HAZİRAN 2017 Yüksek Lisans - Matematik Bölümü MURAT AY

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER TEORİSİNDE PRÜFER DÖNÜŞÜMLERİNİN UYGULAMALARI

MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MURAT AY

HAZİRAN 2017

Adi Diferansiyel Denklemler Teorisinde Prüfer Dönüşümlerinin Uygulamaları

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Abdullah KABLAN

Murat AY

Haziran 2017

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Adi Diferansiyel Denklemler Teorisinde Prüfer Dönüşümlerinin Uygulamaları

Öğrencinin, Adı Soyadı: Murat AY

Tez Savunma Tarihi: 29.06.2017

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ahmet Necmeddin YAZICI
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof.Dr. Adil KILIÇ
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Abdullah KABLAN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:	İmzası
Doç. Dr. Abdullah KABLAN	....
Yrd. Doç. Dr. Ufuk KAYA	....
Yrd. Doç Dr. Şükran UYGUN	....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Murat AY

ABSTRACT

APPLICATIONS OF PRÜFER TRANSFORMATIONS IN THE THEORY OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

AY, MURAT

M.Sc. in Mathematics Department

Superviser: Assoc. Prof. Dr. Abdullah KABLAN

June 29

38 pages

The solutions of the self-adjoint second order differential equation

$$(p(t)x'(t))' + g(t)x(t) = 0,\ t \in (a,b),$$

have been studied by means of classical theorems of the theory of ordinary differential equations. In this thesis, we wish to examine the same theorems using Prüfer transformations techniques which are a generalization of the Poincare phase plane analysis. We begin by proving the Sturm Comparison theorem and the Disconjugacy theorem. Then, to get the necessary and sufficient conditions for boundedness of the solutions, we study the asymptotic behaviour of the solution of the equation above, as $t \to \infty$. In addition, we use Prüfer transformations to analyse the spectrum of a certain type of Sturm-Liouville eigenvalue problems with some given boundary conditions.

Key Words: Prüfer transformations, Sturm-Liouville problem, Bounds of solutions.

ÖZET

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER TEORİSİNDE PRÜFER DÖNÜŞÜMLERİNİN UYGULAMALARI

AY, MURAT

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Abdullah KABLAN

Haziran 2017

38 sayfa

Kendine-eş, ikinci mertebeden

$$(p(t)x'(t))' + g(t)x(t) = 0,\; t \in (a,b),$$

biçimindeki diferansiyel denklem, adi diferansiyel denklemlerin klasik teoremleri anlamında çalışılmıştır. Bu tezde, biz aynı teoremleri Poincare faz düzlem analizinin bir genelleştirilmesi olan Prüfer dönüşümlerini kullanarak ispatladık. Bu ispatlara Sturm karşılaştırma ve ayırma teoremleri ile başladık ve daha sonra çözümlerin sınırlılığı için gerekli ve yeterli koşulları bulmak üzere yukarıdaki denklemin çözümlerinin $t \to \infty$ iken asimptotik davranışlarını inceledik. Son olarak da, bazı sınır şartları ile verilmiş belirli bir tipteki Sturm-Liouville özdeğer probleminin spektrumunu analiz etmek için yine Prüfer dönüşümlerini kullandık.

Anahtar Kelimeler: Prüfer dönüşümleri, Sturm-Liouville problemi, Çözümlerin sınırlılığı.

Çok kıymetli aileme…

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince desteğini, deneyimini ve emeğini hiçbir zaman benden esirgemeyen ve aynı zamanda kişiliğiyle de bana örnek olan Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden saygıdeğer ve kıymetli hocam Doç. Dr. Abdullah KABLAN'a, minnettarlığımı sunarım.

Hayat arkadaşım sevgili eşim Uz. Dr. Bilgehan KOLUTEK AY'a, oğlum Mehmet Umut ve kızım Nurbanu'ya, maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda bulunarak bu günlere gelmemde en büyük pay sahibi olan aileme sonsuz şükranları borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathcal{L}$	Diferansiyel operatör
H	Schrödinger operatörü
λ	Özdeğer
ϕ	Özfonksiyon
W	Wronskian determinantı

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Aşağıdaki şekilde verilmiş olan Sturm-Liouville denklemi 20. yüzyılda en çok dikkati çeken denklemlerden birisi olmuştur,

$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y, \quad x \in [a,b]. \tag{1.1.1}$$

Sturm ve Liouville zamanından önce yaklaşık 100 yıldan bu güne, bu tür denklemler birçok bilimsel yayında Sturmian olarakta isimlendirilen

$$y(a)\cos\alpha = (py)'(a)\sin\alpha, \quad y(b)\cos\beta = (py)'(b)\sin\beta \tag{1.1.2}$$

ayrık sınır şartları ile birlikte incelendi ve uygulaması yapıldı. Çok uzun süreler özdeğerlerin varlığı ve özfonksiyonların salınım özellikleri, (1.1.1) denkleminin reel çözümlerinin λ ya göre fonksiyonunun sıfırlarının analizi yapılarak gösterildi. Bununla ilgili 1920 den bu yana bulunan kaynakların bir listesi 1926 da yayınlanan [1] de bulanabilir. Aynı yıllarda Prüfer, [2] (diferansiyel denklemlerle ilgili görünen tek makalesinde) yukarıdaki analizleri çok daha kolayca yapacak problemin yeni bir dönüşümünü verdi. $p, r > 0$ kabul edilmek üzere ki bu durum 'belirli durum' diye adlandır, Prüfer (1.1.1) denklemini ona denk olan aşağıdaki sistem şeklinde yazdı,

$$y' = z/p, \quad z' = (q - \lambda r)y \tag{1.1.3}$$

ve daha sonra özdeğerlerin varlığı ve özfonksiyonların salınım teorisi için buna karşılık gelen faz düzleminde kutupsal koordinatları kullandı. Prüfer

$$\begin{cases} y(t) = r(t)\sin\Theta(t) \\ y'(t) = \dfrac{r(t)}{p(t)}\cos\Theta(t). \end{cases} \tag{1.1.4}$$

dönüşümünü kullanarak diferansiyel denklemi

$$
\begin{cases}
r'(t) = \left(\dfrac{1}{p(t)} - q(t)\right) r \sin\Theta \cos\Theta \\
\Theta'(t) = \dfrac{1}{p(t)} \cos^2\Theta(t) + q(t) \sin^2\Theta
\end{cases}
\tag{1.1.5}
$$

biçimindeki denklem sistemini dönüştürdü. Daha sonra Prüfer dönüşümü bir çok incelemede kullanıldı ve bir metot haline geldi.

