TEMMUZ 2016 YÜKSEK LİSANS TEZİ-MATEMATİK BÖLÜMÜ ECE YILMAZ

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$\mathbb{N}^n/\sim_M$ FORMUNDAKİ MONOİDLERİN AFİN OLUP OLMADIĞININ BELİRLENMESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ECE YILMAZ

TEMMUZ 2016

$\mathbb{N}^n/{\sim}M$ **Formundaki Monoidlerin Afin Olup Olmadığının Belirlenmesi**

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Yrd.Doç.Dr. Belgin ÖZER

Ece YILMAZ

Temmuz 2016

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı : $\mathbb{N}^n/\sim M$ Formundaki Monoidlerin Afin Olup Olmadığının Belirlenmesi

Öğrencinin, Adı Soyadı : Ece YILMAZ

Tez Savunma Tarihi: 29.07.2016

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof.Dr. Metin BEDİR

FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof.Dr. Adil KILIÇ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd.Doç.Dr. Belgin ÖZER

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:	İmzası
Doç. Dr. Necati OLGUN	……………………
Yrd. Doç. Dr. Belgin ÖZER	……………………
Yrd. Doç. Dr. Cennet ESKAL	……………………

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Ece YILMAZ

ABSTRACT

DEDECTION WHETHER A MONOİD OF THE FORM $\mathbb{N}^n/{\sim}_M$ is

AFFINE OR NOT

YILMAZ, Ece

M.Sc.Thesis, Mathematics Department

Supervisor: Assist.Prof.Dr. Belgin ÖZER

July 2016, 45 Pages

In this study, we consider some types of monoids M such as R-trivial monoid , Brauer type monoid, bicyclic monoid and matrix monoids called special linear semigroups, $SLS(2,2)$ and general linear semigroups, $GLS(2,2)$. We decide whether these monoids $\mathbb{N}^n/{\sim}M$ are affine semigroups, (cancellative, reduced, torsion free) or not. Moreover Minkowski-Farkas'lemma and related algorithms are an important tools.

Key Words: Affine semigroups, cancellative, reduced, torsion free, monoid, Minkowski-Farkas'lemma and algorithms.

ÖZET

$\mathbb{N}^n/{\sim}M$ FORMUNDAKİ MONOİDLERİN AFİN OLUP OLMADIĞININ BELİRLENMESİ

YILMAZ, Ece

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yrd.Doç.Dr. Belgin ÖZER

Temmuz 2016, 45 Sayfa

Bu çalışmada bazı M monoid çeşitlerinden R-trivial monoid , Brauer tipi monoid, çift devirsel (bicyclic) monoid ve matris monoidleri (Özel Lineer Yarıgruplar $SLS(2,2)$, Genel Lineer Yarıgruplar $GLS(2,2)$) ele alınmıştır. $\mathbb{N}^n/{\sim}M$ formundaki bu monoidlerin afin yarıgrup (sadeleşebilir , indirgenebilir , burulmasız) olup olmadığına karar verilmiştir. Ayrıca Minkowski-Farkas'lemma ile ilgili algoritmalar önemli yer tutmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Afin yarıgruplar, sadeleşebilir, indirgenmiş, burulmasız, monoid, Minkowski-Farkas'lemma ve algoritmalar.

Canım Annem , Babam ve Çok Kıymetli Aileme…

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Yrd.Doç.Dr. Belgin ÖZER´e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışma süresince beni hep destekleyen ve güvenen sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER LİSTESİ

$\langle X \rangle$	X kümesi tarafından doğurulan yarıgrup
$\mathbb{N}^n$	n tane doğal sayılar kümesinin kartezyen çarpımı
$V^{\perp}$	V alt uzayının ortogonal uzay kümesi
$\sim K$	$\{(a,b) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \mid a-b \in K\}$
R_σ	$\{\, a-b \mid (a,b) \in \sigma \,\}$
$[a]_\sigma$	a nın σ ya göre denklik sınıfı elemanları
$L_{\mathbb{Q}}(X)$	$\mathbb{Q}^{\boldsymbol{n}}$ nin X tarafından gerilen alt uzayı
$SLS(2,p)$	Özel Lineer Yarıgruplar
$GLS(2,p)$	Genel Lineer Yarıgruplar
$\text{doğ}\big(SLS(2,p)\big)$	Özel Lineer Yarıgrupların Doğurayları
$\text{doğ}\big(GLS(2,p)\big)$	Genel Lineer Yarıgrupların Doğurayları
ξ	$SLS(2,p)$ veya $GLS(2,p)$ yarıgruplarının p-ye göre modülü 1 olan bir ilkel kök.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Afin yarıgruplar Rosales (1997) [1] , Fisher Morris ve Shapiro (1997) [2] , Bruns ve Gubeladze (1996) [3] tarafından çeşitli yönlerden çalışılmıştır. Rosales ve Garcia Sanchez [4,5,6,7] afin yarıgruplarda algoritmaları vermişlerdir.

Afin yarıgruplar matematiğin diğer alanlarında bazı uygulamalara sahiptir. Örneğin; cebirsel geometride, değişmeli cebirde, sayı teorisinde afin yarıgruplar yer almaktadır.

Bu çalışmada bazı M monoid çeşitlerinden R-trivial Monoid, Brauer Tipi Monoid , Çift Devirsel (bicyclic) Monoid ve Matris Monoidleri (Özel Lineer Yarıgruplar $SLS(2,2)$, Genel Lineer Yarıgruplar $GLS(2,2)$) ele alınmıştır.

$\mathbb{N}^n/{\sim}M$ formundaki bu monoidlerin afin yarıgrup (sadeleşebilir, indirgenebilir ve burulmasız) olup olmadığına karar verilmiştir.

Bu çalışmanın 2. bölümünde (ihtiyacımız olan) temel tanımlar ve sonuçlar verilmiştir.

3. bölümde grup teorinin klasik sonuçlarından biri olan sonlu doğuraylı değişmeli grupların temel teoremi verilmiştir. Tamsayı bileşenli matrislerin denkliği ve invaryant faktörlerinin hesaplanışı verilmiştir.

4. bölümde sonlu doğuraylı sadeleşmeli monoidleri burulmasız, indirgenmiş ve sonlu olmak üzere üç sınıfa ayırarak ele alınan soruların cevapları verilmiştir.

5. bölümde Minkowski-Farkas Lemmasının ispatı verilmiştir. $\mathbb{Q}^n$ nin aşikar olmayan bir alt uzayının negatif olmayan elemanının olup olmadığının kontrol edildiği algoritmalar verilmiştir.

6. bölümde $\mathbb{N}^n/{\sim}M$ formundaki monoidlerin afin olup olmadığı belirlenmiştir. Bunların belirlenmesinde önceki bölümlerdeki önermelerden ve sonuçlardan faydalanılmıştır.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIMLAR VE SONUÇLAR

Bu tezde $\mathbb{Z}$ ile tamsayılar kümesi, $\mathbb{N}$ ile negatif olmayan tamsayılar kümesi gösterilecektir. Bu bölümde denklik bağıntıları ile ilgili temel bilgiler ve yarıgrup teorisindeki önemli tanım ve sonuçlar verilecektir. A herhangi bir küme ise $A \times A$ nın σ gibi bir alt kümesine A üzerinde bir ***bağıntı*** denir. $(a,b) \in \sigma$ yerine $a\sigma b$ gösterimi kullanılacaktır.

A üzerinde bir σ bağıntısına ; $\forall a \in A$ için $a\sigma a$ oluyorsa ***yansımalı*** ,$\forall a,b \in A$ için $a\sigma b$ iken $b\sigma a$ oluyorsa ***simetrik*** , $\forall a,b,c \in A$ için $a\sigma b$ ve $b\sigma c$ iken $a\sigma c$ oluyorsa ***geçişmeli*** denir. Eğer A üzerinde bir σ bağıntısı yansımalı simetrik ve geçişmeli ise σ ya ***denklik bağıntısı*** denir. $a \in A$ ve σ denklik bağıntısı için $[a]_\sigma$ ya bir ***denklik sınıfı*** denir. $[a]_\sigma$ yerine bazen $[a]$ kullanılır.

Tanım 2.1 S boştan farklı bir küme ve μ , S üzerinde birleşme özelliğini sağlayan bir ikili işlem ise (S,μ) ikilisine bir ***yarıgrup*** denir.

Tanım 2.2 (S,μ) yarıgrubunda $\forall a \in S$ için $a+0=0+a=0$ olacak şekilde $0 \in S$ varsa (S,μ) ikilisine bir ***monoid*** denir. Tersi belirtilmediği sürece bu tezdeki bütün monoidler ve yarıgruplar değişmeli olarak alınacaktır.

Tanım 2.3 Bir S monoidinde $\forall a,b,c \in S$ için $a+c=b+c$ olduğunda $a=b$ oluyorsa S monoidi ***sadeleşmelidir*** denir.

Tanım 2.4 Bir (S, μ) monoidinde $\forall a \in S$ için $a + b = 0$ olacak şekilde bir $b \in S$ varsa (S, μ) ikilisine bir ***grup*** denir.

Bir monoidde bir elemanın tersi varsa tektir. Bundan dolayı herhangi bir a elemanının tersi $-a$ ile gösterilecektir. Bundan dolayı bir grubun daima sadeleşmeli olacağı açıktır.

Tanım 2.5 Bir S monoidi için $K \subseteq S$ olsun.

$$0 \in K \text{ ve } \forall a, b \in K \text{ için } a + b \in K$$

ise K ye S nin bir ***alt monoidi*** denir.

Bir S monoidinin bir X alt kümesi verilsin. O halde S nin X i içeren tüm alt monoidlerinin arakesitide bir monoiddir. Bu monoide ***X tarafından doğurulan monoid*** denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir.

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{t} n_i x_i \mid t \in \mathbb{N} \text{ ve } \forall\ 1 \leq i \leq t \text{ için } n_i \in \mathbb{N}, x_i \in X \right\}$$

dir.

Tanım 2.6 $S = \langle X \rangle$ ise S ye X tarafından doğurulmuş ve X e de S nin ***doğuray kümesi*** denir.

Tanım 2.7 Eğer S nin $S = \langle X \rangle$ olacak şekilde sonlu elemanlı X alt kümesi varsa S ye ***sonlu doğuraylı*** denir.

