HAZİRAN 2015 YÜKSEK LİSANS MATEMATİK BÖLÜMÜ MEHMET ÇELİK

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EVRENSEL MODÜLLERİN PROJEKTİF BOYUTLARI

MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHMET ÇELİK
HAZİRAN 2015

Evrensel Modüllerin Projektif Boyutları

Gazianteр Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Doç. Dr. Necati OLGUN

Mehmet ÇELİK
Haziran 2015

T.C.

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Evrensel Modüllerin Projektif Boyutları
Öğrencinin, Adı Soyadı: Mehmet ÇELİK
Tez Savunma Tarihi: 29.06.2015

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Metin BEDİR
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Necati OLGUN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri :	İmzası
Yrd. Doç. Dr. İrfan DELİ	....
Doç. Dr. Necati OLGUN	....
Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN	....
Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN	....
Yrd. Doç. Dr. Özge ÖZTEKİN	....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Mehmet ÇELİK

ABSTRACT

THE PROJECTIVE DIMENSIONS OF UNIVERSAL MODULES

ÇELİK, Mehmet

M.Sc. In Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Necati OLGUN

June 2015, 53 pages

The purpose of the thesis is to research the projective dimensions of universal modules.

The first chapter indicates history, progress and importance of universal modules. In the next chapters we introduce description, feature and the base of theorems of universal modules researching description, feature and base of theorems of modules.

In the last chapter, in order to calculate projective dimensions of universal modules, necessary descriptions and theorems researched and examples are given. Furthermore, some description and theorems are given about projective dimensions of universal modules at hypersurfaces. Finally, connections between universal modules are indicated with theorems and examples.

Key words: module, universal module, projective module, projective dimension

ÖZET

EVRENSEL MODÜLLERİN PROJEKTİF BOYUTLARI

ÇELİK, Mehmet
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi : Doç.Dr.Necati OLGUN
Haziran 2015, 53 sayfa

Bu tezde evrensel modüllerin projektif boyutları incelenmiştir.

Tezin giriş bölümünde evrensel modüllerin tarihi, gelişimi ve önemi verilmiştir. Daha sonra modüllerin tanımı, özellikleri ve temel teoremleri incelenerek evrensel modüllerin tanımı, özellikleri ve temel teoremleri verilmiştir.

Tezin son bölümünde evrensel modüllerin projektif boyutlarını hesaplamak için gerekli olan tanım ve teoremler incelenerek örnekler üzerinde uygulanmıştır. Ayrıca hiperyüzeylerde evrensel modüllerin projektif boyutları hakkında bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Son olarakta evrensel modüller arasındaki bağıntılar teorem ve örnekler dahilinde verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Modül, Evrensel Modül, Projektif Modül, Projektif Boyut

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, aynı zamanda kişilik olarakta bana çok şey katan Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Doç. Dr. Necati OLGUN a sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Örneklerin toplanmasında, preparasyonunda ve teşhislerinde desteklerini benden esirgemeyen değerli arkadaşlarım Sait ÇAKALLI, Mustafa TANRIVERDİ, Samet DURMUŞ, Mesut HOCAOĞLU ve Güven ŞEKER'e çok teşekkür ederim.

Çalışma süresince beni hep destekleyen ve güvenen çok sevdiğim aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklamalar**
$pd_R(M)$	M, R-modülünün projektif boyutu
T(M)	M modülünün torsion(burulmalı) elemanlarının kümesi
$F_i(M)$	M modülünün i-nin fitting ideali
J(R)	R'nin Jacobson radikali
Ann(X)	X'in sıfırlayıcısı
dimR	R'nin Krull boyutu
$D_R^n(M,N)$	n-inci dereceden diferansiyel operatörlerin kümesi
$Der_R^n(M,N)$	n-inci dereceden türev operatörlerin kümesi
Q(R)	R'nin kesir cismi
$S^2(R)$	R'nin ikinci dereceden simetrik kuvvet modülü
Δ_n	n-inci dereceden evrensel diferansiyel operatörü
$\Omega_n(R)$	n-inci dereceden evrensel diferansiyel modülü
$[f,r]$	$fr-rf$

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Cebirsel kümeler ve onların koordinat halkaları ile ilgili sonuçları kanıtlamak için kullanılan yöntemlerden birisi de evrensel diferansiyel operatörleri üzerinde çalışmaktır. Böylece cebirsel kümelerle ilgili problemler modül teorisine aktarılmış olur.

Evrensel modüller ilk kez 1960 yılında Nakai tarafından tanımlanmıştır. Nakai, bu çalışmasında evrensel modüllerle ilgili bir takım sonuçlar elde etmiştir. Örneğin R, indirgenemez sonlu üretilmiş cebire karşılık gelen bir koordinat halkası olmak üzere R' nin regüler halka olması ile $\Omega_1(R)$'nin projektif modül olmasının birbirine denk olduğunu göstermiştir.

$\Omega_1(R)$'nin projektif boyutu ile ilgili en önemli çalışmayı Vanconcelos yapmıştır. Vanconcelos 1968 yılında yapmış olduğu çalışmasında R afin tamlık bölgesi ve $hd\Omega_1(R)<\infty$ olduğunda R'nin normal halka olması ile $hd\Omega_1(R)\leq 1$ in denk olduğunu göstermiştir. 1977 yılında Matsuoka ise bazı koşullar altında $\Omega_1(R)$'nin projektif boyutunun sonsuz olduğunu göstermiştir. Daha sonra Vasconcelos (1978), $\Omega_1(R)$'nin projektif boyutunun sıfır, bir veya sonsuz olduğunu göstermiştir.

Bir cebirin yüksek dereceden diferansiyel operatörlerinin evrensel modülleri ise ilk defa 1967 yılında Osborn tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra benzer tanımlar 1969 yılında yapılan Heyneman ve Sweedler'in çalışmalarında görülmektedir. Bu konuda en kapsamlı çalışma ise 1970 yılında Nakai tarafından yapılmıştır. Nakai bu çalışmasında yüksek dereceden diferansiyel operatörlerinin evrensel modüllerinin bazı homolojik özelliklerini incelemiştir.

Daha sonraki yıllarda ise yüksek dereceden diferansiyel operatörlerinin evrensel modülleri ile ilgili çalışmaları Erdoğan'nın 1993 yılında ve Olgun'un 2005 yılında yapmış oldukları çalışmalarında görmekteyiz.

Tezde ilk olarak evrensel modüllerin tarihi ve gelişimi ve önemi anlatılarak giriş yapılmıştır. İkinci bölümde modül tanımı, özellikleri ve temel teoremleri verilerek evrensel modüllerin tanımı, belli başlı özellikleri ve evrensel modüllerle ilgili bilinen sonuçlar, bazılarının ispatıyla birlikte verilmiştir.

Tezde son olarak evrensel modüllerin projektif boyutlarının bulunması ile ilgili bazı temel bilgiler ve bu bilgilerin örnekler üzerinde uygulanması verilmiştir.

BÖLÜM 2

Bu bölümde Evrensel Modüllerin Projektif Boyutuna temel oluşturacak şekilde modül tanımları ile bazı teoremler Callialp,F. ve Tekir,U. [10] kullanılarak verilmiştir.

MODÜLLER

Tanım 2.1.1 : (M , +)bir değişmeli grup ve R bir halka olsun. M deki elemanların, R deki elemanlarla skaler çarpımı, $R\times M \to M$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, M ye R üzerinde bir modül veya kısaca, R–modül denir.

1. Her $r\in R$, her $m,m'\in M$ için, $r(m+m')=rm+rm'$,
2. Her $r,r'\in R$, her $m\in M$ için, $(r+r')m=rm+r'm$,
3. Her $r,r'\in R$, her $m\in M$ için, $(rr')m=r(r'm)$,
4. Her $m\in M$ için, $1_R m=m$.

Önerme 2.1.2: R bir halka ve M bir R–modül olsun. Her $m\in M$ için,

1. $(0_R)m=0_M$ ve
2. $(-1_R)m=-m$ dir.

Örnek 2.1.3: V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı ise V yi bir K-modül olarak alabiliriz.

Örnek 2.1.4: Her G toplamsal grubu için, $\mathbb{Z}\times G\to G$ skaler çarpımı, $(m,g)\to mg$ ile tanımlanırsa, G bir $\mathbb{Z}-$modüldür.

Örnek 2.1.5: 1- Her değişmeli halka, tamsayılar halkası üzerinde bir Z-modül olarak düşünülebilir. G değişmeli halka olsun.

$\mu: Z\times G\to G \qquad (n,g)\to \mu(n,g)=ng=g+g+..........+g\ ,\ g\in G,\ \ n\in Z$

modül yapısı vardır.

2- R değişmeli halka, $I \lhd R$ olsun.

i) R nin kendisi R-modüldür.

ii) I , R modüldür.

iii) R/I bölüm halkası bir R-modüldür. (R/I bir doğal değişmeli grup yapısına sahiptir. $r \in R$ ve R/I içinde $s, s' \in R$ $s + I = s' + I$

$$\Rightarrow s - s' \in I \Rightarrow rs - rs' = r(s - s') \in I \Rightarrow rs + I = rs'I$$

$$\begin{aligned} R \times R/I &\to R/I \\ (r, s + I) &\to rs + I \end{aligned} \quad R\text{-modül yapısı vardır.}$$

3- R değişmeli halka ve $f : R \to S$ halka homomorfizması yapısı ile S bir R cebir olsun. O zaman S bir R-modüldür ve

$$\begin{aligned} R \times S &\to S \\ (r, s) &\to f(r)s \end{aligned}$$

yapısı kurulur.

4- R, S değişmeli halka ve $f : R \to S$ halka homomorfizması olsun. Eğer G, S-modül ise G aynı zamanda R-modüldür.

$$\begin{aligned} R \times G &\to G \\ (r, g) &\to f(r)g \end{aligned}$$

Tanım 2.1.6 : R bir halka, M bir $R-$modül ve $N \subseteq M$ boş olmayan bir alt küme olsun. N de kendi başına bir $R-$modül ise N ye, M nin bir alt modülü veya $R-$alt modülü denir. M nin tüm alt modülleri ailesini S_M ile gösterelim.

Önerme 2.1.7 : $R-$modül M nin, boş olmayan bir $N \subseteq M$ alt kümesinin alt modül olması için gerek ve yeter koşul her $r, r' \in R$, her $m, m' \in N$ için, $rm + r'm' \in N$ olmasıdır.

Önerme 2.1.8 : M bir R-modül olsun. $\{N_i\}_{i \in I}$ ailesi, M nin bir $R-$alt modüller ailesi olsun. $\bigcap_{i \in I} N_i$ de M nin bir $R-$alt modülüdür.

Örnek 2.1.9 : M modülünün kendisi ve sıfırından ibaret $\{0_M\}=0$ alt kümesi M nin bir alt modülüdür.

Tanım 2.1.10 : M bir R-modül ve $X \subseteq M$ bir alt küme olsun. X alt kümesini kapsayan, tüm alt modüllerin arakesitine X in ürettiği alt modül denir ve (X) ile gösterilir. Şu halde

$$(X) = \bigcap_{\substack{X \subseteq K \\ K \in S_M}} \{K\}$$

dir. (X) in, X alt kümesini kapsayan en küçük R-alt modül olduğu tanımdan anlaşılır. X kümesine üreteç kümesi de denir.

Tanım 2.1.11: M bir R-modül, $m \in M$ olsun. $\{m\}$ nin ürettiği alt modül

$$(m) = Rm = \{rm : r \in R\}$$

ye m ile üretilimiş alt modül denir. Eğer $M=(m)$ olacak şekilde bir $m \in M$ bulunabilirse, M ye devirli modül denir. $X \subseteq M$ sonlu bir alt küme olmak üzere, $M=(X)$ ise M ye sonlu üretilmiş modül denir.

Örnek 2.1.12 : R halkası, $R = R1_R$ olduğundan, R-modül olarak devirlidir.

Tanım 2.1.13 : M bir R-modül olsun. $\{N_i\}_{i\in I}$ ailesi, M nin bir R-alt modüller ailesi olsun. $\bigcup_{i\in I} N_i$ nin ürettiği alt modüle $\{N_i\}_{i\in I}$ alt modüllerinin toplamı denir ve $\sum_{i\in I} N_i$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.14 : M bir R-modül olsun. K, L ve N, M modülünün alt modülleri ve $K \subseteq N$ olsun. Bu takdirde,

$$K + (L \cap N) = (K+L) \cap N$$

dir.

Tanım 2.1.15 : R bir halka, M bir R-modül ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ bir alt küme olsun.

$$(0 : X) = \{r \in R : rX = 0\}$$

idealine X in sıfırlayıcısı denir ve $Ann(X)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.16 : R bir halka ve M bir R-modül olsun.

$$(0:M)=\{r\in R: rM=0\}$$

idealine M modülünün sıfırlayıcısı denir ve Ann(M) ile gösterilir. Eğer Ann(M) = 0 ise M modülüne sadık modül denir.

Ayrıca $Ann(M)=\bigcap_{m\in M} Ann(m)$ dir.

Önerme 2.1.17: $I \lhd R$ değişmeli halka olsun. O zaman $I = Ann_R(R/I)=(0:_R 1+I)$ dir.

Önerme 2.1.18: R değişmeli halka, M R – modül ve N , N', G M nin alt modülü ve $(G_\lambda)_{\lambda\in n}$ ve $(N_\theta)_{\theta\in\phi}$ M nin alt modülerinin iki ailesi olsun. O zaman

$i)$ $(\bigcap_{\lambda\in n} G_\lambda : N)=\bigcap_{\lambda\in n}(G_\lambda : N)$

$ii)$ $(G:\sum_{\theta\in\phi} N_\theta)=\bigcap_{\theta\in\phi}(G:N_\theta)$ (veya $Ann\ (N+N') = Ann(N)\cap Ann(N')$)

dir.

Önerme 2.1.19 : R bir halka , M bir R- modül ve I da R nin bir ideali olsun. $I\subseteq Ann(M)$ ise,

$$R/I\times M\to M$$

skaler çarpımı $(r+I,m)\mapsto rm$ ile tanımlanırsa, M R-modülü bir R/I-modül yapılır. Ayrıca M nin bir alt kümesinin, R-alt modül olması için gerek ve yeter koşul bir R/I-alt modül olmasıdır.

Tanım 2.1.20 : R bir halka, M bir R-modül ve N de M nin bir alt modülü olsun.

$$R\times M/N\to M/N$$

skaler çarpımını $(r,m+N)\mapsto rm+N$ ile tanımlanırsa, M / N toplamsal bölüm grubu, bir R-modül yapılır. M / N ye bölüm modülü denir.

Sonuç 2.1.21 : M / N aynı zamanda bir R / (N : M)-modüldür.

Örnek 2.1.21 : R bir halka, N_1 ve N_2, R-modül M nin iki alt modülü olsunlar.

$$Ann((N_1+N_2)/N_1)=(N_1:N_2)$$

dir. Çünkü,

$$Ann((N_1+N_2)/N_1)=(N_1:N_1+N_2)=(N_1:N_2)$$

dir.

Teorem 2.1.22 : *R* bir halka ve *I, R* nin bir ideali olsun. *M, n* eleman tarafından üretilmiş bir *R*-modül olsun. $x \in R$ ve $xM \subseteq IM$ ise bir $y \in I$ için, $(x^n + y)M = 0$ dır.

Teorem 2.1.23 : (Nakayama lemma) *R* bir halka ve *M* sonlu üretilmiş bir *R*-modül olsun. *I, R* nin Jacobson radikalinde kapsanan, $I \subseteq J(R)$ bir ideali ve $M = IM$ ise $M = 0$ dır.

Sonuç 2.1.24 : *R* bir halka ve *M* sonlu üretilmiş bir *R*-modül olsun. *I, R* nin Jacobson radikalinde kapsanan bir ideali ve *N* de *M* nin $IM + N = M$ olacak şekilde bir alt modülü ise *N* = *M* dir.

Sonuç 2.1.25 : (Halkalar için Krull Arakesit Teoremi) *I, R* halkasının Jacobson radikalinde kapsanan bir ideali olsun. Bu taktirde,

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I^i = 0$$

dir.

Tanım 2.1.26 : *R* bir halka, *M* bir *R*-modül ve $S = \{y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de *M* nin bir üreteç sistemi olsun. Her $m \in M$ elemanı, $r_\alpha \in R$, $y_\alpha \in S$ olmak üzere, $m = \sum_{\alpha \in I} r_\alpha y_\alpha$ şeklinde sonlu bir toplam olarak yazılabiliyor ve bu yazılış tek türlü oluyorsa, $S = \{y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ye *M* nin bir tabanı denir. *M* modülüne de bir **serbest modül** denir.