Bu tezde

$$
\mathcal{L}x = (p(t)x'(t))' + g(t)x(t) = 0, \quad t \in (a,b). \tag{1.1.6}
$$

biçiminde verilmiş olan kendine-eş, ikinci mertebeden lineer diferansiyel denkleminin Prüfer dönüşümü ile çeşitli analizlerini yaptık. Öncelikle 2. bölümde bu çalışmada kullanılacak temel tanım, teorem ve kavramları verdik. 3. bölümü ise dört kısma ayırdık. Birinci kısımda Püfer dönüşümünü tanıtarak, 2. kısımda salınım teorisi ile ilgili teoremleri Prüfer dönüşümü kullanarak ispatladık. Yine çözümlerin sınırlılığı ve çözümlerin asimptotik davranışlarını 3. kısımda inceledikten sonra 4. ve son kısımda (1.1.6) denkleminin spektral incelemesi yaptık. Son bölümde ise bu tez çalışması ile ilgili sonuçları belirttik.

BÖLÜM 2

STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

2.1. Sturm-Liouville Sınır Değer Problemi

Bu bölümde aşağıdaki şekilde verilmiş Sturm-Liouville diferansiyel denklemi ile ilgili bazı temel tanım, teorem ve kavramları vereceğiz. Bu bölümde geçen teoremlerin ispatları için [3] e bakılabilir.

Standard Sturm-Liouville diferansiyel denklemi

$$(p(x)y')' + (\lambda r(x) + q(x))y = 0 \qquad (2.1.1)$$

biçimindedir. Bu denklemde p ve q fonksiyonları verilen I aralığında sürekli ve $p(x) > 0$, yine r fonksiyonu I aralığında reel değerli sürekli bir fonksiyon ve $r(x) \geq 0$ ancak I aralığında sıfıra denk olmayan bir fonksiyondur.

(2.1.1) denklemi L

$$Ly = (p(x)y')' + q(x)y \qquad (2.1.2)$$

biçiminde tanımlanmış bir dönüşüm olmak üzere

$$Ly = -\lambda r(x)y$$

formunda da yazılabilir. Şimdi yukarıda verdiğimiz Sturm-Liouville diferansiyel denklemi ile beraber verilecek olan aşağıdaki sınır değer problemin ele alalım:

$$Ly = -\lambda r(x)y \qquad (2.1.3)$$

$$\alpha y(a) - \beta y'(a) = 0 \qquad (2.1.4)$$

$$\gamma y(b) + \delta y'(b) = 0 \qquad (2.1.5)$$

Burada α, β, γ ve δ değerleri $\alpha^2+\beta^2>0$ ile $\gamma^2+\delta^2>0$ şartlarını sağlayan sabitlerdir. Bu sınır değer problemine *Sturm-Liouville Problemi (SLP)* denir.

Tanım 2.1.1. (2.1.3)-(2.1.5) SLP'i bir $\lambda=\lambda_0$ için y_0 aşikar (yani sıfıra denk) olmayan çözümüne sahip ise λ_0 değerine Sturm-Liouville Probleminin *özdeğeri* ve y_0 çözümüne de bu özdeğere karşılık gelen *özfonksiyon* denir. Yine (λ_0, y_0) çiftine de (2.1.3)-(2.1.5) probleminin *özçifti* denir.

(λ_0, y_0) (2.1.3)-(2.1.5) probleminin özçifti ve c sıfır olmayan bir sabit olsun. Bu durumda (λ_0, cy_0) da (2.1.3)-(2.1.5) probleminin bir özçiftidir. Yine λ_0, (2.1.3)-(2.1.5) probleminin özdeğer ve bu özdeğere karşılık gelen sadece bir lineer bağımsız özfonksiyon var ise λ_0 a *basit özdeğerdir* denir.

Tanım 2.1.2. Kabul edelim ki, $r:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli ve $[a,b]$ aralığında sıfıra denk olmamak üzere $r(x)\geq 0$ olan bir fonksiyon olsun. $[a,b]$ aralığında y ve z sürekli fonksiyonlarının r ağırlık fonksiyonuna göre *iç çarpımı*

$$\left\langle y,z\right\rangle_r=\int_a^b r(x)y(x)z(x)dx$$

biçiminde tanımlanır. Eğer

$$\left\langle y,z\right\rangle_r=\int_a^b r(x)y(x)z(x)dx=0$$

ise, bu durumda y ve z fonksiyonlarına r ağırlık fonksiyonuna göre *ortogonaldir* denir.

Teorem 2.1.3. (2.1.3)-(2.1.5) SLP nin tüm özdeğerleri reel ve basittir. Yani her bir özdeğere karşılık gelen bir reel değerli özfonksiyon vardır. (2.1.3)-(2.1.5) SLP nin ayrık özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar $[a,b]$ aralığında r ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir.

İspat: Kabul edelim ki, λ_1 ve λ_2 (2.1.3)-(2.1.5) SLP nin iki farklı özdeğeri ve y_1 ve y_2 de sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olsunlar. İki defa uygulanmış kısmi integrasyandan aşağıdaki eşitliğin doğruluğu kolayca görülebilir,

$$\begin{aligned}\int_a^b Ly_1(x)\,y_2(x)r(x)dx &= p(x)W_b\{y_1,y_2\} - p(x)W_a\{y_1,y_2\} \\ &\quad + \int_a^b y_1(x)L\,y_2(x)r(x)dx.\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Burada

$$W\{y_1,y_2\} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

biçiminde tanımlanmış y_1 ve y_2 fonksiyonlarının Wronkskianıdır. Şimdi (2.1.3) deki eşitlik kullanılırsa (2.1.6) eşitliği yeniden

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b y_1(x)\,y_2(x)r(x)dx = p(x)W_b\{y_1,y_2\} - p(x)W_a\{y_1,y_2\}$$

biçiminde yazılır. y_1 ve y_2, (2.1.4) ve (2.1.5) sınır koşullarını sağladığından

$$W_a\{y_1,y_2\} = W_b\{y_1,y_2\} = 0$$

dır. Böylelikle

$$\left(\lambda_1 - \lambda_2\right)\left\langle y_1, y_2\right\rangle_r = 0 \tag{2.1.7}$$

eşitliğine ulaşılır. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan y_1 ve y_2, $[a,b]$ aralığında r ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir. Şimdi kabul edelim ki; λ_0 (2.1.3)-(2.1.5) probleminin özdeğeri ve y_0 da bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun. Bu durumda $\overline{\lambda}_0$ da (2.1.3)-(2.1.5) probleminin özdeğeri ve $\overline{y}_0$ de bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyondur. (2.1.7) eşitliğinden

$$\left(\lambda_0 - \bar{\lambda}_0\right)\left\langle y_0, \bar{y}_0 \right\rangle_r = 0$$

yazılabilir. Dolayısıyla $\lambda_0 = \bar{\lambda}_0$ dır. Yani, λ_0 reeldir.

