1.2 nin ispatına benzer olarak yapılabilir.

Örnek 5.1.1. $J = (-3,0) \cup (0,6)$ aralığı üzerinde aşağıdaki gibi verilmiş $\delta-$ etkileşimli Sturm-Liouville problemini ele alalım:

$$-(py')' + \delta(x-0)y + qy = \lambda wy \tag{5.1.24}$$

Bu problemin aşağıdaki geçiş şartıyla verilmiş Sturm-Liouville problemine denk olduğunu biliyoruz:

$$-(py')' + qy = \lambda wy, \tag{5.1.25}$$

$$\begin{cases} y(0-) - y(0+) = 0, \\ y(0-) + py'(0-) - py'(0+) = 0. \end{cases} \tag{5.1.26}$$

Ayrıca $\alpha = 0$ ve $\beta = \pi$ seçip aşağıdaki ayrık sınır koşullarını ele alalım:

$$\begin{cases} y(-3) = 0, \\ y(6) = 0. \end{cases} \tag{5.1.27}$$

Buna göre (5.1.27) koşulundan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.1.28}$$

ve (5.1.26) geçiş şartından

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.1.29}$$

olduğu görülür. J aralığının bir parçalanışını da

$$\begin{aligned} a &= -3 < -2 < -1 < 0 = x_1 \\ x_1 &= 0 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 = x_2 = b \end{aligned}$$

olarak ele alırsak $m_0 = 1$ ve $m_1 = 2$ olup p, q ve w parçalı sürekli fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$p(x) = \begin{cases} \infty, & (-3,-2) \\ 1, & (-2,-1) \\ \infty, & (-1,0) \\ \infty, & (0,2) \\ \frac{1}{2}, & (2,3) \\ \infty, & (3,4) \\ \frac{1}{4}, & (4,5) \\ \infty, & (5,6) \end{cases}, \quad q(x) = \begin{cases} 0, & (-3,-2) \\ 0, & (-2,-1) \\ 1, & (-1,0) \\ 2, & (0,2) \\ 0, & (2,3) \\ 3, & (3,4) \\ 0, & (4,5) \\ 4, & (5,6) \end{cases}, \quad w(x) = \begin{cases} 1, & (-3,-2) \\ 0, & (-2,-1) \\ 3, & (-1,0) \\ 4, & (0,2) \\ 0, & (2,3) \\ 1, & (3,4) \\ 0, & (4,5) \\ 2, & (5,6) \end{cases}$$

Şimdi (4.2.11) ifadesini göz önüne alalım:

$$\begin{aligned} \Phi(6,\lambda) &= \begin{bmatrix} \phi_{11}(6,\lambda) & \phi_{12}(6,\lambda) \\ \phi_{21}(6,\lambda) & \phi_{22}(6,\lambda) \end{bmatrix} \\ &= \prod_{j=0}^{1} \Psi_{1-j}\left(x_{1-j+1},\lambda\right) C_{1-j} \\ &= \Psi_1(x_2,\lambda) C_1 \Psi_0(x_1,\lambda) \\ &= \Psi_1(6,\lambda) C_1 \Psi_0(0,\lambda) \end{aligned}$$

olmak üzere, burada yapılacak olan gerekli düzenlemelerin ardından

$$\phi_{12}(6,\lambda) = \left[\psi_{11}^1(6,\lambda) + \psi_{12}^1(6,\lambda)\right]\psi_{12}^0(0,\lambda) + \psi_{12}^1(6,\lambda)\psi_{22}^0(0,\lambda)$$

olarak bulunur. Örnek 4.2.1 de yapılan işlemlerin benzeri buraya taşınırsa

$$\Delta\left(\lambda\right) = 88\lambda^2 - 390\lambda + 223 = 0$$

olduğu görülür. Bu $\Delta\left(\lambda\right)$ karakteristik fonksiyonunun kökleri ise

$$\lambda_1 = 0.67442, \qquad \lambda_2 = 3.75739$$

olarak bulunur. Bu kökler (5.1.24) denkleminin özdeğerleridir. Diğer taraftan Teorem 5.1.1 gereğince; 4×4 tipindeki üçköşegensel

$$P_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} p_{01}\sin\alpha + \cos\alpha & -p_{01}\sin\alpha & 0 & 0 \\ -p_{01} & p_{01} + p_{11} + 1 & -p_{11} & 0 \\ 0 & -p_{11} & p_{11} + p_{12} & -p_{12} \\ 0 & 0 & -p_{12}\sin\beta & p_{12}\sin\beta - \cos\beta \end{bmatrix}$$