Örnek 2.1.27 : Her *R* halkası kendisi üzerinde, bir serbest modüldür. Taban olarak, $\{1_R\}$ alınabilir.

Örnek 2.1.28 : Her vektör uzayı bir serbest modüldür. Çünkü her vektör uzayının bir tabanı vardır.

Örnek 2.1.29 : $R[X]$ polinomlar halkası bir serbest R-modül ve $R[X] \simeq R^{(\mathbb{N})}$ dir.

Tanım 2.1.30 : R aşikâr olmayan bir halka ve F sonlu tabanlı bir serbest R-modül olsun. F nin her tabanında aynı sayıda eleman vardır. Bu sayıya **serbest modülün rankı** denir.

Örnek 2.1.31 : F bir cisim olsun. M sonlu üretilmiş bir F-vektör uzayı ise sonlu tabana sahip bir serbest F-modül ve rankı da vektör uzayının boyutudur.

Tanım 2.1.32 : R bir tamlık bölgesi ve M bir R-modül olsun. $m \in M$ elemanı için $rm = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq r \in R$ varsa, m ye M nin bir (Torsion)burulmalı elemanı ve

$$T(M) = \{m \in M : rm = 0 \text{ olacak şekilde bir } 0 \neq r \in R \text{ vardır}\}$$

alt modülüne de M nin **burulmalı alt modülü** denir. $T(M) = M$ ise M ye **burulmalı modül** $T(M) = 0$ ise M ye **serbest burulmalı modül** denir.

Önerme 2.1.33 : R değişmeli halka olsun.

i) $(R_\lambda)\lambda \in \Lambda$, her $\lambda \in \Lambda$ için $R_\lambda = R$ ile R-modüllerinin bir ailesi olsun. O zaman $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$, $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tabanı ile serbest R-modüldür ki her $\mu \in \Lambda$ için $e_\mu \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ elemanı R_μ içinde kendisi 1 eşit ve diğer bütün elemanları sıfırdır.

$$\{(1,0,0,.....)(0,1,0,0,.....)(0,0,1,0,.....),...........\text{gibi}\}$$

ii) M R-modül, M serbest R-modüldür $\Leftrightarrow M$, (i) deki türden bir R-modüle izomorftur. M $(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tabanına sahip ise $M \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ ki $R_\lambda = R$ dır. Burada $Rm_\lambda \simeq R$ dır.Böylece $Rm_\lambda \simeq R/(0:m_\lambda) \simeq R$ dır.

$$\begin{aligned} f : R &\to Rm_\lambda \\ 1 &\to m_\lambda \end{aligned} \quad \text{olmak üzere} \quad R/(0:m_\lambda) \simeq Rm_\lambda \Rightarrow R \simeq Rm_\lambda$$

Böylece $M \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Rm_\lambda$ dır.

Önerme 2.1.34 : F , $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tabanı ile bir serbest R-modül olsun. M , R-modül ve $\{m_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ M nin elemanlarının bir ailesi olsun. O zaman $\forall\lambda\in\Lambda$ için $f(e_\lambda)=m_\lambda$ tanımıyla $f:F\to M$ bir R- modül homomorfizması vardır.

İspat : M , $\{m_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tabanına sahip serbest R-modül olsun. $\Lambda=\varnothing$ ise açıktır. Böylece $\Lambda\neq\varnothing$ ise $\forall\lambda\in\Lambda$ $Rm_\lambda=R$, $\forall(r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus}R_\lambda$ için $f((r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})=\sum_{\lambda\in\Lambda}r_\lambda m_\lambda$ tanımıyla $f:\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus}R_\lambda\to M$ dönüşümüyle f bir R-modül homomorfizmasıdır. M , $\{m_\lambda\ :\ \lambda\in\Lambda\}$ kümesi tarafından üretildiğinde f örtendir. $\{m_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ M nin bir tabanı olduğunda f ,1-1 ve örtendir.

Önerme 2.1.35 : M , R değişmeli halkası üzerinde bir modül olsun. F serbest R-modül ve $f:F\to M$ R-modül epimorfizma vardır.

Aynı zamanda M , n elemanları tarafından sonlu olarak üretilirse F , n üyelerinin sonlu tabanına sahip bir serbest R-modül elde edilir.

Önerme 2.1.36 : $0\neq R$ değişmeli halka, F sonlu taban ile serbest R-modül olsun. O zaman F için her taban sonludur ve F için iki tabanın elemanları aynı sayıya sahiptir. F nin bir tabanındaki elemanların sayısına F nin $rank$ ı denir ve $rank(F)$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.37 : $R\neq 0$ değişmeli halka, F serbest R-modül ve F sonlu üretilir olsun. O zaman F için her taban sonludur.

Önerme 2.1.38 : *R* bir tamlık bölgesi ve *M* bir *R*-modül olsun. Şu halde $M\,/\,T(M)$ bir serbest burulmalı *R*-modüldür.

Not 2.1.39 : *R* bir tamlık bölgesi değil ise $T(M)$ nin *M* *R*-modülün bir alt modülü olduğunu söyleyemeyiz. Gerçekten, $\mathbb{Z}_6$-modül $\mathbb{Z}_6$ da $\overline{2}$ ve $\overline{3}$ elemanları burulmalı olmasına rağmen $\overline{2}+\overline{3}=\overline{5}$ elemanı burulmalı değildir.

Not 2.1.40 : Eğer R tamlık bölgesi değil ise $T(M)$ alt modül olması gerekmez. Örneğin

$$x_1, x_2 \in T(M)$$
$$x_1 + x_2 \in T(M)$$
$$r_1x_1 \neq r_2x_2 = 0 \quad (r_1r_2)(x_1 + x_2) = 0$$

Örnek 2.1.41 : $\bar{2}.\bar{3} = \bar{0} \quad R = \mathbb{Z}_6 \quad M(2) = \{0, 2, 4\} \quad \mathrm{T}(M) = \{0, 2, 4\}$

$$R = \mathbb{Z}_6 \quad \Rightarrow \quad X = M_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R \right\}$$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T(X) \text{ fakat } \mathrm{A}+\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin T(X)$$

Örnek 2.1.42 : $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ için $T(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ olur. Yani, $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ bir burulmalı modüldür.

Önerme 2.1.43 : R tamlık bölgesi olsun.

1) $T(R) = 0$ dır.
2) R-modül ve $T(X) = X$ ve $M \subset X$ alt modül ise $T(M) = M$ dır.
3) $T(X) = 0$ ve $M \subset X$ alt modül ise $T(M) = 0$ dır.
4) $T(T(X)) = T(X)$

Tanım 2.1.44 : R bir halka, M ve N de R-modül olsunlar . Bir $f : M \to N$ fonksiyonu, her $m, m' \in M$ için,

$$f(m + m') = f(m) + f(m')$$

her $r \in R$ ve her $m \in M$ için,

$$f(rm) = rf(m)$$

koşullarını sağlıyorsa, f ye bir modül homomorfizması veya R-homomorfizma denir.

Tanım 2.1.45 : Bir homomorfizma bire bir ise **monomorfizma**, örten ise **epimorfizma** ve hem birebir hem de örten ise **izomorfizma** denir. M den M ye homomorfizmalara **endomorfizma**, M den M ye izomorfizmalara **otomorfizma** denir.

Önerme 2.1.46 : R değişmeli halka M, N R-modül ve $f: M \to N$ bir izomorfizma olsun. O zaman $f^{-1}: N \to M$ de aynı zamanda bir izomorfizmadır ve $M \simeq N$ ile gösterilir.

$M \simeq M$ ise M nin kendi üzerine i_{d_M} özdeş dönüşümdür.

Önerme 2.1.47 : $f: M \to N$, $g: N \to G$ R-modül homomorfizmaları ve gof de R-modül homomorfizmasıdır.

$f: M \to N$, $g: N \to G$ R-modül izomorfizması ise gof de R-modül izomorfizmasıdır.

Tanım 2.1.48 : *R* bir halka, *M* bir *R*-modül ve *N* bir alt modülü olsun. $p: M \to M/N$, $p(m) = m + N$ ile tanımlı fonksiyon bir örten homomorfizmadır. Bu fonksiyona **doğal homomorfizma** denir.

Önerme 2.1.49 : *R* bir halka ve $f: M \to N$ bir *R*-homomorfizma olsun.

1. $f(0_M) = 0_N$, $f(-m) = -f(m)$ dir.
2. $Çekf = f^{-1}(0_N) = \{m \in M : f(m) = 0_N\}$, *M* nin bir alt modülüdür.
3. f nin bire bir olması için gerek ve yeter koşul $Çekf = 0$ olmasıdır.
4. $f(M) = \mathrm{Im}(f)$, *N* nin bir alt modülüdür. $N / \mathrm{Im}\, f$ bölüm modülü de $Eşçekf$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.50 : *R* bir halka, $f: M \to N$ bir örten *R*-homomorfizma ve *L*, *M* nin bir alt modülü olsun. $Çekf \subseteq L$ ise

$$M / L \simeq N / f(L)$$

dir.

Teorem 2.1.51 : (1. İzomorfizma Teoremi) *R* bir halka, M_1 ve M_2, *R*-modül *M* nin iki alt modülü ve $M_1 \subseteq M_2$ olsun. Bu taktirde, M_2 / M_1 de M / M_1 in bir alt modülüdür. Ayrıca,

$$(M / M_1) / (M_2 / M_1) \simeq M / M_2$$

dir.

Teorem 2.1.52 : (2. İzomorfizma Teoremi) *R* bir halka, *M* bir R-modül ve M_1 ve M_2 de iki alt modülü olsunlar. Bu taktirde,

$$\Psi : M_1 / (M_1 \cap M_2) \to (M_1 + M_2) / M_2, m + (M_1 \cap M_2) \mapsto m + M_2$$

ile tanımlı Ψ fonksiyonu bir izomorfizmadır.

Örnek 2.1.53 : M bir R-modül ve $m \in M$ olsun.

$$g_m : R \to Rm, g_m(r) = rm$$

ile tanımlı fonksiyon, bir örten homomorfizmadır ve çekirdeği, *Ann*(*m*) dir. Şu halde, $R / Ann(m) \simeq Rm$ dir.

Tanım 2.1.54 : Sıfırdan farklı bir modülün, sıfır ve kendisinden başka hiçbir alt modülü yoksa, bu modüle **basit** modül denir.

Tanım 2.1.55 : Bir M modülünün has bir alt modülü *N* olsun. *M* nin, *N* yi kapsayan *N* den başka hiçbir has alt modülü yoksa *N* ye bir **maksimal** alt modül denir.

Tanım 2.1.56 : Bir *M* modülünün 0 dan farklı bir alt modülü *N* olsun. *M* nin *N* de kapsanan 0 dan ve *N* den başka hiçbir alt modülü yoksa, *N* ye bir **minimal** alt modül denir.

Tanım 2.1.57 : R bir halka ve $\{M_i\}_{i \in I}$ ailesi, bir R-modüller ailesi olsun. Her $i \in I$ bileşeni $m_i \in M_i$ olmak üzere,

$$\prod M_i = \{(m_i) : m_i \in M_i, i \in I\}$$

kartezyen çarpım kümesini alalım. Toplama ve skalerle çarpım işlemlerini bileşen tanımlayarak;

$$(m_i) + (m'_i) = (m_i + m'_i) \text{ ve } r(m_i) = (rm_i)$$

işlemleri altında, $\prod M_i$ bir R-modüldür. $\prod M_i$, *R*-modüle $\{M_i\}_{i \in I}$ ailesinin direkt çarpımı denir. Bu çarpımda, bileşenlerinden ancak sonlu tanesi sıfır olmayan (bileşenlerin hemen hemen hepsi sıfır) elemanlarında oluşturduğu alt küme de bir alt modüldür. Bu alt modüle de $\{M_i\}_{i \in I}$ ailesinin (dış) direkt toplamı denir ve $\bigoplus_{i \in I} M_i$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.58 : *R* bir halka ve $\{M_i\}_{i\in I}$ ailesi, bir *R*-modüller ailesi olsun. Her $j \in I$ için

$$p_j : \prod M_i \to M_j ,\ p_j((m_i)) = m_j$$

ile tanımlı fonksiyona, *j*.ci izdüşüm ve her $i \neq j$ için, $m_i = 0$ olmak üzere, $i_j(m_j) = (m_i)$ ile tanımlı

$$i_j : M_j \to \prod M_i$$

fonksiyonuna da *j*.ci içerme fonksiyonu denir.

İzdüşümün örten ve içermenin bire bir homomorfizmalar olduğu açıktır. Ayrıca, $p_j i_j = 1_{M_j}$ ve her $i \neq j$ için, $p_j i_j = 0$ dır.

Önerme 2.1.59 : *R* bir halka ve $\{M_i\}_{i\in I}$, bir *R*-modüller ailesi olsun. Her $j \in I$ için,

$$M_j^{'} = \{(m_i) \in \underset{i\in I}{\oplus} M_i : \text{her } i \neq j \text{ için, } m_i = 0\},$$

$\underset{i\in I}{\oplus} M_i$ nin bir alt modülüdür.

1. Her $i \in I$ için, $M_i^{'} \simeq M_i$ dir.
2. $\sum_{i\in I} M_i^{'} = \underset{i\in I}{\oplus} M_i$
3. Her $j \in I$ için, $M_j^{'} \cap (\sum_{i\neq j} M_i^{'}) = 0$ dır.

Tanım 2.1.60 : *R* bir halka ve M bir R-modül ve $\{M_i\}_{i\in I}$ ailesi, M nin bir R-alt modüller ailesi olsun.

1. $M = \sum_{i\in I} M_i$, yani her $m \in M$ elemanı, $m_i \in M_i$ olmak üzere sonlu toplam olarak, $m = \sum_{i\in I} m_i$ şeklinde yazılabiliyor ve
2. Bu yazılış ancak tek türlü ise *M*, $\{M_i\}_{i\in I}$ alt modüllerinin iç direkt toplamı denir ve $M = \underset{i\in I}{\oplus} M_i$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.61 : Bir modül sıfırdan farklı iki alt modülünün direkt toplamına izomorf ise **ayrışabilir**, aksi halde **ayrışamaz** modül denir.

Tanım 2.1.62 : R-modüllerin bir dizisi ve bunlar arasında da

$$\to M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n-1}}$$

R-homomorfizmaları verilsin. Eğer her $n \geq 0$ için, $\operatorname{Im} f_{n-1} = Çekf_n$ ise bu diziye tam denir. Eğer belli bir yerden sonra modüller hep sıfırsa,

$$\to M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \to 0$$

veya belli bir yerden önce modüller hep sıfırsa

$$0 \to M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \to$$

ile gösterilir. Özel olarak,

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

şeklindeki tam diziye de bir kısa tam dizi denir.

Kısa tam dizide f nin bire bir, g nin örten ve $\operatorname{Im} f = Çekg$ olduğu tamlık tanımından anlaşılır. Ayrıca,

$$M / \operatorname{Im} f = M / Çekg \simeq N$$

dir.

Önerme 2.1.63 : $M, M_1, ..., M_n$ (ki burada $n \in \mathrm{N}$ ile $n \geq 2$) R değişmeli halkası üzerinde modüller olsun.

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{q_1} \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \xrightarrow{P_1^{'}} \bigoplus_{i=2}^{n} M_i \longrightarrow 0$$

dizisi bir tam dizidir ki burada q_1 kanonik örten ve her $(m_1, ..., m_n) \in \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ için $P_1^{'}((m_1, ..., m_n)) = (m_2, ..., m_n)$ ile $P_1^{'}$ kanonik izdüşümdür.

Önerme 2.1.64 : R bir halka olsun. L, M, N birer R-modül ve

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

bir kısa tam dizi ise aşağıdaki ifadeler birbirine denktirler.

1. $g\alpha = 1_N$ olacak şekilde bir $\alpha : N \to M$, R-homomorfizması vardır.
2. $\beta f = 1_L$ olacak şekilde bir $\beta : M \to L$, R-homomorfizması vardır.
3. $M \simeq L \oplus N$ dir.

Tanım 2.1.65 : Önceki önermenin koşullarından birini sağlayan kısa tam diziye, ayrışabilir(split) kısa tam dizi denir.