X , S grubunun bir alt kümesi ise $\langle X \rangle$ monoidi S nin bir alt grubu olur. X tarafından doğurulan bu altgrup $G(X)$ ile gösterilir.

$$G(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{t} z_i x_i \mid t \in \mathbb{N} \text{ ve } \forall\ 1 \leq i \leq t \text{ için } z_i \in \mathbb{Z}, x_i \in X \right\}$$

dir.

Tanım 2.8 Eğer X sonlu ve $S = G(X)$ ise S ye ***sonlu doğuraylı grup*** denir.

$S_1, \dots, S_n$ bir monoid (grup) dizisi olsun. $S_1, \dots, S_n$ kümelerinin kartezyen çarpımı olan $S_1 \times \dots \times S_n$ kümesi üzerinde

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

şeklinde işlem tanımlanırsa $(S_1 \times \dots \times S_n, +)$ bir monoid (grup) olur. Buna $S_1, \dots, S_n$ nin ***direk çarpımı*** denir.Eğer S_i ler sadeleşmeli monoid ise $S_1 \times \dots \times S_n$ de sadeleşmeli monoid , S_i ler sonlu doğuraylı ise $S_1, \dots, S_n$ nin direk çarpımı da sonlu doğuraylıdır. Burada $S \times \dots \times S = S^n$ ile gösterilir.

Tanım 2.9 σ, S üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer $\forall a\sigma b$ ve $c \in S$ için $(a + c)\sigma(b + c)$ oluyorsa σ ya S üzerinde ***uyumlu bir bağıntı*** denir. σ, S üzerinde uyumlu bir bağıntı ise $\forall\ a\sigma b$, $c\sigma d$ için $(a + c)\sigma(b + d)$ dir.

Tanım 2.10 S üzerinde uyumlu bir σ denklik bağıntısına S üzerinde bir ***kongruans*** denir. Bir S monoidi üzerinde verilen bir σ kongruansı için S/σ ile S nin tüm elemanlarının denklik sınıflarının kümesi gösterilir.

S/σ üzerinde μ işlemi $[a] + [b] = [a + b]$ olarak tanımlanırsa $(S/\sigma, \mu)$ nin bir değişmeli monoid olduğu kolayca görülebilir. S/σ monoidine ***S nin σ modülüne göre bölüm monoidi*** denir. S bir grup ise S/σ da bir grup ve S sonlu doğuraylı ise S/σ de sonlu doğuraylıdır.

Tanım 2.11 S, S' iki monoid olsun. $h: S \to S'$ bir fonksiyon ve $h(0) = 0, \forall a, b \in S$ için $h(a + b) = h(a) + h(b)$ ise h ye ***monoid morfizmi*** denir. Eğer h bire-bir ise h ye ***monomorfizm*** , örten ise h ye ***epimorfizm*** , hem birebir hem de örten ise h ye

izomorfizm denir. Eğer h izomorfizm ise $h: S \cong S'$ veya $S \cong S'$ ile gösterilir. S ve S' ***izomorfiktir*** denir. Ayrıca sadeleşmeli olma, grup olma, sonlu doğuraylı olma özellikleri izomorfizmalar altında korunur.

$h: S \to S'$ bir monoid morfizmi için S üzerinde $ker(h)$ bağıntısını

$$ker(h) = \{(a, b) \in S \times S \mid h(a) = h(b)\}$$

şeklinde tanımlayalım. h bir monoid morfizmi olduğu için $ker(h)$ bir kongruanstır. Bu kongruans h nin çekirdek kongruansı olarak bilinir. h nin görüntü kümesi

$$Im(h) = \{h(a) \mid a \in S\}$$

ile gösterilir. h bir monoid morfizmi olduğundan $Im(h)$ de bir monoiddir.

Teorem 2.12 $h: S \to S'$ bir monoid morfizmi olsun. O halde

$$\bar{h} = S/ker(h) \to Im(f)$$

$$\bar{h}([a]) = h(a)$$

bir izomorfizmdir.

Teorem 2.13 S , $\{s_1, \dots, s_n\}$ tarafından doğurulan bir monoid olsun. O zaman $\mathbb{N}^n$ monoidi üzerinde $S \cong \mathbb{N}^n/\sigma$ olacak şekilde bir σ kongruansı vardır.

İspat: $h: \mathbb{N}^n \to S$

$$h(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon bir epimorfizmdir. σ, $ker(h)$ olarak alınırsa bir önceki teoremden $\bar{h}$ izomorfizm olur.■

Tanım 2.14 σ , $\mathbb{N}^n$ üzerinde bir kongruans olsun. $R_\sigma = \{a - b \mid (a,b) \in \sigma\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ tanımlayalım. Burada $a - b \in \mathbb{Z}^n$, $a \in \mathbb{N}^n$ den $b \in \mathbb{N}^n$ nin bileşen bileşene çıkarılması sonucu elde edilen elemandır. σ bir kongruans olduğundan R_σ , $\mathbb{Z}^n$ nin bir alt grubu olur.

Tanım 2.15 K , $\mathbb{Z}^n$ nin bir alt grubu olsun.

$$\sim K = \{(a,b) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \mid a - b \in K\}$$

şeklinde tanımlanan $\sim K$, $\mathbb{N}^n$ üzerinde bir kongruanstır.

Öncelikle $R_{\sim K}$ nın yapısını inceleyelim. $x \in R_{\sim K}$ alalım. Böylece en az bir $(a,b) \in \sim K$ için $x = a - b$ olur. O halde $(a,b) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ ve $x = a - b \in \sim K$ olup $x \in R_{\sim K}$ olur. Buradan $R_{\sim K} = K$ dır. Ancak σ ile $\sim R_\sigma$ her zaman birbirine eşit değildir.

Lemma 2.16 σ , $\mathbb{N}^n$ de bir kongruans olsun.

i. $\sigma \subseteq \sim R_\sigma$ dır.
ii. $\forall (a,b) \in \sim R_\sigma$ için $(a+c, b+c) \in \sigma$ olacak şekilde $c \in \mathbb{N}^n$ vardır.

İspat: $(a,b) \in \sigma$ ise R_σ nın tanımından $a - b \in \sim R_\sigma$ olur. Dolayısıyla $(a,b) \in \sim R_\sigma$ olur. Buradan $(a,b) \in \sim R_\sigma$ alalım $a - b \in R_\sigma$ olup R_σ nın tanımından bir $(x,y) \in \sigma$ için $x - y = a - b$ dir. σ bir kongruans olduğundan $(x+a, y+a) \in \sigma$ olur. Buradan $y + a = x + b$ olup $(x+a, x+b) \in \sigma$ elde edilir. $x = c$ alınırsa istenen elde edilir.

Önerme 2.17 σ , $\mathbb{N}^n$ de bir kongruans olsun. O zaman

$\mathbb{N}^n/\sigma$ sadeleşmelidir $\Leftrightarrow$ $\sigma = \sim R_\sigma$

İspat: İspat için bkz.[5].

Tanım 2.18 $\mathbb{Z}^n$ nin bir K alt grubu verilsin. $\mathbb{Z}^n$ üzerinde

$$a \equiv_K b \Leftrightarrow a - b \in K$$

şeklinde tanımlanan $\equiv_K$ bağıntısı daha açık olarak

$$\equiv_K = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \mid \mathrm{a} - \mathrm{b} \in \mathrm{K}\}$$

dir. $\sim K$ da olduğu gibi $\equiv_K$ da bir kongruanstır. Böylece $\mathbb{Z}^n / \equiv_K$ bir monoid olur. Ayrıca $[a - a]_{\equiv_K} = [a]_{\equiv_K} - [a]_{\equiv_K} = [0]_{\equiv_K}$ olduğundan $\mathbb{Z}^n / \equiv_K$ bir grup olur.Bunu genelde $\mathbb{Z}^n / K$ ile gösteririz ve buna $\mathbb{Z}^{\boldsymbol{n}}$ ***nin K daki bölüm grubu*** denir.

Önerme 2.19 $K,\ \mathbb{Z}^{\boldsymbol{n}}$ nin bir alt grubu olsun. $f([a]_{\sim K}) = [a]_{\equiv_K}$ şeklinde

$$f: \mathbb{Z}^n / {\sim K} \rightarrow \mathbb{Z}^n / \equiv_K$$

dönüşümü bir monoid monomorfizmidir.

İspat: $[a]_{\sim K} = [b]_{\sim K}$ olsun. O halde $a - b \in K$ ve $[a]_{\equiv_K} = [b]_{\equiv_K}$ olup buradan f iyi tanımlıdır. $f$nin bir monoid morfizmi olduğu açıktır. $f$nin birebir olduğunu gösterelim. $a, b \in \mathbb{N}^{\boldsymbol{n}}$ olmak üzere $[a]_{\equiv_K} = [b]_{\equiv_K}$ olsun. O halde $a - b \in K$ ve buradan $[a]_{\sim K} = [b]_{\sim K}$ elde edilir. Yani f bir monomorfizmdir.■

Sonuç 2.20 S sonlu doğuraylı bir monoid olsun. O zaman S nin sadeleşmeli olması için gerek ve yeter koşul S nin bir grubun alt monoidine izomorfik olmasıdır.

İspat: Torem 2.13 ten $n \in \mathbb{N}$ ve $\sigma, \mathbb{N}^{\boldsymbol{n}}$ üzerinde bir kongruans olmak üzere $S \cong \mathbb{N}^n / \sigma$ dir. Ayrıca diğer taraftan Önerme 2.17 den $\sigma = \sim R_\sigma$ elde edilir. Buradan $S \cong \mathbb{N}^n / {\sim R_\sigma}$ olur. Önerme 2.19 dan ise $\mathbb{N}^n / {\sim R_\sigma}$ nın $\mathbb{Z}^n / \equiv_K = \mathbb{Z}^n / R_\sigma$ nın bir alt monoidine izomorfiktir.■

Tanım 2.21 $v \in \mathbb{Z}^n$ nin her koordinatı pozitif ise ***v ye kuvvetli pozitif*** denir. Benzer şekilde $v \in \mathbb{Z}^n$ nin her koordinatı sıfır ya da sıfırdan büyükse ***v ye negatif olmayan*** denir.

