MAYIS 2016 YÜKSEK LİSANS - MATEMATİK BÖLÜMÜ HİLAL ELDOĞAN

T.C

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

k-JACOBSTHAL VE k-JACOBSTHAL LUCAS MATRİS DİZİLERİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hilal ELDOĞAN

MAYIS 2016

k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas Matris Dizileri

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Şükran UYGUN

Hilal ELDOĞAN

Mayıs 2016

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas Matris Dizileri

Öğrencinin, Adı Soyadı: Hilal ELDOĞAN

Tez Savunma Tarihi: 31 Mayıs 2016

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Metin BEDİR

FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Şükran

Yrd. Doç. Dr. Şükran UYGUN

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:	İmzası
Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ	M Açıkgöz
Doç. Dr. M. Fatih HASOĞLU	....
Yrd. Doç. Dr. Şükran UYGUN	Şükran

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Hilal ELDOĞAN

ABSTRACT

k-JACOBSTHAL and k-JACOBSTHAL LUCAS MATRIX SEQUENCES

ELDOĞAN, Hilal

M.Sc. Thesis, Mathematics Department

Adviser: Assist. Prof. Dr. Şükran UYGUN

May 2016, 56 pages

In this study after Fibonacci, Lucas, Pell, Pell Lucas number sequences have been defined briefly, Jacobsthal and Jacobsthal Lucas number sequences and properties have been given in detail. By using the variable $k \in R^+$, the Jacobsthal and Jacobsthal Lucas sequences are generalized and k-Jacobsthal and k-Jacobsthal Lucas sequences are obtained. By setting off here k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas matrix sequences have been defined and for these sequences several identities and inequalities have been obtained, and these proporties by using matrix algebra have been used for number sequences. For k-Jacobsthal and k-Jacobsthal Lucas matrix sequences Binet formulas have been developed and seen some proporties of these sequences had been obtained by using it.

Keywords: Fibonacci, Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal Lucas number sequences, Binet formulas, Matrix sequences.

ÖZET

k-JACOBSTHAL VE k-JACOBSTHAL LUCAS MATRİS DİZİLERİ

ELDOĞAN, Hilal

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Şükran UYGUN

Mayıs 2016, 56 sayfa

Bu çalışmada Fibonacci, Lucas, Pell, Pell Lucas sayı dizileri kısaca tanımlandıktan sonra Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayı dizileri ve özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bu sayı dizilerini $k \in R^{+}$ değişkenini kullanarak genelleştirip k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayı dizileri elde edilmiştir. k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayı dizilerinin çeşitli özellikleri ispatlarıyla ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Buradan yola çıkarak k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas matris dizileri tanımlanıp bu matris dizileri için çeşitli özdeşlikler ve eşitsizlikler elde edilmiş ve bulunan bu özellikler matris cebiri kullanılarak sayı dizileri için de gösterilmiştir. k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas matris dizileri için Binet formülü oluşturulmuş bir çok özelliğin de bu formül sayesinde de elde edildiği görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci, Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal Lucas sayı dizileri, Binet formülleri, Matris dizileri.

Çok kıymetli aileme…

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince desteğini, deneyimini ve emeğini hiçbir zaman benden esirgemeyen ve aynı zamanda kişiliğiyle de bana örnek olan Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Şükran UYGUN'a, maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda bulunarak bu günlere gelmemde en büyük pay sahibi olan aileme ve tüm sevdiklerime minnettarlığımı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

C_n : Jacobsthal Lucas matris dizisinin n-inci elemanı

c_n : Jacobsthal Lucas sayı dizisinin n-inci elemanı

J_n : Jacobsthal matris dizisinin n-inci elemanı

j_n : Jacobsthal sayı dizisinin n-inci elemanı

$c_{k,n}$: k-Jacobsthal Lucas sayı dizisinin n-inci elemanı

$j_{k,n}$: k-Jacobsthal sayı dizisinin n-inci elemanı

$\Im_{k,n}$: k- Jacobsthal sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$\varsigma_{k,n}$: k- Jacobsthal Lucas sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Tamsayı dizileri sayılar teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. Tamsayı dizilerinin bu büyük önemi vücudumuzdaki organların birbirine oranında, çevremizdeki ağaçlarda, çiçeklerde, hayvanlarda muhteşem bir uyumla karşımıza çıkmasından kaynaklanmaktadır. Ayrıca rasyonel fonksiyonları temsil eden kuvvet serileri teorisinde, Hilbert serilerinde, grup teoriden gelen üreteç fonksiyonlarında ve bunun gibi birçok bilimde kullanılan bu gibi konularda sayı dizileri yardımıyla ciddi ilerlemeler elde edilmiştir. Bu bölümde çok kullanılan birçok sayı dizisinin nasıl oluştuğuna dair genel bir bilgi verilmiştir. Öncelikle tamsayı dizileri denilince ilk akla gelen Fibonacci ve Lucas dizileri tanımlanacak bu dizilerin ve diğer sayı dizilerinin bir takım özelliklerinden bahsedilecektir.

Leonardo Fibonacci 12. yüzyılda İtalya‘nın Pisa şehrinde doğmuş bir matematikçidir. Çocukluğu babasının işi nedeniyle Cezayir’de geçmişti. Burada Müslüman eğiticilerden onluk Arap sayı sistemini öğrenmiş böylece Roma rakam sistemimin fonksiyonel olmadığını fark etmişti. Aritmetik ve Cebir anlatan ‘Liber Abaci’ adlı eserinde Arap sayı sisteminin Roma rakam sistemine göre çok daha kullanışlı olduğundan bahsetmiştir. Kitap Arap sayı sistemini Batı Avrupa’ya tanıtan ilk kaynak olmuştur. Bu kitapta “Tavşan Problemi” olarak adlandırılan Leonardo Fibonacci’nin sadece basit bir aritmetik problemi olarak gördüğü bu soru sayesinde 19. yüzyılda Leonardo Fibonacci meşhur olmuştur. Problem şöyledir: Ergin bir tavşan çifti her ay yeni bir yavru çifti vermektedir. Bir yavru çifti bir ayda ergenliğe ulaşmaktadır. Yavru olan bir tavşan çiftinden 12 ay sonunda kaç tavşan çifti oluşur? Buna göre her ay kendinden önceki iki ayın toplamına eşittir. O halde tavşan çifti sayıları aylara göre sırasıyla 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 şeklinde olacaktır. Bu problem hakkında 19. yüzyıla kadar ciddi bir çalışma yapılmamışken birdenbire çok popüler olmuş ve sorunun çözümü olan sayılar Fibonacci sayıları olarak adlandırılmıştır.

Fibonacci sayıları üç nedenden dolayı büyük önem arz etmektedir. Birincisi dizinin ilk elemanlarının doğada bitkilerde, böceklerde kısacası birçok yerde karşımıza çok sık çıkmasıdır. İkinci olarak dizinin bir terimini kendinden önceki terime böldüğümüzde hep aynı oranı vermesidir. “Altın oran” denilen bu sayı vücudumuzdaki oranlardan Mısır’daki piramitlere kadar sayısız alanda karşımıza çıkmaktadır. Üçüncü olarak bu sayıların sayılar teorisinde çok ilginç özelliklerinin bulunmasıdır. Bu sayı dizisi $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}+1} = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}-1}$ yineleme bağıntısı kullanılarak tanımlanmıştır. Dizinin terimlerini oluşturabilmek için tabii ki ilk iki elemanın verilmesi gerekir. Fibonacci dizisi en kolay sayılar olan $\boldsymbol{F}_0 = 0,\ \ \boldsymbol{F}_1 = 1$ ile başlar. Ama istenirse başlangıç şartları değiştirilerek tamamen bu diziden bağımsız başka bir sayı dizisi de oluşturulabilir. Buna örnek olarak Fransız matematikçi Edward Lucas başlangıç şartları için seçilebilecek başka en basit $\boldsymbol{L}_0 = 2,\ \boldsymbol{L}_1 = 1$ değerlerini kullanarak Lucas sayı dizilerini oluşturmuştur ve bu sayı dizisi de ciddi bir popülerite kazanmıştır. Lucas sayı dizisinin literatürde bu kadar çok kullanılmasının nedeni Fibonacci sayı dizileri ile arasında birçok ilginç bağıntının bulunmasıdır.

Fibonacci sayı dizilerinin matris cebiri ile ilişkisi 1960’lı yıllarda Charles H. King’in master tezi olarak

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

matrisi üzerinde çalışmasıyla başlamıştır. Q matrisi için

$$Q^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

eşitliğini gösterip ve bu matrisi kullanarak

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \det Q = -1 \tag{1.3}$$

eşitliğini de elde etti. Bu eşitlikleri kullanarak $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}+1}.\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}-1} - \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}}^2 = (-1)^{\boldsymbol{n}}$ olarak bilinen Cassini formülünü elde etti. Silvester, 1979’ da bu matris gösteriminin avantajlarını fark edip Fibonacci sayıları ile ilgili birçok özellik ortaya koymuştur.

Belçikalı matematikçi Eugene Charles Catalan ve Alman matematikçi E. Jacobsthal 1883 yıllarında tamsayı dizileri ile ilgili polinomlar üzerinde çalışmışlardır.

BÖLÜM 2

ÇEŞİTLİ SAYI DİZİLERİ

Bu bölümde literatürde önemli bir yer tutan bazı tamsayı dizileri tanımlanacak ve bunlarla ilgili temel bazı özellikler verilecektir.

2.1. Fibonacci ve Lucas Sayıları ve Özellikleri

Tanım 2.1.1. $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere; $\boldsymbol{F_{n+1}} = \boldsymbol{F_n} + \boldsymbol{F_{n-1}}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{\boldsymbol{F_n}\}_{\boldsymbol{n}=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine Fibonacci sayı dizisi denir. Fibonacci dizisinin Binet benzeri formülü $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $\boldsymbol{F_n} = \frac{\alpha^{\boldsymbol{n}} - \beta^{\boldsymbol{n}}}{\alpha - \beta}$ şeklindedir. Binet formülünden hareketle $\lim\limits_{\boldsymbol{n}\to\infty} \frac{\boldsymbol{F_{n+1}}}{\boldsymbol{F_n}} = \alpha$ olduğu kolayca görülmektedir. Buradaki α sayısı "Altın Oran" olarak adlandırılmaktadır. Altın Oran, bir sayının insanlık, bilim ve sanat tarihinde oynadığı inanılmaz bir roldür. Altın oran doğada, bitkilerde, çiçeklerde, ideal insan vücudunda, mimari eserlerde ve birçok alanda karşımıza çıkar. Altın oran, evren ve yaşamı anlama konusunda bizlere yeni kapılar açmaya devam etmektedir.

Negatif indisli Fibonacci sayı dizisi için $\boldsymbol{F_{-n}} = (-1)^{\boldsymbol{n}+1}\boldsymbol{F_n}$ şeklinde bir bağıntı söz konusudur.

Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2} \tag{2.1.1}$$

şeklinde olup Simpson formülü

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \tag{2.1.2}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Kısmi toplam formülü

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1 \tag{2.1.3}$$

şeklinde verilir.

Tanım 2.1.2. $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olmak üzere; $\boldsymbol{L_{n+1}} = \boldsymbol{L_n} + \boldsymbol{L_{n-1}}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{\boldsymbol{L_n}\}_{\boldsymbol{n}=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine Lucas sayı dizisi denir. Lucas dizisinin Binet formülü $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $\boldsymbol{L_n} = \alpha^{\boldsymbol{n}} + \beta^{\boldsymbol{n}}$ şeklindedir. Binet formülünden hareketle $\lim\limits_{\boldsymbol{n}\to\infty} \frac{\boldsymbol{L_{n+1}}}{\boldsymbol{L_n}} = \alpha$ olduğu kolayca görülmektedir. Bu değer sayesinde Lucas sayı dizisi de en az Fibonacci sayı dizisi kadar önemli hale gelmiştir. Fibonacci sayıları ile Lucas sayıları arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur.

$$\begin{aligned} L_{n+1} + L_{n-1} &= 5F_n \\ F_n L_n &= F_{2n} \\ L_n^2 - 5F_n^2 &= 4(-1)^n \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Negatif indisli Lucas sayı dizisi $\boldsymbol{L_{-n}} = (-1)^{\boldsymbol{n}+1}\boldsymbol{L_n}$ şeklinde tanımlanır.

Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n x^n = \frac{2x^2 + x}{1 - x - x^2} \tag{2.1.5}$$

şeklinde olup Simpson formülü

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1} \tag{2.1.6}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Kısmi toplam formülü

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = L_{n+2} - 3 \tag{2.1.7}$$

şeklinde verilir (Koshy, 2001).

Fibonacci ve Lucas sayıları için Koshy ‘nin (2001) kitabı önemli bir kaynaktır.

2.2. Pell ve Pell Lucas Sayıları ve Özellikleri

Tanım 2.2.1. $P_0 = 0$ ve $P_1 = 1$ olmak üzere; $\boldsymbol{P_{n+1}} = 2\boldsymbol{P_n} + \boldsymbol{P_{n-1}}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{\boldsymbol{P_n}\}_{\boldsymbol{n}=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine Pell sayı dizisi denir. Pell dizisinin Binet formülü $\alpha = 1+\sqrt{2}$ ve $\beta = 1-\sqrt{2}$ olmak üzere $\boldsymbol{P_n} = \dfrac{\alpha^{\boldsymbol{n}} - \beta^{\boldsymbol{n}}}{\alpha - \beta}$ şeklindedir. Negatif indisli Pell sayı dizisi $\boldsymbol{P_{-n}} = (-1)^{\boldsymbol{n}+1}\boldsymbol{P_n}$ şeklinde tanımlanır.

Pell sayılarının üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x^n = \frac{x}{1-2x-x^2} \tag{2.2.1}$$

şeklinde olup Simpson formülü

$$P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n \tag{2.2.2}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Kısmi toplam formülü

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = \frac{1}{2}(P_{n+1} + P_n - 1) \tag{2.2.3}$$

şeklinde verilir (Horadam, 1971).