Önerme 2.1.66 : i) $0 \longrightarrow H \longrightarrow M \longrightarrow M/H \longrightarrow 0$ kısa tam dizidir.
ii) $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$ ayrışabilir(split) kısa tam dizidir.

Tanım 2.1.67 : M bir R-modül olsun. M nin her alt modülü, M nin bir direkt toplam terimi ise M ye **tamamen ayrışabilir** denir.
Bu tanım altında, M tamamen ayrışır bir R-modül ise her

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisinin ayrışan kısa tam dizi olduğu anlaşılır.

Önerme 1.1.68 : R değişmeli halka ve $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ kısa tam dizi olsun ki bu dizi ayrışabilir $\Leftrightarrow h: N \to M$ ve $e: M \to L$ R modül homomorfizmaları vardır yani

$$eof = 1d_L, \qquad goh = 1d_N, \qquad eoh = 0, \qquad foe + hog = 1d_M \text{ dır.}$$

İspat : Dizi ayrışabilir olsun.O zaman bazı $M' \subseteq M$ için $M = Çekg \oplus M'$ dır.Verilen herhangi bir $n \in N$ için $\exists m \in M$ $g(m) = n$ ile $h: N \to M$ tanımlandığından M ; $Çekg, M'$ nin direkt toplamıdır. $\forall m \in M$ için $m_1 \in Çekg,\ m_2 \in M'$ $m = m_1 + m_2$ tek türlü olarak yazılır.Dahası $M' n Çekg = \{0\}$,

$m = m_1 + m_2$
$r = r_1 + r_2$ $\quad r_1 \in Çekg,\ r_2 \in M'$ $\qquad g(m) = g(r) = n$ tek türlüdür.O zaman

$g(m - r) = 0 \Rightarrow m - r \in Çekf \Rightarrow \underbrace{(m - r)}_{\in Çekg} =$

$\underbrace{(m_1 - r_1)}_{\in Çekg} + (m_2 - r_2) \Rightarrow m_2 - r_2 \in ÇekgnM' = \{0\} \Rightarrow m_2 = r_2$ dır. $h(n) = m_2$ tanımı h iyi tanımlı yapar.

Verilen herhangi bir $m \in M$ için $k: M \to L$ tanımlansın. $\underbrace{m = m_1 + m_2}_{\in Çekg = \operatorname{Im} f}$ tek türlü $\Rightarrow$ $l \in L$ için $m_1 = f(l)$ dır.

Teorem 2.1.69 : R bir halka M, N ve P de R-modüller olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktirler.

1. Her $M \xrightarrow{f} P \to 0$, R-epimorfizması için, $f\alpha = 1_P$ olacak şekilde bir $\alpha: P \to M$, R-homomorfizması vardır.
2. P, bir F serbest R-modülünde bir direkt toplam terimdir.

3. Her $M \xrightarrow{g} N \to 0$, R-epimorfizması ve her $h: P \to N$, R-homomorfizması için, $gh = h$ olacak şekilde bir $h: P \to M$, R-homomorfizması vardır. Bu özelliği aşağıdaki diyagramla gösterebiliriz.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "h"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Tanım 2.1.70 : *R* bir halka ve *P* bir *R*-modül olsun. *P* modülü, yukarıdaki teoremin denk koşullarından birini sağlarsa, *P* ye **projektif** *R*-modül denir.

Teorem 2.1.71 : Her serbest R-modül projektiftir.

Önerme 2.1.72 : X projektif ve $X = M \oplus N \Rightarrow M$ projektiftir

Önerme 2.1.73 : Projektif modüllerin direkt toplamı projektiftir.

Önerme 2.1.74 : R üzerinde her M modül

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow X \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

R üzerinde modüllerin bir kısa tam dizisi içinde yazılabilir ki burada X projektiftir. $(M \simeq X/Kerg)$

Tanım 2.1.75 : $M \in M_R$ nin projektif boyutu

$$pd(M) = pd_R(M) = \min(n : P^n[M] = 0)$$

olarak tanımlanır. Eğer böyle bir n yoksa $pd_R(M)$ nin ∞ dır. (Açıkca ; $pd(M) = 0$ ancak ve ancak M bir projektif modüldür.)

Önerme 2.1.76 : $M \in M_R$ ve $n \geq 0$ için aşağıdaki durumlar denktir.

1) $pd_R(M) \leq n$

2) Herhangi projektif çözünürlüğü

$$P_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} P_{n-2} \longrightarrow \ldots\ldots\ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

için $Çek\alpha_{n-1}$ projektif modüldür.

($n=0$ durumunda "M projektif olduğu kolaylıkla gösterilebilir.)

3) Bir sonlu projektif çözünürlüğü vardır.

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{\alpha_n} P_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \cdots\cdots\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Dahası , $n \geq 1$ için , $pd_R(M)=n$ dir ancak ve ancak (3) deki bir sonlu projektif vardır ki burada α_n split değildir.

Tanım 2.1.77 : R halkasının global boyutu

$$gl.\dim R = \sup\left\{ pd_R(M) : M \in M_R \right\} \leq \infty$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.1.78 : $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ M_R içinde bir tam dizi olsun. Eğer $pd(A)$, $pd(B)$, $pd(C)$ nin ikisi sonlu ise üçüncüde sonludur. Her bir durumda

(1) $pd(A) < pd(B)$ ise $pd(C) = pd(B)$ dir.

(2) $pd(A) > pd(B)$ ise $pd(C) = pd(A)+1$ dir.

(3) $pd(A) = pd(B)$ ise $pd(C) \leq pd(A)+1$ dir.

Sonuç 2.1.79 : $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ M_R içinde bir tam dizi olsun. $pd(B) \leq \max\left\{ pd(A), pd(C) \right\}$ iken $pd(C) = pd(A)+1$ eşitliği vardır.

Sonuç 2.1.80 : $0 = B_0 \subseteq B_1 \subseteq \cdots\cdots \subseteq B_n = B$ B_R modülünün bir sonlu ayrışımı olsun. O zaman $pd(B) \leq \max\left\{ pd(B_{i+1}/B_i) \right\}$ dir.

Önerme 2.1.81 : $M = \oplus_i M_i$ olsun. O zaman $pd(M) = \sup\left\{ pd(M_i) \right\}$ dir.

BÖLÜM 3

Bu bölümde Evrensel Modüllerin tanımı, özellikleri ve bazı sonuçları örneklerle birlikte Olgun,N. [5] çalışmalarından yararlanılarak verilmiştir.

EVRENSEL MODÜLLER

3.1. Diferansiyel Operatör Modülleri

Bu bölümde ilk olarak diferansiyel operatörlerin tanımı, özellikleri ve bazı sonuçları örneklerle birlikte verilerek konuya başlangıç yapılacaktır.

Bu çalışmada R ile birim elemanlı ve değişmeli bir halkayı gösterelim.

R karakteristiği sıfır olan bir k cismi üzerinde k-cebir ve M,N de R- modül olsun. $Hom_k(M,N)$, M den N ye k-lineer dönüşümlerin kümesi olsun. O zaman $f \in Hom_k(M,N)$, $m \in M$ ve $r \in R$ için

$$rf : m \to rf(m)$$
$$fr : m \to fr(m) = f(rm)$$

tanımları ile $Hom_k(M,N)$ üzerinde bir ikili R-modül yapısı kurulabilir.

$$fr(m) - rf(m) = \left[f, r\right](m)$$

olarak gösterelim. $\left[f, r\right] \in Hom_k(M,N)$ olur.

Tanım 3.1.1 : $Hom_k(M,N) = D_R^0(M,N) = \left\{ f \in Hom_k(M,N) \ : \ \left[f, r\right] = 0 \ \ \forall r \in R \right\}$ olarak tanımlayalım. $D_R^{n-1}(M,N)$ tanımlanmış olsun. O zaman

$$D_R^n(M,N) = \left\{ f \in Hom_k(M,N) \ : \ \left[f, r\right] \in D_R^{n-1}(M,N) \ \ \forall r \in R \right\}$$

ile tanımlanır ve $D_R^n(M,N)$ ye n-inci dereceden diferansiyel operatör modülü denir.

Önerme 3.1.2 : $D_R^n(M,N)$ modülü $\mathrm{Hom}_k(M,N)'nin$ bir alt R-modülüdür.

İspat : Kanıtı tümevarımla yapalım.

$n=0$ için $\mathrm{D}_R^n(M,N)=Hom_R(M,N)$ olup $R-$modüldür.

$n-1$ için önermeyi doğru kabul edelim.

$f,g\in D_R^n(M,N)$ olsun.

$$\begin{aligned}\left[f+g,r\right]&=(f+g)(r)-r(f+g)\\&=f(r)+g(r)-rf-rg\\&=f(r)-rf+g(r)-rg\\&=\left[f,r\right]+\left[g,r\right]\end{aligned}$$

$\left[f,r\right],\left[g,r\right]\in D_R^{n-1}(M,N)$ olup hipotezden dolayı $\left[f,r\right]+\left[g,r\right]\in D_R^{n-1}(M,N)$ ’dir. Böylece $f+g\in D_R^n(M,N)$ olur.

$s\in R$ ve $f\in D_R^n(M,N)$ olsun.

$$\begin{aligned}\left[sf,r\right]&=(sf)(r)-r(sf)\\&=sf(r)-rsf\\&=sf(r)-srf\\&=s(f(r)-rf)\\&=s\left[f,r\right]\end{aligned}$$

$\left[f,r\right]\in D_R^{n-1}(M,N)$ olup hipotezden dolayı $s\left[f,r\right]\in D_R^{n-1}(M,N)$ ve böylece $sf\in D_R^n(M,N)$ olur.

Bu tezde her sıfırdan küçük n tamsayısı için $D_R^n(M,N)=0$ olarak alacağız. Tanımdan dolayı

$$\begin{aligned}&D_R^0(M,M)=D_R^0(M)=End_R(M)\\&D_R^0(R,M)=Hom_R(R,M)\simeq M\\&D_R^0(R,R)\simeq R\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Önerme 3.1.3 : Her n tam sayısı için $D_R^n(M,N)\subseteq D_R^{n+1}(M,N)$ dir.

İspat : $n<0$ için tanımdan dolayı açıktır.

$n=0$ ve $f \in D_R^0(M,N) = Hom_R(M,N)$ olsun.Tanımdan $[f,r]=0 \in Hom_R(M,N)$ dir. Buradan $f \in D_R^1(M,N)$ olduğu görülür.

Şimdi $n-1$ için önermenin olduğunu kabul edelim. $D_R^{n-1}(M,N) \subseteq D_R^n(M,N)$ ve $f \in D_R^n(M,N)$ olsun.Tanımdan dolayı $[f,r] \in D_R^{n-1}(M,N)$ olup hipotezden dolayı $[f,r] \in D_R^n(M,N)$ ve yine tanımdan dolayı $f \in D_R^{n+1}(M,N)$ dir.

Diferansiyel operatör modülünün tanımına göre eğer;
$f \in D_R^0(M,N) = Hom_R(M,N)$ ise her $r_0 \in R$ ve her $m \in M$ için
$[f,r_0](m) = f(r_0 m) - r_0 f(m) = r_0 f(m) - r_0 f(m) = 0$ dır.

Yani $f \in D_R^0(M,N)$ ise $[f,r_0]=0$

$f \in D_R^1(M,N)$ ise $[[f,r_0],r_1]=0$

....

....

....

Benzer şekilde devam edilirse

$r_0, r_1, ..., r_n \in R$ için $f \in D_R^n(M,N)$ ise $\left[......\left[\left[[f,r_0],r_1\right],.....,r_n\right]\right]=0$ bulunur.

Bundan sonra $\left[.......\left[\left[[f,r_0],r_1\right],.....,r_n\right]\right]$ ‘yi $[f,r_0,r_1,........,r_n]$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.1.4 : M ’den N ’ye olan bütün $k-lineer$ diferansiyel operatörler uzayı

$$D_R(M,N) = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_R^n(M,N)$$

ile tanımlanır.

Şimdi diferansiyel operatör modülleri ile ilgili örnekler verelim.

Örnek 3.1.5 : $R = k[x]$ olsun.

$$D_R^0(R) \simeq k[x]$$

$$D_R^1(R) = <1, \frac{\partial}{\partial x}>$$

$$D_R^2(R) = <1, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}>$$

$$D_R^n(R) = <1, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial^n}{\partial x^n}>$$

Örnek 3.1.6 : $R = k\left[x, y\right]$ olsun.

$$D_R^1(R) = <1, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}>$$

$$D_R^2(R) = <1, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}>$$

Örnek 3.1.7 : $R = k\left[x_1, ..., x_s\right]$ polinomlar cebiri olsun. $D_R^1(R)$, bazı

$$\left\{1, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_s}\right\}$$

olan bir serbest R -modüldür. Bunu gösterelim.

$D \in D_R^1(R)$ ve $K = \left\{1, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_s}\right\}$ kümesi olsun. O zaman $i = 1, ..., s$ için $D(x_i^n) = n x_i^{n-1} D(x_i)$ dir. Böylece

$$(D - \sum_{i=1}^{n} D(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i})(x_i^{i_1} ......x_s^{i_s}) = 0$$

ve buradan da

$$(D = \sum_{i=1}^{n} D(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i})$$

elde edilir. Böylece $D \in <K>$ olduğu görülür. Bu küme aynı zamanda lineer bağımsız olduğundan K kümesi $D_R^1(R)$ 'nin bazıdır.

Örnek 3.1.8 : $R = k\left[x_1 ....x_s\right]$ polinomlar cebiri olsun. $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} : R \to R$

$i, j = 1, 2, ..., s$ için $\partial_i(x_j) = \delta_{i,j}$ olsun. ($\delta_{i,j}$ Kronecker deltası) $x^\beta = x_1^{\beta_1} ....x_s^{\beta_s} \in R$ olmak üzere $|\alpha|$ 'inci dereceden $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} ....\partial_s^{\alpha_s}$ kısmi türevi

$$\partial^\alpha(x^\beta) = \begin{cases} \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} x^{\beta - \alpha}, & \beta \geq \alpha \\ 0, & \text{diger yerlerde} \end{cases}$$

R 'nin $|\alpha|$ 'inci dereceden diferansiyel operatörüdür.

Tanım 3.1.9 : $End_k(M)$ nin bir k- alt cebiri olan $D_R(M,M)$ ye M üzerinde diferansiyel operatörler halkası denir ve $D_R(M)$ ile gösterilir.

Önerme 3.1.10 : $f \in D_R^n(M,N)$ ve $g \in D_R^m(N,K)$ ise $gf \in D_R^{m+n}(M,K)$ dir.

İspat : Kanıtı $m+n$ üzerinden tümevarımla yapalım. $m+n=0$ alalım. Böylece $f \in Hom_R(M,N)$ ve $g \in Hom_R(N,K)$ dir. Buradan $gf \in Hom_R(M,K)$ olur.

$m+n-1$ için önerme doğru olsun.

$f \in D_R^n(M,N)$ ve $g \in D_R^m(N,K)$ olsun.

$$
\begin{aligned}
[gf,r] &= (gf)(r) - r(gf) \\
&= (gf)(r) - r(gf) + (g(rf) - g(rf)) \\
&= g(f(r)) - g(rf) + g(rf) - rg(f) \\
&= g(fr - rf) + (gr - rg)f \\
&= g[f,r] + [g,r]f
\end{aligned}
$$

$g \in D_R^m(N,K)$ ve $[f,r] \in D_R^{n-1}(M,N)$ olup hipotezden dolayı $g[f,r] \in D_R^{n+m-1}(M,K)$ ’dır.

Aynı şekilde $[g,r] \in D_R^{m-1}(N,K)$ ve $f \in D_R^n(M,N)$ olup $[g,r]f \in D_R^{n+m-1}(M,K)$ ’dır.

O halde $g[f,r]+[g,r]f \in D_R^{n+m-1}(M,K)$ olup $gf \in D_R^{n+m}(M,K)$ bulunur.

R, k-cebir ve $R \otimes_k R$ de R halkasının yine kendisiyle olan tensor çarpımını göstersin. $r_i, r_j, s_i, s_j \in R$ olmak üzere

$$(\sum_i r_i \otimes_k s_i).(\sum_j r_j \otimes_k s_j) = \sum_{i,j} r_i r_j \otimes_k s_i s_j$$

çarpımıyla $R \otimes_k R$ birim elemanlı, değişmeli bir halkadır.

Her $r,s \in R$, $f \in Hom_k(M,N)$ ve $m \in M$ için

$$(r \otimes_k s)f : m \to rf(sm)$$

olarak tanımlanırsa, $Hom_k(M,N)$ üzerinde $R \otimes_k R$-modül yapısı kurulabilir.