Şimdi kabul edelim ki, λ_0 bir özdeğer ve y_1 ve y_2 de bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlar olsun. y_1, y_2 özfonksiyonları (2.1.4) sınır koşulunu sağladığından

$$W\left[y_1(x), y_2(x)\right](a) = 0$$

dır. y_1, y_2 fonksiyonları aynı zamanda aynı diferansiyel denklemi sağladığından $[a,b]$ aralığında lineer bağımlıdır. Dolayısıyla (2.1.3)-(2.1.5) probleminin tüm özdeğerleri basittir.

Son olarak, u ve v, $\left[a,b\right]$ aralığında reel değerli fonksiyonlar olmak üzere λ_0 (2.1.3)-(2.1.5) probleminin bir özdeğeri ve $y_0 = u + iv$ de bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun. Önceden biliyoruz ki; λ_0 reeldir. Dolayısıyla $y_0 = u + iv$ fonksiyonunu sıfıra denk olmadığından ya u ya da v, λ_0 özdeğerine karşılık gelen reel değerli özfonksiyondur.

Teorem 2.1.5. (2.1.3)-(2.1.5) probleminin özdeğerleri için

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

sıralaması vardır ve

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

dir. Ayrıca, $n = 1,2,\dots$ için y_n, λ_n özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon olmak üzere y_{n+1} özfonksiyonu (a,b) aralığında n tane sıfıra sahiptir.

2.2. Çözümlerin Kökleri Hakkına Bazı Temel Teoremler

Bu bölümde $Lx = 0$ ın aşikar olmayan çözümlerinin sıfırları hakkında bazı temel tanım ve teoremleri vereceğiz. Burada geçen teoremlerin ispatları, tezinde esas konusu olan Prüfer dönüşümleri kullanılarak bir sonraki bölümde detaylı bir şekilde verileceği için bu bölümde ispatlara girilmeyecektir. Bu bölümde geçen teoremlerin ispatları [3] ve [4] de detaylı bir şekilde verilmiştir.

Tanım 2.2.1. Eğer $Lx = 0$ ın bütün çözümleri iki veya daha fazla sıfıra sahip değil ise $Lx = 0$ denklemine discojugate denir.

Tanım 2.2.2. Eğer x, $Lx = 0$ ın aşikar olmayan bir çözümü ve bu çözüm sonsuz sayıda sıfıra sahip ise x çözümüne salınımlıdır denir. Eğer $Lx = 0$ aşikar olmayan salınımlı çözüme sahip ise o zaman $Lx = 0$ diferansiyel denklemine salınımlıdır denir. Yine $Lx = 0$ salınımlı çözüme sahip değilse o zaman da $Lx = 0$ diferansiyel denklemine salınımsızdır denir.

Teorem 2.2.3. (Sturm Ayırma Teoremi) Eğer x ve y bir I aralığı üzerinde $Lx = 0$ kendine-eş diferansiyel denkleminin iki lineer bağımsız çözümü ise, o zaman onların sıfırları I üzerinde ayrıktır. Yani x ve y ortak sıfıra sahip değildir ve bunlardan birinin ardışık iki sıfır arasında diğerinin tam olarak bir sıfırı vardır.

Teorem 2.2.4. (Sturm Karşılaştırma Teoremi) Kabul edelim ki, φ

$$(px')' + g_1 x = 0$$

denkleminin (a,b) de reel bir çözümü ve ψ da

$$(px')' + g_2 x = 0$$

denkleminin (a,b) de reel bir çözümü olsun. Ayrıca (a,b) üzerinde $g_2(t) > g_1(t)$ olsun. Bu durumda eğer t_1 ve t_2 (a,b) de φ nin iki ardışık sıfırı ise o zaman ψ (t_1, t_2) de bazı noktalarda sıfırdır.

BÖLÜM 3

PRÜFER DÖNÜŞÜMLERİNİN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULAMALARI

3.1. Prüfer Dönüşümüne Giriş

Aşağıdaki kendine-eş, ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemi ele alalım.

$$\mathcal{L}x = (p(t)x'(t))' + g(t)x(t) = 0, \quad t \in (a,b). \tag{3.1.1}$$

Burada $p(t) > 0$ ve mutlak sürekli, a ve b reel eksenin iki elemanı olmak üzere $g(t) \in L^1(a,b)$ dir.

Bu bölümde, bu denklem ile ilgili ana teoremleri vereceğiz. Bunun için 'Prüfer dönüşümleri' olarak adlandırılan dönüşümü kullanacağız. Genel olarak Prüfer dönüşümleri (3.1.1) in çözümlerinin kutupsal koordinatlardaki gösterimleridir. En çok bilinen Prüfer dönüşümü

$$\begin{cases} x(t) = r(t)\sin\Theta(t) \\ x'(t) = \dfrac{r(t)}{p(t)}\cos\Theta(t). \end{cases} \tag{3.1.2}$$

formundadır. (3.1.2) dönüşümü, (3.1.1) denkleminde yerleştirilirse aşağıdaki Prüfer sistem elde edilir.

$$\begin{cases} r'(t) = \left(\dfrac{1}{p(t)} - g(t)\right) r\sin\Theta\cos\Theta \\ \Theta'(t) = \dfrac{1}{p(t)}\cos^2\Theta(t) + g(t)\sin^2\Theta. \end{cases} \tag{3.1.3}$$

Bu kısımda Prüfer dönüşümünü tanıttıktan sonra ikinci kısımda (3.1.3) dönüştürülmüş sistemi kullanarak salınım teorisindeki Sturm karşılaştırma teoremi, salınım teoremi ve disconjugacy teoremleri gibi bazı ana teoremleri ispatlayacağız. Üçüncü bölümde ise Prüfer dönüşümünü ve modifiye edilmiş Prüfer dönüşümünü kullanarak, ($g(t) \in L^1(m)$ olma şartı olmaksızın) $t \to \infty$ iken (3.1.1) denkleminin asimptotik davranışlarını inceleyeceğiz. Ayrıca (3.1.1) in sınırlı çözümlerini elde etmek için gerekli ve yeterli şatları ortaya koyacağız. Son olarak da,

$$\begin{cases} (p(t)x'(t))' + (\lambda r(t) - q(t))x(t) = 0, \quad t \in [a,b], \quad \lambda \neq 0 \\ Ax(a) - Bx'(a) = 0 \\ \Gamma x(b) - \Delta x'(b) = 0. \end{cases} \tag{3.1.4}$$

biçimindeki sınır şartlarına sahip düzgün Sturm-Liouville özdeğer problemini ele alacağız. (3.1.4) ün $\lambda_n \to \infty$ iken monoton artan dizi şeklindeki sonsuz sayıda özdeğere sahip olduğunu ve bu λ_n özdeğerlerine karşılık gelen Φ_n özfonksiyonlarının da (a,b) aralığında tam olarak n tane sıfıra sahip olduğunu göstermek için Prüfer dönüşümlerini kullanacağız. Ayrıca dönüştürülmüş sistemi kullanarak (3.1.4) ün spektrumu için bir alt ve üst sınır bulacağız. Bu tezde ispatlanmamış teoremlerin ispatları verilen kaynaklarda bulunabilir.