Tanım 2.2.2. $Q_0 = 2$ ve $Q_1 = 1$ olmak üzere; $\boldsymbol{Q_{n+1}} = 2\boldsymbol{Q_n} + \boldsymbol{Q_{n-1}}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{\boldsymbol{Q_n}\}_{\boldsymbol{n}=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine Pell Lucas sayı dizisi denir. Pell Lucas dizisinin Binet formülü $\alpha = 1+\sqrt{2}$ ve $\beta = 1-\sqrt{2}$ olmak üzere $\boldsymbol{Q_n} = \alpha^{\boldsymbol{n}} + \beta^{\boldsymbol{n}}$ şeklindedir. Negatif indisli Pell Lucas sayı dizisi $\boldsymbol{Q_{-n}} = (-1)^{\boldsymbol{n}+1}\boldsymbol{Q_n}$ şeklinde tanımlanır.

Pell Lucas sayılarının üreteç fonksiyon

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n x^n=\frac{2-2x}{1-2x-x^2} \tag{2.2.4}$$

şeklinde tanımlandıktan sonra Simpson formülü

$$Q_{n+1}Q_{n-1}-Q_n^2=8(-1)^{n-1} \tag{2.2.5}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Kısmi toplam formülü

$$\sum_{k=1}^{n}Q_k=\frac{1}{2}(Q_{n+1}+Q_n-2) \tag{2.2.6}$$

şeklinde verilir.

Pell ve Pell Lucas sayıları arasındaki bazı bağıntılar

$$\begin{aligned} P_{m+n}&=2P_mQ_n-(-1)^nP_{m-n}\\ Q_m^2&=2P_m^2+(-1)^m\\ Q_{2m}&=2Q_m^2-2(-1)^m \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

şeklindedir (Horadam, 1971).

Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayı dizileri bir sonraki bölümde detaylı bir şekilde inceleneceği için burada bahsedilmemiştir.

BÖLÜM 3

3. JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL LUCAS SAYILARI

Bu bölümde, Alman matematikçi Jacobsthal'ın literatüre kazandırdığı Jacobsthal sayılarına ait çeşitli özellikler incelenecektir. Bu sayı dizilerinin matris gösterimi belirtildikten sonra birçok özelliğin ispatının bu matris gösterimi kullanılarak kolaylıkla bulunabileceği görülecektir.

Bilgisayarlardaki bazı mikro işlemciler bir programın akışını değiştirmek için koşullu yönlendirmeler kullanırlar. Bu mikro işlemciler (dallı yönlendirenler) geçici olarak ilerideki yönlendirmeye atlatan komutlandırma yaparlar. Burada, 2 bit'in 4 olasılığı için 1 durumun, 3 bit'in 8 olasılığı için 3 durumun, 4 bit'in 16 olasılığı için 5 durumun, vb. durumları hariç bırakılarak diğerlerinin yararlı olduğu sonucuna varılmış ve hariç bırakılan bu durumların tam olarak Jacobsthal sayılarını verdiği görülmüştür (Horadam,1999)

3.1. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayıları

$j_0 = 0, \quad j_1 = 1$ olmak üzere; $j_{n+1} = j_n + 2j_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{j_n\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki sayı dizisine Jacobsthal sayı dizisi denir. Sırasıyla Jacobsthal sayıları 0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731, 5461, 10923, 21845, 43691, 87381, 174763, 349525, 699051, 1398101, 2796203, 5592405, 11184811, 22369621, 44739243, 89478485, 178956971, 357913941, 715827883, 1431655765, 2863311531… şeklinde verilebilir.

Negatif indisli Jacobsthal sayı dizisi $j_{-n} = (-1)^{n+1} j_n$ şeklinde tanımlanır.

$c_0 = 2, \quad c_1 = 1$ olmak üzere; $c_{n+1} = c_n + 2c_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ sayı dizisine Jacobsthal Lucas sayı dizisi denir. Sırasıyla Jacobsthal Lucas sayıları 2, 1 ,5, 7, 17, 31, 65, 127, 257, 384, 797… şeklinde verilebilir. Negatif indisli Jacobsthal Lucas sayı dizisi ise $c_{-n} = (-1)^{n+1} c_n$ şeklinde tanımlanır. Fibonacci sayılarında altın orana benzer Jacobsthal sayıların oranını verelim:

$$x = \frac{j_{n+1}}{j_n} = 1 + 2\frac{j_{n-1}}{j_n}$$

$$= 1 + \frac{2}{\frac{j_n}{j_{n-1}}} = 1 + \frac{2}{1 + 2\frac{j_{n-2}}{j_{n-1}}}$$

$$\vdots$$

$$= 1 + \frac{2}{x}$$

şeklinde sürekli kesir yazılırsa $j_{n+1}/j_n = x$ için $x = 1 + 2/x$ olur ki buradan $x^2 - x - 2 = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri 2 ve -1 sayılarıdır. Sayılar pozitif olduğu için oranları da pozitif olacağından aradığımız değer 2 sayısıdır.

Teorem 3.1.1. $x^2 - x - 2 = 0$ denkleminin kökleri $x_1 = 2,\ x_2 = -1$ olmak üzere Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları için Binet formülü

$$j_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \qquad (3.1.1)$$

$$c_n = x_1^n + x_2^n = 2^n + (-1)^n$$

şeklindedir (Horadam,1999).

İspat: $x_1 > x_2, \qquad x_2 < 0 < x_1, \qquad |x_2| < x_1$

$$x_1 + x_2 = 1, \quad x_1.x_2 = -2, \qquad x_1 - x_2 = 3$$

eşitlikleri sağlanır. $\boldsymbol{j_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n}$ şeklinde yazıp buradan $c_1,\ c_2$ değerlerini bulalım. $n = 0,\ \ n = 1$ için değerler yazılırsa $c_1 = \frac{1}{x_1 - x_2} = -c_2$ elde edilir. Böylece Binet benzeri formül, $x^2 - x - 2 = 0$ denkleminin kökleri kullanılarak $x_1 = 2,\ x_2 = -1 \Rightarrow \frac{2^n - (-1)^n}{3}$ şeklinde elde edilir.

Benzer şekilde Jacobsthal Lucas sayıları için Binet benzeri formülü $c_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$ şeklinde yazıp buradan $c_1,\ c_2$ değerlerini bulalım: $n=0,\ n=1$ için değerler yazılırsa $c_1 = \dfrac{3}{x_1 - x_2} = 2 - c_2$ elde edilir. $x^2 - x - 2 = 0$ denkleminin kökleri kullanılarak $x_1 = 2,\ x_2 = -1 \Rightarrow c_n = 2^n + (-1)^n$ olur.

Binet formülü, tam sayı dizileri için çok önemlidir. Sayı dizilerinin birçok önemli özelliği, Binet formülü kullanılarak elde edilebilir.

Teorem 3.1.2. Jacobsthal sayıları için ardışık sayıların limitleri oranı

$$\lim_{n\to\infty} \frac{j_{n+1}}{j_n} = 2 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{j_{n+r}}{j_n} = 2^r \tag{3.1.2}$$

şeklindedir (Horadam, 1999).

İspat: Jacobsthal sayılarının Binet benzeri formülü kullanılarak istenen elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{j_{n+1}}{j_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^{n+1} - (-1)^{n+1})/3}{(2^n - (-1)^n)/3} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{j_{n+r}}{j_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^{n+r} - (-1)^{n+r})/3}{(2^n - (-1)^n)/3} = 2^r$$

Teorem 3.1.3. Jacobsthal Lucas sayıları için ardışık sayıların limitleri oranı da Jacobsthal sayılarında olduğu gibi $\lim_{n\to\infty} \dfrac{c_{n+1}}{c_n} = 2$ ve $\lim_{n\to\infty} \dfrac{c_{n+r}}{c_n} = 2^r$

şeklindedir (Horadam, 1999).

İspat: Jacobsthal Lucas sayılarının Binet formülü kullanılarak tıpkı bir üstteki teoremin ispatı gibi yapılır.

Teorem 3.1.4. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıların limitleri oranı $\lim_{n\to\infty} \dfrac{j_n}{c_n} = \dfrac{1}{3}$ olur.

İspat: Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarının Binet formülü kullanılarak kolayca görülebilir.

Teorem 3.1.5. $m,n \geq 0$ herhangi iki tamsayı olmak üzere, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları için

a) $j_{n+1} = 2^n - j_n$

b) $j_{n-1} + j_n = 2^{n-1}$

c) $j_{n+1} = j_n + 2j_{n-1} = 2j_n + (-1)^n$

d) $c_{n+1} = 2c_n - 3(-1)^n$

e) $c_n = j_{n+1} + 2j_{n-1}$

f) $j_{m+n} = j_m j_{n+1} + 2j_{m-1}j_n$
$m = n \Rightarrow j_{2n} = j_n j_{n+1} + 2j_{n-1}j_n = j_n(j_{n+1} + 2j_{n-1}) = j_n c_n$
$m = n+1 \Rightarrow j_{2n+1} = j_{n+1}^2 + 2j_n^2$

g) $9j_n = c_{n+1} + 2c_{n-1}$

h) $c_n = 3j_n + 2(-1)^n$

i) $3j_n + c_n = 2^{n+1}$

j) $9j_{m+n} = c_m c_{n+1} + 2c_{m-1}c_n$ $\quad \begin{cases} m = n+1 \Rightarrow 9j_{2n+1} = c_{n+1}^2 + 2c_n^2 \\ m = n \Rightarrow 9j_{2n} = c_n(c_{n+1} + 2c_{n-1} \end{cases})$

k) $j_{m+n} = j_m c_n - (-2)^n j_{m-n}$

l) $j_{m-n} = (-2)^{-n}(j_m c_n - j_{m+n})$

m) $(-1)^{n+1}2^n = j_n c_{n-1} - j_{n-1}c_n$

n) $9(-1)^{n+1}2^{n-1}j_{m-n} = c_{m+1}c_{n-1} - c_m c_n$

o) $(-1)^n 2^{n-1} j_{m-n} = j_m j_{n-1} - j_{m-1}j_n$

p) $j_{2n+1} = j_{n+1}c_n - (-2)^n = j_n c_{n+1} + (-2)^n$

q) $c_{n+1} + c_n = 3(j_{n+1} + j_n) = 3.2^n$

r) $c_{n+1}-c_n=3(j_{n+1}-j_n)+4(-1)^{n+1}=2^n+2(-1)^{n+1}$

s) $c_{n+1}-2c_n=3(2j_n-j_{n+1})=3(-1)^{n+1}$

t) $2c_{n+1}+c_{n-1}=3(2j_{n+1}+j_{n+1})+6(-1)^{n+1}$

u) $c_{m+n}=j_{m+1}c_n+2j_mc_{n-1}$

v) $c_{m+n}=c_mc_n-(-2)^nc_{m-n}$ $\qquad \begin{cases} m=n+1 \Rightarrow c_{2n+1}=c_{n+1}c_n-(-2)^n \\ m=n \Rightarrow c_{2n}=c_n^2+(-2)^{n+1} \end{cases}$

w) $c_{m-n}=(-2)^{-n}(c_mc_n-c_{m+n})$

x) $(-1)^n2^{n-1}c_{m-n}=j_mc_{n-1}-j_{m-1}c_n$

y) $$\begin{aligned} c_{m+n}+c_{m-n} &= 3(j_{m+n}+j_{m-n})+4(-1)^{m-n} \\ &= 2^{m-n}(2^{2n}+1)+2(-1)^{m-n} \end{aligned}$$

z) $c_{m+n}-c_{m-n}=3(j_{m+n}-j_{m-n})=2^{m-n}(2^{2n}-1)$

özellikleri geçerlidir (Horadam, 1999).

İspat: Jacobsthal sayıları için Binet formülleri kullanılarak bu eşitliklerin sağlandığı gösterilebilir. Mesela l ve w şıkları için

$$j_{m-n}=\frac{2^{m-n}-(-1)^{m-n}}{3}=(-2)^{-n}\left(\frac{2^m-(-1)^m}{3}\cdot(2^n+(-1)^n)-\frac{2^{m+n}-(-1)^{m+n}}{3}\right)$$

$$c_{m-n}=2^{m-n}+(-1)^{m-n}=(-2)^{-n}\left((2^m+(-1)^m)\cdot(2^n+(-1)^n)-(2^{m+n}+(-1)^{m+n})\right)$$

eşitlikleri yazılabilir.

Diğer eşitlikler de benzer şekilde bulunabilir.

Teorem 3.1.6. $n\geq 0$ bir tamsayı olmak üzere Jacobsthal sayıları için

a) $j_{2n+1}^2=16j_{2n}j_{2n-2}+8j_{2n}+1$

b) $j_{2n+1}^2+j_{2n+3}^2=10+8j_{2n}(34j_{2n-2}+15)$

c) $j_{2n+1}=8j_{2n-2}+3$

d) $j_{2n}\, j_{2n+1} + j_{2n+2}\, j_{2n+3} = 3 + j_{2n}(136 j_{2n-2} + 55)$

e) $j_{2n} = 4 j_{2n-2} + 1$

f) $j_{2n+2}^2 - j_{2n}^2 = 1 + j_{2n}(60 j_{2n-2} + 23)$

g) $j_{2n+3}^2 - j_{2n+1}^2 = 8 + 8 j_{2n}(30 j_{2n-2} + 13)$

h) $j_{2n+3}\, j_{2n+2} - j_{2n+1}\, j_{2n} = 3 + j_{2n}(120 j_{2n-2} + 49)$

eşitlikleri sağlanır (Cerin, 2007).

İspat: Jacobsthal sayılarının Binet formülü kullanılarak bulunur.