Önerme 2.22 S sonlu doğuraylı bir monoid olsun. O halde aşağıdakiler birbirine denktir.

i. S bir gruptur.

ii. $n \in \mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}^n$ nin kuvvetli pozitif eleman içeren bir K alt grubu için $S \cong \mathbb{N}^n/{\sim}K$ dır.

iii. $n \in \mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}^n$ nin bir K altgrubu için $S \cong \mathbb{Z}^n/K = \mathbb{Z}^n/{\equiv_K}$ dır.

İspat: İspat için bkz. [5].

Tanım 2.23 Pozitif n tamsayısı için $1 \leq a \leq n$ ve $(a,n) = 1$ olan a tamsayılarının sayısı $\phi(n)$ ile gösterilir ve ***Euler fonksiyonu*** denir. p asal ise $\phi(p) = p - 1$ dir.

Tanım 2.24 Herhangi bir n modunda bir p sayısının ***ilkel kök*** olması demek o modda n ile aralarında asal bir sayının p nin bir kuvveti olarak yazılabilmesi demektir. Özel olarak p asal bir sayı ise p nin tüm kuvvetlerinin kalanlar sınıfını oluşturması demektir

$$\xi^{\varphi(p)} = 1(modp)$$

$$\xi^{p-1} = 1$$

BÖLÜM 3

SONLU DOĞURAYLI DEĞİŞMELİ GRUPLAR

Bu kısımda sonlu doğuraylı değişmeli grupların temel teoremi verilecektir.

Teorem 3.1 Sonlu doğuraylı her değişmeli grup $d_1, \ldots, d_n, k$ her $1 \leq i \leq r-1$ için d_i, d_{i+1} i bölecek şekilde bir takım pozitif tam sayılar olmak üzere $\mathbb{Z}_{d_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{d_r} \times \mathbb{Z}^k$ grubuna izomorftur.

Burada $\mathbb{Z}_n$ ile $\mathbb{Z}$ nin n modülüne göre kalan sınıflarının toplama altındaki grubu gösterilmektedir. Bu temel teoremin ispatında aşağıdaki fikirler kullanılır.

1. $K, \mathbb{Z}_n$ bir alt grubu olmak üzere her sonlu doğuraylı grup $\mathbb{Z}^n/K$ formundadır.
2. $\{g_1, \ldots, g_n\}$, $\mathbb{Z}^n$ nin bir bazı olsun. $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$ için d_i pozitif bir tamsayı olmak üzere $K = G(\{d_1 g_1, \ldots, d_n\, g_r\})$ alalım. O zaman $\mathbb{Z}^n/K \cong \mathbb{Z}_{d_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{d_r} \times \mathbb{Z}^{n-r}$ dir.
3. $\{g_1, \ldots, g_n\}$, $\mathbb{Z}^n$ nin bir bazı olsun. O zaman $\mathbb{Z}^n$ nin her alt grubunun $\{d_1 g_1, \ldots, d_n\, g_r\}$ formunda bir bazı vardır.

3.1 $\mathbb{Z}^n$ Alt Gruplarının Bazları ve Rankı

Tanım 3.1.1 $M, \mathbb{Z}^n$ nin bir alt grubu olsun. Eğer M deki her eleman $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$m = \sum_{i=1}^{r} z_i m_i$$

şeklinde tek türlü yazılabiliyorsa $\{m_1, \dots, m_r\} \subset M$ kümesine M nin bir ***bazı*** denir. $(z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{Z}^r$ ye m nin $\{m_1, \dots, m_r\}$ sıralı bazına göre ***koordinatları*** denir.

Sonuç 3.1.2 $\{m_1, \dots, m_r\}$ nin M nin bir bazı olması için gerek ve yeter koşul

1. $\forall\, m \in M$ için $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $m = \sum_{i=1}^{r} z_i m_i$ şeklinde yazılabilir.
2. Eğer $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{r} z_i m_i = 0$ ise $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ için $z_i = 0$ olmasıdır.

$e_i, \mathbb{N}^n$ nin i-inci koordinatı 1, diğer bütün koordinatları sıfır olan elemanıdır. $\{e_1, \dots, e_n\}$ nin $\mathbb{Z}^n$ nin bir bazı olduğu görülebilir.

Aşağıdaki önerme ve teoremlerin ispatı [5] te bulunabilir.

Önerme 3.1.3 M , $\mathbb{Z}^n$ nin bir alt grubu ise $M = G(\{z\})$ olacak şekilde bir $z \in M$ vardır.

Önerme 3.1.4 M , $\mathbb{Z}^n$ nin bir alt grubu olsun. O halde M nin bir bazı en fazla n tane eleman içerir.

Tanım 3.1.5 Rasyonel sayılar kümesini $\mathbb{Q}$ ile tanımlarsak $\mathbb{Q}^n$ nin X tarafından gerilen alt uzayı

$$L_{\mathbb{Q}}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} q_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, \forall 1 \leq i \leq n, q_i \in \mathbb{Q}, x_i \in X \right\}$$

olur.

Önerme 3.1.6 M , $\mathbb{Z}^n$ nin bir alt grubu olsun. O halde M nin bütün bazlarında aynı sayıda eleman bulunur.

Tanım 3.1.7 M , $\mathbb{Z}^n$ nin bir alt grubu olsun. M nin bir bazındaki eleman sayısına M alt grubunun ***rankı*** denir. *rank*(M) ile gösterilir. *rank*(M) $\leq n$ olduğuna dikkat edelim.

Önerme 3.1.8 M , $\mathbb{Z}^n$ nin rankı k olan bir alt grubu ise $M \cong \mathbb{Z}^k$ dır.

İspat: $W = \{m_1 \dots m_k\}$, M nin bir bazı olsun. M nin her elemanının W sıralı bazına göre koordinatı tek olduğundan

$$g: \mathbb{Z}^k \to M$$

$$g(z_1 \dots z_k) = \sum_{i=1}^{k} z_i m_i$$

dönüşümü bir izomorfizmdir. ■

Sonuç 3.1.9 M ve M' , $\mathbb{Z}^n$ nin iki alt grubu için $M \cong M' \Leftrightarrow rank(M) = rank(M')$ sağlanır.

3.2 Bileşenleri Tamsayı Olan Matrislerin Denkliği ve İnvaryant Faktörleri

Buradaki amacımız, $\mathbb{Z}^n$ nin verilen bir alt grubunun bazını elementer işlemlerle bölümümüzün başındaki bir baza dönüştürmektir.

Bir n tamsayısı için $1 \leq i, j \leq n$, $(i \neq j), A_n$ bir matris olmak üzere aşağıdaki işlemleri tanımlayalım.

1. $R_{i \leftrightarrow j}$, A_n nin i-inci satırı ile j-inci satırının yer değiştirmesiyle elde edilen matristir.
2. $R_{i \leftarrow -i}$, A_n nin i-inci satırının -1 ile çarpılmasıyla elde edilen matristir.

3. $R_{j\leftarrow j+zi}$, A_n nin i-inci satırının $z \in \mathbb{Z}$ ile çarpılıp j-inci satırına eklenmesiyle elde edilen matristir.

$C_{i\leftrightarrow j}$, $C_{i\leftarrow -i}$, $C_{j\leftarrow j+zi}$ yukarıdakine benzer şekilde sadece satır yerine sütunlarla işlem yapılarak elde edilen matrislerdir.

Tanım 3.2.1 $R_{i\leftrightarrow j}$, $R_{i\leftarrow -i}$, $R_{j\leftarrow j+zi}$ matrislerine ***elemanter satır matrisleri***, $C_{i\leftrightarrow j}$, $C_{i\leftarrow -i}$, $C_{j\leftarrow j+zi}$ matrislerine ***elemanter sütun matrisleri*** denir.

Tanım 3.2.2 K ve L tamsayı bileşenli iki matris olsun.

$$L = P_1 \dots P_r K Q_1 \dots Q_s$$

olacak şekilde $P_1 \dots P_r$ elemanter matrisleri ve $Q_1 \dots Q_s$ elemanter sütun matrisleri varsa K ve L ye ***denktirler*** denir.

Önerme 3.2.3 K tamsayı bileşenli $m \times n$ tipinde bir matris olsun

$$r \leq \min\{m, n\},\ \{d_1, \dots, d_r\} \subset \mathbb{N}/\{0\} \text{ ve } \forall i \in \{1, \dots, r-1\} \text{ için}$$

$d_i \mid d_{i+1}$ olmak üzere K matrisi

$$\begin{pmatrix}
d_1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\
0 & d_2 & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\
. & . & . & & & . & . & . & & & . \\
. & . & & . & & . & . & & . & & . \\
. & . & & & . & . & . & & & . & . \\
0 & 0 & & & & d_r & 0 & & & & 0 \\
0 & 0 & & & & 0 & 0 & & & & 0 \\
. & . & . & & & . & . & . & & & . \\
. & . & & . & & . & . & & . & & . \\
. & . & & & . & . & . & & & . & . \\
0 & 0 & & & & 0 & 0 & & & & 0
\end{pmatrix}$$

matrisine denktir.

Tanım 3.2.4 $d_1, \dots, d_r$ elemanlarına K nın ***invaryant faktörleri*** denir.

Önerme 3.2.5 K ve L tamsayı bileşenli iki matris olsun. O halde K ile L nin denk olması için gerek ve yeter şart K ile L nin aynı invaryant faktörlere sahip olmasıdır.

Teorem 3.2.6 M , $rank(M) = r$ olacak şekilde $\mathbb{Z}^n$nin bir alt grubu olsun. O zaman $\forall\, i$ için $d_i \mid d_{i+1}$ ve $\{d_1 g_1 \dots d_n\, g_r\}$, M için bir baz olacak şekilde $\mathbb{Z}^n$ nin bir $\{g_1, \dots, g_r, \dots, g_n\}$ bazı ve $\{d_1, \dots, d_r\} \subset \mathbb{N}/\{0\}$ kümesi vardır.

Uyarı: $\{d_1, \dots, d_r\}$ invaryant faktörlerin kümesi M nin bir alt grubudur.