3.2. Salınım Teorisi

Bu bölümde, Prüfer dönüşümünü kullanarak, düzgün Sturm-Liouville problemleri için Sturm karşılaştırma teoremi, salınım teoremi, ve disconjugasy teoremlerini ispatlamaya çalışacağız.

Aşağıdaki denklemi ele alalım

$$\mathcal{L}x = (p(t)x')' + g(t)x = 0, \quad t \in (a,b). \tag{3.2.1}$$

(burada belirtelim ki $x'' + f(t)x' + h(t)x = 0$ denklemi $\exp\left(\int_0^t f(s)ds\right)$ ile çarpılarak (3.2.1) formunda yazılabilir.) Kabul edelim ki $p(t) > 0$ ve mutlak sürekli, $g \in L^1(a,b)$ olsun.

Şimdi, (3.2.1) de $y = p(t)x'$ dönüşümü yapalım. Bu durumda

$$x' = \frac{y}{p(t)}, \quad y' = -g(t)x \tag{3.2.2}$$

olur. Eğer (3.2.2) de $x = r(t)\sin\theta(t)$, $y = r(t)\cos\theta(t)$ polar dönüşümlerini kullanırsak ve denklemi r', θ' ne göre çözersek, o zaman aşağıdaki Prüfer sistemi elde ederiz.

$$r'(t) = \left(\frac{1}{p(t)} - g(t)\right) r\sin\theta\cos\theta \tag{3.2.3}$$

$$\theta'(t) = \frac{1}{p(t)}\cos^2\theta + g(t)\sin^2\theta. \tag{3.2.4}$$

Budan sonra (3.2.1) in çözümleri ile ilgili aşağıdaki teoremleri ispatlarken yukarıdaki dönüştürülmüş sistemi kullanacağız. Aşağıdaki iki teoremin ispatı [4] de bulunabilir.

Teorem 3.2.1. (Salınım Teoremi) Kabul edelim ki p_i', g_i, $[a,b]$ de parçalı sürekli ve $\mathcal{L}_i x = (p_i x')' + g_i x = 0$, $i = 1,2$ olsun. Ayrıca $0 < p_2(t) \le p_1(t)$, $g_2(t) \ge g_1(t)$ olsun. Eğer ϕ_i, $\mathcal{L}_i x$ in çözümleri olmak üzere $\mathcal{L}_1\phi_1 = 0$, $\mathcal{L}_2\phi_2 = 0$ ve ω_i (3.2.4) ün çözümleri olmak üzere $\omega_2(a) \ge \omega_1(a)$ ise o zaman

(1) $\forall t \in (a,b)$ için $\omega_2(t) \ge \omega_1(t)$,

(2) Eğer $t \in (a,b)$ için $g_2(t) > g_1(t)$ ise, o zaman $\forall t \in (a,b]$ için $\omega_2(t) > \omega_1(t)$ dir.

İspat: (3.2.4) den $\omega_i' = \frac{1}{p_i}\cos^2\omega_i + g_i\sin^2\omega_i$, $i = 1,2$ dir. Ayrıca

$$(\omega_2 - \omega_1)' = \left(g_1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(\sin^2\omega_2 - \sin^2\omega_1\right) + h \tag{3.2.5}$$

elde ederiz ki burada

$$h = \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right)\cos^2\omega_2 + (g_2 - g_1)\sin^2\omega_2$$

dir ve $h \ge 0$ dır.

Eğer $\omega_2 - \omega_1 = u$ ise o zaman (3.2.5) den $u' = fu + h$ dır ve burada

$$f = \left(g_1 - \frac{1}{p_1}\right)(\sin\omega_1 + \sin\omega_2)\frac{\sin\omega_2 - \sin\omega_1}{\omega_2 - \omega_1}.$$

dır. Dolayısıyla f parçalı sürekli ve düzgün sınırlı bir fonksiyondur. $h \geq 0$ olduğundan $u' - fu \geq 0$ dır. Şimdi $F(t) = \int_t^a f(s)ds$ diyelim. O zaman $e^F u' + F' e^F u \geq 0$ olur ve bunun integrali alınırsa

$$e^{F(t)}u(t) \geq e^{F(a)}u(a) \geq 0 \qquad (3.2.6)$$

elde edilir. Böylelikle (1) ifadesi ispatlanmış olur.

Şimdi kabul edelim ki (2) ifadesi doğru olmasın. Gösterelim ki; öyle bir $c > a$ sayısı vardır ki,

$$\omega_2(t) = \omega_1(t), \quad (a \leq t \leq c) \qquad (3.2.7)$$

eşitliği sağlansın. Öncelikle sağlanmadığını kabul edelim. O zaman (1) den öyle bir $\{t_j\}_{j=1}^n$ dizisi vardır ki, a bunun limitidir ve $j = 1,\ldots,n$ için $\omega_2(t_j) > \omega_1(t_j)$ dir. Şimdi (3.2.6) alınır ve t_j, a ile yer değiştirilirse $j = 1,\ldots,n$ için $t > t_j$ olmak üzere $\omega_2(t) > \omega_1(t)$ elde edilir. t_j, a ye istenildiği kadar yaklaştırılabileceğinden (2) den (3.2.7) yi elde ederiz ki bu da bir çelişki oluşturur.

(3.2.7) den, eğer sadece $\omega_2 = \omega_1 = 0 \mod(\pi)$ ve (a,c) de $p_1 = p_2$ ise o zaman (3.2.5) doğrudur. Halbuki, ω_i, $i = 1\ldots,n$ ler (3.2.4) ün çözümleri olduğundan (a,c) de $\omega_2 = \omega_1 = 0 \mod(\pi)$ durumu imkansızdır. Dolayısıyla bu (2) yi ispatlar ve teoremin ispatı bitmiş olur.

Teorem 3.2.2. (Sturm Karşılaştırma Teoremi) Kabul edelim ki $x \in (a,b)$ olmak üzere ϕ, $(px')' + g_1 x = 0$ denkleminin ve ψ da $(px')' + g_2 x = 0$ denkleminin reel çözümleri olsunlar. Ayrıca (a,b) aralığında $g_1(t) > g_2(t)$ olsun. Bu durumda eğer t_1, t_2 (a,b) aralığında ϕ nin iki ardıl sıfırı ise, o zaman ψ, (a,b) aralığının bazı noktalarında sıfırdır.

İspat: İspata geçmeden önce aşağıdaki iddiayı verelim.

İddia 3.2.7: $\phi(t)$, $\omega(t)$ (3.2.4) ün çözümleri olmak üzere sadece $\omega(t) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ noktalarında sıfır olabilir.