Teorem 3.1.7. n,k herhangi iki tamsayı olmak üzere, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur (Cerin, 2007).

$$2(j_{2n+3} - j_{2n+1}) + 3 j_{2k}(j_{2n+4} - j_{2n+2}) = c_{2n+2k+2} - 1$$

$$2^{2k+1}(j_{2n+4} - j_{2n+2}) = c_{2n+2k+3} + 1$$

Teorem 3.1.8. n,k herhangi iki tamsayı olmak üzere, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları

$$j_n = \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-r}{r} 2^r$$

$$c_n = \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{n}{n-r} \binom{n-r}{r} 2^r$$

formülleri kullanılarak ta elde edilebilir. (Horadam, 1999)

Teorem 3.1.9. n,k herhangi iki tamsayı olmak üzere, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarının üreteç fonksiyonları

$$\sum_{i=1}^{\infty} j_i x^{i-1} = \frac{1}{1 - x - 2x^2}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i x^{i-1} = \frac{1+4x}{1-x-2x^2}$$

veya

$$\sum_{k=0}^{\infty} j_k x^k = \frac{x}{1-x-2x^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \frac{2-x}{1-x-2x^2}$$

şeklinde verilir. (Horadam, 1999)

Teorem 3.1.10. n,k herhangi iki tamsayı olmak üzere, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarının kısmi toplam formülü

$$\sum_{i=2}^{n} j_i = \frac{1}{2}\left(j_{n+2} - 3\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \frac{1}{2}\left(c_{n+2} - 5\right)$$

şeklindedir.

Teorem 3.1.11. n,k herhangi iki tamsayı olmak üzere, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarının üstel formu

$$\sum_{k=0}^{\infty} j_k \frac{x^k}{k!} = \frac{e^{2x} - e^{-x}}{3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^k}{k!} = e^{2x} + e^{-x}$$

şeklinde verilir. (Horadam, 1999)

3.2. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayılarının Matris Gösterimi

Bu bölümde, Köken F. ve Bozkurt D. tarafından tanımlanan Jacobsthal F- matrisi verilecektir. Ayrıca, bu matrisleri kullanarak elemanları Jacobsthal sayıları olan bir genel matris elde edilecektir. Bu genel matris kullanılarak, Jacobsthal sayıları için Binet ve Simpson benzeri formülleri, ardışık terimler toplamının farklı bir ispatı ve bazı toplam formülleri gösterilecektir.

Jacobsthal F-matrisi

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.2.1}$$

şeklinde tanımlanır. Jacobsthal sayılarının tanımı kullanılarak

$$\begin{bmatrix} j_{n+1} \\ j_n \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} j_n \\ j_{n-1} \end{bmatrix} \tag{3.2.2}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.2.1. $n \geq 0$ tamsayısı için,

$$F^n = \begin{bmatrix} j_{n+1} & 2j_n \\ j_n & 2j_{n-1} \end{bmatrix} \tag{3.2.3}$$

olur (Koken ve Bozkurt, 2008).

İspat: İspat tümevarımla yapılacaktır. $n = 1$ için doğrudur:

$$F = \begin{bmatrix} j_2 & 2j_1 \\ j_1 & 2j_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Şimdi $1 \leq k \leq n$ olacak şekildeki k tamsayısı için bağıntı doğru olsun. $k = n+1$ için

$$F^{n+1} = F^n F = \begin{bmatrix} j_{n+1} & 2j_n \\ j_n & 2j_{n-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{n+1} + 2j_n & 2j_{n+1} \\ (j_n + 2j_{n-1}) & 2j_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{n+2} & 2j_{n+1} \\ j_{n+1} & 2j_n \end{bmatrix}$$

şeklinde doğruluğu gösterilebilir.

Teorem 3.2.2. $n \geq 0$ tamsayısı için, $\det F^n = (-2)^n$ olur.

İspat: $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ise $\det F = -2$ olur. $\det F^n = (\det F)^n = (-2)^n$

Teorem 3.2.3. $n \geq 0$ tamsayısı için Jacobsthal sayı dizileri için Simpson formülü aşağıdaki gibi verilir:

$$j_{n+1}j_{n-1} - j_n^2 = (-1)^n 2^{n-1} \qquad (3.2.4)$$

İspat: 3.2.1 ve 3.2.2 teoremlerinden istenen bulunur.

$$\det F^n = 2(j_{n+1}j_{n-1} - j_n^2) = (-2)^n \quad \Rightarrow j_{n+1}j_{n-1} - j_n^2 = (-1)^n 2^{n-1}$$

Teorem 3.2.4. Jacobsthal sayı dizileri için Binet formülü

$$j_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \qquad (3.2.5)$$

şeklindedir (Koken ve Bozkurt, 2008).

İspat: $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin öz değerleri 2 ve -1 olup bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörler sırasıyla (2,1) ve (-1,1) şeklindedir. F matrisinin $D = P^{-1}FP$ şeklindeki köşegenleştirilmesi kullanılarak $PD^nP^{-1} = F^n$ ifadesini yazabiliriz. Matris gösterimiyle

$$F^n = \begin{bmatrix} j_{n+1} & 2j_n \\ j_n & 2j_{n-1} \end{bmatrix} = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{2^{n+1} + (-1)^{n+1}}{3} & \dfrac{2(2^n - (-1)^n)}{3} \\ \dfrac{2^n - (-1)^n}{3} & \dfrac{2(2^{n-1} + (-1)^{n-1}}{3} \end{bmatrix}$$

böylece istenen elde edilir.

Teorem 3.2.5. F^n matrisinin özdeğerleri $\lambda_{1,2} = (c_n \pm 3j_n)/2$ şeklinde ifade edilebilir (Koken ve Bozkurt, 2008).

İspat: İlk olarak $c_n = j_{n+1} + 2j_{n-1}$ ve $j_{n+1}.j_{n-1} - j_n^2 = (-1)^n 2^{n-1}$ eşitlikleri kullanılarak F^n matrisinin karakteristik denklemi,

$$\det(F^n - \lambda I) = \lambda^2 - (j_{n+1} + 2j_{n-1})\lambda + 2(j_{n+1}j_{n-1} - j_n^2) = \lambda^2 - c_n\lambda + (-2)^n$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin kökleri $\lambda_{1,2} = (c_n \pm \sqrt{c_n^2 - 4(-2)^n})/2$ şeklindedir. $c_n^2 - 4(-2)^n = 9j_n^2$ olduğundan istenen elde edilir.

Teorem 3.2.6. Her n doğal sayısı için,

$$\sum_{i=0}^{n} j_i = \frac{1}{2}(j_{n+2} - 1) \tag{3.2.6.}$$

sağlanır (Koken ve Bozkurt, 2008).

İspat: Cayley-Hamilton teoremine göre her matris kendi karekteristik denklemini sağlayacağından $F^2 - F - 2I = 0$ olur. Buradan $F(F - I) = 2I$ çıkarılabilir. $\det(F - I) = -2 \neq 0$ olduğundan tersi alınabilir ve tersini de $(F - I)^{-1} = \frac{1}{2}F$ ile belirtebiliriz.

$$(I + F + F^2 + ... + F^n)(F - I) = F^{n+1} - I$$

eşitliğini kullanarak ve her iki tarafı $(F - I)^{-1} = \frac{1}{2}F$ ile çarparak

$$(I + F + F^2 + ... + F^n) = \frac{1}{2}(F^{n+2} - F)$$

sonucu bulunur. Matrislerin (1,1) elemanları eşitlenirse

$$\sum_{i=0}^{n} j_i = \frac{1}{2}(j_{n+2} - 1)$$

elde edilir. Bu teoremin farklı bir ispatı da Horadam tarafından yapılmıştır.

Daha önce Jacobsthal sayı dizileri için Binet formulü kullanarak ispatladığımız eşitlikler Jacobsthal sayı dizilerinin matris gösterimi kullanılarak ta ispatlanabilir.

Teorem 3.2.7.

a) $j_{m+n} = j_m j_{n+1} + 2j_{m-1}j_n$

b) $j_{2n} = j_n j_{n+1} + 2 j_{n-1} j_n = j_n (j_{n+1} + 2 j_{n-1}) = j_n c_n$

c) $j_{2n+1} = j_{n+1}^2 + 2 j_n^2$

d) $(-1)^n 2^{n-1} j_{m-n} = j_m j_{n-1} + 2 j_{m-1} j_n$

eşitlikleri verilir (Koken ve Bozkurt, 2008).

İspat: Jacobsthal F-matrisi için $F^{m+n} = F^m F^n$ (ispat için [23] nolu referansa bakabilirsiniz) özelliği geçerli olduğundan,

$$\begin{bmatrix} j_{m+n+1} & 2j_{m+n} \\ j_{m+n} & 2j_{m+n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{m+1} & 2j_m \\ j_m & 2j_{m-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} j_{n+1} & 2j_n \\ j_n & 2j_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} j_{m+1} j_{n+1} + 2 j_m j_n & 2(j_{m+1} j_n + 2 j_m j_{n-1}) \\ j_m j_{n+1} + 2 j_{m-1} j_n & 2(j_m j_n + 2 j_{m-1} j_{n-1}) \end{bmatrix}$$

ilk eşitlik bu matrisin (1,2) elemanının eşitliğinden kolayca elde edilir. Diğer iki eşitlik de benzer şekilde gösterilebilir. Ayrıca

$$\left(F^n\right)^{-1} = F^{-n} = \frac{1}{(-2)^n} \begin{bmatrix} 2j_{n-1} & -2j_n \\ -j_n & j_{n+1} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \qquad F^{m-n} = F^m F^{-n}$$

eşitlikleri kullanılarak sonuncu özellik gösterilebilir.

BÖLÜM 4

4. k-JACOBSTHAL VE k-JACOBSTHAL LUCAS SAYI DİZİLERİ

Bu bölümde Jacobsthal sayılarının bir genelleştirmesi olan k-Jacobsthal sayıları ve k-Jacobsthal Lucas sayıları tanımlanıp ilgili özellikleri verilecektir.

4.1. k-Jacobsthal Sayı Dizisi

Tanım 4.1.1. (k-Jacobsthal Sayı Dizisi) Her $k > 0$ reel sayısı için başlangıç şartları

$j_{k,0} = 0$ ve $j_{k,1} = 1$ olmak üzere

$$j_{k,n+2} = kj_{k,n+1} + 2j_{k,n} \qquad n \geq 0 \tag{4.1.1}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{j_{k,n}\}_{n\in N}$ dizisine k-Jacobsthal dizisi denir. Dizinin her bir elemanına da k-Jacobsthal sayısı denir. $k = 1$ alınırsa Jacobsthal sayı dizisi elde edilir. Verilen denklemi bir fark denklemi gibi düşünürsek $r^2 = kr + 2$ elde ederiz ve denklemin kökleri

$$r_1 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 8}}{2} \quad \text{ve} \quad r_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 + 8}}{2} \tag{4.1.a}$$

olarak bulunur.

Bazı k-Jacobsthal Sayıları aşağıdaki gibi verilebilir:

$j_{k,0} = 0$

$j_{k,1} = 1$

$j_{k,2} = k$

$j_{k,3} = k^2 + 2$

$j_{k,4} = k^3 + 4k$

$j_{k,5} = k^4 + 6k^2 + 4$

$j_{k,6} = k^5 + 8k^3 + 12k$

$j_{k,7} = k^6 + 10k^4 + 24k^2 + 8$

$j_{k,8} = k^7 + 12k^5 + 40k^3 + 32k$

$j_{k,9} = k^8 + 14k^6 + 60k^4 + 80k^2 + 16$

$j_{k,10} = k^9 + 16k^7 + 84k^5 + 160k^3 + 80k$

Lemma 4.1.2. Her n doğal sayısı için $r_1^{n+2} = kr_1^{n+1} + 2r_1^n$ ve $r_2^{n+2} = kr_2^{n+1} + 2r_2^n$ eşitlikleri sağlanır.

İspat: $r^2 = kr + 2$ için $r_1^2 = kr_1 + 2$ ve $r_2^2 = kr_2 + 2$ eşitlikleri sağlanır. Bu eşitliklerden ilki r_1^n ikincisi r_2^n ile çarpılırsa istenen hemen görülür.

Teorem 4.1.3. $k-$Jacobsthal sayıları için Binet formülü

$$j_{k,n} = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} \tag{4.1.2}$$

şeklindedir.

İspat:

$$r_1 > r_2, \qquad r_2 < 0 < r_1, \qquad |r_2| < r_1$$

$$r_1 + r_2 = k, \quad r_1.r_2 = -2, \qquad r_1 - r_2 = \sqrt{k^2 + 8} \tag{4.1.b}$$

eşitlikleri sağlanır. $j_{k,n} = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ şeklinde yazıp buradan $c_1,\ c_2$ değerlerini bulalım. $n = 0,\ \ n = 1$ için değerler yazılırsa $c_1 = \dfrac{1}{r_1 - r_2} = -c_2$ Böylece Binet benzeri formül elde edilir.

Teorem 4.1.4 k-Jacobsthal sayıları için ardışık sayıların limitleri oranı

$$\lim_{n\to\infty} \frac{j_{k,n+1}}{j_{k,n}} = r_1 \tag{4.1.3}$$

şeklindedir.

İspat: k- Jacobsthal sayılarının Binet benzeri formülü kullanılarak ve $|r_2| < r_1$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{r_2}{r_1} = 0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{j_{k,n+1}}{j_{k,n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1 - r_2}}{\dfrac{r_1^{n} - r_2^{n}}{r_1 - r_2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^{n+1}}{\dfrac{1}{r_1} - \left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^{n+1} \dfrac{1}{r_2}} = r_1$$

istenen elde edilir.

Önerme 4.1.5 (Catalan özdeşliği) $n > 0$ tamsayısı için

$$j_{k,n-r}\, j_{k,n+r} - j_{k,n}^2 = (-1)^{n+1-r}\, j_{k,r}^2\, 2^{n-r} \tag{4.1.4}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $r_1 r_2 = -2$ eşitliği kullanılarak

$$j_{k,n-r}\, j_{k,n+r} - j_{k,n}^2 = \frac{r_1^{n-r} - r_2^{n-r}}{r_1 - r_2} \frac{r_1^{n+r} - r_2^{n+r}}{r_1 - r_2} - \left(\frac{r_1^{n} - r_2^{n}}{r_1 - r_2}\right)^2$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}\, 2^n}{(r_1 - r_2)^2} \left(\frac{r_1^{2r} + r_2^{2r}}{(r_1 r_2)^r} - 2\right)$$

$$= (-1)^{n+1-r}\, 2^{n-r}\, j_{k,r}^2$$

elde edilir.