$\{g_1, \dots, g_r, \dots, g_n\}$ $\mathbb{Z}^n$nin bir bazı ve $\{d_1 g_1 \dots d_n\, g_r\}$ de M nin bir bazı olduğundan $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ nin M nin elemanı olması için gerek ve yeter koşul x in $\{g_1, \dots, g_n\}$ sıralı bazına göre koordinatları olan $\{z_1, \dots, z_n\}$ nin

$$z_1 \equiv 0\ (mod d_1)$$

$$\vdots$$

$$z_r \equiv 0\ (mod d_r)$$

$$z_{r+1} = 0$$

$$\vdots$$

$$z_n = 0$$

denklemlerini sağlamasıdır. Her i için $g_i = (g_{i1}, \dots, g_{in})$ alalım. $(z_1, \dots, z_n)$, x in $(g_1, \dots, g_n)$ sıralı bazına göre koordinatları olduğundan

$$x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} z_i g_i$$

ve buradan

$$(x_1, \dots, x_n) = (z_1, \dots, z_n)\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

yazılabiliriz. Dolayısıyla (g_{ij}) matrisinin tersi yani Q matrisi (a_{ij}) matrisi olmak üzere;

$$(z_1, \dots, z_n) = (x_1, \dots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Buradan,

$$\begin{aligned} x = (x_1, \dots, x_n) \in M \Leftrightarrow a_{11}x_1 + \cdots + a_{n1}x_n &\equiv 0 \bmod(d_1) \\ &\vdots \\ a_{1r}x_1 + \cdots + a_{nr}x_n &\equiv 0 \bmod(d_r) \\ a_{1(r+1)}x_1 + \cdots + a_{n(r+1)}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{1n}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemler genellikle $\{e_1, \dots, e_n\}$ sıralı bazına göre M nin denklemleri ya da kısaca M nin denklemleri olarak bilinir.

Eğer $d_i = 1$ ise d_i nin geçtiği denklem çıkarılabilir. (Çünkü her tamsayının 1 ile bölümünden kalan 0 dır.)

M nin tüm invaryant faktörleri 1 ise M ye ***homojendir*** denir.

Örnek 3.2.7 $M = G(\{(2,-1,1),(3,2,-1)\}) \subseteq \mathbb{Z}^3$ için M nin denklemlerini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -5\\ 1 & 1 & -7\end{pmatrix} \rightarrow$$

elde edilir. Buradan ,

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -5\\ 1 & 1 & -7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

dir. M nin denklemleri ,

$$x_3 \equiv 0 \ (\text{mod}1)$$

$$x_2 + x_3 \equiv 0 \ (mod 1)$$

$$x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 0$$

olup buradan ilk iki denklem çıkarılırsa,

$$(x_1, x_2, x_3) \in M \Leftrightarrow x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 0$$

denklemi elde edilir.

Teorem 3.2.8 $M, \mathbb{Z}^n$ nin invaryant faktörleri $d_1, \dots, d_r$ olan bir alt grubu ise

$$\mathbb{Z}^n/M \cong \mathbb{Z}_{d_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}^{n-r}$$

dir.

İspat: Teorem 3.2.6 dan $\{g_1, \dots, g_r, \dots, g_n\}$, $\mathbb{Z}^n$ nin bazı olacak şekilde M nin $\{d_1 g_1, \dots, d_n\, g_r\}$ formunda bir bazı vardır. Bunu basitleştirmek için

$Z_{d_i} = Z/G(\{d_i\})$ deki $[Z_i]_{\equiv_{G(\{d_i\})}}$ elemanını $[Z]_{d_i}$ ile gösterip

$$\omega : Z^n / M \to Z_{d_1} \times \dots \times Z_{d_r} \times Z^{n-r}$$

$$\omega\left(\left[\sum_{i=1}^{n} z_i g_i\right]\right) = ([z_1]_{d_1}, \dots, [z_r]_{d_r}, z_{r+1}, \dots, z_n)$$

dönüşümünü tanımlayalım. Burada ω iyi tanımlıdır ve bir izomorfizmdir.

BÖLÜM 4

SONLU DOĞURAYLI SADELEŞMELİ MONOİDLER

Sonlu doğuraylı sadeleşmeli monoidler burulmasız, indirgenmiş ve sonlu olanlar olmak üzere kendi içinde üç sınıfa ayrılır. Bu kısımda aşağıdaki sonuçların ispatları verilecektir.

1. Her sonlu doğuraylı sadeleşmeli burulmasız monoid, n bir pozitif tam sayı olmak üzere $\mathbb{Z}^n$ nin bir alt monoidine izomorfiktir.
2. Her sonlu doğuraylı sadeleşmeli burulmasız indirgenmiş monoid n bir pozitif tam sayı olmak üzere $\mathbb{N}^n$ nin bir alt monoidine izomorfiktir.
3. Her sonlu sadeleşmeli monoid bir gruptur.

Önerme 4.1 $\mathbb{Z}^n$ nin

$$
\begin{aligned}
x = (x_1, \dots, x_n) \in \ M \ \Leftrightarrow \ & b_{11}x_1 + \cdots + b_{n1}x_n \equiv 0 \bmod(d_1) \\
& \vdots \\
& b_{r1}x_1 + \cdots + b_{rn}x_n \equiv 0 \bmod(d_r) \\
& b_{(r+1)1}x_1 + \cdots + b_{(r+1)n}x_n = 0 \\
& \vdots \\
& b_{(r+k)1}x_1 + \cdots + b_{(r+k)n}x_n = 0
\end{aligned}
$$

olacak şekilde bir M alt grubu verilsin. O halde ; $[a]_d$, a nın $\mathbb{Z}_d$ deki denklik sınıfını göstermek üzere $\mathbb{N}^n/{\sim}M$, $\mathbb{Z}_{d_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{d_n} \times \mathbb{Z}^k$ nın

$$S=\langle\{([b_{11}]_{d_1},\dots,[b_{r1}]_{d_r},b_{(r+1)1},\dots,b_{(r+k)1}),\dots,([b_{1n}]_{d_1},\dots,[b_{rn}]_{d_r},b_{(r+1)n},\dots,b_{(r+k)n})\}\rangle$$

şeklindeki alt monoidine izomorfiktir.

İspat:

$$\omega:\ \mathbb{N}^n/\sim M\to\mathbb{Z}_{d_1}\times\dots\times\mathbb{Z}_{d_r}\times\mathbb{Z}^k$$

$$\omega([(b_1,\dots,b_n)]_{\sim M})=\left(\left[\sum_{i=1}^{n}b_ib_{1i}\right],\dots,\left[\sum_{i=1}^{n}b_ib_{ri}\right],\sum_{i=1}^{n}b_ib_{(r+1)i},\dots,\sum_{i=1}^{n}b_ib_{(r+k)i}\right)$$

fonksiyonu iyi tanımlı bir monomorfizmdir. O halde $S=Im(\omega)$ için $\mathbb{N}^n/\sim M\cong S$ dir.

Örnek 4.2 $M=G(\{(2,0,0),(0,1,-1)\})\subseteq\mathbb{Z}^3$ için M nin invaryant faktörlerini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\to$$

olur. Buradan

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}$$

olup M nin denklemleri,

$$x_2 \equiv 0 \text{ (mod1)}$$

$$x_1 \equiv 0 \text{ (mod2)}$$

$$x_2 + x_3 = 0$$

dir. Böylece

$$(x_1, x_2, x_3) \in M \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \equiv 0 \text{ (mod2)}$$

$$x_2 + x_3 = 0$$

elde edilir.

$\mathbb{N}^3/{\sim}M$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ nin $\{([1]_2, 0), ([0]_2, 1), ([0]_2, 1)\} = \{([1]_2, 0), ([0]_2, 1)\}$ tarafından doğurulan alt monoidine izomorfiktir.

4.1 Sonlu Doğuraylı Sadeleşmeli Burulmasız Monoidler

Tanım 4.1.1 $\forall a, b \in S$ ve $k \in \mathbb{N}/\{0\}$ için $ka = kb$ iken $a = b$ oluyorsa S monoidine ***burulmasız*** denir.

Burulmasız olma özelliği izomorfizmalar altında korunur. Bir burulmasız monoidin alt monoidi de burulmasızdır. O halde özel olarak $\mathbb{Z}^n$ nin her alt monoidi burulmasızdır.

Önerme 4.1.2 M , $\mathbb{Z}^n$ nin bir alt grubu olsun. O halde aşağıdakiler birbirine denktir.

1. M homojendir.
2. $\mathbb{N}^n/{\sim}M$, k pozitif tamsayısı için $\mathbb{Z}^k$ nın bir alt monoidine izomorfiktir.
3. $\mathbb{N}^n/{\sim}M$ burulmasızdır.

İspat: İspat için bkz. [4,5].

Sonuç 4.1.3 S sonlu doğuraylı bir monoid olsun. O zaman S nin sadeleşmeli ve burulmasız olması için gerek ve yeter şart k pozitif tamsayısı için $\mathbb{Z}^k$ nın bir alt monoidine izomorfik olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: S sonlu doğuraylı olduğundan $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $\sigma, \mathbb{N}^n$ üzerinde bir kongruans olmak üzere, $S \cong \mathbb{N}^n/\sigma$ (Teorem 2.13) dir. S sadeleşmeli olduğundan Önerme 2.17 den dolayı $\sigma = \sim M_\sigma$ dir. S burulmasız olduğundan Önerme 4.1.2 den dolayı pozitif bir k tamsayısı için $\mathbb{N}^n/\sim M_\sigma$ dolayısıyla S $\mathbb{Z}^k$ nın bir alt monoidine izomorfiktir.

$\Leftarrow$: Aşikardır.■

Örnek 4.1.4 $M = G(\{(4,1,-3),(1,-2,1)\}) \subseteq \mathbb{Z}^3$ için M nin invaryant faktörlerini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Diğer denklemler çıkarılacağından M nin denklemleri sadece

$$5x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\mathbb{N}^3/\sim M$, $\mathbb{Z}$ nin $\{5,7,9\}$ tarafından doğurulan alt monoidine izomorfiktir.

4.2 Sonlu Doğuraylı Sadeleşmeli İndirgenmiş Monoidler

Tanım 4.2.1 Bir S monoidi için $s \in S$ için $s + n = 0$ olacak şekilde $n \in$ varsa s ye ***birim*** denir. S nin birimlerinin kümesi $U(S)$ ile gösterilir.

Tanım 4.2.2 Eğer $U(S) = 0$ ise S ye ***indirgenmiş*** denir.