Şimdi ispata geçelim. (3.2.1) in ϕ çözümü için, $\rho^2 = (p\phi')^2 + \phi^2$, $\omega = \arctan(\phi \,/\, p\phi')$ olmak üzere (3.2.3) ve (3.2.4) ün sırasıyla $r = \rho(t)$ ve $\theta = \omega(t)$ çözümleri vardır. ϕ ve ϕ' aynı anda sıfır olmayacağından $\rho^2(t) > 0$ dır. Genelliği kaybetmeden $\rho(t) > 0$ kabul edebiliriz. Dolayısıyla bunun sonucu olarak, $\phi(t) = \rho(t)\sin\omega(t)$, sadece $\omega(t) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ iken sıfır olabilir.

Şimdi $\cos^2\theta$ ve $\sin^2\theta$ düzgün sınırlı olduğundan, (3.2.4) $p > 0$ olduğu ve p ile g nin de parçalı sürekli olduğu bir aralıkta çözüme sahiptir, (Picard Teoremi). (3.2.4) ün sağ tarafı θ ya göre diferansiyellenebilir olduğundan, çözüm alışılmış anlamda tektir. Böylece ispat $\omega(t)$ nin monotonluğu ve Teorem 3.2.1 takip edilerek yapılır.

Aşağıdaki teorem [5] den alınmıştır.

Teorem 3.2.3. (Disconjugacy Teoremi) Aşağıdaki problemi ele alalım,

$$\mathcal{L}x = (p(t)x')' + g(t)x = 0,$$

burada $t \in [a,\infty)$, $x(a) = 0$ ve genelliği kaybetmeden $x'(a) > 0$ dır. Eğer $p(t)$ ve $g(t)$, $[a,\infty)$ aralığında sürekli ve $t \in [a,\infty)$ için $p(t) > 0$ iken $\int_a^\infty \left(\frac{1}{p(t)} + \left|g(t)\right|\right) dt \le \pi$ ise, o zaman $\mathcal{L}x = 0$ ın $[a,\infty)$ aralığında iki sıfıra sahip aşikar olmayan çözümü yoktur.

İspat: $\theta'(t) = \frac{1}{p(t)}\cos^2\theta + g(t)\sin^2\theta,\quad \theta(a) = 0$ olduğu hatırlanır ve bu ifade integrallenirse

$$\theta(s) = \int_a^s \left(\frac{1}{p(t)}\cos^2\theta + g(t)\sin^2\theta\right) dt \le \int_a^s \left(\frac{1}{p(t)} + \left|g(t)\right|\right) dt$$

elde edilir. Buradan da

$$\theta(s) < \int_a^\infty \left(\frac{1}{p(t)} + \left|g(t)\right| \right) dt \le \pi \tag{3.2.8}$$

bulunur. $\theta'(a) > 0$ olduğundan $t \in [a,\infty)$ için $\theta(t) < \int_a^\infty \left(\frac{1}{p(t)} + \left|g(t)\right| \right) dt \le \pi$ dir. $\mathcal{L}x = 0$ ın çözümlerinin sıfırları $\theta(t) = k\pi,\, k \in \mathbb{Z}$ olduğu zaman ortaya çıkacağından yukarıdaki eşitsizlik teoremi ispatlar.

Teorem 3.2.4. $\forall t \in [a,\infty)$ için $g(t) < 0$ olmak üzere

$$\mathcal{L}x = (p(t)x')' + g(t)x = 0,\ (x'(a) > 0)$$

olsun. O zaman $\mathcal{L}x = 0$ probleminin aşikar olmayan çözümü $[a,\infty)$ aralığında en fazla bir sıfıra sahiptir.

İspat: Öncelikle biliyoruz ki $\theta(a) = 0$ ve $\theta'(a) > 0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $\theta(t)$ nin bu monotonluk özelliğinden bir $b \in (a,\infty)$ vardır ki $\theta(b) = \frac{\pi}{2}$ dir. Yine $\theta'(b) = \frac{1}{p(t)}\cos^2\theta(b) + g(t)\sin^2\theta(b) = g(b)$ olduğundan (a,∞) aralığında $0 < \theta(t) < \frac{\pi}{2}$ dir. Buradan $\mathcal{L}x = 0$ ın aşikar olmayan çözümünün (a,∞) da sıfırının olmadığı ortaya çıkar, çünkü eğer olsaydı bu $\theta(t) = k\pi$ olacaktı. Böylece ispat biter.

İspatı [6] da verilen aşağıdaki teoremde, $p_1(t)$ ve $p_2(t)$ kapalı bir aralıkta reel değerli, parçalı sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$x''(t) + p_1(t)x'(t) + p_2(t)x(t) = 0 \tag{3.2.9}$$

denkleminin tespit edilmiş bir aşikar olmayan çözümünün iki ardışık sıfırı arasındaki uzunluğu ile ilgili önemli bir sonucu elde etmek için modifiye edilmiş Prüfer dönüşümünü kullanacağız.

Teorem 3.2.5. a ve b (3.2.9) denkleminin tespit edilmiş bir aşikar olmayan çözümünün iki ardışık sıfırı olsun ve γ, $[a,b]$ aralığında tanımlı, diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Diğer taraftan

$$M_1 \equiv \sup_{a\le t\le b}\left(2\gamma(t) - p_1(t)\right),$$

$$M_2 \equiv \sup_{a\le t\le b}\left(\left|\gamma'(t) - p_2(t) - \gamma^2(t) + p_1(t)\gamma(t)\right|\right),$$

olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik vardır

$$b - a \ge 2\int_0^\infty \frac{ds}{1 + M_1 s + M_2 s^2}.$$

İspat: x teoremde belirtilen çözüm olsun. Genelliği kaybetmeden $\forall t \in (a,b)$ için $x(t) > 0$ ve $x'(a) > 0$, $x'(b) < 0$ olsun. Reel değerli R ve θ fonksiyonlarını aşağıdaki bağıntılarla tanımlayalım.

$$R\sin\theta = x \tag{3.2.10}$$

$$R\cos\theta = x' + \gamma x \tag{3.2.11}$$

burada $R(t) > 0$, $\theta(t) \in [0,\pi]$, $t \in [a,b]$ dir. (3.2.10) ve (3.2.11) diferansiyellenir ve (3.2.9) da yerine yazılırsa

$$R'\cos\theta - R\theta'\sin\theta = R(\gamma - p_1)\cos\theta + R(\gamma' - p_2 - \gamma^2 + p_1\gamma)\sin\theta \tag{3.2.12}$$

$$R'\sin\theta + R\theta'\cos\theta = R\cos\theta - R\gamma\sin\theta \tag{3.2.13}$$

elde edilir. Bu iki denklemden R' yok edilirse,

$$\theta' = \cos^2\theta - (2\gamma - p_1)\sin\theta\cos\theta + (\gamma' - p_2 - \gamma^2 + p_1\gamma)\sin^2\theta \tag{3.2.14}$$