$\theta : R \otimes_k R \to R$ çarpım dönüşümü

$$\sum_i r_i \otimes s_i \to \sum_i r_i s_i$$

ile tanımlansın.Bu dönüşüm hem halka hem de R-modül homomorfizması ve aynı zamanda örtendir.

$I = Çek\theta$ olmak üzere

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \otimes_k R \xrightarrow{\theta} R \longrightarrow 0$$

R-modül homomorfizmalarının bir tam dizisi elde edilir.

Önerme 3.1.11 : I ideali $\{1 \otimes r - r \otimes 1 ..... r \in R\}$ kümesi tarafından üretilir.

İspat : $\sum_i r_i \otimes s_i \in I$ olsun. O zaman $\sum_i r_i s_i = 0$ dır.Böylece

$$\begin{aligned}\sum_i r_i \otimes s_i &= \sum_i r_i \otimes s_i - (\sum_i r_i s_i) \otimes 1 \\ &= \sum_i (r_i \otimes s_i - r_i s_i \otimes 1) \\ &= \sum_i (r_i \otimes 1)(1 \otimes s_i - s_i \otimes 1) \\ &= \sum_i r_i (1 \otimes s_i - s_i \otimes 1)\end{aligned}$$

olup istenen elde edilir.

Önerme 3.1.12 : M, N R-modül ve $f \in Hom_k(M, N)$ olsun.O zaman her $r \in R$ ve her $m \in M$ için

$$[f, r] = (1 \otimes r - r \otimes 1) f$$

eşitliği vardır.

İspat : M, N R-modül ve $f \in Hom_k(M, N)$ olsun. O zaman her $r \in R$ ve her $m \in M$ için

$$\begin{aligned}[f, r] &= (fr)(m) - (rf)(m) \\ &= f(rm) - r(fm) \\ &= (1 \otimes r) f(m) - (r \otimes 1) f(m) \\ &= (1 \otimes r - r \otimes 1) f(m)\end{aligned}$$

olup

$$[f,r]=(1\otimes r-r\otimes 1)f$$

eşitliğini elde ederiz.

Yukarıdaki tanımlarda I ideali $R\otimes_k R$'nin bir ideali idi. O zaman I^{n+1} de $R\otimes_k R$'nin bir ideali olup

$$\left\{\prod_{i=0}^{n}(1\otimes r_i-r_i\otimes 1):\ r_i\in R\right\}$$

kümesi tarafından üretilir.

$$\prod_{i=0}^{n}(1\otimes r_i-r_i\otimes 1)=\sum_{T\subseteq\{0,1,\dots,n\}}(-1)^{|T|}(r_T\otimes r_{T'})$$

formülü ile verilir. Bu formülle T', T'nin $\{0,1,\dots\dots,n\}$ kümesine göre tümleyenini, $r_T=\prod_{k\in T}r_k$ yı ve $|T|$ de T nin eleman sayısını gösteriyor. $r_\varnothing=1$ olarak alınacaktır.

Önerme 3.1.13 : M,N R-modül ve $f\in Hom_k(M,N)$ olsun . f, n inci dereceden diferansiyel operatördür $\Leftrightarrow I^{n+1}f=0$ dır.

İspat : f, n inci dereceden diferansiyel operatördür.

$$\Leftrightarrow [f,r_0,r_1,\dots\dots,r_n] \quad \text{her} \quad r_i\in R,\quad i=0,1,\dots,n$$

$$\Leftrightarrow \left(\prod_{i=0}^{n}(1\otimes r_i-r_i\otimes 1)\right)f=0 \quad \text{her} \quad r_i\in R,\quad i=0,1,\dots,n$$

$$\Leftrightarrow I^{n+1}f=0$$

Sonuç 3.1.14 : $f\in D_R^n(M,N)$ olsun.

$$f(r_0r_1\dots\dots r_nm)=\sum_{T\subseteq\{0,1,\dots\dots,n\}\ \text{ve}\ |T|\geq 1}(-1)^{|T|-1}r_T\,f(r_{T'}m)$$

dir.

İspat : Bir önceki önermeden dolayı $I^{n+1}f=0$ dır. Böylece

$$0=\left[\prod_{i=0}^{n}(1\otimes r_i-r_i\otimes 1)f\right](m)$$

$$= \left[\sum_{T \subseteq \{0,1,\ldots\ldots,n\}} (-1)^{|T|} (r_T \otimes r_{T'}) f \right] (m)$$

$$= \sum_{T \subseteq \{0,1,\ldots\ldots,n\}} (-1)^{|T|} r_T f(r_{T'} m)$$

ve buradan

$$f(r_0 r_1 \ldots\ldots r_n m) = \sum_{T \subseteq \{0,1,\ldots\ldots,n\} \text{ ve } |T| \geq 1} (-1)^{|T|-1} f(r_{T'} m)$$

bulunur.

3.2 Evrensel Diferansiyel Modülleri

Bu bölümde, verilen herhangi bir M $R-$modül üzerinde evrensel modülün nasıl tanımlandığı gösterilecek. Evrensel modüllerin özellikleri, bazı örnekler ve diferansiyel modüllerle arasındaki bağıntılar verilecek.

M, $R-$modül ve $r \otimes s \in R \otimes_k R, r' \otimes m \in R \otimes_k M$ için $(r \otimes s)(r' \otimes m) = rr' \otimes sm$ ile $R \otimes_k M$ üzerinde $R \otimes_k R-$modül yapısı tanımlanabilir.

$$\mu : M \to R \otimes_k M$$
$$m \to \mu(m) = 1 \otimes m$$

sağ çarpım dönüşümü ve

$$\pi : R \otimes_k M \to \frac{R \otimes_k M}{I^{n+1}(R \otimes_k M)}$$
$$r \otimes m \to \pi(r \otimes m) = \overline{r \otimes m}$$

doğal dönüşümü olsun.

Önerme 3.2.1 :

$$\pi\mu : M \to \frac{R \otimes_k M}{I^{n+1}(R \otimes_k M)}$$

$\pi\mu(m) = \overline{1 \otimes m}$ bileşkesi bir k-lineer dönüşümü olup n-inci dereceden diferansiyel operatördür.

İspat : $I^{n+1}\pi\mu = 0$ olup Önerme 3.1.13 den dolayı $\pi\mu$ homomorfizması n-inci dereceden diferansiyel operatördür.

Tanım 3.2.2 : M, N ve K R-modül ve $\Delta_n : M \to N$ n-inci dereceden diferansiyel operatör olsun. Herhangi bir n-inci dereceden $f : M \to K$ diferansiyel operatörü için

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & K \\ \Delta_n \downarrow & & \downarrow I_K \\ N & \xrightarrow{\alpha} & K \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan $\alpha\Delta_n = f$ olacak şekilde bir tek $\alpha : N \to K$ R-modül homomorfizması varsa o zaman $\Delta_n : M \to N$ diferansiyel operatörüne n-inci dereceden evrensel diferansiyel operatörü denir.

Teorem 3.2.3 : R k-cebir ve M,N R-modül olsun. O zaman

$$Hom_k(M, N) \simeq Hom_R(R \otimes_k M, N)$$

dir.

Herhangi bir M R-modülü üzerinde $n-$inci dereceden evrensel diferansiyel operatörün varlığı aşağıdaki teoremde gösteriliyor.

Teorem 3.2.4 :

$$\pi\mu : M \to \frac{R \otimes_k M}{I^{n+1}(R \otimes_k M)}$$

$$\pi\mu(m) = \overline{1 \otimes m}$$

dönüşümü $n-$inci dereceden evrensel diferansiyel operatördür.

İspat : N R-modül ve $f : M \to N$ n-inci dereceden diferansiyel operatör olsun. $R \otimes_k M$'nin evrensellik özelliğinden dolayı

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \mu \downarrow & & \downarrow 1_N \\ R \otimes_k M & \xrightarrow{F} & N \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan $F\mu = f$ olacak şekilde bir tek

$$F : R \otimes_k M \to N$$

$R-$modül homomorfizması vardır ve $F(r \otimes_k m) = rf(m)$ olarak tanımlanır.

$f, n-$inci dereceden diferansiyel operatör olduğundan $I^{n+1} f = 0$ ve buradan $F(I^{n+1}(R \otimes_k M)) = 0$ dır. Böylece

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \mu \downarrow & & \downarrow 1_N \\ R \otimes_k M & \xrightarrow{F} & N \\ \pi \downarrow & & \downarrow 1_N \\ \dfrac{R \otimes_k M}{I^{n+1}(R \otimes_k M)} & \xrightarrow{\overline{F}} & N \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan $\overline{F}\pi = F$ olacak şekilde bir tek $\overline{F} : \dfrac{R \otimes_k M}{I^{n+1}(R \otimes_k M)} \to N$

$R-$modül homomorfizması vardır ve $\overline{F}(\overline{r \otimes_k} m) = \overline{rf(m)}$ olarak tanımlanır. Böylece $\overline{F}\pi\mu = F\mu = f$ olup $\pi\mu$ evrenseldir.

Tanım 3.2.5 : $\dfrac{R \otimes_k M}{I^{n+1}(R \otimes_k M)}$ modülüne M üzerinde $n-$inci dereceden evrensel diferansiyel modülü denir ve $\Omega_n(M)$ ile gösterilir. Burada M $R-$ modülü yerine R'nin kendisi alınırsa $\Omega_n(R) = \dfrac{R \otimes_k R}{I^{n+1}}$ olur.

Herhangi bir M $R-$modülü üzerinde $n-$inci dereceden evrensel diferansiyel modülün tekliği aşağıdaki teoremde gösteriliyor.

Teorem 3.2.6 : M $R-$modül olsun. Eğer $\Omega_n^{'}(M)$, M R-modülünün başka bir evrensel diferansiyel modülü ise o zaman $\Omega_n^{'}(M) \simeq \Omega_n(M)$ dir.

İspat : $\Delta_n : M \to \Omega_n(M)$ ve $\Delta_n^{'} : M \to \Omega_n^{'}(M)$ $n-$inci dereceden evrensel diferansiyel operatörleri olsun.

Δ_n nin evrensellik özelliğinden dolayı

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Delta_n^{'}} & \Omega_n^{'}(M) \\ \Delta_n \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_n(M) & \xrightarrow{\alpha} & \Omega_n^{'}(M) \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan $\alpha\Delta_n = \Delta_n^{'}$ olacak şekilde bir tek

$\alpha : \Omega_n(M) \to \Omega_n^{'}(M)$ $R-$modül homomorfizması vardır.

Benzer şekilde $\Delta_n^{'}$ nin evrensellik özelliğinden dolayı

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Delta_n} & \Omega_n(M) \\ \Delta_n^{'} \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_n(M) & \xrightarrow{\beta} & \Omega_n^{'}(M) \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan $\beta\Delta_n^{'} = \Delta_n$ olacak şekilde bir tek $\beta : \Omega_n^{'}(M) \to \Omega_n(M)$ R-modül homomorfizması vardır.

$$\alpha\Delta_n = \Delta_n^{'}$$
$$\beta\alpha\Delta_n = \beta\Delta_n^{'} = \Delta_n$$
$$\beta\alpha\Delta_n(m) = \Delta_n(m)$$

O halde

$$\beta\alpha = 1_{\Omega_n}(M)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\beta\Delta_n^{'} = \Delta_n$$
$$\alpha\beta\Delta_n^{'} = \alpha\Delta_n = \Delta_n^{'}$$
$$\alpha\beta\Delta_n^{'}(m) = \Delta_n^{'}(m)$$

yapılırsa

$$\alpha\beta = 1_{\Omega_n^{'}}(M)$$

bulunur.

O halde $\Omega_n^{'}(M) \simeq \Omega_n(M)$ bulunur.

Şimdi evrensel modüllerle ilgili bazı örnekler verelim.

Örnek 3.2.7 : $R = k[x_1, ..., x_s]$ polinomlar cebiri ve $\delta_n : R \to \Omega_n(R)$ n-inci dereceden evrensel diferansiyel operatörü olsun. O zaman $n-$inci dereceden evrensel diferansiyel modülü $\Omega_n(R)$,

$$\left\{ \delta_n(x^{\alpha}) : \ \mathrm{x}^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} .....x_s^{\alpha_s} , \ |\alpha| \leq n \right\}$$

baz kümesi ile serbest bir $R-$modüldür.

Örnek 3.2.8 : $K = k(x_1, . . ., x_s)$ cismi $R = k\left[x_1,....,x_s\right]$' nin kesir cismi olsun. $\delta_n : K \to \Omega_n(K)$ $n-$inci dereceden evrensel diferansiyel operatörü olmak üzere

$$\left\{ \delta_n(x^{\beta}) : \ \mathrm{x}^{\beta} = x_1^{\beta_1} .....x_s^{\beta_s} , \ |\beta| \leq n \right\}$$

baz kümesi ile $n-$inci dereceden evrensel diferansiyel modülü $\Omega_n(K)$ bir $K-$vektör uzayıdır.

Teorem 3.2.9 : M ve N $R-$modül olsun. O zaman

$$Hom_R(\Omega_n(M), N) \simeq D_R^n(M, N)$$

$R-$modül izomorfizması vardır.

Kanıt : $\phi(\alpha) = \alpha\Delta_n$ olmak üzere $\phi : Hom_R(\Omega_n(M), N) \to D_R^n(M, N)$ $R-$modül homomorfizması tanımlansın. $\alpha \in \phi : Hom_R(\Omega_n(M), N)$ için Önerme 3.1.10 dan dolayı $\alpha\Delta_n \in D_R^n(M, N)$ dir.

$\Omega_n(M)$ nin evrensellik dolayı ϕ örtendir.

Şimdi ϕ nin birebir olduğunu gösterelim. $\phi(\alpha) = 0$ olsun. O zaman $\forall m \in M$ için $\alpha\Delta_n(m) = 0$ dır. Böylece $\alpha(\Omega_n(M)) = 0$ ve buradan da $\alpha = 0$ olup birebirdir.

Böylece ϕ $R-$modül izomorfizmasıdır.

M ve $N, R-$modülleri R olarak alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.10 : $Hom_R(\Omega_n(R), R) \simeq D_R^n(R)$ $R-$modül izomorfizması vardır.

Teorem 3.2.11 : $M, R-$modül olsun. O zaman $\Omega_n(M) \simeq M \otimes_R \Omega_n(R)$ dir.

İspat : $M \simeq R \otimes_R M$ doğal izomorfizması vardır.Buradan $\Omega_n(M) \simeq \Omega_n(R \otimes_R M)$ dir. Tanımdan dolayı $\Omega_n(R \otimes_R M) = R \otimes_k (R \otimes_R M) / I^{n+1} R \otimes_k (R \otimes_R M)$ dir.

$I^{n+1}R\otimes_k (R\otimes_R M)) = I^{n+1}\otimes_R M$ olup $\Omega_n(R\otimes_R M) = (R\otimes_k R)\otimes_R M / I^{n+1}\otimes_R M$ elde edilir. Böylece istenen izomorfizma $\Omega_n(M)\simeq M\otimes_R \Omega_n(R)$ elde edilmiş olur.

Teorem 3.2.12 : $(i\in I)$ için M_i'ler ve N $R-$modül olsun. O zaman

$i)$ $\Omega_n(\bigoplus_i M_i \simeq \bigoplus_i \Omega_n(M_i)$

$ii)$ $D_R^n(\bigoplus_i M_i, N)\simeq \bigoplus_i D_R^n(M_i, N)$

izomorfizmaları vardır.

İspat : i) Bir önceki teoremden dolayı $\Omega_n(\bigoplus_i M_i \simeq \bigoplus_i (M_i)\bigoplus_R \Omega_n(R)$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}(\bigoplus_i M_i)\otimes_R \Omega_n(R) &\simeq \bigoplus_i (M_i\otimes_R \Omega_n(R))\\ &\simeq \bigoplus_i \Omega_n(M_i)\end{aligned}$$

olup istenen elde edilir.

ii) Teorem 3.2.9 dan dolayı $D_R^n(\bigoplus_i M_i, N)\simeq Hom_R(\Omega_n\bigoplus_i M_i), N)$ idi. O halde i)' den dolayı

$$\begin{aligned}Hom_R(\Omega_n\bigoplus_i M_i), N) &\simeq Hom_R(\bigoplus_i \Omega_n(M_i), N)\\ &\simeq \bigoplus_i Hom_R(\Omega_n(M_i), N)\\ &\simeq \bigoplus_i D_R^n(M_i, N)\end{aligned}$$

olup istenen elde edilir.