İndirgenmiş olma izomorfizmalar altında korunan bir özelliktir. Bir indirgenmiş monoidin her alt monoidi de indirgenmiştir.

Önerme 4.2.3 M , $\mathbb{Z}^n$ nin $M \cap \{e_1, \dots, e_n\} = \emptyset$ olacak şekilde bir alt grubu olsun. O halde $\mathbb{N}^n/{\sim}M$ nin indirgenmiş olması için gerek ve yeter şart $M \cap \mathbb{N}^n = \{0\}$ olmasıdır.

İspat: İspat için bkz. [5].

Önermenin özeti olarak; eğer S monoidi sonlu doğuraylı ve sadeleşmeli ise $\mathbb{N}^n/{\sim}M$ formundadır. İndirgenmiş olup olmadığını araştırmak istiyorsak $M \cap \{e_1, \dots, e_n\} = \emptyset$ şartı altında $M \cap \mathbb{N}^n = \{0\}$ ın varlığı kontrol edilmelidir.

Tanım 4.2.4 V , $\mathbb{Q}^n$ nin bir alt uzayı olsun. Buradan $\mathbb{Q}^n$ nin

$$V^{\perp} = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}^n \mid \forall (y_1, \dots, y_n) \in V, \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0\right\}$$

ifadesine bir V alt uzayının ***ortogonal uzayı*** denir.

- $\mathbb{Q}^n$ bütün koordinatları 0 ya da 0 dan büyük olan elamanına ***negatif olmayan elemanı*** denir.
- $\mathbb{Q}^n$ bütün koordinatları 0 dan büyük olan elemanına ***kuvvetli pozitif elemanı*** denir.

Lemma 4.2.5 V , $\mathbb{Q}^n$ nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda $V^{\perp}$ nın bir kuvvetli pozitif elemanının olması için gerek ve yeter koşul V nin negatif olmayan elemanının sadece sıfır olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: $\forall\, i$ için $a_i > 0$ olmak üzere $(a_1, \dots, a_n) \in V^{\perp}$ alalım. Her i için $b_i \geq 0$ şeklinde $(b_1, \dots, b_n) \in V$ olduğunu kabul edelim.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$$

ve her i için $a_i b_i \geq 0$ olduğundan her i için $a_i b_i = 0$ elde edilir. Sonuç olarak her $i \in \{1, \dots, n\}$ için $b_i = 0$ dır.

$\Leftarrow$: Bir sonraki bölümde Minkowski-Farkas Lemma'nın ispatındaki fikirden kolaylıkla görülür.■

Önerme 4.2.6 $\mathbb{Z}^n$ nin $M \cap \mathbb{N}^n = \{0\}$ şeklinde bir M alt grubu verilsin. O halde $\forall (x_1, \dots, x_n) \in M$ için $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ olacak şekilde bir $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ kuvvetli pozitif elemanı vardır.

İspat: V, $\mathbb{Q}^n$ nin M tarafından gerilen bir alt uzayı olsun. $M \cap \mathbb{N}^n = \{0\}$ olduğundan V nin negatif olamayan elemanı 0 bulunur. Lemma 4.2.5 den $V^{\perp}$ de bir $(a_1, \dots, a_n)$ kuvvetli pozitif elemanı vardır. O halde $\forall (x_1, \dots, x_n) \in M \subset V$ için

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

elde edilir. İspat tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.2.7 (Grillet) S sonlu doğuraylı bir monoid olsun. S nin sadeleşmeli, burulmasız ve indirgenmiş olması için gerek ve yeter şart pozitif bir k tamsayısı için S nin $\mathbb{N}^k$ nın bir alt monoidine izomorfik olmasıdır.

İspat: İspat için bkz. [5].

Tanım 4.2.8 $\mathbb{N}^k$ nın bir alt monoidine izomorfik olan sonlu doğuraylı bir monoide ***afin yarıgrubu*** denir.

Sonuç olarak Teorem 4.2.7 kullanılarak;

S monoidinin bir afin yarıgrup olması için gerek ve yeter koşul S monoidinin sonlu doğuraylı, sadeleşmeli, indirgenmiş ve burulmasız olmasıdır.

Örnek 4.2.9 $M = G(\{(1,-2,2,-1),(-3,1,1,1)\}) \subseteq \mathbb{Z}^4$ için M nin invaryant faktörlerini hesaplayalım ve izomorfik olduğu alt monoidi bulalım.

Çözüm:

İnvaryant faktörleri hesaplama yöntemi kullanılarak;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. M nin denklemleri

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in M \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 + 5x_4 = 0$$

şeklinde elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa ;

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in M \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$3x_1 + 2x_3 + 7x_4 = 0$$

olup buradan $\mathbb{N}^3/{\sim}M$, $\mathbb{N}^2$ nin

$$\{(1,3),(1,0),(1,2),(1,7)\}$$

tarafından doğurulan alt monoidine izomorfiktir. Yani sonuç olarak $\mathbb{Z}^n$ nin bir M alt grubu için S monoidimizin izomorfik olduğu bir $\mathbb{N}^k$ bulunabileceği için S sonlu doğruraylı, sadeleşmeli, burulmasız ve indirgenmiştir.

4.3 Sonlu Sadeleşmeli Monoidler

Önerme 4.3.1 S sonlu bir monoid olsun. O halde S nin bir grup olması için gerek ve yeter koşul S nin sadeleşmeli olmasıdır.

İspat: ⇒: S bir grup ise sadeleşmeli olduğu aşikardır.

⇐: $s \in S \backslash \{0\}$ alalım. S sonlu olduğundan $\{ns \mid n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\} \subseteq S$ kümesi de sonlu olmak zorundadır. O zaman $m < n$ için $ms = ns$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ vardır. S sadeleşmeli olduğundan $(n - m)s = 0$ olur. $n - m > 0$ olduğundan $(n - m - 1)s + s = 0$ olur yani s nin bir tersi vardır. O halde S bir gruptur.■

Teorem 4.3.2 $\mathbb{Z}^n$ nin bir M alt grubu için aşağıdakiler birbirine denktir.

1. $\mathbb{N}^n/{\sim M}$ sonludur.
2. $rank(M) = n$ dir.
3. M nin denklemleri içinde $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ formunda bir denklem yoktur. Yani M homojen denkleme sahip değildir.

İspat: İspat için bkz. [5].

Sonuç 4.3.3 $\mathbb{Z}^n$ nin invaryant faktörleri $d_1, \ldots, d_n$ olan bir M alt grubu için;

1. $\mathbb{N}^n/{\sim M}$sonlu bir gruptur.
2. M bir kuvvetli pozitif eleman içerir.
3. $\mathbb{N}^n/{\sim M} \cong \mathbb{Z}_{d_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{d_n}$ dir.

BÖLÜM 5

MINKOWSKI-FARKAS LEMMASI VE MONOİDLERDEKİ UYGULAMALARI

Bir önceki bölümde $\mathbb{Q}^n$ nin bir V alt uzayının tek negatif olmayan elemanı 0 ise $V^{\perp}$ in kuvvetli bir pozitif elemanının bulunduğu görülmüştür. Bu Minkowski-Farkas lemmasının uygulamalarından biridir. Bu bölümde Minkowski-Farkas Lemmanın ispatından söz edilip bunlara ek olarak $\mathbb{Q}^n$ nin bir alt uzayının aşikar olmayan negatif olmayan elemanlarının olup olmadığına karar vermede kullanılacak olan bir dizi algoritmadan söz edilecektir. Ayrıca aşağıda verilen hesaplama işlemlerinde uygulamaların nasıl yapılacağı ifade edilecektir.

1. $\mathbb{N}^n/\sim M$ formundaki bir monoidin grup olup olamayacağına karar vermek
2. $\mathbb{N}^n/\sim M$ formundaki bir monoidin afin olup olmayacağına karar vermek ve eğer afin ise $M \cong \mathbb{N}^n/\sim M$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ve $\mathbb{N}^k$ nın sonlu doğuraylı bir S alt monoidini hesaplamak.

5.1 Temel Algoritmalar ve Sonuçlar

Bu bölümde $q \in \mathbb{Q}^n$ için $q \geq 0$ ile q elemanının her bir koordinatının sıfır ya da sıfırdan büyük olduğu $q > 0$ ile tüm koordinatların sıfırdan büyük olduğu ifade edilecektir.

Teorem 5.1.1 (Minkowski-Farkas'lemma) X ve y sırasıyla $m \times n$ ve $m \times 1$

tipinde

rasyonel katsayılı matrisler olsun. q ve r de sırasıyla $n \times 1$ ve $1 \times m$ tipinde bilinmeyen matrisler olsun buradan aşağıdakiler birbirine denktir.

i. $\begin{cases} Xq = y \\ q \geq 0 \end{cases}$ sistemi rasyoneller üzerinde bir çözüme sahiptir.

ii. $\begin{cases} rX \geq 0 \\ ry < 0 \end{cases}$ sistemi rasyoneller üzerinde bir çözüme sahip değildir.

İspat: $i \Rightarrow ii$: $\forall \in \mathbb{Q}^n$ için $ry = rXq$ elde ederiz. $rX \geq 0$ ise $ry \geq 0$ olur ki bu da

$\begin{cases} rX \geq 0 \\ ry < 0 \end{cases}$ sisteminin rasyoneller üzerinde bir çözümü olmadığı anlamına gelir.

$ii \Rightarrow i$: $\begin{cases} Xq = y \\ q \geq 0 \end{cases}$ sisteminin rasyoneller üzerinde bir çözümü olmadığını varsayalım. Bu durumda ya $Xq = y$ nin rasyoneller üzerinde bir çözümü yoktur ya da $Xq = y$ nin her çözümünün en az bir koordinatı negatiftir.

X in i-inci kolonunu X_i ile gösterelim. Her iki durumda da

$$\begin{cases} rX \geq 0 \\ ry < 0 \end{cases}$$

sisteminin rasyoneller üzerinde bir çözümünün olduğunu göstererek çelişki elde edilecek ve ispat tamamlanmış olacaktır. Devamı için bkz. [5].