bulunur. (3.2.10) dan x in sıfırlarının $\theta(t) = k\pi$ iken ortaya çıktığı açıktır ve yine (3.2.14) den $\theta'(k\pi) = 1$ olduğundan θ, $k\pi$ de artandır. Bu durumda $\theta(a) = 0$, $\theta(b) = \pi$ olarak kabul edebiliriz. Böylece aradeğer teoreminden $\theta(t) = \pi / 2$ olacak şekilde bir $t \in (a,b)$ elde ederiz. Şimdi α ile böyle olan t lerin en sonuncusunu gösterelim. Bu durumda $t \in (a,\alpha)$ için $\sin\theta$ ve $\cos\theta$ nın her ikiside pozitiftir. (3.2.14) den

$$\left|\theta'\right| < \cos^2\theta + M_1 \sin\theta\cos\theta + M_2\sin^2\theta$$

ve böylece

$$\alpha - a \geq \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos^2\theta + M_1\sin\theta\cos\theta + M_2\sin^2\theta} = \int_0^{\infty} \frac{ds}{1 + M_1 s + M_2 s^2} \quad (3.2.15)$$

dir. Benzer şekilde, eğer β, $\theta(t) = k\pi$ olan $t \in (a,b)$ lerin en büyüğü ise, o zaman

$$b - \beta \geq \int_0^{\infty} \frac{ds}{1 + M_1 s + M_2 s^2} \quad (3.2.16)$$

dir. (3.2.15) ve (3.2.16) birleştirilirse

$$b - \beta \geq 2\int_0^{\infty} \frac{ds}{1 + M_1 s + M_2 s^2} \quad (3.2.17)$$

elde edilir ve ispat biter.

Bu teoremde γ ya uygun değerler verilmesiyle ve $p_1(t)$ ve $p_2(t)$ üzerine uygun şartlar konulmasıyla, aşağıdaki bazı önemli sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.2.6. Eğer $p_1 \equiv 0$ ise, o zaman aşağıdaki eşitsizlik elde edilir,

$$\sup_{a\leq t\leq b}\left|\int_a^t p_2(s)ds\right| \geq \frac{2}{b-a}.$$

İspat: $\gamma \equiv \int_a^t p_2(s)ds$ diyelim. Bu durumda

$$M_1 = 2\sup_{a\leq t\leq b}\left|\int_a^t p_2(s)ds\right|,$$

$$M_2 = 2\sup_{a\le t\le b}\left|\int_a^t p_2(s)ds\right|^2$$

olur. Şimdi $M_2 = \sup_{a\le t\le b}\left|\int_a^t p_2(s)ds\right|^2$ dersek Teorem 3.2.5 den

$$b-a \ge 2\int_0^\infty \frac{dt}{1+2Mt+M^2t^2} = \frac{2}{M}$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.7. Eğer $p_1(t)$ diferansiyellenebilir ise, o zaman aşağıdaki eşitsizlik vardır,

$$\sup_{a\le t\le b}\left|\frac{p_1'}{2} - p_2 + \frac{p_1^2}{4}\right| \ge \frac{\pi^2}{(b-a)^2}.$$

İspat: $\gamma \equiv \frac{p_1}{2}$ seçilirse, $M_1 = 0$ ve

$$M_2 = \sup_{a\le t\le b}\left|\frac{p_1'}{2} - p_2 + \frac{p_1^2}{4}\right|$$

olur. Teorem 3.2.5 den aşağıdaki eşitsizlik elde edilir,

$$b-a \ge 2\int_0^\infty \frac{dt}{1+M_2t^2} = \pi\frac{1}{\sqrt{M_2}}.$$

Benzer şekilde ispat edebiliriz ki, eğer p_1 diferansiyellenebilir ise, o zaman

$$\sup_{a\le t\le b}\left|\frac{p_1(a)}{2} - p_1(t) + \int_0^t\left(p_2(s) - \frac{p_1^2(s)}{4}\right)ds\right| \ge \frac{2}{b-a}$$

bulunur. ($\gamma \equiv \frac{p_1(t)}{2} + \int_a^t \left(p_2 - \frac{p_1'}{2} - \frac{p_1^2}{4} \right) ds$ seçilir ve Teorem 3.2.5 uygulanırsa bu eşitsizlik görülür).

3.3. Çözümlerin Sınırları ve Asimptotik Davranış

Bu bölümde $t \to \infty$ iken

$$\mathcal{L}x = (p(t)x')' + g(t)x = 0$$

denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışını incelemek için Prüfer dönüşümünü kullanacağız ve ispatlayacağız ki, eğer

$$\int_a^\infty \left| \frac{1}{p(t)} - g(t) \right| dt < \infty$$

ise, o zaman $\mathcal{L}x = 0$ ın her çözümü sınırlıdır. Sonraki teoremleri ispatlamak için aşağıdaki Gronwall lemmasını kullanacağız.

Lemma 3.3.1. (Gronwall lemması) Eğer u ve v $\{t : t \geq t_0\}$ tanım kümesine sahip, L_1 de, reel değerli, negatif olmayan fonksiyonlar ise ve eğer her $t \geq t_0$ için

$$u(t) \leq M + \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds$$

eşitsizliğini sağlayan bir M sabiti varsa, o zaman aşağıdaki eşitsizlik vardır,

$$u(t) \leq M \exp\left(\int_{t_0}^t u(s)v(s)ds \right).$$

Teorem 3.3.2. [5], $\mathcal{L}x = 0$ ın her $x(t)$ çözümü aşağıdaki eşitsizliği sağlar,

$$\left|x(t)\right| \leq K \exp\left[\frac{1}{2}\int_a^t \left|\frac{1}{p(s)} - g(s)\right| ds\right],$$

burada $t \in (a,\infty)$ ve $K = \sqrt{x^2(a) + (p(a)x'(a))^2}$ dir. Ayrıca, eğer

$$\int_a^\infty \left|\frac{1}{p(t)} - g(t)\right| dt < \infty$$

ise, o zaman $\mathcal{L}x = 0$ ın her çözümü sınırlıdır.