BÖLÜM 4

Bu bölümde evrensel modüllerin projektif boyutları hesaplanacaktır. Bölümdeki temel tanım ve teoremler Olgun,N.(2005) (Sonlu üretilmiş cebirlerin evrensel diferansiyel modülleri)[5], Osborn,H.(1967) (Modules of Differentials) [6] ve [7], Olgun,N. ve Erdogan, A.(2006) (Some Results On Universal Modules) [9] kaynaklarından yararlanıldı.

EVRENSEL MODÜLLERİN PROJEKTİF BOYUTLARI

4.1.Evrensel Modüllerin Projektif Boyutları

İlk olarak evrensel modüllerin projektif boyutlarını hesaplamak için bilinmesi gerekli olan temel kavramlar verilecek daha sonra da projektif boyutlarının nasıl bulunduğu örnekler verilerek gösterilmeye çalışılacaktır.

Önerme 4.1.1 : $R = k[x_1, x_2, ..., x_s]$ polinomlar cebiri ve $I = (f_1, f_2, ..., f_t)$ *de* R nin bir ideali olsun. $\Delta_n : R \to \Omega_n(R)$, n-inci dereceden evrensel diferansiyel operatör olmak üzere L'nin $\{\Delta_n(x^\alpha f_i) | \quad i = 1,2,...,t \quad |\alpha| < n\}$ kümesi tarafından üretilen $\Omega_n(R)$'nin bir alt modülü olduğu varsayılırsa o zaman $R\Delta_n(I) \subseteq L + I\,\Omega_n(R)$dir.

İspat : Δ_n k-lineer operatör olduğuna göre her $g \in R$ için $\Delta_n(f_i g) \in L + I\,J_n(R)$ olduğunu göstermeliyiz. $|\alpha| < n$, $|\beta| < n$ olmak üzere $a_\alpha, b_\beta \in k$ için $g = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha + \sum_\beta b_\beta x^\beta \in R$ olsun. O zaman

$$\Delta_n(f_i g) = \sum_\alpha a_\alpha \Delta_n(x^\alpha f_i) + \sum_\beta b_\beta \Delta_n(x^\beta f_i)$$

dir.

$\sum_{\beta} b_\beta \Delta_n\left(x^\beta f_i\right)$ tanımından dolayı L 'nin içindedir.

Diğer kısım için $\Delta_n \in D^n\left(R, \Omega_n(R)\right)$ olduğundan dolayı Sonuç 3.1.14 kullanılırsa $|\mu| < n$ ve $|\nu| < n$ olmak üzere $c_\mu, d_\nu \in R$ için

$$\Delta_n\left(x^\alpha f_i\right) = \sum_{\mu} c_\mu \Delta_n\left(x^\mu f_i\right) + f_i \sum_{\nu} d_\nu \Delta_n\left(x^\nu\right)$$

eşitliği yazılabilir. Elde edilen son denklem ilk denklemde yerine yazılırsa

$$\Delta_n(f_i g) = \sum_{\alpha}\sum_{\mu} a_\alpha c_\mu \Delta_n\left(x^\mu f_i\right) + f_i \sum_{\alpha}\sum_{\nu} a_\alpha d_\nu \Delta_n\left(x^\nu\right) + \sum_{\beta} b_\beta \Delta_n\left(x^\beta f_i\right)$$

eşitliği elde edilir ki bu da $L + I\,\Omega_n(R)$ 'nin elemanıdır.

$R = k[x_1, x_2, \ldots\ldots, x_s]$ polinomlar cebiri ve $I = (f_1, f_2, \ldots\ldots, f_t)$ de R 'nin bir ideali olsun. $S = R/I$ afin cebiri

$$0 \to \frac{R\Delta_n(R) + I\,\Omega_n(R)}{I\,\Omega_n(R)} \to \frac{\Omega_n(R)}{I\,\Omega_n(R)} \xrightarrow{\ \theta\ } \Omega_n(S) \to 0$$

$S = R/I$ modül homomorfizmalarının tam dizisi vardır.

Önerme 4.1.2 : $\dfrac{R\Delta_n(R) + I\,\Omega_n(R)}{I\,\Omega_n(R)}$ modülü S -modül olarak

$\left\{ \Delta_n\left(x^\alpha f_i\right) + I\,\Omega_n(R) :\ |\alpha| < n \quad i = 1, 2, \ldots, t \right\}$

kümesi tarafından üretilir.

İspat : Bir önceki önerme kullanılırsa $\dfrac{L + I\,\Omega_n(R)}{I\,\Omega_n(R)}$,

$$\left\{ \overline{\Delta_n\left(x^\alpha f_i\right)} :\ i = 1, 2, \ldots, t \quad |\alpha| < n \right\}$$

kümesi tarafından üretilir.

Yine aynı önermeden $R\Delta_n(I) \subseteq L + I\,\Omega_n(R)$ olduğundan dolayı ;

$$\frac{L + I\,\Omega_n(R)}{I\,\Omega_n(R)} = \frac{R\Delta_n(R) + I\,\Omega_n(R)}{I\,\Omega_n(R)}$$

olup istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.3 : $\delta_n : R/I \to \Omega_n(R/I)$ n-inci dereceden evrensel diferansiyel *operatör* olmak üzere $\Omega_n(R/I)$ modülü $\{\delta_n(x^\alpha + 1) : |\alpha| < n\}$ kümesi tarafından üretilir.

İspat : $\Omega_n(R)$, bazı $\{\Delta_n(x^\alpha) : |\alpha| \le n\}$ kümesi olan serbest R-modül ve buradan $\dfrac{\Omega_n(R)}{I\,\Omega_n(R)}$ de bazı $\{\overline{\Delta_n(x^\alpha)} : |\alpha| \le n\}$ kümesi olan serbest R/I-modüldür. Böylece $\Omega_n(R/I)$'nin üreteçlerinin kümesi $\{\theta(\overline{\Delta_n(x^\alpha)}) : |\alpha| \le n\}$ kümesidir. Bu küme ise $\{\delta_n(x^\alpha + 1) : |\alpha| < n\}$ kümesi olup istenen sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.4 : $S = \dfrac{k[x_1, x_2, ..., x_s]}{(f)}$ afin tamlık bölgesi ise o zaman $\Omega_n(S)$'nin projektif boyutu 1 veya 1'den küçüktür.

İspat : $R = k[x_1, x_2, ..., x_s]$ polinomlar cebiri ve $\Delta_n : R \to \Omega_n(R)$ n-inci dereceden evrensel diferansiyel operatörü olsun.

m , R'nin f'yi içeren maksimal ideali olsun. R , s boyutlu regüler halka olup R'nin m deki lokalizasyonu R_m de s boyutlu regüler halkadır. $\Omega_n(R_m)$ rankı $\begin{pmatrix} n+s \\ s \end{pmatrix}$ olan serbest R_m-modülüdür. S , boyutu $s-1$ olan tamlık bölgesi olduğundan $R_m / f\,R_m$ de boyutu $s-1$ olan tamlık bölgesidir.

L , $R_m / f\,R_m$'nin kesir cismi olsun. O zaman $tr.\deg_L R_m / f\,R_m = s-1$ olup $\dim_L \Omega_n(L) = \begin{pmatrix} n+s-1 \\ s-1 \end{pmatrix}$ dir. Bu sayı aynı zamanda $\Omega_n(R_m / f\,R_m)$ nin de rankıdır.

Teorem 3.2.11 den $\Omega_n(L) = L \otimes_{R_m/f\,R_m} \Omega_n(R_m / f\,R_m)$ olarak alabiliriz. Sonuç 4.1.3 kullanılırsa

$$0 \to Çek\theta \to \Omega_n(R)/\,f\,\Omega_n(R) \xrightarrow{\theta} \Omega_n(S) \to 0$$

S - modül homomorfizmalarının tam dizisi elde edilir. M , m'nin S deki görüntüsü olmak üzere yukarıdaki tam dizi , S_M ile tensörlediği zaman

$$0 \to (Çek\theta)_M \to (\Omega_n(R)/\,f\,\Omega_n(R))_M \xrightarrow{\theta_M} (\Omega_n(S))_M \to 0$$

S_M - modül homomorfizmalarının tam dizisi elde edilir.

$\left(\Omega_n\left(R\right)/\ f\ \Omega_n\left(R\right)\right) \simeq \Omega_n\left(R_m\ /\ f\ R_m\right)$ izomorfizmasından dolayı $\left(\Omega_n\left(R\right)/\ f\ \Omega_n\left(R\right)\right)_M$ serbest modülü olup rankı $\begin{pmatrix} n+s \\ s \end{pmatrix}$ dir. Böylece

$$rank(Çek\theta_M) = \begin{pmatrix} n+s \\ s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n+s-1 \\ s-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+s-1 \\ s \end{pmatrix}$$

dir. Diğer taraftan $Çek\theta$, $\Sigma = \left\{\Delta_n\left(x^\alpha f\right) : |\alpha| < n\right\}$ kümesi tarafından üretilir ve bu kümenin elemen sayısı tam olarak $\begin{pmatrix} n+s-1 \\ s \end{pmatrix}$ dir. Böylece $Çek\theta_M$ serbest modül olup bazı Σ kümesidir.

m , R'nin herhangi bir maksimal ideali olduğuna göre $Çek\theta$ projektif S-modülüdür.

Sonuç olarak $pd\left(\Omega_n\left(S\right)\right) \leq 1$ dir.

Örnek 4.1.5 : $R = k\left[x_1, x_2\right]$ polinomlar cebiri ve I da $f = x_2^{\ 2} - x_1^{\ 3}$ elemanı tarafından üretilen R'nin bir ideali olsun. $S = R/I$ alalım. S afin tamlık bölgesi olup boyutu 1 dir. Sırasıyla $\Omega_1\left(S\right), \Omega_2\left(S\right)$ ve $\Omega_3\left(S\right)$'nin projektif boyutunu bulalım.

$\Omega_1\left(S\right)$: F , bazı $\left\{\Delta_1\left(x_1\right), \Delta_1\left(x_2\right)\right\}$ kümesi olan serbest S modül ve N de $\Delta_1\left(f\right)$ elemanı tarafından üretilen F'nin bir alt S-modülü olsun.

$\Delta_1\left(f\right) = \Delta_1\left(x_2^{\ 2} - x_1^{\ 3}\right) = 2x_2\Delta_1\left(x_2\right) - 3x_1^{\ 2}\Delta_1\left(x_1\right)$ olup Sonuç 4.1.3 den dolayı $\Omega_1\left(S\right) \simeq F/N$ dir.

$rank\Omega_1\left(S\right) = 2$ olduğu için $rankN = rankF - rank\Omega_1\left(S\right) = 3 - 2 = 1$ olup N serbest S-modülüdür. O halde

$$0 \to N \to F \to \Omega_1\left(S\right) \cong F/N \to 0$$

S-modül tam dizisi alınabilinir. Bu da $\Omega_1\left(S\right)$ için serbest çözünürlük olup $pd\Omega_1\left(S\right) \leq 1$ bulunur.

$\Omega_2(S)$: F', bazı $\{\Delta_2(x_1^2), \Delta_2(x_2^2), \Delta_2(x_1x_2), \Delta_2(x_2)\}$ kümesi olan serbest S-modül ve N' de $\Delta_2(f)$, $\Delta_2(x_1f)$ ve $\Delta_2(x_2f)$ elemanları tarafından üretilen F'nin bir alt S-modülü olsun. Burada ;

$$\Delta_2(f) = \Delta_2(x_2^2) - 3x_1\Delta_2(x_1^2) + 3x_1^2\Delta_2(x_1) - x_1^3\Delta_2(1)$$

$$\Delta_2(x_1f) = x_1\Delta_2(x_2^2) - 6x_1^2\Delta_2(x_1^2) + 2x_2\Delta_2(x_1x_2) + 7x_1^3\Delta_2(x_1) - 2x_1x_2\Delta_2(x_2) - 2x_1^4\Delta_2(1)$$

$$\Delta_2(x_2f) = 3x_2\Delta_2(x_2^2) - 3x_1x_2\Delta_2(x_1^2) - 3x_1^2\Delta_2(x_1x_2) + 6x_1^2x_2\Delta_2(x_1) - x_2^2\Delta_2(x_2) - 2x_1^3x_2\Delta_2(1)$$

olup Sonuç 4.1.3 den dolayı $\Omega_2(S) \simeq F'/N'$ dir.

$rank\Omega_2(S) = 3$ olduğu için $rankN' = rankF' - rank\Omega_2(S) = 6 - 3 = 3$ olup N' serbest S-modüldür. O halde

$$0 \to N' \xrightarrow{\varphi} F' \xrightarrow{\pi} \Omega_2(S) \simeq F'/N' \to 0$$

S-modül tam dizisi alınabilinir. Bu da $\Omega_2(S)$ için serbest çözünürlük olup $pd\Omega_2(S) \leq 1$ bulunur. Burada π doğal homomorfizma ve ϕ ise

$$\begin{pmatrix} -3x_1 & 1 & 0 & 3x_1^2 & 0 & -x_1^3 \\ -6x_1^2 & x_1 & 2x_2 & 7x_1^3 & -2x_1x_2 & -2x_1^4 \\ -3x_1x_2 & 3x_2 & -3x_1^2 & 6x_1^2x_2 & -x_2^2 & -2x_1^3x_2 \end{pmatrix}$$

matrisidir.

$\Omega_3(S)$: F'', bazı $\{\Delta_3(x_1^ix_2^j) : i, j = 0,1,2,3 \quad 0 \leq i + j \leq 3\}$ kümesi olan serbest S-modül ve N'' de aşağıdaki elemanları tarafından üretilen F'''nin bir alt dizisi S-modül olsun.

$$\Delta_3(f) = \Delta_3(x_2^2) - \Delta_3(x_1^3)$$

$$\Delta_3(x_1f) = \Delta_3(x_1x_2^2) - 4x_1\Delta_2(x_1^3) + 6x_1^2\Delta_3(x_1^2) - 4x_1^3\Delta_3(x_1) + x_1^4$$

$$\Delta_3(x_1^2f) = 2x_1\Delta_3(x_1x_2^2) + 2x_2\Delta_2(x_1^2x_2) + 19x_1^3\Delta_2(x_1^2) - 10x_1^2\Delta_3(x_1^3) - x_1^2\Delta_3(x_2^2) -$$
$$4x_1x_2\Delta_3(x_1x_2) + 2x_1^2x_2\Delta_3(x_2) - 13x_1^4\Delta_3(x_1) + 3x_1^5$$

$$\Delta_3(x_2f) = \Delta_3(x_2^3) - 3x_1\Delta_3(x_1^2x_2) - x_2\Delta_3(x_1^3) + 3x_1x_2\Delta_3(x_1^2) + 3x_1^2\Delta_3(x_1y) - 3x_1^3\Delta_3(x_2) -$$
$$3x_1^2x_2\Delta_3(x_1) + x_1^3x_2$$

$$\Delta_3\left(x_2{}^2 f\right) = 4x_2\Delta_3\left(x_2{}^3\right) - 3x_1{}^2\Delta_3\left(x_1x_2{}^2\right) - 6x_1x_2\Delta_3\left(x_1{}^2x_2\right) + 6x_1x_2{}^2\Delta_3\left(x_1{}^2\right) - x_1{}^3\Delta_3\left(x_1{}^3\right) -$$
$$4x_1{}^3\Delta_3\left(x_2{}^2\right) + 12x_1{}^2x_2\Delta_3\left(x_1x_2\right) - 2x_2x_1{}^3\Delta_3\left(x_2\right) - 9x_1{}^5\Delta_3\left(x_1\right) + 3x_1{}^6$$

$$\Delta_3\left(x_1x_2 f\right) = x_1\Delta_3\left(x_2{}^3\right) + 3x_2\Delta_3\left(x_1x_2{}^2\right) - 6x_1{}^2\Delta_3\left(x_1{}^2x_2\right) + 12x_1{}^2y\Delta_3\left(x_1{}^2\right) - 4x_1x_2\Delta_3\left(x_1{}^3\right) -$$
$$3x_1x_2\Delta_3\left(x_2{}^2\right) + 5x_1{}^3\Delta_3\left(x_1x_2\right) - 11x_1{}^3x_2\Delta_3\left(x_1\right) + 3x_1{}^4x_2$$

Sonuç 4.1.3 den dolayı $\Omega_3\left(S\right) \simeq F''/N''$ dir.