Dördüncü bölümde $\mathbb{Q}^n$ nin bir V alt uzayının varsa sıfırdan büyük negatif olmayan elemanın ve kuvvetli pozitif elemanın varlığını tespit etmemizi sağlayan bir kaç önerme ve sonuç verilmişti. Minkowski-Farkas'lemma-nın ispatındaki fikir kullanılarak da ilk koordinatı sıfırdan büyük negatif olamayan bir elemanı kolayca bulunabilir. İşte bu noktada, ispattaki fikir kullanılarak oluşturulan algoritmalar verilecektir.

5.2 Algoritma (FP)

Algoritmanın girdisi satırları $\mathbb{Q}^n$ nin bir V alt uzayı için baz olan X matrisi, çıktısı ise V de ilk koordinatı sıfırdan büyük olan bir negatif olmayan elemandır. Eğer böyle bir eleman yoksa algoritma yanlış sonucu verir. Algoritmamızın basamakları :

1. Eğer $n = 1$ ise $i = \min\{k \mid a_{k1} \neq 0\}$ olmak üzere $y = (0, \dots, 0, a_{i1}, 0, \dots, 0)$ alınır ve sonuç olarak $q = rX = rX_1$ yapılır. Eğer X_1 in bütün bileşenleri sıfır ise problemin çözümü yoktur ve sonuç olarak yanlış sonucunu üretir.

2. Eğer $n > 1$ ise problem $(X_1, \dots, X_{n-1})$ için çözülür. Eğer $(X_1, \dots, X_{n-1})$ için bir çözüm yoksa X için de çözüm yoktur aksi halde z, $\mathbb{Q}^r$ nin $zX_1 > 0$ ve $\forall i \in \{2, \dots, n-1\}$ için $zX_i \geq 0$ olacak şekilde bir elemanı olsun.

   (a) $zX_n \geq 0$ ise zX , V nin ilk koordinatı sıfırdan büyük bir negatif olmayan elemanıdır, çıktı olarak zX alınır.

   (b) $zX_n < 0$ ise $X_1' = X_1 - ((zX_i)/(zX_n))X_n$ alınır ve problem $(X_1' \dots X_{n-1}')$ için çözülür.

      i. Eğer $(X_1' \dots X_{n-1}')$ için bir çözüm yoksa ana problemizin çözümü yoktur sonuç olarak yanlış sonucunu üretir.

      ii. Eğer z' , $(X_1' \dots X_{n-1}')$ için bir çözüm ise

      $$r = z' - ((z'X_n)/(zX_n))z$$

      tanımlanır ve çıktı olarak $q = rX$ alınır.

Örnek 5.2.1 $V = L_{\mathbb{Q}}(X)(\{(1,-1,1,1), (0,1,-1,-1), (-1,1,0,-1)\})$ nin ilk koordinatı sıfırdan büyük negatif olmayan bir elemanını hesaplayalım.

Çözüm:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

alalım. X in ilk kordinatı sıfırdan büyük negatif olmayan elemanını arıyoruz bu;

$$rX_1 > 0\,,\ rX_2 \geq 0\,,\ rX_3 \geq 0\,, rX_4 \geq 0$$

olacak şekilde $r \in \mathbb{Q}^3$ bulmaya denktir. Algoritma takip edilirse problem $(X_1, X_2, X_3), (X_1, X_2)$ için çözülmelidir. $z = (1,0,0)$ alınırsa

$$zX_1 = 1 > 0 \text{ fakat } zX_2 = -1 < 0$$

olduğundan z, (X_1, X_2) için bir çözüm değildir.

Algoritmadan

$$X_1' = X_1 - \big((zX_1)/(zX_2)\big)X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. z', X_1' için bir çözümdür. Buradan

$$r = z' - ((z'X_2)/(zX_2))z = (1,1,0)$$

elde edilir.

$$rX_1 = 1 > 0\,,\; rX_2 = 0 \geq 0\,,\; rX_3 = 0 \geq 0\,, rX_4 = 0 \geq 0$$

olduğundan r, (X_1, X_2, X_3) için bir çözümdür. Çıktı olarak $q = rX = (1,0,0,0)$ ilk koordinatı sıfırdan büyük negatif olamayan bir elemanıdır. Şimdi de kuvvetli pozitif elemanı bulmada işimizi kolaylaştıracak olan algoritma verilecektir.

5.3 Algoritma (SP)

Algoritmanın girdisi, satırları $\mathbb{Q}^n$nin bir V altuzayı için baz olan X matrisi , çıktısı ise q gibi (varsa) kuvvetli pozitif elemanıdır. Eğer böyle bir eleman yoksa algoritma yanlış sonucunu üretir. Algoritmamızın basamakları :

1. Algoritma FP, X matrisine uygulanır. Algoritma başarısız olursa yanlış sonucunu üretir aksi halde algoritma FP nin çıktısı $q = rX$ alınır.

2. Eğer q nun bütün koordinatları sıfırdan büyük ise çıktı olarak q alınır. Aksi halde q nun koordinatları içindeki ilk sıfır bulunur, bu sıfırın bulunduğu koordinat i ise algoritma FP $(X_i \ldots X_n \, X_1 \ldots, X_{i-1})$ matrisine uygulanır. Eğer algoritma FP hata verirse yanlış sonucunu üretir. Eğer algoritmanın çıktısı z ise q , $q + (zX_1, \ldots, zX_n)$ şeklinde yeniden tanımlanır ve bu adım tekrar edilir.

Örnek 5.3.1 Örnek 5.3 de $q = (1,0,0,0) \in V$ bulunmuştu, ancak X_2 için $z = (-1,0,0)$ alalım. $zX_3 = -1 < 0$ oldugundan z (X_2, X_3) matrisine indirgenen problemimiz için çözüm olamaz. O zaman

$$X_2' = X_2 - \left((zX_2)/(zX_3)\right)X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ve } z'X_2' > 0$$

olacak şekilde z' ü hesaplanmalıdır. $z' = (0,0,1)$ alarak

$$r = z' - ((z'X_3)/(zX_3))z = (0,0,1)$$

elde edilir.

$$rX_2 = 1 \geq 0\,,\; rX_3 \geq 0\,, rX_4 = -1 < 0$$

olduğundan bir adım daha tekrar edilirse ;

$$X_2' = X_2 - \left((zX_2)/(zX_4)\right)X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_3' = X_3 - \left((zX_3)/(zX_4)\right)X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. X_2' nün tüm bileşenleri sıfır olduğundan algoritma $z'X_2' > 0$ olacak şekilde bir z' bulmakta başarısız olunur. O yüzden V de kuvvetli pozitif eleman yoktur.

5.4 Algoritmaların Monoidlerdeki Uygulamaları

Verilen algoritmalar sadeleşmeli monoidlere uygulanacaktır.

1. **$\mathbb{N}^{\boldsymbol{n}}/\sim\boldsymbol{M}$ Formundaki Bir Monoidin Grup Olup Olmadığının Belirlenmesi**

   $M = G(\{m_1, \ldots, m_r\}) \subseteq \mathbb{Z}^n$ verilsin $\mathbb{N}^n/\sim M$ nin grup olup olmadığını belirlemek için ; Önerme 2.23 den bu ancak ve ancak M nin bir kuvvetli pozitif eleman içermesi durumunda tespit edilir. $\mathbb{Q}^{\boldsymbol{n}}$ nin $L_{\mathbb{Q}}(\{m_1, \ldots, m_r\})$ alt uzayını tanımlayalım. Sonuç olarak V nin bir kuvvetli pozitif elemana sahip olup olmadığı algoritma SP ile görülebilir.

2. $\mathbb{N}^{\boldsymbol{n}}/{\sim}\boldsymbol{M}$ Formundaki Bir Monoidin Afin Olup Olmadığının Belirlenmesi, Eğer Afin İse $\boldsymbol{S} \cong \mathbb{N}^{\boldsymbol{n}}/{\sim}\boldsymbol{M}$ Olacak Şekilde Bir $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}/\{\boldsymbol{0}\}$ ve $\mathbb{N}^{\boldsymbol{k}}$ nın Bir Sonlu Doğuraylı $\boldsymbol{S}$ Alt Monoidinin Belirlenmesi

$M = G(\{m_1, \dots, m_r\}) \subseteq \mathbb{Z}^n$ verilsin $\mathbb{N}^{\boldsymbol{n}}/{\sim}M$ nin afin yarıgrubu olup olmadığını belirlemek için ; Teorem 4.2.7 den dolayı bunun sadeleşmeli, burulmasız ve indirgenmiş olduğu gösterilmelidir. Kısaca;

a. Önerme 2.18 den sadeleşmeli olduğu görülür.

b. $M \cap \{e_1, \dots, e_n\} = \emptyset$ olduğunu kabul edelim. M invaryant faktörlerini ve denklemlerini hesaplayınca M homojen değilse $\mathbb{N}^{\boldsymbol{n}}/{\sim}M$ burulmasız değildir. Bu yüzden $\mathbb{N}^k$ nın bir alt monoidine izomorfik olmaz.

c. Eğer $\mathbb{N}^{\boldsymbol{n}}/{\sim}M$ indirgenmiş ise M $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ her i için $a_i > 0$ formunda bir denkleme sahip olmak zorundadır. Bu ise ancak ve ancak $\mathbb{Q}^{\boldsymbol{n}}$ nin $V = L_{\mathbb{Q}}(\{(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, (a_{r1}, \dots, a_{rn})\})$ alt uzayının bir kuvvetli pozitif elemana sahip olması durumunda mümkündür. Yani V ye algoritma SP uygulanır ve eğer sonuç yanlış çıktısını verirse yarıgrubumuz afin değildir. Aksi halde $(a_1, \dots, a_n)$,V nin kuvvetli bir pozitif elemanı olsun. Paydaları ihmal edebileceğimizden $\forall\, i\ için\ a_i \in \mathbb{N}/\{0\}$ için deklemleri pozitif sayılarla çarpar ve toparlarsak ;

$$b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$b_{s1}x_1 + \cdots + b_{sn}x_n = 0$$

şeklinde yeni denklemler elde edilir bu da $\{(b_{11}, \dots, b_{s1}), \dots, (b_{1n}, \dots, b_{sn})\}$ tarafından doğurulan alt monoidi $\mathbb{N}^{\boldsymbol{n}}/{\sim}M$ ye izomorfik olur.