İspat: Burada

$$\left|x(t)\right| \leq \left|r(t)\right| \tag{3.3.1}$$

sonucuna ulaşmak için $x(t) = r(t)\sin\Theta(t)$ olmak üzere, yine

$$r'(t) = \left(\frac{1}{p(t)} - g(t)\right) r \sin\Theta\cos\Theta \tag{3.3.2}$$

$$\Theta'(t) = \frac{1}{p(t)}\cos^2\Theta(t) + g(t)\sin^2\Theta \tag{3.3.3}$$

dönüştürülmüş sistemi kullanacağız. Öncelikle (3.3.2) den

$$r(s) - r(a) = \int_a^s \left|\frac{1}{p(t)} - g(t)\right| r(t)\frac{1}{2}\sin 2\Theta(t)dt, \quad s \in (a,\infty)$$

elde ederiz. Buradan da

$$r(t) \leq r(a) + \frac{1}{2}\int_a^s \left|\frac{1}{p(t)} - g(t)\right| \left|r(t)\right| dt$$

olur. Şimdi yukarıdaki eşitsizliğe Gronwall Lemması uygulanırsa

$$r(t) \leq r(a)\exp\left(\frac{1}{2}\int_a^s \left|\frac{1}{p(t)} - g(t)\right| dt\right)$$

ve (3.3.1) den

$$\left|x(t)\right| \leq r(a)\exp\left(\frac{1}{2}\int_a^t \left|\frac{1}{p(s)} - g(s)\right| ds\right)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Diğer taraftan açıktır ki; eğer $\int_a^\infty \left|\frac{1}{p(t)} - g(t)\right| dt < \infty$ ise, o zaman

$$\exp\left[\frac{1}{2}\int_a^\infty \left|\frac{1}{p(t)} - g(t)\right| dt\right] \in \mathbb{R}$$

dir. Dolayısıyla eğer $M = r(a)\exp\left(\frac{1}{2}\int_a^\infty \left|\frac{1}{p(t)} - g(t)\right| dt\right)$ ise, o zaman $M \in \mathbb{R}$ ve $\left|x(t)\right| \leq M$ olur ki bu da $x(t)$ nin sınırlı olduğunu gösterir.

Şimdi aşağıdaki denklemin çözümlerinin asimptotik davranışlarını inceleyeceğiz,

$$x''(t) + (1 + g(t))x(t) = 0, \tag{3.3.4}$$

burada eğer x_0, x in yeterince küçük değerleri için tespit edilmiş reel bir sayı ise, o zaman $x \geq x_0$ için $g(t)$ reel sürekli bir fonksiyondur. Şimdi açıktır ki; (3.3.4) $p(t) \equiv 1$, $g(t) \to g(t) + 1$ seçimleri ile $\mathcal{L}x = (x'p)' + gx = 0$ standart formdadır. (3.3.4) de $\Theta(t)$ yi $\Theta(t) + t$ ile değiştirerek modifiye Prüfer dönüşümü kullanılırsa aşağıdaki dönüştürülmüş sistem elde edilir.

$$r'(t) = -g(t)r(t)\sin(t + \Theta(t))\cos(t + \Theta(t))$$

$$(t + \Theta(t))' = 1 + g(t)\sin^2(t + \Theta(t))$$

Buradan da

$$\frac{r'(t)}{r(t)} = -\frac{1}{2}g(t)\sin 2(t + \Theta(t)), \tag{3.3.5}$$

$$\Theta'(t) = \frac{1}{2}g(t)(1 - \cos 2(t + \Theta(t))) \tag{3.3.6}$$

denklemlerine sahip oluruz.

Şimdi yukarıdaki dönüştürülmüş sistemi kullanarak aşağıdaki teoremi ispat edeceğiz. Bu teoreme göre (3.3.4) ün x_1, x_2 çözümlerinin temel sistemi $t \to \infty$ iken aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos t + o(1) \quad & x_2(t) &= \sin t + o(1) \\ x_1' &= -\sin t + o(1) \quad & x_2'(t) &= \cos t + o(1) \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Aşağıdaki teorem [7] den alınmıştır.

Teorem 3.3.3. (Asimptotik Davranış) $g(t)$, $t \geq t_0$ olmak üzere reel ve sürekli bir fonksiyon olsun. Burada t_0 önceden tespit edilmiş bir sayı ve kabul edelim ki aşağıdaki integraller vardır:

$$\begin{aligned} &\int_t^\infty g(s)ds, \quad g_1(s) = \int_t^\infty g(s)\cos(2s)ds \\ &g_2(s) = \int_t^\infty g(s)ds\sin(2s)ds, \quad \int_{t_0}^\infty \left|g(t)g_j(t)\right|dt, \quad j = 1,2. \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Bu durumda $x'' + (1 + g(t))x = 0$ denklemi (3.3.7) yi sağlayan çözümlerinin bir temel sistemine sahiptir.

Burada belirtelim ki; eğer $g \in L[t_0, \infty]$ ise yukarıdaki kabuller kesinlikle sağlanır.

İspat: *1. Adım:* Bu adımda (3.3.4) ün herhangi bir aşikâr olmayan çözümüne karşılık gelen ve sırasıyla (3.3.5) ve (3.3.6) ile verilmiş olan $\Theta(t)$ ve $r(t)$ in $t \to \infty$ iken limitlerinin sonlu olduğunu göstereceğiz.

$$g(t)\cos 2t \cos 2\Theta = -(g_1 \cos 2\Theta)' - 2g_1\Theta' \sin 2\Theta$$

ve

$$g(t)\sin 2t \sin 2\Theta = -(g_2 \sin 2\Theta)' - 2g_2\Theta' \cos 2\Theta$$

eşitlikleri kullanılarak (3.3.6) aşağıdaki biçimde yazılabilir,

$$\Theta'(t) = \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}(g_1 \cos 2\Theta)' - \frac{1}{2}(g_2 \sin 2\Theta)' - g_1\Theta' \sin 2\Theta + g_2\Theta' \cos 2\Theta. \quad (3.3.9)$$

$\left|\Theta'(t)\right| \leq \left|g\right|$ olduğundan, teoremin hipotezinden Θ', $[x_0, \infty)$ aralığı üzerinde integrallenebilirdir. Şimdi (3.3.9) dan

$$\left|\Theta'(t)\right| = \frac{1}{2}\left|g\right| + \frac{1}{2}\left|(g_1 \cos 2\Theta)'\right| - \frac{1}{2}\left|(g_2 \sin 2\Theta)'\right| - \left|g_1 g\right| + \left|g_2 g\right|$$

elde edilir. (3.3.8) ve (3.3.9) dan $\Theta(t)$, $t \to \infty$ iken bir sonlu limite gider. Benzer biçimde

$$\begin{aligned} g(t)\sin 2t \cos 2t &= -(g_2 \sin 2\Theta)' - 2g_2\Theta' \sin 2\theta \\ g(t)\cos 2t \cos 2t &= -(g_1 \sin 2\Theta)' - 2g_1\Theta' \cos 2\theta \end{aligned}$$

bağıntılarını kullanarak (3.3.5) eşitliğini

$$\frac{r'}{r} = (1/2)(g_2 \cos 2\Theta)' + (1/2)(g_1 \sin 2\Theta)' + g_2\Theta' \sin 2\Theta - g_1\Theta' \cos 2\Theta \quad (3.3.10)$$

biçiminde yazabiliriz. $(\log r)' = \frac{r'}{r}$ olduğundan (3.3.5) den $\left|(\log r)'\right| \leq \left|g\right|$ olur ve böylece $(\log r)'$, $[x_0, \infty]$ da integrallenebilir. Şimdi (3.3.10) kullanılarak

$$\left|(\log r)'\right| \leq (1/2)\left|(g_2 \cos 2\Theta)'\right| + (1/2)\left|(g_1 \sin 2\Theta)'\right| + \left|g_1 g\right| + \left|g_2 g\right|$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (3.3.8) den $t \to \infty$ iken $\log r$ sonlu bir limite gider. Dolayısıyla r pozitif (sonlu) bir limite gider. Bu da 1. Adımın ispatını tamamlar.