matrisini ve köşegensel

$$Q_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} q_{00}\sin\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{01} + q_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{11}\sin\beta \end{bmatrix},$$

$$W_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} w_{00}\sin\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{01} + w_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{11}\sin\beta \end{bmatrix}$$

matrislerini tanımlarsak $U = \left[u_{00}, u_{01}, u_{11}, u_{12}\right]^T$ olmak üzere (5.1.25)-(5.1.27) problemi

$$\left(P_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta}\right)U = \lambda W_{\alpha\beta} U \tag{5.1.30}$$

matris özdeğer problemine denktir. Bunu gösterebilmek için (5.1.30) matris özdeğer probleminin özdeğerlerini bulalım. (5.1.3) ifadesinden bulunan

$$p_{01} = 1, \qquad p_{11} = \frac{1}{2}, \qquad p_{12} = \frac{1}{4}$$

$$q_{00}=0, \qquad q_{01}=1, \qquad q_{10}=4, \qquad q_{11}=3$$

$$w_{00}=1, \qquad w_{01}=3, \qquad w_{10}=8, \qquad w_{11}=1$$

değerlerini kullanıp (5.1.30) denklemini düzenlersek

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{15}{2}-11\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{15}{4}-\lambda & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{00} \\ u_{01} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sağlanabilmesi için

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{15}{2}-11\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{15}{4}-\lambda & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

olmalıdır. Bu determinantın hesaplanmasıyla

$$11\lambda^2 - \frac{195}{4}\lambda + \frac{223}{8} = 0$$

bulunur ki bu son denklemin kökleri

$$\lambda_1 = 0.67442, \qquad \lambda_2 = 3.75739$$

şeklindedir. Dolayısıyla (5.1.24) $\delta-$ etkileşimli Sturm-Liouville probleminin özdeğerleriyle, (5.1.30) matris özdeğer probleminin özdeğerlerinin aynı olduğu sonucuna varırız. Bu da bize bu iki problemin denk olduğunu söyler.

BÖLÜM 6

SONUÇLAR

Bu tezde, zamandan bağımsız Schrödinger denkleminden elde edilen $\delta-$ etkileşimli Sturm-Liouville probleminin sonlu spektruma sahip olması ve matris gösterimlerinin yapılması üzerine çalışılmıştır. Öncelikle, $\delta-$ etkileşimli Sturm-Liouville probleminin n tane geçiş şartıyla verilmiş bir Sturm-Liouville problemine denk olduğundan söz edilmiştir. Dördüncü bölümde, bu denkliği göz önüne alarak inşaa edilen $\delta-$ etkileşimli Sturm-Liouville probleminin $d+1$, d, $d-1$ veya en fazla $d-2$ tane özdeğere sahip olabileceği gösterilmiştir. Burada d, sonlu bir tamsayı olup $d=\sum_{j=0}^{n} m_j$ şeklinde tanımlanmıştır. $j=0,1,\ldots,n$ için m_j ler pozitif tamsayı olup bu m_j ler problemin tanımlanmış olduğu J aralığının herhangi iki etkileşim noktası arasında kalan kısmının nasıl parçalanacağı ile ilgili olan sayılardır. Daha açık belirtmek gerekirse, J aralığının herhangi iki etkileşim noktası arasında kalan kısmı $2m_j+1$ parçaya bölünmüştür. Bu teoriyi destekleyebilme adına, dördüncü bölümün sonunda iki örnek verilmiş ve bu örnekler detaylandırılmaya çalışılmıştır. Beşinci bölümde ise verilen $\delta-$ etkileşimli Sturm-Liouville probleminin n tane geçiş şartına sahip bir Sturm-Liouville problemine denk olduğundan yola çıkarak, bu problemin sonlu boyutlu bir matris özdeğer problemine denk olduğu gösterilmiştir. Burada denklikten kasıt, verilen $\delta-$ etkileşimli Sturm-Liouville problemi ile matris özdeğer probleminin aynı özdeğerlere sahip olması anlamındadır. Kurulan bu teoriyi de destekleyebilme adına, beşinci bölümün sonunda bir örnek verilip yine bu örnek detaylı bir şekilde çözülmüştür.

KAYNAKLAR

[1] B. M. Levitan, I. S. Sargsjan, (1991). Sturm-Liouville and Dirac Operators. Kluwer Academic Publishers, volume 59.

[2] F. V. Atkinson, (1964). Discrete and Continuous Boundary Value Problems. Academic Press, New York/London.