$r = 1$ için Cassini Özdeşliği $j_{k,n-1} j_{k,n+1} - j_{k,n}^2 = (-1)^n\, 2^{n-1}$ şeklindedir.

Önerme 4.1.6 (D'ocagne özdeşliği) $m, n > 0$ tamsayıları ve $m > n$ için

$$j_{k,m}\, j_{k,n+1} - j_{k,m+1} j_{k,n} = (-2)^n\, j_{k,m-n} \tag{4.1.5}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Binet formülü kullanılarak

$$j_{k,m}j_{k,n+1}-j_{k,m+1}j_{k,n}=\frac{r_1^m-r_2^m}{r_1-r_2}\frac{r_1^{n+1}-r_2^{n+1}}{r_1-r_2}-\frac{r_1^{m+1}-r_2^{m+1}}{r_1-r_2}\frac{r_1^n-r_2^n}{r_1-r_2}$$

$$=\left(r_1r_2\right)^n\left(\frac{r_1^{m-n}+r_2^{m-n}}{r_1-r_2}\right)$$

$$=\left(-2\right)^n j_{k,m-n}$$

ispatlanabilir.

Teorem 4.1.7. $\lfloor x \rfloor$ tam değer fonksiyonu olmak üzere $n \geq 0$ tamsayısı için

$$j_{k,n}=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2i+1}k^{n-1-2i}(k^2+8)^i \qquad (4.1.6)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$j_{k,n}=\frac{r_1^n-r_2^n}{r_1-r_2}=\frac{1}{\sqrt{k^2+8}}\left(\left(\frac{k+\sqrt{k^2+8}}{2}\right)^n-\left(\frac{k-\sqrt{k^2+8}}{2}\right)^n\right)$$

$$j_{k,n}=\frac{1}{2^n\sqrt{k^2+8}}\left[\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}k^{n-r}\sqrt{(k^2+8)^r}-\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}k^{n-r}\sqrt{(k^2+8)^r}\right]$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2i+1}k^{n-1-2i}(k^2+8)^i$$

Teorem 4.1.8. k -Jacobsthal sayı dizisinde

$$\sum_{n=0}^{\infty}j_{k,n}x^n=j_{k,0}+j_{k,1}x+j_{k,2}x^2+....+j_{k,n}x^n+... \qquad (4.1.7.)$$

için

$$J_{k,n} = \sum_{i=0}^{\infty} j_{k,i} x^i = \frac{x}{1-kx-2x^2} \tag{4.1.8}$$

elde edilir.

İspat: $J_{k,n} = j_{k,0} + j_{k,1}x + j_{k,2}x^2 + ... + j_{k,n}x^n + ...$ fonksiyonunun her iki tarafını kx ve $2x^2$ ile ayrı ayrı çarparsak

$$kxJ_{k,n} = kj_{k,0}x + kj_{k,1}x^2 + kj_{k,2}x^3 + ... + kj_{k,n}x^{n+1} + ...$$

$$2J_{k,n}x^2 = 2j_{k,0}x^2 + 2j_{k,1}x^3 + 2j_{k,2}x^4 + ... + 2j_{k,n}x^{n+2} + ...$$

elde edilir. Bu denklemleri yukarıdaki denklemden çıkarırsak

$$(1-kx-2x^2)J_{k,n} = x$$

olur. Buradan istenen elde edilir.

Teorem 4.1.9. $m > 0, n > 0$, m ve n tamsayıları için

$$j_{k,m+n+1} = j_{k,m+1} j_{k,n+1} + 2 j_{k,m} j_{k,n} \tag{4.1.9}$$

eşitliği sağlanır.

İspat $p = 0$ *için* $j_{k,m+1} = j_{k,m+1} j_{k,1} + 2 j_{k,m} j_{k,0}$ doğruluğu sağlanır. $p = n$ için doğru olsun. $p = n+1$

$$\begin{aligned} j_{k,m+n+2} &= kj_{k,m+n+1} + 2j_{k,m+n} = k\left(j_{k,m+1} j_{k,n+1} + 2 j_{k,m} j_{k,n}\right) + 2\left(j_{k,m+1} j_{k,n} + 2 j_{k,m} j_{k,n-1}\right) \\ &= j_{k,m+1}\left(kj_{k,n+1} + 2 j_{k,n}\right) + 2 j_{k,m}\left(kj_{k,n} + 2 j_{k,n-1}\right) \\ &= j_{k,m+1} j_{k,n+2} + 2 j_{k,m} j_{k,n+1} \end{aligned}$$

istenen elde edilir.

Teorem 4.1.10. $n > 0$ için

$$\sum_{i=1}^{n} j_{k,i} = \frac{j_{k,n+2} - 1}{k+1} \tag{4.1.10}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Geometrik seri açılımı ve Binet formülü kullanılarak k-Jacobsthal sayıları için

$$\sum_{i=1}^{n} j_{k,i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{r_1^{\,i} - r_2^{\,i}}{r_1 - r_2}\right)$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left(\frac{r_1 - r_1^{\,n+1}}{1 - r_1} - \frac{r_2 - r_2^{\,n+1}}{1 - r_2}\right)$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left(\frac{r_1 - r_1 r_2 - r_1^{\,n+1} + r_1^{\,n+1} r_2 - r_2 + r_2 r_1 + r_2^{\,n+1} - r_2^{\,n+1} r_1}{(1 - r_1)(1 - r_2)}\right)$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left(\frac{-\left(r_1^{\,n+1} - r_2^{\,n+1}\right) + r_1 r_2\left(r_1^{\,n} - r_2^{\,n}\right) + \left(r_1 - r_2\right)}{\left(1 - r_2 - r_1 + r_1 r_2\right)}\right)$$

$$= \frac{1 - j_{k,n+1} - 2 j_{k,n}}{-1 - k} = \frac{j_{k,n+1} + 2 j_{k,n} - 1}{1 + k}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.1.10'u aşağıdaki sonuç ile genelleştirebiliriz.

Sonuç 4.1.11. $n, p \geq 0$ n, p tamsayıları için

$$\sum_{p=0}^{n} j_{k,pi} = \frac{j_{k,i} - j_{k,(n+1)i} + (-2)^{i} j_{k,ni}}{1 - c_{k,i} + (-2)^{i}} \tag{4.1.11}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.1.12 $n \geq 0$ herhangi bir tamsayı olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{n} j_{k,i} x^{-i} = \frac{-1}{x^{n}\left(x^{2} - kx - 2\right)}\left[- x^{n+1} + x j_{k,n+1} + 2 j_{k,n}\right] \tag{4.1.12}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.1.a) , (4.1.b) ve (4.1.2) kullanılarak

$$\sum_{i=0}^{n} j_{k,i} x^{-i} = \frac{1}{r_1 - r_2}\left[\frac{1-\left(\frac{r_1}{x}\right)^{n+1}}{1-\frac{r_1}{x}} - \frac{1-\left(\frac{r_2}{x}\right)^{n+1}}{1-\frac{r_2}{x}}\right] = \frac{1}{(r_1 - r_2)x^n}\left[\frac{x^{n+1} - r_1^{n+1}}{x - r_1} - \frac{x^{n+1} - r_2^{n+1}}{x - r_2}\right]$$

$$= \frac{-1}{(r_1 - r_2)x^n}\left[\frac{-x^{n+1}(r_1 - r_2) + x\left(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}\right) + 2\left(r_1^n - r_2^n\right)}{x^2 - kx - 2}\right]$$

$$= \frac{-1}{x^n\left(x^2 - kx - 2\right)}\left[-x^{n+1} + xj_{k,n+1} + 2j_{k,n}\right]$$

istenen eşitlik sağlanır.

Sonuç 4.1.13. $n \to \infty$ iken

$$\sum_{i=0}^{\infty} j_{k,i} x^{-i} = \frac{x}{\left(x^2 - kx - 2\right)} \tag{4.1.13}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.1.14 $\left|r_1^k r_2^{r-k} x\right| < 1$ için

$$\sum_{i=0}^{\infty} j_{k,i}^r x^i = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \frac{1}{(r_1 - r_2)^k} \frac{1}{(r_2 - r_1)^{r-k}} \frac{1}{1 - r_1^k r_2^{r-k} x} \tag{4.1.14}$$

eşitliği elde edilir.

İspat: Geometrik seri açılımını ve binet formülünü kullanarak

$$\sum_{i=0}^{\infty} j_{k,i}^r x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \left(\frac{r_1^i}{r_1 - r_2}\right)^k \left(\frac{-r_2^i}{r_1 - r_2}\right)^{r-k} x^i$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \frac{1}{(r_1 - r_2)^k} \frac{1}{(r_2 - r_1)^{r-k}} \sum_{i=0}^{\infty} \left[r_1^k r_2^{r-k} x\right]^i$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \frac{1}{(r_1 - r_2)^k} \frac{1}{(r_2 - r_1)^{r-k}} \frac{1}{1 - r_1^k r_2^{r-k} x}$$

ispat yapılır.

Teorem 4.1.15 $n \geq 0$ herhangi bir tamsayı olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^{n-i} k^i j_{k,i} = j_{k,2n} \tag{4.1.15}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.3.25) ve (4.3.26) özelliklerini kullanarak

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^{n-i} k^i j_{k,i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^{n-i} k^i \frac{r_1^i - r_2^i}{r_1 - r_2} = \frac{1}{r_1 - r_2} \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^{n-i} (r_1 k)^i - \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^{n-i} (r_2 k)^i \right)$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2} \left[(2 + r_1 k)^n - (2 + r_2 k)^n \right] = j_{k,2n}$$

eşitliği gösterilir.

Teorem 4.1.16 (k-Jacobsthal sayı dizilerinin üstel üreteç fonksiyonu)

$$\sum_{n=0}^{\infty} j_k x \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 8}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r_1 x)^n - (r_2 x)^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k^2 + 8}} \left(e^{r_1 x} - e^{r_2 x} \right) \tag{4.1.16}$$

şeklinde ifade edilir.

4.2. k-Jacobsthal Lucas Dizisi

Tanım 4.2.1.(k-Jacobsthal Lucas dizisi) Her $k > 0$ reel sayısı için başlangıç şartları $c_{k,0} = 2$ ve $c_{k,1} = k$ olan

$$c_{k,n+2} = k c_{k,n+1} + 2 c_{k,n} \quad n \geq 0 \tag{4.2.1}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan $\{c_{k,n}\}_{n \in N}$ dizisine k-Jacobsthal lucas dizisi denir. Dizinin her bir elemanına da k-Jacobsthal Lucas sayısı denir. $k = 1$ alınırsa Jacobsthal Lucas dizisi elde edilir.

Bazı k-Jacobsthal Lucas sayıları aşağıdaki gibi verilir:

$c_{k,0} = 2$ $\qquad$ $c_{k,3} = k^3 + 6k$

$c_{k,1} = k$

$c_{k,2} = k^2 + 4$

$c_{k,4} = k^4 + 8k^2 + 8$

$c_{k,5} = k^5 + 10k^3 + 20k$

$c_{k,6} = k^6 + 12k^4 + 36k^2 + 16$

$c_{k,7} = k^7 + 14k^5 + 56k^3 + 56k$

$c_{k,8} = k^8 + 16k^6 + 80k^4 + 128k^2 + 32$

$c_{k,9} = k^9 + 18k^7 + 108k^5 + 140k^3 + 144k$

$c_{k,10} = k^{10} + 20k^8 + 140k^6 + 300k^4 + 272k^2 + 64$

Teorem 4.2.2. k -Jacobsthal Lucas sayıları için Binet formülü

$$c_{k,n} = r_1^n + r_2^n \tag{4.2.2}$$

şeklindedir.

İspat: k-Jacobsthal Lucas dizisinin genel teriminin herhangi $c_1,\ c_2$ sayıları için $c_{k,n} = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ şeklinde yazıp buradan $c_1,\ c_2$ değerlerini bulalım. $n = 0,\ \ n = 1$ için değerler yazılırsa $c_1 = \dfrac{1-2r_2}{r_2 - r_1} = 2 - c_2$ katsayıları elde edilir. Bu katsayılar yerine yazıldığında istenen elde edilir. İkinci bir yol olarak

$$\begin{aligned}
c_{k,n+1} &= kc_{k,n} + 2c_{k,n-1} \\
&= k\left(r_1^n + r_2^n\right) + 2\left(r_1^{n-1} + r_2^{n-1}\right) \\
&= r_1^{n-1}\left(kr_1 + 2\right) + r_2^{n-1}\left(kr_2 + 2\right) \\
&= r_1^{n-1}\left(\left(r_1 + r_2\right)r_1 + 2\right) + r_2^{n-1}\left(\left(r_1 + r_2\right)r_2 + 2\right) \\
&= r_1^{n-1}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + 2\right) + r_2^{n-1}\left(r_1 r_2 + r_2^2 + 2\right) \\
&= r_1^{n+1} + r_2^{n+1}
\end{aligned}$$

şeklinde ispat edilebilir (Jhala, 2014).

Teorem 4.2.3 k-Jacobsthal Lucas sayıları için ardışık sayıların limitleri oranı

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{k,n+1}}{c_{k,n}} = r_1 \tag{4.2.3}$$

şeklindedir.

İspat: k- Jacobsthal Lucas sayılarının Binet benzeri formülü kullanılarak ve $|r_2| < r_1$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{r_2}{r_1} = 0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{k,n+1}}{c_{k,n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1^n - r_2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1}}{\frac{1}{r_1} - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1} \frac{1}{r_2}} = r_1$$

istenen elde edilir.

Önerme 4.2.4.(Catalan özdeşliği) $n > 0$ **ve** $n > r$ tamsayıları için

$$c_{k,n-r}c_{k,n+r} - c_{k,n}^2 = (-2)^{n-r}\left(c_{k,r}^2 - (-2)^{r+2}\right) \tag{4.2.4}$$

eşitliği sağlanır (Jhala, 2014).