$rank\Omega_3\left(S\right) = 4$ olduğu için $rankN'' = rankF'' - rank\Omega_3\left(S\right) = 10 - 4 = 6$ olup N'' serbest S- modüldür. O halde

$$0 \to N'' \xrightarrow{\varphi} F'' \xrightarrow{\pi} \Omega_3\left(S\right) \simeq F''/N'' \to 0$$

S-modül tam dizisi alınabilinir. Bu da $\Omega_2\left(S\right)$ için serbest çözünürlük olup $pd\Omega_2\left(S\right) \leq 1$ bulunur. Burada π doğal homomorfizma ve ϕ ise

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-4x_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6x_1{}^2 & 0 & -4x_1{}^3 & 0 & x_1{}^4 \\
-10x_1{}^2 & 0 & 2y & 2x_1 & -4x_1x_2 & 19x_1{}^3 & -x_1{}^2 & -13x_1{}^4 & 2x_1{}^2x_2 & 3x_1{}^5 \\
-x_2 & 1 & -3x_1 & 0 & 3x_1{}^2 & 3x_1x_2 & 0 & -3x_1{}^2x_2 & -x_1{}^3 & x_1{}^3x_2 \\
-x_1{}^3 & 4x_2 & -6x_1x_2 & -3x_1{}^2 & 12x_1{}^2x_2 & 6x_1{}^4 & -4x_1{}^3 & -9x_1{}^5 & -2x_1{}^3x_2 & 3x_1{}^6 \\
-4x_1x_2 & x_1 & -6x_1{}^2 & 3x_2 & 5x_1{}^3 & 12x_1{}^2x_2 & -3x_1x_2 & -11x_1{}^3x_2 & 0 & 3x_1{}^4x_2
\end{pmatrix}$$

matrisidir.

Örnek 4.1.6 : $R = k[x, y, z]$ polinomlar cebiri ve I da $f = y^2 - xz$ elemanı tarafından üretilen R'nin bir ideali olsun. $S = R/I$ alalım. S afin tamlık bölgesi olup boyutu 2 dir. Sırasıyla $\Omega_1\left(S\right), \Omega_2\left(S\right)$ ve $\Omega_3\left(S\right)$'nin projektif boyutunu bulalım.

$\Omega_1\left(S\right)$: F , bazı $\left\{\Delta_1\left(x\right), \Delta_1\left(y\right), \Delta_1\left(z\right)\right\}$ kümesi olan serbest S modül ve N de $\Delta_1\left(f\right)$ elemanı tarafından üretilen F 'nin bir alt S-modülü olsun.

$\Delta_1(f) = \Delta_1\left(y^2 - xz\right) = 2y\Delta_1(y) - z\Delta_1(x) - x\Delta_1(z)$ olup Sonuç 4.1.3 den dolayı $\Omega_1\left(S\right) \simeq F/N$ dir.

$rank\Omega_1(S)=2$ olduğu için $rankN = rankF - rank\Omega_1(S) = 3-2=1$ olup N serbest S-modülüdür. O halde

$$0 \to N \to F \to \Omega_1(S) \simeq F/N \to 0$$

S-modül tam dizisi alınabilinir. Bu da $\Omega_1(S)$ için serbest çözünürlük olup $pd\Omega_1(S) \leq 1$ bulunur.

$\Omega_2(S)$: F' , bazı

$\left\{\Delta_2(x^2),\Delta_2(xz),\Delta_2(xy),\Delta_2(z^2),\Delta_2(y^2),\Delta_2(yz),\Delta_2(x),\Delta_2(y),\Delta_2(z)\right\}$ kümesi

olan serbest S-modül ve N' de $\Delta_2(f)$, $\Delta_2(xf)$ ve $\Delta_2(yf)$ elemanları tarafından üretilen F 'nin bir alt S-modülü olsun. Burada ;

$\Delta_2(f) = \Delta_2(y^2) - \Delta_2(xz)$

$\Delta_2(xf) = x\Delta_2(xy^2 - x^2z) = -z\Delta_2(x^2) + x\Delta_2(y^2) + 2y\Delta_2(xy) - 2x\Delta_2(xz) +$
$xz\Delta_2(x) - 2xy\Delta_2(y) + x^2\Delta_2(z)$

$\Delta_2(yf) = \Delta_2(y^3 - xyz) = 3y\Delta_2(y^2) - z\Delta_2(xy) - y\Delta_2(xz) - x\Delta_2(yz) + yz\Delta_2(x) -$
$2xz\Delta_2(y) + xy\Delta_2(z)$

$\Delta_2(zf) = \Delta_2(y^2z - xz^2) = z\Delta_2(y^2) - x\Delta_2(z^2) - 2z\Delta_2(xz) + 2y\Delta_2(yz) - z^2\Delta_2(x) -$
$2yz\Delta_2(y) + xz\Delta_2(z)$

olup Sonuç 3.1.3 den dolayı $\Omega_2(S) \simeq F'/N'$ dir.

$rank\Omega_2(S) = 6$ olduğu için $rankN' = rankF' - rank\Omega_2(S) = 10-6=4$ olup N' serbest S-modüldür. O halde

$$0 \to N' \xrightarrow{\varphi} F' \xrightarrow{\pi} \Omega_2(S) \simeq F'/N' \to 0$$

S-modül tam dizisi alınabilinir. Bu da $\Omega_2(S)$ için serbest çözünürlük olup $pd\Omega_2(S) \leq 1$ bulunur. Burada π doğal homomorfizma ve ϕ ise

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -z & x & 0 & 2y & -2x & 0 & xz & -2xy & x^2 & 0 \\ 0 & 3y & 0 & -z & -y & -x & yz & -2xz & xy & 0 \\ 0 & z & -x & 0 & -2z & 2y & z^2 & -2yz & xz & 0 \end{pmatrix}$$

matrisidir.

$\Omega_3(S)$: F'' , bazı $\{\Delta_3(x^i y^j x^k): \ i, j, k = 0,1,2,3 \quad 0 \le i + j + k \le 3\}$ kümesi olan serbest S-modül ve N'' de $\{\Delta_3(f), \Delta_3(xf), \Delta_3(yf), \Delta_3(zf), \Delta_3(x^2 f), \Delta_3(y^2 f),$ $\Delta_3(z^2 f), \Delta_3(xyf)\Delta_3(xzf)\Delta_3(yzf)\}$ aşağıdaki elemanlar tarafından üretilen F'''nin bir alt dizisi S-modül olsun.

Sonuç 4.1.3 den dolayı $\Omega_3(S) \cong F''/N''$ dir.

$rank\Omega_3(S) = 10$ olduğu için $rankN'' = rankF'' - rank\Omega_3(S) = 20 - 10 = 10$ olup N'' serbest S- modüldür. O halde

$$0 \to N'' \to F'' \to \Omega_3(S) \simeq F''/N'' \to 0$$

S-modül tam dizisi alınabilinir. Bu da $\Omega_2(S)$ için serbest çözünürlük olup $pd\Omega_2(S) \le 1$ bulunur.

Şimdi evrensel modüllerin projektif boyutlarının sonlu olmadığını gösteren örnekler verelim.

Örnek 4.1.7 : $R = k[x, y, z]$ polinomlar cebiri ve I da $f = y^2 - xz$, $g = yz - x^3$, $h = z^2 - x^2 y$ elemanları tarafından üretilen R'nin bir ideali olsun. $S = R/I$ alalım. S afin tamlık bölgesi olup boyutu 1 dir

F , bazı $\{\delta_1(x), \delta_1(y), \delta_1(z)\}$ kümesi olan serbest S modül ve N de $\delta_1(f)$, $\delta_1(g)$, $\delta_1(h)$ elemanı tarafından üretilen F'nin bir alt S-modülü olsun.

$$\delta_1(f) = \delta_1(y^2 - xz) = 2y\delta_1(y) - z\delta_1(x) - x\delta_1(z)$$
$$\delta_1(g) = \delta_1(yz - x^3) = z\delta_1(y) + y\delta_1(z) - 3x^2\delta_1(x)$$
$$\delta_1(h) = \delta_1(z^2 - x^2 y) = 2z\delta_1(z) - 2xy\delta_1(x) - x^2\delta_1(y)$$

olup Sonuç 4.1.3 den dolayı $\Omega_1(S) \cong F/N$ dir. $rank\Omega_1(S) = 2$ olduğu için $rankN = rankF - rank\Omega_1(S) = 3 - 2 = 1$ dir. O halde

$$0 \to N \xrightarrow{\theta} F \to \Omega_1(S) \simeq F/N \to 0$$

S-modül tam dizisi alınabilinir. Burada θ ,

$$\begin{pmatrix} -z & -3x^2 & -2xy \\ 2y & z & -x^2 \\ -x & y & 2z \end{pmatrix}$$

matrisidir. Bu matrise elementer satır işlemleri uygulanırsa ;

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & x^2 \\ -x & 0 & z \end{pmatrix}$$

matrisi ve buradan da

$$zr_2 + x^2 r_3 = 0$$
$$-xr_1 + zr_3 = 0$$

denklemleri elde edilir. Denklemin çözüm kümesi $\{(xy,-x^2,z),(x^2,z,y^2),(z,-y,x)\}$ dir.

$m=\{x,y,z\}$, S 'de maksimal ideal olsun. $m_1=(xy,-x^2,z)$, $m_2=(x^2,z,y^2)$, $m_3=(z,-y,x)$ denirse $m=\{x,y,z\}\simeq m_1S+m_2S+m_3S$ izomorfizması vardır. Böylece ;

$$0 \to m \to S^3 \to F \to \Omega_1(S) \to 0$$

S -modül tam dizisi elde edilir. S , regüler olmadığına göre $pd\Omega_1(S)=\infty$ bulunur.

Örnek 4.1.8 : $R=k[x,y]$ ve $S=k[z,t]$ polinomlar cebiri ve sırasıyla I , $f=y^2-x^3$ ve $g=t^2-z^3$ elemanları tarafından üretilen R ile S 'nin bir idealleri olsun. $R/I\otimes_k S/J\simeq k[x,y,z,t]/(y^2-x^3)$ izomorfizması vardır. Bu örnekte $\Omega_2(R/I\otimes_k S/J)$ modülünün projektif boyutunun sonlu olduğunu görelim:

F , bazı $\{d_2(x^i,y^j,z^k):\ 1\le i+j+k+l\le 2\}$ kümesi olan serbest modül ve N de aşağıdaki elemanlar tarafından üretilen F 'nin bir alt modülü olsun. Burada ;

$$d_2(f)=d_2(y^2)-3xd_2(x^2)+3x^2d_2(x)$$
$$d_2(g)=d_2(t^2)-3xzd_2(x^2)+3z^2d_2(z)$$
$$d_2(xf)=xd_2(y^2)+2yd_2(xy)+7x^3d_2(x)-2xyd_2(y)-6x^2d_2(x^2)$$

$$d_2(yf)=3yd_2(y^2)-x^3d_2(y)-3xyd_2(x^2)-3x^2yd_2(xy)+6x^2yd_2(x)$$
$$d_2(zf)=zd_2(y^2)+2yd_2(yz)-2yzd_2(y)-x^3d_2(z)-3xzd_2(x^2)+6x^2zd_2(x)$$
$$d_2(tf)=td_2(y^2)+2yd_2(yt)+x^3d_2(t)-2ytd_2(y)-3xtd_2(x^2)-3x^2zd_2(xt)+$$
$$6x^2td_2(x)$$
$$d_2(xg)=xd_2(t^2)+2td_2(xt)-2xtd_2(t)-2ytd_2(y)+z^3d_2(x)-3xzd_2(z^2)-$$
$$3z^2td_2(xz)+6z^2xd_2(z)$$
$$d_2(yg)=yd_2(t^2)+2td_2(yt)-2ytd_2(t)+z^3d_2(y)-3yzd_2(z^2)-3z^2d_2(yz)+$$
$$6z^2yd_2(z)$$
$$d_2(xg)=zd_2(t^2)+2td_2(zt)+7z^3d_2(z)-2ztd_2(t)-5z^2d_2(z^2)$$
$$d_2(tg)=3td_2(t^2)-z^3d_2(t)-ztd_2(z^2)-3z^2d_2(zt)+6z^2td_2(z)$$

olup Sonuç 4.1.3 den dolayı $\Omega_2(R/I\otimes_k S/J)\simeq F/N$ dir. O halde

$$0\to N\to F\to\Omega_2(R/I\otimes_k S/J)\to 0$$

tam dizisi alınabilinir. Buradan $\operatorname{Im}\phi=N$ olacak şekilde

$$0\to Çek\phi\to F'\xrightarrow{\ \phi\ }F\to\Omega_2(R/I\otimes_k S/J)\to 0$$

modül homomorfizmalarının tam dizisi elde edilir. Burada ϕ homomorfizması ;

$$\begin{pmatrix}
-3x & 0 & 6x^2 & 3xy & 3xz & -3xt & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & x & 3y & z & w & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -3z & 0 & 0 & 0 & 0 & -6z^2 & -3zt & -3xz & -3yz\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & 3t & x & y\\
0 & 0 & 2y & -3x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -3x^2 & 0 & 0 & 0 & -3z^2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3x^2 & 0 & 0 & 2t & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2y & 0 & 0 & 0 & 0 & -3z^2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2y & 0 & 0 & 0 & 2t\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2t & -3z^2 & 0 & 0\\
3x^2 & 0 & 7x^3 & 6x^2y & 6x^2z & 6x^2t & 0 & 0 & z^3 & 0\\
0 & 0 & -2xy & -x^3 & -2yz & -2yt & 0 & 0 & 0 & z^3\\
0 & 3z^2 & 0 & 0 & x^3 & 0 & 7z^3 & 6z^2t & 6xz^2 & 6yz^2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^3 & -2zt & -z^3 & -2xt & -2yt
\end{pmatrix}$$

matrisidir. Bu matrise elementer satır işlemleri uygulanırsa ;

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x & 3y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2z & 3y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. $\{e_i \,:\, i=1,....,8\}$ kümesi F' 'nün bazı ve $s_i \in R/I \otimes_k S/J$ olmak üzere $u = s_1e_1 + s_2e_2 + s_3e_3 + s_4e_4 + s_5e_5 + s_6e_6 + s_7e_7 + s_8e_8 + s_9e_9 + s_{10}e_{10}$ elemanı $Çek\phi$ ‘nin elemanı olsun. Yukarıdaki matris kullanılırsa ;

$$2s_1 - ts_6 = 0$$

$$2s_2 - ys_{10} = 0$$

$$2xs_9 + 3ys_{10} = 0$$

$$2zs_5 + 3ys_6 = 0$$

$$ys_6 + ts_{10} = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler $R/I \otimes_k S/J$ 'de çözülürse

$Çek\phi = u(R/I \otimes_k S/J)$ olacak şekilde ;

$$u = t^2e_1 - y^2e_2 - 3z^2e_5 + 2te_6 + 3x^2e_9 - 2ye_{10}$$

bulunur. Böylece $Çek\phi$ serbest modül olup

$$pd\left(\Omega_2\left(R/I \otimes_k S/J\right)\right) \leq 2$$

dir.

Örnek 4.1.9 : $R = k[x, y, z]$ polinomlar cebiri ve I da $f = y^2 - xz$, $g = z^2 - x^3$ elemanları tarafından üretilen R 'nin bir ideali olsun. $S = R/I$ alalım. S afin tamlık bölgesi olup boyutu 1 dir. Sırasıyla $\Omega_1(S), \Omega_2(S)$ ve $\Omega_3(S)$ 'nin projektif boyutunu bulalım.

$\Omega_1(S)$: F , bazı $\{\delta_1(x), \delta_1(y), \delta_1(z)\}$ kümesi olan serbest S modül ve N de $\delta_1(f)$ ve $\delta_1(g)$ elemanı tarafından üretilen F 'nin bir alt S -modülü olsun.

$$\delta_1(f) = \delta_1(y^2 - z) = 2y\delta_1(y) - z\delta_1(x) - x\delta_1(z)$$
$$\delta_1(g) = \delta_1(z^2 - x^3) = 2z\delta_1(z) - 3x^2\delta_1(x)$$

olup Sonuç 4.1.3 den dolayı $\Omega_1(S) \simeq F/N$ dir.