[3] Q. Kong, H. Wu, A. Zettl (2001). Sturm-Liouville problems with finite spectrum. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* **263**, 748-762.

[4] Q. Kong, H. Volkmer, A. Zettl (2009). Matrix representations of Sturm-Liouville problems with finite spectrum. *Results in Mathematics* **54**, 103-116.

[5] Ji-jun Ao, Jiong Sun, Mao-zhu Zhang (2011). The finite spectrum of Sturm-Liouville problems with transmission conditions. *Applied Mathematics and Computation* **218**, 1166-1173.

[6] Ji-jun Ao, Jiong Sun, Mao-zhu Zhang (2013). The finite spectrum of Sturm-Liouville problems with transmission conditions and eigenparameter-dependent boundary conditions. *Results in Mathematics* **63**, 1057-1070.

[7] Ji-jun Ao, Fang-zhen Bo, Jiong Sun (2014). Fourth order boundary value problems with finite spectrum. *Applied Mathematics and Computation* **244**, 952-958.

[8] Fang-zhen Bo, Ji-jun Ao (2014). The finite spectrum of fourth order boundary value problems with transmission conditions. *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*, Article ID 175489, 7 pages.

[9] Ji-jun Ao, Jiong Sun, Anton Zettl (2012). Matrix representations of fourth order boundary value problems with finite spectrum. *Linear Algebra and its Applications* **436**, 2359-2365.

[10] Ji-jun Ao, Jiong Sun, Anton Zettl (2013). Equivalence of fourth order boundary value problems and matrix eigenvalue problems. *Results in Mathematics* **63**, 581-595.

[11] Ji-jun Ao, Jiong Sun, Mao-zhu Zhang (2012). Matrix representations of Sturm-Liouville problems with transmission conditions. *Computers and Mathematics with Applications* **63**, 1335-1348.

[12] Ji-jun Ao, Jiong Sun (2013). Matrix representations of Sturm-Liouville problems with eigenparameter-dependent boundary conditions. *Linear Algebra and its Applications* **438**, 2359-2365.

[13] A. Kablan, M. Dzh. Manafov (2014). Matrix representations of fourth order boundary value problems with transmission conditions. *Mediterranean Journal of Mathematics*, DOI 10.1007/s00009-014-0482-2.

[14] Ji-jun Ao, Jiong Sun (2014). Matrix representations of Sturm-Liouville problems with coupled eigenparameter-dependent boundary conditions. *Applied Mathematics and Computation* **244**, 142-148.

[15] Ji-jun Ao, Jiong Sun (2015). Matrix representations of fourth order boundary value problems with coupled or mixed boundary conditions. *Linear and Multilinear Algebra* **63**, 1590-1598.

[16] Suqin Ge, Wanyi Wang, Ji-jun Ao (2014). Matrix representations of fourth order boundary value problems with periodic boundary conditions. *Applied Mathematics and Computation* **227**, 601-609.

[17] A. Zettl, (2005). Sturm-Liouville Theory. Amer. Math. Soc., Mathematical Surveys Monographs 121.

[18] Ledoux V., Van Daele M., Vanden Berghe G. (2004). CP Methods of higher order for Sturm-Liouville and Schrödinger equations. *Computer Physics Communications* **162**, 151-165.

[19] Naimark M. A., (1968). Linear Differential Operators (Second Edition). Nauka, Moscow English transl. of first ed., Parts 1, 2, Ungar, New York.

[20] E. C. Titchmarsh, (1939). The Theory of Functions (Second Edition). Oxford University Press.

[21] I. M. Gel’fand, G. E. Shilov, (1964). Generalized Functions (Volume 1). Academic Press, New York and London.

[22] Mithat İdemen, (2008). Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi (2. Baskı). İTÜ Vakfı Yayınları.

[23] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden, (1988). Solvable models in quantum mechanics. Springer-Verlag, Berlin/New York.

[24] S. Albeverio, P. Kurasov, (2000). Singular perturbations of differential operators. Cambridge Univ. Press, (London Mathematical Society Lecture Notes N271).

[25] M. Dzh. Manafov, A. Kablan (2013). Inverse scattering problems for energy-dependent Sturm-Liouville equations with point $\delta -$ interaction and eigenparameter-dependent boundary condition. *Electronic Journal of Differential Equations* **237**, 1-9.

[26] M. Dzh. Manafov, A. Kablan (2015). Inverse spectral and inverse nodal problems for energy-dependent Sturm-Liouville equations with $\delta -$ interaction. *Electronic Journal of Differential Equations* **26**, 1-10.