İspat: Binet formülü kullanılarak

$$c_{k,n-r}c_{k,n+r} - c_{k,n}^2 = \left(r_1^{n-r} + r_2^{n-r}\right)\left(r_1^{n+r} + r_2^{n+r}\right) - \left(r_1^n + r_2^n\right)^2$$

$$= (-2)^n\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^r + (-2)^n\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^r - 2(-2)^n$$

$$=(-2)^n\left(\frac{r_2^r}{r_1^r} + \frac{r_1^r}{r_2^r} - 2\right)$$

$$= (-2)^n\left[\frac{r_2^{2r} + r_1^{2r} + -2(r_1r_2)^r}{(r_1r_2)^r}\right]$$

$$= (-2)^n\left[\frac{r_2^{2r} + r_1^{2r} - 2(r_1r_2)^r}{(-2)^r}\right]$$

$$= (-2)^{n-r}\left(r_2^{2r} + r_1^{2r} - 2(r_1r_2)^r\right)$$

$$= (-2)^{n-r}\left(\left(r_1^r + r_2^r\right)^2 - 4(r_1r_2)^r\right)$$

$$= (-2)^{n-r}\left(c_{k,r}^2 - 4(-2)^r\right)$$

eşitliği elde edilir.

$r=1$ için Cassini özdeşliği $c_{k,n-1}c_{k,n+1}-c_{k,n}^2=(-2)^{n-1}(k^2+8)$ şeklindedir.

Önerme 4.2.5. (D'Ocagne Özdeşliği): $m,n>0$ tamsayıları ve $m>n$ için

$$c_{k,m}c_{k,n+1}-c_{k,m+1}c_{k,n}=(-2)^n\sqrt{k^2+8}\left(c_{k,m-n}-2^{n-m+1}\left(k+\sqrt{k^2+8}\right)^{m-n}\right) \tag{4.2.5}$$

eşitliği sağlanır (Jhala vd., 2013).

İspat : $m>n$ için

$$\begin{aligned}
c_{k,m}c_{k,n+1}-c_{k,m+1}c_{k,n} &= \left(r_1^m+r_2^m\right)\left(r_1^{n+1}+r_2^{n+1}\right)-\left(r_1^{m+1}+r_2^{m+1}\right)\left(r_1^n+r_2^n\right)\\
&=(-2)^n\left(r_1^{m-n}r_2+r_1r_2^{m-n}-r_1^{m-n}r_1-r_2^{m-n}r_2\right)\\
&=(-2)^n\left(r_1^{m-n}(r_2-r_1)+r_2^{m-n}(r_1-r_2)\right)\\
&=(-2)^n(r_1-r_2)\left(r_2^{m-n}-r_1^{m-n}\right)\\
&=(-2)^n\sqrt{k^2+8}\left(r_1^{m-n}+r_2^{m-n}-2r_1^{m-n}\right)\\
&=(-2)^n\sqrt{k^2+8}\left(c_{k,m-n}-2r_1^{m-n}\right)\\
&=(-2)^n\sqrt{k^2+8}\left(c_{k,m-n}-2\frac{\left(k+\sqrt{k^2+8}\right)^{m-n}}{2^{m-n}}\right)\\
&=(-2)^n\sqrt{k^2+8}\left(c_{k,m-n}-2^{n-m+1}\left(k+\sqrt{k^2+8}\right)^{m-n}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.6. $\lfloor x\rfloor$ tam değer fonksiyonu olmak üzere $n\geq 0$ tamsayısı için

$$c_{k,n}=\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\frac{n}{n-i}\binom{n-i}{i}k^{n-2i}2^i \tag{4.2.6}$$

şeklindedir.

İspat: İspat tümevarım yöntemi kullanılarak yapılır.

Teorem 4.2.7. k -Jacobsthal Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu

$$c_{k,0}+c_{k,1}x+c_{k,2}x^2+....+c_{k,n}x^n+...=\sum_{i=0}^{\infty}c_{k,i}x^i=\frac{2-kx}{1-kx-2x^2} \tag{4.2.7}$$

şeklindedir (Jhala vd., 2013).

İspat:

$$\varsigma_{k,n}(x)=c_{k,0}+c_{k,1}x+c_{k,2}x^2+c_{k,3}x^3+...+c_{k,n}x^n$$

$$\varsigma_{k,n}(x)=2+kx+\sum_{n=2}^{\infty}c_{k,n}x^n$$

$$\varsigma_{k,n}(x)=2+kx+\sum_{n=2}^{\infty}(kc_{k,n-1}+2c_{k,n-2})x^n$$

$$=2+kx+k\sum_{n=2}^{\infty}c_{k,n-1}x^n+2\sum_{n=2}^{\infty}c_{k,n-2}x^n$$

$$=2+kx+kx\sum_{n=2}^{\infty}c_{k,n-1}x^{n-1}+2x^2\sum_{n=2}^{\infty}c_{k,n-2}x^{n-2}$$

$$=2+kx+kx\left(\sum_{p=0}^{\infty}c_{k,p}x^p-c_{k,0}\right)+2x^2\sum_{c=0}^{\infty}c_{k,c}x^c$$

$$=2-kx+kx\sum_{p=0}^{\infty}c_{k,p}x^p+2x^2\sum_{c=0}^{\infty}c_{k,c}x^c$$

Buradan

$$\varsigma_{k,n}(x)=2-kx+kx\varsigma_{k,n}(x)+2x^2\varsigma_{k,n}(x)$$

$$\varsigma_{k,n}(x)(1-kx-2x^2)=2-kx$$

$$\varsigma_{k,n}(x)=\frac{2-kx}{(1-kx-2x^2)}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.2.8. $n>0$ için tamsayısı için

$$\sum_{i=1}^{n} c_{k,i} = \frac{c_{k,n+1} + 2c_{k,n} - k - 4}{k+1} \tag{4.2.8}$$

eşitliği sağlanır (Jhala, 2014).

İspat: Geometrik seri açılımı ve Binet formülü kullanılarak k-Jacobsthal Lucas sayıları için

$$\sum_{i=1}^{n} c_{k,i} = \sum_{i=1}^{n} \left(r_1{}^{i} + r_2{}^{i} \right)$$

$$= \frac{r_1 - r_1{}^{n+1}}{1 - r_1} + \frac{r_2 - r_2{}^{n+1}}{1 - r_2}$$

$$= \frac{r_1 - r_1 r_2 - r_1{}^{n+1} + r_1{}^{n+1} r_2 + r_2 - r_2 r_1 - r_2{}^{n+1} + r_2{}^{n+1} r_1}{(1 - r_1)(1 - r_2)}$$

$$= \frac{-\left(r_1{}^{n+1} + r_2{}^{n+1}\right) + r_1 r_2 \left(r_1{}^{n} + r_2{}^{n}\right) + (r_1 + r_2) - 2 r_1 r_2}{(1 - r_2 - r_1 + r_1 r_2)}$$

$$= \frac{c_{k,n+1} + 2c_{k,n} - k - 4}{k+1}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.2.8 aşağıdaki sonuç ile genelleştirilebilir.

Sonuç 4.2.9. $n, p \geq 0$ n, p tamsayıları için

$$\sum_{p=0}^{n} c_{k,pi} = \frac{2 - c_{k,(n+1)i} - c_{k,i} + (-2)^{i} c_{k,ni}}{1 - c_{k,i} + (-2)^{i}} \tag{4.2.9}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.2.10 $n \geq 0$ herhangi bir tamsayı olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{n} c_{k,i} x^{-i} = \frac{-1}{x^{n}\left(x^{2} - kx - 2\right)} \left[x c_{k,n+1} + 2c_{k,n} \right] + \frac{2x^{2} - kx}{\left(x^{2} - kx - 2\right)} \tag{4.2.10}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.1.a) , (4.1.b) ve (4.2.2) eşitliklerini kullanılarak

$$\sum_{i=0}^{n} c_{k,i}x^{-i} = \left[\frac{1-\left(\frac{r_1}{x}\right)^{n+1}}{1-\frac{r_1}{x}} + \frac{1-\left(\frac{r_2}{x}\right)^{n+1}}{1-\frac{r_2}{x}} \right] = \frac{1}{x^n}\left[\frac{x^{n+1}-r_1^{n+1}}{x-r_1} + \frac{x^{n+1}-r_2^{n+1}}{x-r_2} \right]$$

$$= \frac{-1}{x^n}\left[\frac{-2x^{n+2}+x^{n+1}(r_1+r_2)+x\left(r_1^{n+1}+r_2^{n+1}\right)+2\left(r_1^n+r_2^n\right)}{x^2-kx-2} \right]$$

$$= \frac{-1}{x^n\left(x^2-kx-2\right)}\left[xc_{k,n+1}+2c_{k,n}\right]+\frac{2x^2-kx}{\left(x^2-kx-2\right)}$$

Böylece istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.11. $n \to \infty$ iken

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_{k,i}x^{-i} = \frac{2x^2-kx}{\left(x^2-kx-2\right)} \tag{4.2.11}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.2.12. $\left|r_1^k r_2^{r-k} x\right| < 1$ için

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_{k,i}^r x^i = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \frac{1}{1-r_1^k r_2^{r-k} x} \tag{4.2.12}$$

eşitliği elde edilir.

İspat: Geometrik seri açılımını ve binet formülünü kullanarak

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_{k,i}^r x^i = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \left(r_1^i\right)^k \left(-r_2^i\right)^{r-k} x^i$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \sum_{i=0}^{\infty} \left[r_1^k r_2^{r-k} x\right]^i$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \frac{1}{1-r_1^k r_2^{r-k} x}$$

ispat yapılır.

Teorem 4.2.13(k-Jacobsthal Lucas sayı dizilerinin üstel üreteç fonksiyonu)

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{k,n}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(r_1^n + r_2^n\right)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(r_1x)^n + (r_2x)^n}{n!}$$

$$= \left(e^{r_1x} + e^{r_2x}\right) \qquad (4.2.13)$$

şeklinde ifade edilir.

4.3. k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayı dizileri Arasındaki Bağıntılar

Teorem 4 .3.1 $n > 0$ tamsayısı için

$$c_{k,n}^2 = \left(k^2 + 8\right) j_{k,n}^2 + 4(-2)^n \qquad (4.3.1)$$

eşitliği sağlanır (Jhala, 2014).

İspat : $\left(k^2 + 8\right) j_{k,n}^2 + 4(-2)^n = \left(k^2 + 8\right)\left(\dfrac{r_1^{\,n} - r_2^{\,n}}{r_1 - r_2}\right)^2 + 4(-2)^n$

$$= r_1^{\,2n} + r_2^{\,2n} - 2r_1^{\,n}r_2^{\,n} + 4r_1^{\,n}r_2^{\,n}$$

$$= \left(r_1^{\,n} + r_2^{\,n}\right)^2 \quad = c_{k,n}^2$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.3.2. $n > 0$ tamsayısı için

$$c_{k,n} = 2j_{k,n-1} + j_{k,n+1}, \qquad (4.3.2)$$

eşitliği sağlanır (Jhala, 2014).

İspat : $n = 1$ için, $2j_{k,0} + j_{k,2} = k = c_{k,1}$ elde edilir.Eşitlik $m \le n$ için doğru olsun.

$$c_{k,n-2} = 2j_{k,n-3} + j_{k,n-1}$$

$$c_{k,n-1} = 2j_{k.n-2} + j_{k,n}$$

$$c_{k,n} = kc_{k,n-1} + 2c_{k,n-2}$$

$$c_{k,n}=k\left(2j_{k,n-2}+j_{k,n}\right)+2\left(2j_{k,n-3}+j_{k,n-1}\right)$$

$$=2\left(kj_{k,n-2}+2j_{k,n-3}\right)+\left(kj_{k,n}+2j_{k,n-1}\right)=2j_{k,n-1}+j_{k,n+1}$$

Böylece istenen sağlanır.

Teorem 4.3.3. $n>0$ tamsayısı için

$$c_{k,n}\ j_{k,n}=j_{k,2n} \tag{4.3.3}$$

eşitliği sağlanır (Jhala, 2014).

İspat :

$j_{k,n+m}=j_{k,n+1}\ j_{k,m}+2j_{k,n}\ j_{k,m-1}$ eşitliğinde $m=n$ alınırsa

$$j_{k,2n}=j_{k,n+1}\ j_{k,n}+2j_{k,n}\ j_{k,n-1}$$

$$=\left(j_{k,n+1}+2j_{k,n-1}\right)j_{k,n}=c_{k,n}\ j_{k,n}$$

istenen sağlanır.

Teorem 4.3.4. $n>0$ tamsayısı için

$$c_{k,n}=kj_{k,n}+4j_{k,n-1} \tag{4.3.4}$$

elde edilir.

İspat: $n=1$ tamsayısı için $c_{k,1}=kj_{k,1}+4j_{k,0}=k.1+4.0=k$ istenen sağlanır. $m\leq n$ için doğru olsun. $n+1$ için

$$c_{k,n+1}=kc_{k,n}+2c_{k,n-1}=k(kj_{k,n}+4j_{k,n-1})+2(kj_{k,n-1}+4j_{k,n-2})$$

$$=k(kj_{k,n}+2j_{k,n-1})+4(j_{k,n-1}+2j_{k,n-2})=kj_{k,n+1}+4j_{k,n}$$

Teorem 4.3.5.(Konvolosyon Çarpım Özdeşliği) $m,n>0$ tamsayısı için

$$c_{k,m+n}=c_{k,n+1}\ j_{k,m}+2c_{k,n}\ j_{k,m-1} \tag{4.3.5}$$

eşitliği sağlanır (Jhala, 2014).