$rank\Omega_1(S) = 1$ olduğu için $rankN = rankF - rank\Omega_1(S) = 3 - 1 = 2$ olup N serbest S -modülüdür. O halde

$$0 \to N \to F \to \Omega_1(S) \simeq F/N \to 0$$

S -modül tam dizisi alınabilinir. Bu da $\Omega_1(S)$ için serbest çözünürlük olup $pd\Omega_1(S) \le 1$ bulunur.

$\Omega_2(S)$: F', bazı $\{\delta_2(x^2), \delta_2(y^2), \delta_2(xy), \delta_2(x), \delta_2(y), \delta_2(yz)\}$ kümesi olan serbest S -modül ve N' de aşağıdaki elemanları tarafından üretilen F' nin bir alt S -modülü olsun. Burada ;

$$\delta_2(f) = \delta_2(y^2) - 3x\delta_2(x^2) + 3x^2\delta_2(x) - x^3$$

$$\delta_2(g) = x\delta_2(y^2) - 6x^2\delta_2(x^2) + 2y\delta_2(xy) + 7x^3\delta_2(x) - 2xy\delta_2(y) - 2x^4$$

$$\delta_2(xf) = 3y\delta_2(y^2) - 3xy\delta_2(x^2) - 3x^2\delta_2(xy) + 6x^2y\delta_2(x) - y^2\delta_2(y) - 2x^3y$$

$$\delta_2(yf) = 3y\delta_2(y^2) - 3xy\delta_2(x^2) - 3x^2\delta_2(xy) + 6x^2y\delta_2(x) - y^2\delta_2(y) - 2x^3y$$

$$\delta_2(zf) = 3y\delta_2(y^2) - 3xy\delta_2(x^2) - 3x^2\delta_2(xy) + 6x^2y\delta_2(x) - y^2\delta_2(y) - 2x^3y$$

$$\delta_2(xg) = 3y\delta_2(y^2) - 3xy\delta_2(x^2) - 3x^2\delta_2(xy) + 6x^2y\delta_2(x) - y^2\delta_2(y) - 2x^3y$$

$$\delta_2(yg) = 3y\delta_2(y^2) - 3xy\delta_2(x^2) - 3x^2\delta_2(xy) + 6x^2y\delta_2(x) - y^2\delta_2(y) - 2x^3y$$

$$\delta_2(zg) = 3y\delta_2(y^2) - 3xy\delta_2(x^2) - 3x^2\delta_2(xy) + 6x^2y\delta_2(x) - y^2\delta_2(y) - 2x^3y$$

olup Sonuç 4.1.3 den dolayı $\Omega_2(S) \simeq F'/N'$ dir.

$rank\Omega_2(S)=2$ olduğu için $rankN'=rankF'-rank\Omega_2(S)=9-2=7$ dir. halde ;

$$0\to N' \xrightarrow{\varphi} F' \xrightarrow{\pi} \Omega_2(S) \simeq F'/N' \to 0$$

S -modül tam dizisi alınabilinir. Buradan $\operatorname{Im}\phi = N'$ olacak şekilde

$$0\to Çek\varphi \to S^8 \xrightarrow{\varphi} F' \to \Omega_2(S) \to 0$$

$S-$modül homomorfizmalarının tam dizisi elde edilir. Burada ϕ homomorfizmasını

$$\begin{pmatrix} -3x & 0 & -6x^2 & -3xy & -3xz & -z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x & 3y & z \\ 1 & 0 & x & y & 3z & 0 & 0 & -z \\ 0 & 0 & 0 & -3x^2 & 0 & 2y & -z & 0 \\ 0 & -1 & 2z & 0 & -3x^2 & -2x & -y & -2z \\ 0 & 0 & 0 & 2z & 0 & 0 & -x & 2y \\ 3x^2 & 0 & 7x^3 & 6x^2y & 6x^2z & xz & yz & z^2 \\ 0 & 0 & 0 & x^3 & 0 & -2xy & -2xz & -2yz \\ 0 & 0 & -2xz & -2yz & -z^2 & x^2 & xy & xz \end{pmatrix}$$

matrisidir. Bu matrise elementer satır işlemleri uygulanırsa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2z & 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x & 0 & 3z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. $\{e_i : i=1,....,8\}$ kümesi S^8'in bazı ve $s_i \in S$ olmak üzere $u=s_1e_1+s_2e_2+s_3e_3+s_4e_4+s_5e_5+s_6e_6+s_7e_7+s_8e_8$ elemanı $Çek\phi$ 'nin elemanı olsun. Yukarıdaki matris kullanılırsa ;

$$s_1=0 \quad , \quad s_7=0$$
$$2s_2-zs_8=0$$

$$2s_3 - s_8 = 0$$
$$zs_4 - ys_8 = 0$$
$$2zs_5 - xs_8 = 0$$
$$2xs_6 + 3zs_8 = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler S 'de çözülürse $Çek\phi = u_1S + u_2S$ olacak şekilde ;

$$u_1 = z^2e_2 + ze_3 - 2ye_4 + xe_5 - 3x^2e_6 + 2ze_8$$
$$u_2 = x^2yze_2 + x^2ye_3 - 2z^2e_4 + yze_5 - 3xye_6 + 2x^2ye_8$$

bulunur. O halde $\{e_1', e_2'\}$ kümesi S^2 'nin bazı olmak üzere $\psi(e_1') = u_1$ ve $\psi(e_2') = u_2$ olacak şekilde $\psi : S^2 \to Çek\phi$ $S-$modül homomorfizması tanımlanabilir. Bu homomorfizmanın çekirdeği ;

$$m_1 = -z^2e_1' + ye_2'$$
$$m_2 = -yze_1' + xe_2'$$
$$m_3 = -x^2e_1' + ze_2'$$

elemanları tarafından üretilir.

$m = (x, y, z)$, S 'de maksimal ideal olsun. O zaman $Çek\phi$ ile m maksimal ideali arasında izomorfizma vardır. Böylece ;

$$0 \to m \to S^2 \to S^8 \to F' \to \Omega_2(S) \to 0$$

S-modül tam dizisi alınabilinir. Bu ise $\Omega_2(S)$'nin projektif boyutunun sonsuz olduğunu gösterir.

$\Omega_3(S)$: F'' , bazı $\left\{\delta_3\left(x^i y^j x^k\right) : i, j, k = 0,1,2,3 \quad 0 \le i + j + k \le 3\right\}$ kümesi olan serbest S-modül ve N'' de $\left\{\delta_3(f), \delta_3(xf), \delta_3(yf), \delta_3(zf), \delta_3\left(x^2f\right), \delta_3\left(y^2f\right),\right.$ $\left.\delta_3\left(z^2f\right), \delta_3(xyf), \delta_3(xzf), \delta_3(yzf)\right\}$ aşağıdaki elemanlar tarafından üretilen F'' 'nin bir alt S-modülü olsun.

$$\delta_3(f) = \delta_3\left(y^2 - xz\right) = \delta_3\left(y^2\right) - \delta_3(xz) = 0$$
$$\delta_3(g) = \delta_3\left(z^2 - x^3\right) = \delta_3\left(z^2\right) - \delta_3\left(x^3\right) = 0$$
$$\delta_3(xf) = \delta_3\left(xy^2 - x^2z\right) = \delta_3\left(xy^2\right) - \delta_3\left(x^2z\right) = 0$$
$$\delta_3(yf) = \delta_3\left(y^3 - yxz\right) = \delta_3\left(y^3\right) - \delta_3(xyz) = 0$$
$$\delta_3(zf) = \delta_3\left(y^2z - xz^2\right) = \delta_3\left(y^2z\right) - \delta_3\left(xz^2\right) = 0$$

$$\delta_3(xg)=\delta_3(xz^2-x^4)=\delta_3(xz^2)-\delta_3(x^4)=\delta_3(xz^2)-4x\delta_3(x^3)+6x^2\delta_3(x^2)-$$
$$4x^3\delta_3(x)+x^4$$

$$\delta_3(yg)=\delta_3(yz^2-yx^3)=\delta_3(yz^2)-\delta_3(yx^3)=\delta_3(yz^2)-3x\delta_3(x^2y)+3x^2\delta_3(xy)-$$
$$y\delta_3(x^3)+3xy\delta_3(x^2)-3x^2y\delta_3(x)-x^3\delta_3(y)+x^3y$$

$$\delta_3(zg)=\delta_3(z^3-x^3z)=\delta_3(z^3)-\delta_3(x^3z)=\delta_3(z^3)-3x\delta_3(x^2z)-z\delta_3(x^3)+3x^2\delta_3(xz)+$$
$$3xz\delta_3(x^2)-x^3\delta_3(z)-3x^2z\delta_3(x)+x^3z$$

$$\delta_3(xyf)=\delta_3(xy^3-x^2yz)=\delta_3(xy^3)-\delta_3(x^2yz)=-x\delta_3(y^3)+2y\delta_3(xy^2)-xy\delta_3(y^2)-$$
$$y^2\delta_3(xy)+2xy^2\delta_3(y)-y^3\delta_3(x)-z\delta_3(x^2y)+x^2\delta_3(yz)+yz\delta_3(x^2)-x^2y\delta_3(z)$$

$$\delta_3(xzf)=\delta_3(xzy^2-x^2z^2)=\delta_3(xzy^2)-\delta_3(x^2z^2)=2y\delta_3(y^3)+x\delta_3(y^2z)+z\delta_3(xy^2)-$$
$$2xy\delta_3(yz)-2yz\delta_3(xy)+2y^2\delta_3(y^2)-xy^2\delta_3(z)-y^2z\delta_3(x)+2y^3\delta_3(y)+x^2\delta_3(x^3)+$$
$$z^2\delta_3(x^2)$$

$$\delta_3(yzf)=\delta_3(y^3z-xyz^2)=\delta_3(y^3z)-\delta_3(xyz^2)=-z\delta_3(y^3)+2y\delta_3(y^2z)-$$
$$yz\delta_3(y^2)-y^2\delta_3(yz)+2y^2z\delta_3(y)-y^3\delta_3(z)+xy\delta_3(x^3)+z^2\delta_3(xy)-yz^2\delta_3(x)$$

$$\delta_3(xyg)=\delta_3(xyz^2-x^4y)=\delta_3(xyz^2)-\delta_3(x^4y)=2z\delta_3(y^3)-3x^2\delta_3(x^2y)+$$
$$3x^2y\delta_3(x^2)-2xz\delta_3(yz)-2yz\delta_3(y^2)+4x^3\delta_3(xy)+2xyz\delta_3(z)-x^4\delta_3(y)-$$
$$4x^3y\delta_3(x)+x^4y$$

$$\delta_3(xzg)=\delta_3(xz^3-x^4z)=\delta_3(xz^3)-\delta_3(x^4z)=-3x^2\delta_3(x^2z)+6xz\delta_3(x^3)-$$
$$3x^2\delta_3(x^2z)-9x^2z\delta_3(x^2)+x^4\delta_3(z)+4x^3z\delta_3(x)+x^4z$$

$$\delta_3(yzg)=\delta_3(yz^3-x^3yz)=\delta_3(yz^3)-\delta_3(x^3yz)=-x^3\delta_3(yz)+x^3y\delta_3(z)+$$
$$x^3z\delta_3(y)-3x^2\delta_3(y^3)+6xz\delta_3(x^2y)-2yz\delta_3(x^3)+3x^2y\delta_3(y^2)-3x^2z\delta_3(xy)-$$
$$6xyz\delta_3(x^2)+3x^2yz\delta_3(x)-x^3yz$$

$$\delta_3(x^2f)=\delta_3(x^2y^2-x^3z)=\delta_3(x^2y^2)-\delta_3(x^3z)=2y\delta_3(x^2y)+2x^2\delta_3(y^2)-$$
$$4xy\delta_3(xy)+2y^2\delta_3(x^2)-xy^2\delta_3(x)+2x^2y\delta_3(y)-z\delta_3(x^3)-\delta_3(x^2z)-x^3\delta_3(z)$$

$$\delta_3(y^2f)=\delta_3(y^4-xy^2z)=\delta_3(y^4)-\delta_3(xy^2z)=2y^3\delta_3(y)-x\delta_3(y^2z)+$$
$$2y\delta_3(y^3)+2yz\delta_3(xy)-z\delta_3(xy^2)+2xy\delta_3(yz)-4y^2\delta_3(y^2)-y^2z\delta_3(x)-xy^2\delta_3(z)$$

$$\delta_3(z^2f)=\delta_3(y^2z^2-xz^3)=\delta_3(y^2z^2)-\delta_3(xz^3)=2y\delta_3(yz^2)+2z\delta_3(y^2z)+$$
$$2y^2\delta_3(x^3)-4yz\delta_3(yz)+2z^2\delta_3(y^2)-y^2z\delta_3(z)+2yz^2\delta_3(y)-x\delta_3(z^3)-z^3\delta_3(x)$$

$$\delta_3(x^2g)=\delta_3(x^2z^2-x^5)=\delta_3(x^2z^2)-\delta_3(x^5)=-3x^2\delta_3(x^3)+2z\delta_3(x^2z)+$$
$$7x^3\delta_3(x^2)-4xz\delta_3(y^2)+2x^2z\delta_3(z)-5x^4\delta_3(x)-x^5$$

$$\delta_3\left(y^2g\right)=\delta_3\left(y^2z^2\right)-\delta_3\left(y^2x^3\right)=\delta_3\left(y^2z^2-y^2x^3\right)=2z\delta_3\left(y^2z\right)-4yz\delta_3\left(yz\right)+$$
$$x^3\delta_3\left(y^2\right)+2y^2z\delta_3\left(z\right)-3x^2\delta_3\left(xy^2\right)+6x^2y\delta_3\left(xy\right)+3x^2y^2\delta_3\left(x\right)-2x^3y\delta_3\left(y\right)+x^3y^2$$
$$\delta_3\left(z^2g\right)=\delta_3\left(z^4-x^3z^2\right)=\delta_3\left(z^4\right)-\delta_3\left(x^3z^2\right)=4z\delta_3\left(z^3\right)-2x^3z\delta_3\left(z\right)-$$
$$6xz\delta_3\left(x^2z\right)+11x^2z\delta_3\left(y^2\right)-5x^3\delta_3\left(x^3\right)+12x^2z\delta_3\left(xz\right)+5x^4\delta_3\left(x^2\right)-9x^5\delta_3\left(x\right)+$$
$$3x^3z^2$$

olup Sonuç 4.1.3 den dolayı $\Omega_3\left(S\right)\simeq F''/N''$

$$0\to N''\xrightarrow{\varphi}F''\longrightarrow\Omega_3\left(S\right)\simeq F''/N''\to 0$$

S -modül tam dizisi elde edilir.

4.2 Hiperyüzeylerde Evrensel Modüllerin Projektif Boyutları

$R=k[x_1,x_2,...,x_s]$ polinomlar cebiri ve I da $f\in R$ elemanı tarafından üretilen R nin ideali olsun. $R/I=\dfrac{k[x_1,...,x_s]}{(f)}$ olarak gösterilen afin tamlık bölgesine hiperyüzey denir. Bu bölümde hiperyüzeyler üzerinde tanımlanmış evrensel modüllerin projektif boyutları ile ilgili bulunan sonuçlar verilecek.

$S=R/I$ alınsın. F, bazı $\{d_n\left(x^\alpha\right)\mid |\alpha|\leq n\}$ kümesi olan serbest S-modül ve N de $\{d_n\left(x^\alpha f\right)\mid |\alpha|<n\}$ kümesi tarafından üretilen F nin alt modülü olsun. Sonuç 4.1.3 den $\Omega_n\left(S\right)\simeq F/N$ izomorfizması vardı. Böylece

$$0\to N\to F\to\Omega_n\left(S\right)\to 0$$

S-modül homomorfizmalarını tam dizisi elde edilir.

Önerme 4.2.1 : S boyutu $s-1$ olan regüler lokal halka olsun.

$$0\to N\to F\to\Omega_n\left(S\right)\to 0$$

S-modül homomorfizmalarını tam dizisi alınsın. S de herhangi bir m maksimal ideali için $N\not\subseteq mF$ dir.

Kanıt : S regüler lokal halka ise $\Omega_n(S)$, rankı $\begin{pmatrix}n+s-1\\s-1\end{pmatrix}-1$ olan serbest S-modüldür. Böylece $\dfrac{\Omega_n(S)}{m\Omega_n(S)}$, S/m üzerinde boyutu $\begin{pmatrix}n+s-1\\s-1\end{pmatrix}-1$ olan bir vektör uzayıdır. Eğer $N\subseteq mF$ olsaydı o zaman

$$\frac{\Omega_n(S)}{m\Omega_n(S)} \simeq \frac{F/N}{m(F/N)} \simeq \frac{F/N}{(mF+N)/N} \simeq \frac{F}{mF}$$

izomorfizmaları elde edilirdi. $\frac{F}{mF}$ de yine S/m üzerinde vektör uzayı olup boyutu $\binom{n+s}{s}-1$ dir. Bu ise bize

$$\binom{n+s}{s} = \binom{n+s-1}{s-1}$$

eşitliğini verir. Yani çelişki elde edilir. Böylece $N \not\subseteq mF$ dir.