BÖLÜM 6

$\mathbb{N}^n/\sim M$ FORMUNDAKİ MONOİDLERİN AFİN OLUP OLMADIĞININ BELİRLENMESİ

6.1. Çift Devirsel (Bicyclic) Monoid

Çift devirsel monoidler yarıgrup teoride bilinen bir monoid çeşididir.

Önerme 6.1.2 $M = G(\{1,0\},\{0,1\})$ şeklinde verilen çift devirsel monoid $GL(2,\mathbb{N})$ nin bir alt grubu olsun. M monoidi afin yarıgrup değildir.

İspat: $M = G(\{1,0\},\{0,1\})$ çift devirsel monoidinin afinliği dördüncü bölümde verilen algoritmalar yardımı ile incelenir.

a. $M = G(\{1,0\},\{0,1\})$ $\mathbb{Q}^2$ nin bir V alt uzayı için bir baz olsun. Algoritma FP yardımı ile ilk koordinatı sıfırdan büyük negatif olmayan bir elemanı aranmaktadır. Bu ise $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ için

$$yA_1 > 0\ , yA_2 \geq 0$$

olacak şekilde bir $y \in \mathbb{Q}^2$ bulmaya denktir. Problemi $(A_1\,, A_2)$ için çözelim.

$z = (1,0)$ alınırsa,

$$zA_1 = (1\ 0\ )\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 > 0\,, zA_2 = (1\ 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \geq 0$$

olduğundan z , $(A_1\,, A_2)$ için bir çözümdür. Böylece çıktı olarak $zA = y$ alınır. Şimdi kuvvetli pozitif elemanı bulunacaktır.

b. Kuvvetli pozitif elemanını tespit etmek için, algoritma SP nin (2) seçeneğine göre çıktımız olan y nin ilk sıfırının bulunduğu ikinci koordinat olduğundan (A_2, A_1) için ikinci koordinatı sıfırdan büyük negatif olmayan bir eleman aranmaktadır. Bu ise $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ için

$$y_1 A_1 > 0 \ , y_1 A_2 \geq 0$$

olacak şekilde bir $y_1 \in \mathbb{Q}^2$ bulmaya denktir. $z = (0,1)$ alınırsa,

$$zA_1 = (0\ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 > 0 \, , zA_2 = (0\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \geq 0$$

olduğundan z , $(A_2\, , A_1)$ için bir çözümdür. O halde çıktı olarak $y_1 = zA$ olarak alınır.

$$y_1 = zA = (0\ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1\ 0)$$

ikinci koordinatı sıfırdan büyük negatif olmayan bir elaman bulmada başarısız olunmuştur. O halde kuvvetli pozitif elemanı yoktur. Kuvvetli pozitif elemanı olmadığı için $\mathbb{N}^2/{\sim}M$ indirgenmiş değildir. (Önerme 4.2.3 ve 4.2.6). O halde $\mathbb{N}^2/{\sim}M$ bir afin yarıgrup değildir.

Alternatif olarak $M = G(\{1,0\}, \{0,1\})$, $GL(2, \mathbb{N})$ nin bir altgrubu olarak alınırsa Önerme 4.2.3 dan $M \cap \{e_1, e_2\} = \emptyset$ olmadığı için indirgenmiş değildir. O halde Teorem 4.2.7 gereği afin yarıgrup olmadığı görülür.

6.2. R-trivial Monoid

R-trivial monoid Bergi C., Bergeron N., Bhargava S. and Saliola F. tarafından [9] 2011 de çalışılmıştır.

Önerme 6.2.1 Doğurayları

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ve \; g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olan $M = \{1, g_1, g_2, g_1 g_2, g_2 g_1\}$ monoidine ***R-trivial monoid*** denir. M monoidi afin yarıgrup değildir.

İspat:

a. Algoritma FP yardımı ile ilk koordinatı sıfırdan büyük negatif olmayan bir eleman aranmaktadır. Bu ise

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ için } yA_1 > 0 \, , yA_2 \geq 0 \, , yA_3 \geq 0$$

olacak şekilde bir $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Q}^{\boldsymbol{3}}$ bulmaya denktir. $z = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ )$ alalım.

$$zA_1 = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

$$zA_2 = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \geq 0$$

$$zA_3 = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \geq 0$$

olup z, A için bir çözümdür. O halde algoritma FP nin (2) seçeneğine göre

$y = zA$ alınır yani

$$(1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = (1\ 0\ 0) = y$$

dir.

O halde $y = zA$, $\mathbb{N}^{\mathbf{3}}$ için koordinatı sıfırdan büyük bir negatif olmayan elamanıdır.Şimdi kuvvetli pozitif elemanı aranmaktadır.

b. Kuvvetli pozitif elemanını tespit etmek için algoritma SP nin (2) seçeneğine göre çıktımız olan y nin ilk sıfırının bulunduğu ikinci koordinat olduğundan (A_2, A_3, A_1) için ikinci koordinatı sıfırdan büyük negatif olmayan bir eleman aranmaktadır. Bu ise

$$A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad y_1A_1 > 0\,, y_1A_2 \geq 0\,, y_1A_3 \geq 0$$

olacak şekilde $y_1 \in \mathbb{Q}^3$ bulmaya denktir. $z = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ )$ alalım.

$$zA_1 = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = 1 > 0$$

$$zA_2 = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0)\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \geq 0$$

$$zA_3 = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \geq 0$$

olduğundan z, $(A_2\ , A_3\ , A_1\ )$ için bir çözümdür. O halde çıktı olarak $y_1 = zA$ olarak alınır.

$$(0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0)\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} = (1\ 0\ 0\ )$$

ikinci koordinatı sıfırdan büyük negatif olmayan bir eleman bulunamaz. O halde kuvvetli pozitif elemanı yoktur. Kuvvetli pozitif elemanı olmadığı için $\mathbb{N}^3/{\sim}M$ indirgenmiş değildir. (Önerme 4.2.3 ve 4.2.6). O halde $\mathbb{N}^3/{\sim}M$ bir afin yarıgrup değildir. ■

Ayrıca ikinci bir yol olarak ispatı, $\forall\ a, b \in S$ ve $k \in \mathbb{N}/\{0\}$ için $ka = kb$ iken $a = b$ oluyorsa S monoidinin burulmasız olduğu biliniyor. $S = \{1, g_1, g_2, g_1g_2, g_2g_1\}$ alalım. $\{g_1, g_2\} \in S$ için $kg_1 = kg_2$ olup olmadığı kontrol edilerek yapılır.

$$k\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}k & 0 & 0\\0 & 0 & k\\0 & 0 & k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & k & 0\\0 & k & 0\\0 & 0 & k\end{pmatrix} \Leftrightarrow k = 0$$

olması durumunda geçerlidir. O halde tek bir durum için sağlanmadığından S monoidinin burulmasız olmadığını söylenir. Teorem 4.2.7 den S monoidi burulmasız olmadığından afin yarıgrubu değildir. ■

6.3 Brauer Tipi Monoid

Brauer tipi monoid G. Kudryavtseva and V. Mazorchuk tarafından [10] 2005 te çalışılmıştır. B_n ile gösterilir.

Önerme 6.3.1

$$B_n = \{s_i\} \cup \{\pi_i\},$$

$$\pi_k = (1,k) \;\; k = 2, \dots, n$$

$$s_i = (i, i+1) \; i = 1, \dots, n-1$$

$$(ij) = (1,i)(1,j)(1,i)$$

şeklinde tanımlanan B_n monoidine ***Brauer tipi monoid*** denir. Özel olarak $n = 3$ alarak B_3 Brauer tipi monoid afin yarıgrup değildir.

İspat: $B_3 = \{s_i\} \cup \{\pi_i\}$, $n = 3$, $k = 2,3$, $i = 1,2$ olarak alınacaktır. Buradan;

$$\pi_i = \{\pi_2, \pi_3\} = \{(1,2), (1,3)\}$$

$$s_i = \{s_1, s_2\} = \{(1,2), (2,3)\}$$

$$M = B_3 = \{s_i\} \cup \{\pi_i\} = \{(1,2), (2,3)\} \cup \{(1,2), (1,3)\} = \{(1,2), (2,3), (1,3)\}$$

buradan ;

$$M = B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

elde edilir. Şimdi invaryant faktörleri hesaplayalım;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Yukarıda sütünlarda yapılan elementer işlemler sağdaki matrise satırlarda yapılan elementer işlemler soldaki matrise uygulanır. Buradan;

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan aşağıdaki denklemler bulunur.

$$x_1 \equiv 0(\mathrm{mod}1)$$

$$x_1 + x_2 \equiv 0(\mathrm{mod}2)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \equiv 0(\mathrm{mod}6)$$

Önerme 4.1 den $\mathbb{N}^3/{\sim M}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ nın

$$\langle [1]_2\, , [1]_2 \rangle = \langle [1]_2 \rangle = \mathbb{Z}_2$$

$$\langle [1]_6\, , [1]_6, [1]_6 \rangle = \langle [1]_6 \rangle = \mathbb{Z}_6$$

$\langle [1]_2 \rangle$, $\langle [1]_6 \rangle$ tarafından doğurulan alt monoidine izomorfiktir. Sonuç olarak $\mathbb{N}^3/{\sim M}$ nin $\mathbb{N}^k$ şeklindeki bir alt monoidine izomorfik olmadığından dolayı burulmasız değildir. Bu yüzden $M = B_3$ afin yarıgrubu değildir. ■

6.4 Matris Monoidleri

F vektör uzayında üzerinde bütün $d \times d$ matrislerin kümesi matrislerin çarpma işlemi altında bir yarıgruptur. Bu gruba ***genel lineer yarıgrup*** denir ve $GLS(d, F)$ ile ifade edilir. Bütün matrislerin determinantları 0 veya 1 olan yarıgruba ***özel lineer yarıgrup*** denir ve $SLS(d, F)$ ile ifade edilir.

Burada özel olarak $d = 2\, , n = 1$ alarak $SLS(2, p)$ ve $GLS(2, p)$ için afin yarıgrup olup olmadıkları incelenecektir.

6.4.1 Özel Lineer Yarıgruplar, $SLS(2, p)$

Önerme 6.4.1 $SLS(2, p)$ aşağıdaki matrisler tarafından doğurulur.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ξ , p ye göre modülü 1 olan bir ilkel köktür. $\xi = 3$, $p = 2$ için

$M = \text{doğ}\big(SLS(2,2)\big) = \{A, B, S\}$ şeklindeki $SLS(2,2)$ özel lineer yarıgrubu afin yarıgruptur.