İspat: $r_1.r_2 = -2$ eşitliğinden faydalanarak

$$c_{k,n+1}j_{k,m} + 2c_{k,n}j_{k,m-1} = \left(r_1^{\,n+1} + r_2^{\,n+1}\right)\left(\frac{r_1^{\,m} - r_2^{\,m}}{r_1 - r_2}\right) + 2\left(r_1^{\,n} + r_2^{\,n}\right)\left(\frac{r_1^{\,m-1} - r_2^{\,m-1}}{r_1 - r_2}\right)$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left\{\left(r_1^{\,n+1} + r_2^{\,n+1}\right)\left(r_1^{\,m} - r_2^{\,m}\right) + 2\left(r_1^{\,n} + r_2^{\,n}\right)\left(r_1^{\,m-1} - r_2^{\,m-1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left\{ r_1^{\,m+n}\left(r_1 + 2r_1^{-1}\right) - r_2^{\,m+n}\left(r_2 + 2r_2^{-1}\right) - r_1^{\,n}r_2^{\,m}\left(r_1 + 2r_2^{-1}\right) + r_2^{\,n}r_1^{\,m}\left(r_2 + 2r_1^{-1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left\{r_1^{\,m+n}\left(r_1 - r_2\right) - r_2^{\,m+n}\left(r_2 - r_1\right)\right\}$$

$$= \left(r_1^{\,m+n} + r_2^{\,m+n}\right) = c_{k,m+n}$$

Teorem 4.3.6. $n > 0$ tamsayısı için

$$\left(k^2 + 8\right)j_{k,n} = c_{k,n+1} + 2c_{k,n-1} \tag{4.3.6}$$

eşitliği sağlanır.

İspat : $\left(k^2 + 8\right)\dfrac{r_1^{\,n} - r_2^{\,n}}{\sqrt{k^2 + 8}} = r_1^{\,n+1} + r_2^{\,n+1} + 2\left(r_1^{\,n-1} + r_2^{\,n-1}\right)$

$$= r_1^{\,n}\left(r_1 + \frac{2}{r_1}\right) + r_2^{\,n}\left(r_2 + \frac{2}{r_2}\right)$$

$$= r_1^{\,n}\left(\frac{r_1^{\,2} - r_1 r_2}{r_1}\right) - r_2^{\,n}\left(\frac{r_2^{\,2} - r_1 r_2}{r_2}\right) = r_1^{\,n}$$

Teorem 4.3.7. $n > 0$ tamsayısı için

$$kj_{k,n} + c_{k,n} = 2\,j_{k,n+1} \tag{4.3.7}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Binet formülü kullanılarak

$$k\frac{r_1^{\,n}-r_2^{\,n}}{r_1-r_2}+r_1^{\,n}+r_2^{\,n}=\frac{(r_1+r_2)(r_1^{\,n}-r_2^{\,n})+(r_1-r_2)(r_1^{\,n}+r_2^{\,n})}{r_1-r_2}$$

$$=2\frac{\left(r_1^{\,n+1}-r_2^{\,n+1}\right)}{r_1-r_2}=2\,j_{k,n+1}$$

ispat yapılır.

Teorem 4.3.8. $n>0$ tamsayısı için

$$\left(k^2+8\right)j_{k,n}+kc_{k,n}=2c_{k,n+1} \qquad (4.3.8)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Binet formülü kullanılarak

$$(r_1-r_2)^2\frac{r_1^{\,n}-r_2^{\,n}}{r_1-r_2}+(r_1+r_2)(r_1^{\,n}+r_2^{\,n})=r_1^{n+1}-r_1r_2^n-r_2r_1^n+r_2^{n+1}+r_1^{n+1}+r_1r_2^n+r_2r_1^n+r_2^{n+1}$$

$$=2\left(r_1^{n+1}+r_2^{n+1}\right)$$

ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.9. $n>0$ tamsayısı için

$$\sqrt{k^2+8}\,j_{k,n}+c_{k,n}=2r_1^n \qquad (4.3.9)$$

ve

$$\sqrt{k^2+8}\,j_{k,n}-c_{k,n}=-2r_2^n \qquad (4.3.10)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat : Binet formülü kullanılarak

$$(r_1-r_2)\frac{r_1^{\,n}-r_2^{\,n}}{r_1-r_2}+r_1^{\,n}+r_2^{\,n}=2r_1^{\,n}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.3.10. $n\geq 1$, $p\geq 0$ tamsayıları için

$$j_{k,4n+p} - 2^{2n}.j_{k,p} = j_{k,2n}c_{k,2n+p} \tag{4.3.11}$$

eşitliği elde edilir.

$n \geq 1$ ve farklı p değerleri için.

$p = 0$ için $$j_{k,4n} = j_{k,2n}c_{k,2n} \tag{4.3.12}$$

$p = 1$ için $$j_{k,4n+1} - 2^{2n} = j_{k,2n}c_{k,2n+1} \tag{4.3.13}$$

$p = 2$ için $$j_{k,4n+2} - 2^{2n}k = j_{k,2n}c_{k,2n+2} \tag{4.3.14}$$

eşitlikleri elde edilir.

İspat. İspat Binet Formülü kullanılarak yapılabilir.

Teorem 4.3.11. $n \geq 1$, $p \geq 0$ tamsayıları için

$$j_{k,4n+p} + 2^{2n}.j_{k,p} = c_{k,2n}j_{k,2n+p} \tag{4.3.15}$$

eşitliği elde edilir.

$n \geq 1$ ve farklı p değerleri için

$p = 0$ için $$j_{k,4n} = c_{k,2n}j_{k,2n} \tag{4.3.16}$$

$p = 1$ için $$j_{k,4n+1} + 2^{2n} = c_{k,2n}j_{k,2n+1} \tag{4.3.17}$$

$p = 2$ için $$j_{k,4n+2} + 2^{2n}k = c_{k,2n}j_{k,2n+2} \tag{4.3.18}$$

eşitlikleri elde edilir..

İspat. İspat Binet Formülü kullanılarak yapılabilir.

Teorem 4.3.12. $n \geq 1$, $p \geq 0$ tamsayıları için

$$c_{k,4n+p} - 2^{2n}.c_{k,p} = (k^2 + 8)j_{k,2n}j_{k,2n+p} \tag{4.3.19}$$

$$c_{k,4n+p} + 2^{2n}.c_{k,p} = c_{k,2n}c_{k,2n+p} \tag{4.3.20}$$

$$j_{k,3n+p} - (-2)^n . j_{k,n+p} = j_{k,n} c_{k,2n+p} \tag{4.3.21}$$

$$j_{k,3n+p} + (-2)^n . j_{k,n+p} = c_{k,n} j_{k,2n+p} \tag{4.3.22}$$

$$c_{k,3n+p} - (-2)^n . c_{k,n+p} = (k^2+8) j_{k,n} j_{k,2n+p} \tag{4.3.23}$$

$$c_{k,3n+p} + (-2)^n . c_{k,n+p} = c_{k,n} c_{k,2n+p} \tag{4.3.24}$$

eşitlikleri elde edilir..

İspat. İspat Binet formülü kullanılarak yapılabilir.

Teorem 4.3.13. $n \geq 1$ için

$$r_1^n = r_1 j_{k,n} + 2 j_{k,n-1} \tag{4.3.25}$$

$$r_2^n = r_2 j_{k,n} + 2 j_{k,n-1} \tag{4.3.26}$$

$$\sqrt{k^2+8}\, r_1^n = r_1 c_{k,n} + 2 c_{k,n-1} \tag{4.3.27}$$

$$-\sqrt{k^2+8}\, r_2^n = r_2 c_{k,n} + 2 c_{k,n-1} \tag{4.3.28}$$

İspat: Binet formülü ve kökler çarpımı kullanarak (4.3.25) ve (4.3.28) eşitliklerinin ispatları yapılabilir.

(4.3.26) eşitliğinin ispatı aşağıdaki şekide yapılır.

$$r_2 j_{k,n} + 2 j_{k,n-1} = r_2 \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} + 2 \frac{r_1^{n-1} - r_2^{n-1}}{r_1 - r_2} \quad = \frac{1}{r_1 - r_2}\left[r_2 \left(r_1^n - r_2^n \right) + 2\left(r_1^{n-1} - r_2^{n-1} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left(-2 r_1^{n-1} - r_2^{n+1} + 2 r_1^{n-1} - 2 r_2^{n-1} \right) \quad = \frac{1}{r_1 - r_2}\left[-r_2^{n-1}\left(r_2^2 + 2 \right) \right] = r_2^n$$

(4.3.27) eşitliğinin ispatı

$$r_1 c_{k,n} + 2 c_{k,n-1} = r_1 \left(r_1^n + r_2^n \right) + 2\left(r_1^{n-1} + r_2^{n-1} \right)$$

$$= r_1^{n+1} - 2 r_2^{n-1} + 2 r_1^{n-1} + 2 r_2^{n+1}$$

$$= r_1^{n-1}\left(r_2^2 + 2 \right) = r_1^n \left(r_1 - r_2 \right) = \sqrt{k^2+8}\, r_1^n$$

şeklinde yapılır.

Teorem 4.3.14 $n \geq 0$ herhangi bir tamsayı olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{n-1} j_{k,i}^2 = \frac{1}{k^2+8}\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_{k,n}\right) \tag{4.3.29}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Binet formülü ve geometrik seri toplamı kullanılarak

$$\sum_{i=0}^{n-1} j_{k,i}^2 = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{r_1^{\,i} - r_2^{\,i}}{r_1 - r_2}\right)^2 = \frac{1}{k^2+8}\sum_{i=0}^{n-1}\left(r_1^{\,2i} + r_2^{\,2i} - 2(-2)^i\right)$$

$$= \frac{1}{k^2+8}\left(\frac{r_1^{2n}-1}{r_1^2-1} + \frac{r_2^{2n}-1}{r_2^2-1} + 2\frac{(-2)^n - 1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{k^2+8}\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_n\right)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.3.15. $n \geq 0$ herhangi bir tamsayı olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_{k,i}^2 = \left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_n\right) \tag{4.3.30}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Binet formülü ve geometrik seri toplamı kullanılarak

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_{k,i}^2 = \sum_{i=0}^{n-1}\left(r_1^{\,i} + r_2^{\,i}\right)^2 = \sum_{i=0}^{n-1}\left(r_1^{\,2i} + r_2^{\,2i} + 2(-2)^i\right)$$

$$= \left(\frac{r_1^{2n}-1}{r_1^2-1} + \frac{r_2^{2n}-1}{r_2^2-1} + 2\frac{(-2)^n - 1}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_n\right)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.3.16. $n \geq 0$ herhangi bir tamsayı, $r_1^i x < 1$ ve $r_2^i x < 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} j_{k,in} x^n = \frac{j_{k,i} x}{1 - c_{k,i} x + (-2)^i x^2} \tag{4.3.31}$$

eşitliği elde edilir..

Örneğin $i = 2$ için $\sum_{n=0}^{\infty} j_{k,2n} x^n = \frac{kx}{1-(k^2+4)x+4x^2}$ eşitliğini elde edilir..

İspat : Binet formülü ve geometrik seri açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} j_{k,in} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^{in} - r_2^{in}}{r_1 - r_2} x^n = \frac{1}{r_1 - r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(r_1^i x)^n - (r_2^i x)^n \right] \\
&= \frac{1}{r_1 - r_2} \left[\frac{1}{1 - r_1^i x} - \frac{1}{1 - r_2^i x} \right] \\
&= \frac{(r_1^i - r_2^i) x}{(r_1 - r_2)\left(1 - x(r_1^i + r_2^i) + x^2 (-2)^i\right)} \\
&= \frac{j_{k,i} x}{1 - c_{k,i} x + (-2)^i x^2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

BÖLÜM 5

5.k-JACOBSTHAL VE k-JACOBSTHAL LUCAS MATRİS DİZİLERİ

Bu bölümde k- Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayı dizilerinden çıkarak k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas matris dizileri tanımlanacak ve bu matris dizileri için elde edilen özellikler gösterilecektir.

Bu bölümde Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları sırasıyla j_n ve c_n sembolleriyle, k- Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayı dizileri $j_{k,n}$ ve $c_{k,n}$ sembolleriyle, k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas matris dizileri J_n ve C_n sembolleriyle gösterilecektir.

5.1. k-Jacobsthal Matris Dizileri

Tanım 5.1.1. $k > 0$ için $J_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $J_1 = \begin{bmatrix} k & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$J_{k,n+1} = kJ_{k,n} + 2J_{k,n-1}, \qquad n \geq 1 \tag{5.1.1}$$

ile tanımlanan $\{J_{k,n}\}_{n\in N}$ matris dizisine k-Jacobsthal matris dizisi denir ve n. Jacobsthal matrisi kısaca J_n ile gösterilir.

Aşağıda verilen teorem k-Jacobsthal matris dizileri ile k-Jacobsthal sayı dizileri arasındaki bağıntıyı vermektedir.

Teorem 5.1.2. $n \geq 0$ tamsayısı için,

$$J_n = \begin{bmatrix} j_{k,n+1} & 2j_{k,n} \\ j_{k,n} & 2j_{k,n-1} \end{bmatrix} \tag{5.1.2}$$

olur.

İspat: İspat tümevarımla yapılacaktır. $j_{k,0} = 0,\ j_{k,1} = 1,\ j_{k,2} = k,$ ve $J_0 = I_2$ olduğundan $n = 1$ için doğrudur:

$$J_1 = \begin{bmatrix} k & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Şimdi $1 \le N \le n$ olacak şekildeki N tamsayısı için bağıntı doğru olsun. $n+1$ için

$$J_{n+1} = kJ_n + 2J_{n-1}$$

$$\begin{bmatrix} j_{k,n+2} & 2j_{k,n+1} \\ j_{k,n+1} & 2j_{k,n} \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} j_{k,n+1} & 2j_{k,n} \\ j_{k,n} & 2j_{k,n-1} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} j_{k,n} & 2j_{k,n-1} \\ j_{k,n-1} & 2j_{k,n-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} kj_{k,n+1} + 2j_{k,n} & 2(kj_n + 2j_{k,n-1}) \\ kj_{k,n} + 2j_{k,n-1}) & 2(kj_{k,n-1} + 2j_{k,n-2}) \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 5.1.3. $n \ge 0$ tamsayısı için,

$$J_n = J_1^n \tag{5.1.3}$$

sağlanır. Bu teorem, Jacobsthal matris dizisinin n-inci teriminin, birinci teriminin n-inci kuvvetine eşit olduğunu göstermektedir.