Sonuç 4.2.2 : *S* boyutu $s-1$ olan regüler halka olsun.

$$0 \to N \to F \to \Omega_n(S) \to 0$$

S-modül homomorfizmalarını tam dizisi alınsın. *S* de herhangi bir m maksimal ideali için $N \not\subseteq mF$ dir.

Kanıt : *p*, *S* nin bir asal ideali olsun. *S* halkası *p* ile lokalize edilirse bir önceki önermeden dolayı istenen elde edilir.

Örnek 4.2.3 : $R = k[x, y]$ polinomlar cebiri ve *I* da $f = x^2 + y^2 - 1$ elemanı tarafından üretilen *R* nin bir ideali olsun. $S = R/I$ alalım. *S* afin tamlık bölgesi olup boyutu 1 dir. *S* regüler bir halkadır. *M, S* nin bir maksimal ideali olsun.

F, bazı $\{\delta_1(x), \delta_1(y)\}$ kümesi olan serbest *S*-modül ve *N* de $\{x\delta_1(x), y\delta_1(y)\}$ kümesi tarafında üretilen *F* nin bir alt modülü olsun. Sonuç 4.1.3 den $\Omega_1(R) \simeq F/N$ idi. O halde $N \not\subseteq mF$ olduğu görülür.

Önerme 4.2.4 : S boyutu $s-1$ olan afin tamlık bölgesi olsun.

$$0 \to N \to F \to \Omega_n(S) \to 0$$

S-modül homomorfizmalarını tam dizisi alınsın. S de herhangi bir m maksimal ideali için $N \subseteq mF$ ise $pd(\Omega_n(S)) = 1$ dir.

Kanıt : Teorem 4.1.4 den dolayı $pd(\Omega_n(S)) \leq 1$ dir. O halde $pd(\Omega_n(S)) = 1$ olduğunu göstermek için $\Omega_n(S)$ nin projektif modül olmadığını göstermemiz gerekir. *S* lokal halka ve $\Omega_n(S)$ de projektif modül alınsın. $\Omega_n(S)$ nin rankı $\binom{n+s-1}{s-1}-1$ dir. Böylece $\frac{\Omega_n(S)}{m\Omega_n(S)}$, S/m üzerinde boyutu $\binom{n+s-1}{s-1}-1$ olan bir vektör uzayıdır. $N \subseteq mF$ olduğundan dolayı

$$\frac{\Omega_n(S)}{m\Omega_n(S)} \simeq \frac{F/N}{m(F/N)} \simeq \frac{F/N}{(mF+N)/N} \simeq \frac{F}{mF}$$

izomorfizmaları elde edilir. $\frac{F}{mF}$ de yine S/m üzerinde vektör uzayı olup boyutu $\binom{n+s}{s}-1$ dir. Bu ise bize

$$\binom{n+s}{s} = \binom{n+s-1}{s-1}$$

eşitliğini verir. Yani çelişki elde edilir. $\Omega_n(S)$ projektif değildir. Böylece $\Omega_n(S)$ nin projektif boyutu birdir.

Örnek 4.2.5 : $R = k[x, y]$ polinomlar cebiri ve I da $f = x_2^{\,2} - x_1^{\,3}$ elemanı tarafından üretilen R nin bir ideali olsun. $S = R/I$ alalım. S afin tamlık bölgesi olup boyutu 1 dir. Teorem 4.1.4 den $pd(\Omega_n(S)) \leq 1$ dir.

F, bazı $\{\delta_n(x^i.y^j) : y^2 = x^3,\ i, j = 1,...,n \ \text{ ve } \ 0 \leq i + j \leq n\}$ kümesi olan serbest *S*-modül ve *N* de

$$\{[\delta_n, r_0, r_1, ..., r_n](1) : y^2 = x^3, r_i \in R\}$$

kümesi tarafından üretilen F nin bir alt modülü olsun.

$m = (x, y)$, *S* de maksimal ideali olsun. O zaman $N \subseteq mF$ olur. Böylece Önerme 4.2.4 den $pd(\Omega_n(S)) = 1$bulunur.

Örnek 4.2.6 : $R = k[x, y, z]$ polinomlar cebiri ve I da $f = y^2 - xz$ elemanı tarafından üretilen R nin bir ideali olsun. $S = R/I$ alalım. S afin tamlık bölgesi olup boyutu 2 dir. Teorem 4.1.4 den $pd(\Omega_n(S)) \leq 1$ dir.

F, bazı $\{\delta_n(x^i, y^j, z^k) : y^2 = xz,\ i, j, k = 1,...,n \ \text{ ve } \ 0 \leq i + j + k \leq n\}$ kümesi olan serbest *S*-modül ve *N* de

$$\{[\delta_n, r_0, r_1, ..., r_n](1) : y^2 = xz, r_i \in R\}$$

kümesi tarafından üretilen F nin bir alt modülü olsun.

$m = (x, y, z)$, *S* de maksimal ideali olsun. O zaman $N \subseteq mF$ olur. Böylece Önerme 4.2.4 den $pd(\Omega_n(S)) = 1$bulunur.

4.3 Evrensel Modüller Arasındaki Bağıntılar

Bu bölümde sonlu üretilmiş *R* k-cebiri üzerinde $\Omega_n(R)$ den $\Omega_1(R)$ ye tanımlanmış θ homomorfizmasının çekirdeğinin üreteçleri tanımlanacak.

Teorem 4.3.1 : $R = k[x_1,...,x_s]$ afin k-cebir olsun. $\delta_1 : R \to \Omega_1(R)$ birinci dereceden ve $\delta_n : R \to \Omega_n(R)$ n-inci dereceden evrensel türev operatörleri olsun. $f \in R$ için $\theta(\delta_n(f)) = \delta_1(f)$ olmak üzere

$$0 \longrightarrow Çek\theta \longrightarrow \Omega_n(R) \xrightarrow{\theta} \Omega_1(R) \longrightarrow 0$$

R-modül homomorfizmalarının tam dizisi vardır ve $Çek\theta$,

$$\{\delta_n(x_1^{i_1},...,x_s^{i_s}) - \sum \frac{\partial(x_1^{i_1},...,x_s^{i_s})}{\partial x_i}\delta_n(x_i)\}$$

kümesi tarafından üretilir.

Kanıt : $\Omega_n(R)$ nin evrensellik özelliğinden dolayı

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\delta_n"'] & \Omega_n(R) \arrow[d, "1_{\Omega_1(R)}"] \\ \Omega_n(R) \arrow[r, "\theta"] & \Omega_1(R) \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan $\theta(\delta_n) = \delta_1$ olacak şekilde bir tek $\theta : \Omega_n(R) \to \Omega_1(R)$ *R*-modül homomorfizması vardır. Bu homomorfizma örtendir. O halde

$$0 \longrightarrow Çek\theta \longrightarrow \Omega_n(R) \xrightarrow{\theta} \Omega_1(R) \longrightarrow 0$$

R-modül homomorfizmalarının tam dizisi elde edilir.

$S = \{\delta_n(x_1^{i_1},...,x_s^{i_s}) - \sum \frac{\partial(x_1^{i_1},...,x_s^{i_s})}{\partial x_i}\delta_n(x_i)\}$ ve N de $\Omega_n(R)$ nin *S* tarafından üretilen alt modülü olsun. Şimdi $Çek\theta = N$ olduğunu gösterelim:

$N \subseteq Çek\theta$ olduğu tanımdan görülür.

$N \supset Çek\theta$:

$$R \xrightarrow{\delta_1} \Omega_n(R) \xrightarrow{\pi} \Omega_n(R)/N$$

$\pi\delta_n$ birinci dereceden diferansiyel operatördür. Bunun için $[\pi\delta_n, x_i, x_j](1) = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}[\pi\delta_n, x_i, x_j](1) &= ([\pi\delta_n, x_i]x_j - x_j[\pi\delta_n, x_i])(1) \\ &= \pi\delta_n(x_i x_j) - x_i\pi\delta_n(x_j) - x_j\pi\delta_n(x_i) + x_i x_j \pi\delta_n(1) \\ &= \pi(\delta_n(x_i x_j) - x_i\delta_n(x_j) - x_j\delta_n(x_i)) \\ &= 0\end{aligned}$$

Burada tanımdan dolayı $\delta_n(1) = 0$ dır.

O halde $\Omega_1(R)$ nin evrensellik özelliğinden dolayı

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\delta_n} & \Omega_n(R) \\ \delta_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ \Omega_1(R) & \xrightarrow{\beta} & \Omega_n(R)/N \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan $\pi\delta_n = \beta\delta_1$ olacak şekilde bir tek $\Omega_1(R) \xrightarrow{\beta} \Omega_n(R)/N$ R-modül homomorfizması vardır.

$t \in Çek\theta$ olsun. O zaman $\theta(t) = 0 \Rightarrow \pi(t) = 0 \Rightarrow t \in N$ olur. Böylece $Çek\theta = N$ olduğu görülür.

Örnek 4.3.2 : $R = k[x, y]$ olsun.

$$0 \longrightarrow Çek\theta \longrightarrow \Omega_3(R) \xrightarrow{\theta} \Omega_1(R) \longrightarrow 0$$

R-modül homomorfizmalarının tam dizisinde $\Omega_1(R)$ ve $\Omega_3(R)$ sırasıyla

$$\{\delta_1(x), \delta_1(y)\}$$

ve

$$\left\{\delta_3(x), \delta_3(y), \delta_3(xy), \delta_3\left(x^2\right), \delta_3\left(x^2y\right), \delta_3\left(y^2\right)\delta_3\left(xy^2\right), \delta_3\left(x^3\right), \delta_3\left(y^3\right)\right\}$$

kümeleri tarafından üretilir. $Çek\theta$ ise

$$\{\delta_3(xy) - x\delta_3(y) - y\delta_3(x), \delta_3\left(x^2\right) - 2x\delta_3(x), \delta_3\left(x^2y\right) - 2xy\delta_3(x) - x^2\delta_3(y), \delta_3\left(y^2\right) - 2y\delta_3(y),$$

$$\delta_3\left(xy^2\right) - 2xy\delta_3(y) - y^2\delta_3(x), \delta_3\left(y^3\right) - 3y^2\delta_3(y), \delta_3\left(x^3\right) - 3x^2\delta_3(y)\}$$

kümesi tarafından üretilir.

$rank\Omega_3(R) = 9$ ve $rank\Omega_1(R) = 2$ olup $rankÇek\theta = 9 - 2 = 7$ dir. Böylece $Çek\theta$ serbest modüldür.

Örnek 4.3.3 : $R = \dfrac{k[x, y]}{(y^2 - x^3)}$ afin halka olsun.

$$0 \longrightarrow Çek\theta \longrightarrow \Omega_3(R) \xrightarrow{\theta} \Omega_1(R) \longrightarrow 0$$

R-modül homomorfizmalarının tam dizisinde $\Omega_1(R)$ ve $\Omega_3(R)$ sırasıyla

$$\{\delta_1(x), \delta_1(y)\}$$

ve

$$\left\{\delta_3(x),\delta_3(y),\delta_3(xy),\delta_3\left(x^2\right),\delta_3\left(x^2y\right),\delta_3\left(x^3\right)\right\}$$

kümeleri tarafından üretilir. $Çek\theta$ ise

$$\{\delta_3(xy)-x\delta_3(y)-y\delta_3(x),\delta_3\left(x^2\right)-2x\delta_3(x),\delta_3\left(x^2y\right)-2xy\delta_3(x)-x^2\delta_3(y),\delta_3\left(x^3\right)-3x^2\delta_3(y)\}$$

kümesi tarafından üretilir.

$rank\Omega_3(R)=5$ ve $rank\Omega_1(R)=2$ olup $rankÇek\theta=5-2=3$ dür.

Önerme 4.3.4 :

$$0\longrightarrow Çek\theta\longrightarrow\Omega_n(R)\xrightarrow{\theta}\Omega_1(R)\longrightarrow 0$$

R-modül homomorfizmalarının tam dizisi split(ayrışan) olsun. O zaman $\Omega_n(R)$ projektif modüldür ancak ve ancak *R* regülerdir.

Kanıt : *R* regüler halka ise $\Omega_n(R)$ projektif modüldür.

Tersine, $\Omega_n(R)$ projektif modül olsun. Dizinin split olmasından dolayı $\Omega_n(R)\simeq\Omega_1(R)\oplus Çek\theta$ izomorfizması vardır. Bu izomorfizmadan $\Omega_1(R)$ projektif modül olup *R* regülerdir.

Önerme 4.3.5 : $R=k[x_1,...,x_s]$ afin k-cebir olsun. $d_n:R\longrightarrow\Omega_n(R)$ n-inci dereceden ve $d_{n+1}:R\longrightarrow\Omega_{n+1}(R)$ de $n+1$-inci dereceden evrensel türev operatörleri ve $f\in R$ için $\theta(d_{n+1}(f))=d_n(f)$ olmak üzere

$$0\longrightarrow Çek\theta\longrightarrow\Omega_{n+1}(R)\xrightarrow{\theta}\Omega_n(R)\longrightarrow 0$$

R-modül homomorfizmalarının tam dizisi vardır ve $Çek\theta$, $\{[d_{n+1},r_0,r_1,...,r_n](1):r_i\in R\}$ kümesi tarafından üretilir.

Kanıt : $\Omega_{n+1}(R)$ evrensel *R*-modül olduğuna evrensellik özelliğinden dolayı $\theta(d_{n+1})=d_n$ olacak şekilde aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan bir tek $\theta:\Omega_{n+1}(R)\to\Omega_n(R)$ *R*-modül homomorfizması vardır.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{d_n} & \Omega_n(R) \\ {\scriptstyle d_{n+1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_{\Omega_n(R)}} \\ \Omega_{n+1}(R) & \xrightarrow{\theta} & \Omega_n(R) \end{array}$$

θ, örten olduğu için

$$0 \longrightarrow Çek\theta \longrightarrow \Omega_{n+1}(R) \xrightarrow{\theta} \Omega_n(R) \longrightarrow 0$$

R-modül homomorfizmaları tam dizidir.

Kanıtın diğer kısmı 4.3.1 in kanıtında olduğu gibi benzer şekilde yapılabilir.

Örnek 4.3.5 : $R = \dfrac{k[x,y]}{(y^2 - x^3)}$ afin halka olsun. O zaman $\theta : \Omega_3(R) \longrightarrow \Omega_2(R)$ modül homomorfizmasının çekirdeği

$$\{[d_3, x, x, x](1), [d_3, x, x, y](1), [d_3, x, y, y](1), [d_3, y, y, y](1)\}$$

kümesi tarafından üretilir.

KAYNAKLAR

[1] Erdoğan, A. (1993). Differential Operators and Their Universal Modules, Phd. Thesis, Universty of Leeds.

[2] Erdoğan, A. ve Çimen, N. (1999). *Projective Dimension of the Universal Modules fort he Product of a Hypersurface and Affine T-Space. Comm.Algebra,* 27(10), 4737-4741.

[3] Nakai, Y. (1970). *High Order Derivations, Osaka J. Math.* 7, 1-27.

[4] Nakai, Y. (1961). *On The Theory of Differantials in Commutative Rings, J. Math.Soc.Japon* 13, 63-84.

[5] Olgun, N. (2005). *Sonlu Üretilmiş Cebirlerin Evrensel Diferansiyel Modülleri,* Hacettepe Üniversitesi, 4-15, 22-31.

[6] Osborn, H. (1967). *Modules of Differentials* I, *Math. Ann.* 170, 221-244.

[7] Osborn, H. (1968). *Modules of Differentials* II, *Math.Ann.*175, 146-158.

[8] Vasconcelos, W.V. (1968). *A Note On Normality and The Module of Differentials, Math. Z.* 105, 291-293.

[9] Olgun, N. and Erdogan, A. (2006). *Some Results On Universal Modules, Inter. Math. Forum 1, no:15, 707-712*

[10] Callialp, F. and Tekir, U. (2009). Değişmeli Halkalar ve Modüller, Birsen Yayınevi