İspat: $3^{2-1} = 1(\text{mod}2)$ için $S = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alınır.

a. $M = \text{doğ}\big(SLS(2,2)\big) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ nin ilk koordinatı sıfırdan büyük negatif olmayan bir eleman aranmaktadır. Bu ise ;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad yA_1 > 0 \, , yA_2 \geq 0$$

olacak şekilde $y \in \mathbb{N}^2$ bulmaya denktir. Algoritma FP takip edilirse, ilk önce A_1 çözüm aranmalıdır. $z = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$ alalım.

$$zA_1 = 1 > 0 \ , \qquad zA_2 = 0 \geq 0$$

olup z , A için bir çözümdür.

Sonuç olarak çıktımız, $y = zA = (1\ 0)$ elde edilir. O halde $y = zA$, $\mathbb{N}^2$ için ilk koordinatı sıfırdan büyük bir negatif olmayan elemandır. Şimdi kuvvetli pozitif elemanını bulalım.

b. Kuvvetli pozitif elemanını tespit etmek için algoritma SP nin (2) seçeneğine göre çıktı olan y nin ilk sıfırının bulunduğu ikinci koordinat olduğundan (A_2, A_1) için ikinci koordinatı sıfırdan büyük negatif olmayan bir eleman aranmalıdır. Bu ise ;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad yA_1 > 0 \, , yA_2 \geq 0$$

olacak şekilde $y \in \mathbb{N}^2$ bulmaya denktir. Algoritma FP takip edilirse,

$z = (0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ )$ alalım.

$$A_1 = 1 > 0\ \ , zA_2 = 1 \geq 0$$

olup z , (A_2, A_1) için bir çözümdür.

Sonuç olarak, çıktı $y = zA = (1\ 1)$ elde edilir. O halde $y = zA$, $\mathbb{N}^2$ için ikinci koordinatı sıfırdan büyük bir negatif olmayan elemandır. Aynı zamanda bu bizim kuvvetli pozitif elemanımızdır (Alg. SP). O halde Önerme 4.2.3 ve 4.2.6 dan $\mathbb{N}^2/{\sim}M$ indirgenmiştir.

Şimdi sadeleşebilir ve burulmasız olma durumunu kontrol etmek için invaryant faktörleri hesaplayalım ;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Yukarıda sütünlarda yapılan elementer işlemler sağdaki matrise satırlarda yapılan elementer işlemler soldaki matrise uygulanır. Buradan;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan aşağıdaki denklemler bulunur.

$$x_1 - x_2 \equiv 0(\mathrm{mod}1)$$

$$x_2 \equiv 0(\mathrm{mod}1)$$

Burada A nın tüm invaryant faktörleri $d_1 = d_2 = 1$ olup Önerme 4.1.2 den olduğundan A homojendir yani burulmasızdır. Ayrıca A nın kuvvetli pozitif elemanının varlığı algoritma yardımı ile gösterilmiştir. Sonuç 4.3.3 den A kuvvetli pozitif eleman içerdiğinden $\mathbb{N}^2/{\sim}M \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dir. Buradan $\mathbb{N}^2/{\sim}M$ nin bir grup olduğu söylenebilir. O halde Önerme 4.3.1 den A sadeleşmelidir.

Sonuç olarak ; $M = \text{doğ}\big(SLS(2,2)\big)$ sonlu doğuraylı indirgenmiş, burulmasız ve sadeleşebilir olduğundan Teorem 4.2.7 den afin yarıgruptur.■

6.4.2 Genel Lineer Yarıgruplar, $GLS(2,p)$

Önerme 6.4.2 $GLS(2,p)$ aşağıdaki matrisler tarafından doğurulur.

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},S=\begin{pmatrix}\delta&0\\0&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0\\0&\delta\end{pmatrix}$$

ξ , p ye göre modülü 1 olan bir ilkel köktür. $\xi = 3$, $p = 2$ için

$M = \text{doğ}\big(GLS(2,2)\big) = \{A, B, C, S\}$ şeklindeki $GLS(2,2)$ genel lineer yarıgrubu afin yarıgruptur.

İspat: $3^{2-1} = 1(\text{mod}2)$ için

$$S=\begin{pmatrix}3&0\\0&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix} \text{ alınır.}$$

a. $M = \text{doğ}(\,GLS(2,2)\,) = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ nin ilk koordinatı sıfırdan büyük negatif olmayan bir elemanı aranmaktadır. Bu ise;

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\1&1\\0&1\\1&0\\0&3\\3&0\\0&0\end{pmatrix} \text{ için } yA_1 > 0\,,\, yA_2 \geq 0$$

olacak şekilde $y \in \mathbb{N}^2$ bulmaya denktir. Algoritma FP takip edilirse ilk önce A_1 çözüm aranır. $z = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$ alalım.

$$zA_1 = 1 > 0\ \ , zA_2 = 0 \geq 0$$

olup z , A için bir çözümdür.

Sonuç olarak çıktı $y = zA = (1\ 0)$ elde edilir. O halde $y = zA$, $\mathbb{N}^2$ için ilk koordinatı sıfırdan büyük bir negatif olmayan elemandır. Şimdi kuvvetli pozitif elemanı aranacaktır.

b. Kuvvetli pozitif elemanını tespit etmek için algoritma SP nin (2) seçeneğine göre çıktımız olan y nin ilk sıfırının bulunduğu ikinci koordinat olduğundan (A_2, A_1) için ikinci koordinatı sıfırdan büyük negatif olmayan bir eleman aranmaktadır. Bu ise;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ için } yA_1 > 0\,, yA_2 \geq 0$$

olacak şekilde $y \in \mathbb{N}^2$ bulmaya denktir. Algoritma FP takip edilirse,

$z = (0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$ alalım.

$$A_1 = 1 > 0\ \ , zA_2 = 1 \geq 0$$

olup z , (A_2, A_1) için bir çözümdür. Sonuç olarak çıktı $y = zA = (1\ 1)$ elde edilir. O halde $y = zA$, $\mathbb{N}^2$ için ikinci koordinatı sıfırdan büyük bir negatif olmayan elemandır. Aynı zamanda bu kuvvetli pozitif elemanıdır (Alg. SP). O halde Önerme 4.2.3 ve 4.2.6 dan $\mathbb{N}^2/{\sim M}$ indirgenmiştir. Şimdi sadeleşebilir ve burulmasız olma durumunu kontrol etmek için invaryant faktörleri hesaplayalım;

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\1&1\\0&1\\1&0\\0&3\\3&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Yukarıda sütünlarda yapılan elementer işlemler sağdaki matrise satırlarda yapılan elementer işlemler soldaki matrise uygulanır. Buradan;

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\2&-3&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\-3&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\1&1\\0&1\\1&0\\0&3\\3&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan aşağıdaki denklemler bulunur.

$$x_1 - x_2 \equiv 0(\text{mod}1)$$

$$x_2 \equiv 0(\text{mod}1)$$

Burada A nın tüm invaryant faktörleri $d_1 = d_2 = 1$ olduğundan Önerme 4.1.2 den A homojendir yani burulmasızdır. Ayrıca A nın kuvvetli pozitif elemanının varlığı algoritma yardımı ile gösterilmiştir. Sonuç 4.3.3 den A kuvvetli pozitif eleman içerdiğinden $\mathbb{N}^2/\sim M \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dir. Buradan $\mathbb{N}^2/\sim M$ nin bir grup olduğunu söyleyebiliriz. O halde Önerme 4.3.1 den A sadeleşmelidir.

Sonuç olarak ; $M = \text{doğ}\big(GLS(2,2)\big)$ sonlu doğuraylı indirgenmiş, burulmasız ve sadeleşebilir olduğundan Teorem 4.2.7 den afin yarıgruptur.■

SONUÇLAR

Bu çalışmada, R-trivial Monoid , Brauer Tipi Monoid , Çift Devirsel (bicyclic) Monoid ve Matris Monoidleri (Özel Lineer Yarıgruplar $SLS(2,2)$, Genel Lineer Yarıgruplar $GLS(2,2)$) ele alınmıştır.$\mathbb{N}^n/\sim M$ formundaki bu monoidlerin Minkowski-Farkas'lemma ispatındaki fikir kullanılarak algortima FP ve algoritma SP yardımı ile afin yarıgrup (sadeleşebilir, indirgenebilir, burulmasız) olup olmadığına karar verilmiştir. Aynı zamanda invaryant faktörlerin hesabı ve elimizdeki önermeler ve sonuçlar yardımı ile bazı monoidlerin afin olup olmadığı araştırılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Rosales, J. C. (1997). On presentations of subsemigroups of $\mathbb{N}^n$, *Semigroup Forum* 55, 152-159.

[2] Fischer, K.G., Morris, W., & Shapiro, J. ,Affine semigroup rings that are complete intersections, *Proc. Amer. Math. Soc.* 125 (**11**), 3137-3145.

[3] Gubeladze, J. The isomorphism problem for commutative monoid rings, *J.Pure Appl.Algebra* 129 , 35-65.

[4] Rosales, J. C. & Garcia-Sanchez, P.A.,. On complete intersection affine semigroups, *Comm.Algebra* 23 (**14**), 5395-5412.

[5] Rosales, J. C. & Garcia-Sanchez, P.A. (1991). Finitely generated commutative monoids, Nova Science Publishers, Commack NY,.

[6] Rosales, J. C. & Garcia-Sanchez, P.A., On normal affine semigroups, *Linear Algebra Appl*. 286, 175-186.

[7] Rosales, J. C. & Garcia-Sanchez, P.A.,.On Cohen-Macaulav and Gorenstein simplicial affine semigroups, *Proc. Edinburg Math Soc***.** 2 (**41**) 517-537.

[8] Ruskuc, N. (1995). Matrix semigroups-generators and relations, *Semigroup Forum* 51 319-333.

[9] Bergi C., Bergeron, N., Bhargava, S., and Saliola F. (2011). Primitive orthogonal idempotents for *R trivial monoids.*

[10] Kudryavtseva G., Mazorchuk V. (2006). On the presentaions of Brauer-type monoids, *Central European Journal of Mathematics*, 4(**3**), 413-434.