İspat: İspat tümevarımla yapılacaktır. $n=1$ için doğruluğu aşikardır. Şimdi $1 \le n \le N$ olacak şekildeki n tamsayısı için bağıntı doğru olsun. $n+1$ için

$$J_1^{n+1} = J_1^n J_1 = \begin{bmatrix} j_{k,n+1} & 2j_{k,n} \\ j_{k,n} & 2j_{k,n-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} k & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kj_{k,n+1} + 2j_{k,n} & 2j_{k,n+1} \\ kj_{k,n} + 2j_{k,n-1} & 2j_{k,n} \end{bmatrix} = J_{n+1}$$

bulunur. Böylece istenilen elde edilir.

Teorem 5.1.4. $n \ge 0$ tamsayısı için n. Jacobsthal matrisinin determinantı

$$\det J_n = (-2)^n \tag{5.1.4}$$

şeklindedir.

İspat: $J_1 = \begin{bmatrix} k & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ise $\det J_1 = -2$ olur. $J_n = J_1^n$ özelliğinden

$$\det J_n = \det(J_1^n) = (\det J_1)^n = (-2)^n \qquad \text{elde edilir.}$$

Teorem 5.1.5. $m, n \geq 0$ tamsayıları için

$$J_{m+n} = J_m J_n \tag{5.1.5}$$

eşitliği geçerlidir. Bu teorem Jacobsthal matris dizisinin $m+n$-inci teriminin m-inci terimle n-inci terimin çarpımına eşit olduğunu göstermektedir.

İspat: İspat n üzerinden tümevarımla yapılacaktır. $J_0 = I_2$ olduğundan $n = 0$ için iddia doğrudur.

Şimdi $1 \leq N \leq n$ olacak şekildeki N tamsayısı için bağıntı doğru olsun. $n+1$ için

$$\begin{aligned} J_{m+n+1} &= kJ_{m+n} + 2J_{m+n-1} \\ &= kJ_m J_n + 2J_m J_{n-1} \\ &= J_m(kJ_n + 2J_{n-1}) = J_m J_{n+1} \end{aligned}$$

bulunur.Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 5.1.6. $m, n \geq 0$ tamsayı olmak üzere $k-$Jacobsthal sayı dizileri için matris dizileri kullanılarak

$$j_{k,m+n+1} = j_{k,m+1} j_{k,n+1} + 2 j_{k,m} j_{k,n} \tag{5.1.6}$$

$$j_{k,m+n} = j_{k,m+1} j_{k,n} + 2 j_{k,m} j_{k,n-1} \tag{5.1.7}$$

$$j_{k,m+n} = j_{k,m} j_{k,n+1} + 2 j_{k,m-1} j_{k,n} \tag{5.1.8}$$

$$j_{k,m+n-1} = j_{k,m} j_{k,n} + 2 j_{k,m-1} j_{k,n-1} \tag{5.1.9}$$

eşitlikleri gösterilebilir.

İspat: Teorem 5.1.5 kullanılarak

$$J_{m+n}=\begin{bmatrix} j_{k,m+n+1} & 2j_{k,m+n} \\ j_{k,m+n} & 2j_{k,m+n-1}\end{bmatrix}=J_m J_n=\begin{bmatrix} j_{k,m+1} & 2j_{k,m} \\ j_{k,m} & 2j_{k,m-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} j_{k,n+1} & 2j_{k,n} \\ j_{k,n} & 2j_{k,n-1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} j_{k,m+1}j_{k,n+1}+2j_{k,m}j_{k,n} & 2(j_{k,m+1}\, j_{k,n}+2j_{k,m}j_{k,n-1} \\ j_{k,m}\, j_{k,n+1}+2j_{k,m-1}j_{k,n} & 2(j_{k,m}j_{k,n}+2j_{k,m-1}j_{k,n-1})\end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Matris eşitliğinden istenen hemen görülür.

Teorem 5.1.7. $n\geq 0$ tamsayısı için, Jacobsthal matris dizisinin n. elemanı

$$J_n=\begin{bmatrix} \dfrac{r_1^{\,n+1}-r_2^{\,n+1}}{r_1-r_2} & 2\dfrac{r_1^{\,n}-r_2^{\,n}}{r_1-r_2} \\ \dfrac{r_1^{\,n}-r_2^{\,n}}{r_1-r_2} & 2\dfrac{r_1^{\,n-1}-r_2^{\,n-1}}{r_1-r_2}\end{bmatrix} \tag{5.1.10}$$

şeklinde bir gösterime sahiptir.

İspat: $J_0=I_2$ olduğundan $n=0$ için iddia doğrudur. $J_1=\begin{bmatrix} j_{k,2} & 2j_{k,1} \\ j_{k,1} & 2j_{k,0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k & 2 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$ matrisinin öz değerleri $r_1=\dfrac{k+\sqrt{k^2+8}}{2}$ ve $r_2=\dfrac{k-\sqrt{k^2+8}}{2}$ olup r_1 öz değerine karşılık gelen öz vektör $u_{r_1}=\begin{pmatrix} r_1 \\ 1\end{pmatrix}$ ve r_2 öz değerine karşılık gelen öz vektör $u_{r_2}=\begin{pmatrix} r_2 \\ 1\end{pmatrix}$ olur. J_1 matrisinin spektral ayrışımı:

$$J_1=\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{r_1-r_2}\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & -r_1\end{bmatrix} \tag{5.1.11}$$

şeklindedir.

$$J_1^n=J_1J_1.....J_1=J_n=\left(\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\right)^n$$

$$=\frac{1}{r_1-r_2}\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}^n\begin{bmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & -r_1 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{r_1-r_2}\left[\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & -r_1 \end{bmatrix}$$

çarpımın sonucu teorem 5.1.7 eşitliğini verir.

Aşağıdaki sonuç n-inci k- Jacobsthal sayısının Binet formülüdür. n-inci Jacobsthal matrisi ile k- Jacobsthal sayıları arasındaki bağıntı bu sonuçla tekrar edilmiş olur.

Sonuç 5.1.8. $n \geq 0$ tamsayısı ve k-Jacobsthal sayıları için Binet formülü

$$j_{k,n}=\frac{r_1^{\ n}-r_2^{\ n}}{r_1-r_2} \tag{5.1.12}$$

şeklindedir.

İspat: Matrisin (1,2) elemanının eşitliğinden istenen çıkar.

Teorem 5.1.9. $n \geq 0$ tamsayısı için $n.$ Jacobsthal matris elemanı

$$J_n=\left(\frac{J_1-r_2J_0}{r_1-r_2}\right)r_1^{\ n}-\left(\frac{J_1-r_1J_0}{r_1-r_2}\right)r_2^{\ n} \tag{5.1.13}$$

şeklinde gösterilebilir.

İspat: Teorem 5.1.2. kullanılarak

$$J_n=\frac{r_1^n}{r_1-r_2}\left(\begin{bmatrix} k & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} r_2 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}\right)-\frac{r_2^n}{r_1-r_2}\left(\begin{bmatrix} k & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_1 \end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{r_1^n}{r_1-r_2}\left(\begin{bmatrix} k-r_2 & 2 \\ 1 & -r_2 \end{bmatrix}\right)-\frac{r_2^n}{r_1-r_2}\left(\begin{bmatrix} k-r_1 & 2 \\ 1 & -r_1 \end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{r_1-r_2}\left(\begin{bmatrix} k(r_1^{\ n}-r_2^{\ n})-r_1r_2(r_1^{\ n-1}-r_2^{\ n-1}) & 2(r_1^{\ n}-r_2^{\ n}) \\ (r_1^{\ n}-r_2^{\ n}) & -r_1r_2(r_1^{\ n-1}-r_2^{\ n-1}) \end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix} j_{k,n+1} & 2j_{k,n} \\ j_{k,n} & 2j_{k,n-1} \end{bmatrix}.$$

eşitliği sağlanır.

5.2. k -Jacobsthal Lucas Matris Dizileri

Tanım 5.2.1. $k>0$ için $C_0=\begin{bmatrix} k & 4 \\ 2 & -k \end{bmatrix}$ ve $C_1=\begin{bmatrix} k^2+4 & 2k \\ k & 4 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$C_{n+1}=kC_n+2C_{n-1}, \qquad n\geq 1 \tag{5.2.1}$$

ile tanımlanan $\{C_n\}_{n\in N}$ matris dizisine k -Jacobsthal Lucas matris dizisi denir ve n. Jacobsthal Lucas matrisi C_n ile gösterilir.

Aşağıda verilen teorem Jacobsthal Lucas matris dizileri ile k -Jacobsthal Lucas sayı dizileri arasındaki bağıntıyı vermektedir.

Teorem 5.2.2. $n\geq 0$ tamsayısı için,

$$C_n=\begin{bmatrix} c_{k,n+1} & 2c_{k,n} \\ c_{k,n} & 2c_{k,n-1} \end{bmatrix} \tag{5.2.2}$$

olur.

İspat: İspat tümevarımla yapılacaktır. $c_{k,0}=2,\ c_{k,1}=k$

$n=0$ için doğrudur: $C_0=\begin{bmatrix} k & 4 \\ 2 & -k \end{bmatrix}$

$n=1$ için doğrudur: $C_1=\begin{bmatrix} k^2+4 & 2.k \\ k & 4 \end{bmatrix}$

Şimdi $1\leq N\leq n$ olacak şekildeki N tamsayısı için bağıntı doğru olsun. $n+1$ için

$$C_{n+1}=kC_n+2C_{n-1}$$

$$\begin{bmatrix} c_{k,n+2} & 2c_{k,n+1} \\ c_{k,n+1} & 2c_{k,n} \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} c_{k,n+1} & 2c_{k,n} \\ c_{k,n} & 2c_{k,n-1} \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} c_{k,n} & 2c_{k,n-1} \\ c_{k,n-1} & 2c_{k,n-2} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} kc_{k,n+1}+2c_{k,n} & 2(kc_{k,n}+2c_{k,n-1}) \\ (kc_{k,n}+2c_{k,n-1}) & 2(kc_{k,n-1}+2c_{k,n-2}) \end{bmatrix}$$

$n \geq 0$ için teorem ispatlanmış olur.

Teorem 5.2.3. $n \geq 0$ tamsayısı için, n. Jacobsthal Lucas matris dizisinin elemanının determinantı

$$\det C_{n+1} = (2k^2 + 16)(-2)^n \tag{5.2.3}$$

olur.

İspat: $C_1 = \begin{bmatrix} k^2+4 & 2k \\ k & 4 \end{bmatrix}$ ise $\det C_1 = 2k^2 + 16$ olur. $J_n = J_1^n$ özelliğinden

$$\det C_{n+1} = \det(C_1 J_n) = \det(C_1 J_1^n) = \det(C_1)(\det J_1)^n = (2k^2 + 16)(-2)^n$$

istenen elde edilir.

Teorem 5.2.4. $n \geq 0$ tamsayısı için $n+1$. Jacobsthal Lucas matris elemanı

$$C_{n+1} = \left(\frac{C_2 - r_2 C_1}{r_1 - r_2}\right) r_1^n - \left(\frac{C_2 - r_1 C_1}{r_1 - r_2}\right) r_2^n \tag{5.2.4}$$

şeklinde gösterilebilir.

İspat: Bir önceki teoremden ve $C_{n+1} = C_1 J_n$ eşitliğinden hemen görülür.

5.3. k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas Matris Dizileri Arasındaki Bağıntılar

Teorem 5.3.1. $n \geq 0$ tamsayısı için k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayı dizileri arasında yine k-Jacobsthal matris dizileri yardımıyla bulunan sonuçlar kullanılarak

$$2 j_{k,m+n} = j_{k,n} c_{k,m} + j_{k,m} c_{k,n} \tag{5.3.1}$$

bağıntısı elde edilir.

İspat: Teorem 5.1.6 kullanılarak

$$j_{k,m+n}=j_{k,m+1}j_{k,n}+2j_{k,m}j_{k,n-1}$$

$$j_{k,m+n}=j_{k,m}j_{k,n+1}+2j_{k,m-1}j_{k,n}$$

yazılabilir. İfadeler taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}2j_{k,m+n}&=j_{k,n}(j_{k,m+1}+2j_{k,m-1})+j_{k,m}(j_{k,n+1}+2j_{k,n-1})\\&=j_{k,n}(kj_{k,m}+4j_{k,m-1})+j_{k,m}(kj_{k,n}+4j_{k,n-1})\\&=j_{k,n}c_{k,m}+j_{k,m}c_{k,n}\end{aligned}$$

bulunur. Böylece istenen elde edilir.

Teorem 5.3.2. $n\geq 0$ tamsayısı için k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayı dizileri arasında

$$c_{k,m+n+1}=j_{k,m+1}c_{k,n+1}+2j_{k,m}c_{k,n} \tag{5.3.2}$$

eşitliği vardır.

İspat: Teorem 5.1.6 kullanılarak bulunan sonuçlar

$$kj_{k,m+n+1}=kj_{k,m+1}j_{k,n+1}+2kj_{k,m}j_{k,n}$$

$$4j_{k,m+n}=4j_{k,m+1}j_{k,n}+8j_{k,m}j_{k,n-1}$$

taraf tarafa toplanırsa istenen elde edilir.

$$c_{k,m+n+1}=j_{k,m+1}c_{k,n+1}+2j_{k,m}c_{k,n}$$

Teorem 5.3.3. $n\in N$ için k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas matris dizisinin elemanları arasında

$$C_{n+1}=C_1J_n \tag{5.3.3}$$

özelliği mevcuttur. Bu teorem Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizilerinin terimleri arasındaki bağıntıyı vermektedir.

İspat: İspat tümevarımla yapılacaktır. $J_0 = I_2$ olduğundan $n = 0$ için teorem doğrudur. Şimdi $1 \le N \le n$ olacak şekildeki N tamsayısı için bağıntı doğru olsun. $n+1$ için

$$C_1 J_{n+1} = C_1 J_n J_1 = C_{n+1} J_1$$

$$C_1 J_{n+1} = \begin{bmatrix} c_{k,n+2} & 2c_{k,n+1} \\ c_{k,n+1} & 2c_{k,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = C_{n+2}$$

teorem ispatlanmış olur.

Teorem 5.3.4. $n \ge 0$ tamsayısı için tıpkı sayı dizilerinde olduğu gibi k -Jacobsthal ve k -Jacobsthal Lucas matris dizilerinde de

$$C_{n+1} = kJ_{n+1} + 4J_n \tag{5.3.4}$$

özelliği sağlanır.

İspat: $n = 0$ için teorem doğrudur. Şimdi $1 \le N \le n$ olacak şekildeki N tamsayısı için bağıntı doğru olsun. $n+1$ için

$$C_{n+1} = C_1 J_n = (kJ_1 + 4J_0) J_n = kJ_{n+1} + 4J_n$$

sağlanır.

Teorem 5.3.5. $m, n \ge 0$ tamsayı olmak üzere, k -Jacobsthal ve k -Jacobsthal Lucas matris dizilerinin elemanları arasında

$$J_m C_{n+1} = C_{n+1} J_m \tag{5.3.5}$$

değişme özelliği geçerlidir.

İspat: $m, n \ge 0$ tamsayıları için,

$$\begin{aligned} J_m C_{n+1} &= J_m C_1 J_n \\ &= J_m (kJ_1 + 4J_0) J_n \\ &= kJ_{n+m+1} + 4J_{n+m} = (kJ_1 + 4J_0)\, J_{n+m} \end{aligned}$$

$$= C_1 J_n J_m \quad = C_{n+1} J_m$$

böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 5.3.6. $n \in N$ için k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas matris dizileri arasında

a) $2J_{n+1} = kJ_n + C_n$ (5.3.6)

b) $2C_{2n+1} = J_{n+1}C_{n+2} - kJ_{n+2}C_n$ (5.3.7)

eşitliği sağlanır.

İspat:

a) $C_{n+1} = kJ_{n+1} + 4J_n$ ve $J_{n+1} = kJ_n + 2J_{n-1}$ özellikleri kullanılarak istenen hemen görülür.

b) $J_{n+1}C_1 J_{n+1} - kJ_{n+2} J_{n-1} C_1 = C_1\left(J_{n+1} J_{n+1} - J_{n+2} J_{n-1}\right)$

$$= C_1(J_{2n+2} - kJ_{2n+1}) = C_1 2J_{2n} = 2C_{2n+1}$$

Teorem 5.3.7. $n \in N$ için Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizilerinin elemanları arasında

$$C_{n+1}^2 = C_1^2 J_{2n} \tag{5.3.8}$$

$$C_{n+1}^2 = C_1 C_{2n+1} \tag{5.3.9}$$

$$C_{2n+1} = J_n C_{n+1} \tag{5.3.10}$$

eşitlikleri mevcuttur.

İspat: Teorem 5.1.5 ve Teorem 5.3.3 kullanılarak

$$C_{n+1}^2 = C_{n+1}C_{n+1} = C_1 J_n C_1 J_n = C_1 C_1 J_n J_n = C_1^2 J_{2n}$$

$$C_{n+1}^2 = C_1^2 J_{2n} = C_1 C_1 J_{2n} = C_1 C_{2n+1}$$

$$C_{2n+1} = C_1 J_{2n} = C_1 J_n J_n = J_n C_1 J_n = J_n C_{n+1}$$

istenen özdeşlikler sağlanmış olur.

Sonuç 5.3.8. Teorem 5.3.7 kullanılarak aşağıdaki özellikler

a) $c_{k,n+2}^2 + 2c_{k,n+1}^2 = (k^2+8)\,j_{k,2n+3}$ (5.3.11)

b) $c_{k,n+2}^2 + 2c_{k,n+1}^2 = kc_{k,2n+4} + 2c_{k,2n+2}$ (5.3.12)

c) $c_{k,2n} = j_{k,n}c_{k,n+1} + 2c_{k,n}\,j_{k,n-1}$ (5.3.13)

elde edilir.

İspat:

a) $C_{n+1}^2 = C_1^2 J_{2n}$ özelliği kullanılarak

$$\begin{bmatrix} c_{k,n+2} & 2c_{k,n+1} \\ c_{k,n+1} & 2c_{k,n} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} k^2+4 & 2k \\ k & 4 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} j_{k,2n+1} & 2j_{k,2n} \\ j_{k,2n} & 2j_{k,2n-1} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Matrislerin (1,1) elemanlarının eşitliğinden

$$\begin{aligned} c_{k,n+2}^2 + 2c_{k,n+1}^2 &= (k^4+10k^2+16)\,j_{k,2n+1} + (2k^3+16k)\,j_{k,2n} \\ &= k^3(kj_{k,2n+1} + 2j_{k,2n}) + 8k(kj_{k,2n+1} + 2j_{k,2n}) + 2k^2 j_{k,2n+1} + 16j_{k,2n+1} \\ &= k^3 j_{k,2n+2} + 8kj_{k,2n+2} + 2k^2 j_{k,2n+1} + 16j_{k,2n+1} \\ &= k^2(kj_{k,2n+2} + 2j_{k,2n+1}) + 8(kj_{k,2n+2} + 2j_{k,2n+1}) \\ &= (k^2+8)\,j_{k,2n+3} \end{aligned}$$

istenen sonuç elde edilir.

b) $C_{n+1}^2 = C_1 C_{2n+1}$ özelliği kullanılarak

$$\begin{bmatrix} c_{k,n+2} & 2c_{k,n+1} \\ c_{k,n+1} & 2c_{k,n} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} k^2+4 & 2k \\ k & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{k,2n+2} & 2c_{k,2n+1} \\ c_{k,2n+1} & 2c_{k,2n} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Matrislerin (1,1) elemanlarının eşitliğinden

$$c_{k,n+2}^2+2c_{k,n+1}^2=k(kc_{k,2n+2}+2c_{k,2n+1})+4c_{k,2n+2}$$

$$=kc_{k,2n+3}+2c_{k,2n+2}+2c_{k,2n+2}$$

$$=kc_{k,2n+4}+2c_{k,2n+2}$$

istenen sonuç elde edilir.

c) $C_{2n+1}=J_nC_{n+1}$ özelliği kullanılarak

$$\begin{bmatrix} c_{k,2n+2} & 2c_{k,2n+1} \\ c_{k,2n+1} & 2c_{k,2n} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} j_{k,n+1} & 2j_{k,n} \\ j_{k,n} & 2j_{k,n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{k,n+2} & 2c_{k,n+1} \\ c_{k,n+1} & 2c_{k,n} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Matrislerin (2,2) elemanlarının eşitliğinden

$$2c_{k,2n}=2(j_{k,n}c_{k,n+1}+2c_{k,n}j_{k,n-1})$$

$$c_{k,2n}=j_{k,n}c_{k,n+1}+2c_{k,n}j_{k,n-1}$$

istenen sonuç elde edilir.

BÖLÜM 6

SONUÇLAR

Bu çalışmada öncelikle çeşitli sayı dizilerinin genel birkaç özelliği verildikten sonra çalışmamızın ana kaynağı olan Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayı dizileri ayrıntılı bir şekilde incelenmiş ve matris gösterimi tanıtılmıştır. İstenilen başlangıç şartlarının kullanılabilmesi için genelleştirilmiş k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayı dizileri tanımlanmıştır. Bu çalışmanın k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayı dizileri için önemli bir kaynak oluşturabilmesi için bu sayı dizileri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir ve çeşitli özellikler elde edilmiştir. Sonra yine bu sayı dizilerinin elemanları kullanılarak oluşturulan genelleştirilmiş k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas matris dizileri elde edilmiştir. Ayrıca k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas matris dizileri ile k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas dizileri arasındaki ilişkiler ve çeşitli özellikler verilmiştir.

Çalışmada kullanılan k-Jacobsthal, k-Jacobsthal Lucas matris dizileri kavramları ilk defa "The k-Jacobsthal and k-Jacobsthal-Lucas matrix sequences" adıyla, “International Mathematical Forum” dergisinde yayınlanan makale ile literatüre girmiştir. Çalışmada kullanılan k-Jacobsthal, k-Jacobsthal Lucas sayı dizileri "The k-Jacobsthal and k-Jacobsthal-Lucas sequences" adıyla, “General Mathematical Notes” dergisine incelenmek için gönderilmiştir.

KAYNAKLAR

Bolat C., Köse H. (2010). On the properties of k-Fibonacci Numbers. *Int. J.Contemp. Math. Sciences*. 22(5), 1097-1105.

Campos H., Catarino P., Aires A. P., Vasco P., Borges A. (2014). On some identities of k-Jacobsthal-Lucas numbers. *Int. Journal of Math. Analysis*. 8(10), 489 - 494.

Catarino P. (2014). On some identities for k-Fibonacci sequence. Int. *Journal of Contemporary Mathematical Sciences*. 9(1), 37-42.

Catarino P., Vasco P. (2013). On some identities and generating functions for k-Pell Lucas sequence. *Applied Mathematical Sciences.* 7 (98), 4867-4873.

Cerin Z. (2007). Formula efor sums of Jacobsthal Lucas numbers, *İnternationa*l *Mathematical Forum*. 2, 1969-1984.

Cerin Z. (2007). Sums of squares and products of Jacobsthal numbers. *Journal of Integer Sequences*. (10), 07.2.5.

Civciv H., Türkmen R. (2008). On the (s,t) Fibonacci and Fibonacci matrix sequence. *Ars Comb*. 87, 161-173.

Civciv H. (2009). Fibonacci ve Lucas matris dizileri ve özelikleri, doktora tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.

Cook C. K., Bacon M.R. (2013). Some identities for Jacobsthal and Jacobsthal Lucas numbers satisfying higher order recurrence relations. *Annales Mathematicae et İnformaticae*. 41, 27-39.

Falcon S., (2007). On the Fibonacci k-numbers. *Chaos, Solitions &Fractals*. 32(5), 1615-1624.

Falcon S., Plaza A. (2009). On k-Fibonacci numbers of arithmetic indexes. *Applied Mathematics and Computation* . 208(1), 180-185.

Falcon S. (2011). On the k-Lucas numbers. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*. 6(21), 1039-1050.

Gupta V.K., Panwar Y.K. (2012). Common factors of generalized Fibonacci, Jacobsthal and Jacobsthal Lucas numbers. *İnternational Journal of Applied Mathematical Research*. 1(4), 377-382.

Hoggatt V.E. Jr. (1969). Fibonacci and Lucas numbers. Boston: Houghton-Mifflin.

Hoggatt V.E. Jr. (1971). Some special Fibonacci and Lucas generating functions. *Fibonacci Quarterly*. 9(2), 121-133.

Horadam A.F. (1965). Basic properties of a certain sequence of numbers. *The Fibonacci Quarterly*. 3(2), 161-176.

Horadam A.F. (1971). Pell identities. *Fibonacci Quart.* 9(3), 245-263.

Horadam A.F. (1997). Jacobsthal representation polynomials. *The Fibonacci Quarterly*. 35(2), 137-1.

Horadam A.F. (1999). Jacobsthal representation numbers. *The Fibonacci Quarterly*. 37(2), 141-144.

Jhala D. (2014). Some properties of the k-Jacobsthal Lucas sequence. *International Journal of Modern Sciences and Engineering Technology (IJMSET).* 1(3), 87-92.

Jhala D., Sisodiya K. and Rathore G.P.S. (2013). On some identities for k-Jacobsthal numbers. *Int. Journal of Math. Analysis*. 7(12), 551-556.

Karaduman E. (2004). An application of Fibonacci numbers in matrices. *Applied Mathematics and Computation.* 147, 903-908.

Kılıc E. (2006). The generalized order-k Fibonacci-Pell sequence by matrix methods. *J. Comput. Appl. Math*. 209, 133-145.

Koken F., Bozkurt D. (2008). On the Jacobsthal numbers by matrix methods. *Int. Jour. Contemp. Math Sciences*. 3(13), 605-614.

Koken F., Bozkurt D. (2008). On the Jacobsthal-Lucas numbers by matrix methods. *Int. Jour. Contemp. Math Sciences*. 3(13), 1629-1633.

Koshy T. (2001). Fibonacci and Lucas numbers with Applications. New York: Wiley-Interscience Publication.

Öcal A.A., Tuglu N., Altınisik E. (2005). On the representation of k-generalized Fibonacci and Lucas numbers. *Appl. Math. and Comput.* 170, 584-596.

Silva A., Hogatt V.E.. (1980). Generalized Fibonacci numbers. *The Fibonacci Quarterly*. 18(4), 290-300.

Silvester J.R.. (1979). Fibonacci properties by matrix methods. *The Mathematical Gazette*. 63, 188-191.

Sloane N. J. A. (1973). A handbook of integer sequences. New York: Academic Press.

Uslu K., Uygun S. (2013). The (s,t) Jacobsthal and (s,t) Jacobsthal-Lucas matrix sequences. *ARS Combinatoria*. 108, 13-22.

Uslu K., Taskara N., Kose H. (2011). The generalized k-Fibonacci and k-Lucas numbers. *Ars Combinatoria.* 9, 25-32.

Uygun S. (2015). The (s,t)-Jacobsthal and (s,t)-Jacobsthal Lucas sequences. *Applied Mathematical Sciences*. 70(9), 3467-3476.

Uygun S., Eldogan H. (2016). k- Jacobsthal and k- Jacobsthal Lucas matrix sequences. *International Mathematical Forum*. 11(3), 145-154.

Uygun S. (2016). Some sum formulas of (s,t)-Jacobsthal and (s,t)-Jacobsthal Lucas matrix sequences. A*pplied Mathematics.* 7(1), 61-69.

Uygun S. (2016). On the k-Jacobsthal Lucas numbers of arithmetic indexes. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*. 11(4), 173 – 183.

Vajda S. (1989). Fibonacci and Lucas numbers and the golden section. New York: John Wiley and Sons.

Walton J.E. and Horadam A.F.. (1971). Some properties of certain generalized Fibonacci matrices. *The Fibonacci Quarterly*. 9(3), 264-276.

Weisstein, Eric W., 2006-05-15, "Jacobsthal Number", Wolfram Mathworld, [online], http://mathworld.wolfram.com/JacobsthalNumber.html, Retrieved 2007-10-03.