2. Adım: Bu adımda, (3.3.4) ün iki ayrık çözümünün $t \to \infty$ iken aynı limite gidemeyeceğini göstereceğiz. (3.3.9) un integrali alınırsa, (3.3.6) dan

$$\begin{aligned} \Theta(t) = \Theta(\infty) &- \frac{1}{2}\int_t^\infty g(s)ds + \frac{1}{2}(g_1 \cos 2\Theta - g_2 \sin 2\Theta) \\ &- \frac{1}{2}\int_t^\infty [g(g_1 \sin 2\Theta + g_2 \cos 2\Theta)(1 - \cos 2(s + \Theta))]ds \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi t_1 i öyle yeterince büyük seçelim ki $t \geq t_1$ için $j = 1,2$ olmak üzere $|g_1(t)| \leq 1/16$ ve $\int_{t_1}^{\infty} |g_j g| ds \leq 1/16$ olsun. Eğer $\hat{\Theta}(t)$ (3.3.6) nın Θ ile aynı limite sahip çözümü ise ve $\Theta \neq \hat{\Theta}$ ise, o zaman (3.3.11) den Θ yerine $\hat{\Theta}$ yazılmış ifade çıkartılırsa, $t \geq t_1$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir,

$$\left|\Theta(t) - \hat{\Theta}(t)\right| \leq \frac{1}{2} \sup_{s \geq t_1} \left|\Theta(s) - \hat{\Theta}(s)\right|.$$

Buradan $\sup_{s \geq t_1} \left|\Theta(s) - \hat{\Theta}(s)\right| = 0$ ve böylece $\Theta = \hat{\Theta}$ olur. Bu da açık bir çelişkidir. Benzer biçimde, $r(t) = \hat{r}(t)$ sonucuna da ulaşılır. Böylece 2. Adımın ispatı da tamamlanmış olur.

(3.3.4) ün terimlerinde, herhangi bir aşikar olmayan x çözümü için, öyle A ve α ($A > 0$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$) sabitleri vardır ki; $t \to \infty$ iken aşağıdaki eşitlikler vardır,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} x(t) \ &= A\sin(t+\alpha) + o(1), \\ \lim_{t\to\infty} x'(t) &= A\cos(t+\alpha) + o(1). \end{aligned}$$

Ayrıca, eğer x_1 ve x_2 (3.3.4) ün iki lineer bağımsız çözümleri ise, o zaman buna karşılık gelen α_1 ve α_2 faz değişimleri, π nin bir tamsayı çarpanından farklı olamaz. Sonuç olarak, x_1 ve x_2 nin uygun bir kombinasyon formuyla (3.3.7) de tanımlanan asimptotik davranışlı çözümler bulunabilir.

Örnek 3.3.4.

(1) $k > 0$ olmak üzere $y'' \pm ky = 0$ denklemi verilsin. Teorem 3.3.1 de $p(t) = 1$ ve $g(t) = \pm k$ alınırsa aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz,

$$|y(t) \leq \left| \sqrt{y^2(a) + (y')^2(a)}\, \exp(1/2 \left|1 \pm k\right|) \right..$$

(2) $(p(t)y')' + \frac{k}{p(t)} y = 0$ denklemini ele alalım. Burada $\frac{1}{p(t)} \in L^1(m)$ ve $k > 0$ dır. Bu durumda Teorem 3.3.1 den

$$\int_a^\infty \left|\frac{1-k}{p(t)}\right| dt \le |1-k| \int_a^\infty \frac{dt}{|p(t)|} < \infty$$

olduğundan, $y(t)$ çözümlerinin sonlu olduğu sonucuna varılır.

(3) Bu örnekte, Teorem 3.3.3 ün bir uygulamasını göstereceğiz ve aşağıdaki denklemin asimptotik davranışını inceleyeceğiz,

$$x''(t) + \left(1 + \frac{\sin 2t}{t}\right) x(t) = 0, \ t \ge 0, \ \lambda \in (\mathbb{Z} \setminus \{\pm 2\}).$$

Şimdi $g(t) = \frac{\sin \lambda t}{t}$, $\lambda \neq \pm 2$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ fonksiyonunu düşünelim. Açıktır ki; $g(t) \notin L^1(m)$ dir, fakat Teorem 3.3.3 ün hipotezleri sağlanır. Gerçekten de,

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty \left|\frac{\sin \lambda s}{s}\right| ds \ge \int_a^\infty \frac{\sin^2 \lambda s}{|s|} ds &= \int_a^\infty \frac{(1-\cos 2\lambda s)}{|2s|} ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{2a}^\infty \frac{(1-\cos \lambda u)}{|u|} du \qquad (3.3.12) \\
&= \frac{1}{2}\int_{2a}^\infty \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int_{2a}^\infty \frac{\cos \lambda u}{u} du
\end{aligned}$$

dur ve ayrıca $\int_{2a}^\infty \frac{du}{u} = \infty$ ve $\int_{2a}^\infty \frac{\cos u}{u} du < \infty$ olduğundan $\int_a^\infty \left|\frac{\sin \lambda s}{s}\right| = \infty$ dur. Bu da $g(t) \notin L^1(m)$ demektir.

Açıktır ki; $\int_t^\infty g(s) ds = \int_t^\infty \frac{\sin \lambda s}{s} ds$ integrali vardır. Çünkü eğer $0 < s < t$ ise, o zaman

$$\left|\int_s^t \frac{\sin \lambda s}{s} ds\right| \le \left|\frac{\cos \lambda s}{\lambda s} - \frac{\cos \lambda t}{\lambda t} - \frac{1}{\lambda}\int_s^t \frac{\cos \lambda s}{s} ds\right|$$

dir ve buradan

$$\left|\int_s^t \frac{\sin \lambda s}{s} ds\right| \leq \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{t}+\int_s^t \frac{1}{s^2} ds\right) = \frac{2}{|\lambda| s}$$

bulunur. Buna ek alarak

$$g_1(t) = \int_t^\infty \frac{\sin \lambda s}{s} \cos 2s ds < \infty$$

([8], s.96, (15.34)) ve

$$g_2(t) = \int_t^\infty \frac{\sin \lambda s}{s} \sin 2s ds < \infty$$

([8], s.96, (15.38)) dir. Ayrıca $g^2 \in L^1(m)$ olduğundan, kolayca gösterilebilir ki, $a > 0$ ve $j = 1,2$ için $\int_a^\infty |gg_j| dt < \infty$ dur. Bu da teoremin hipotezlerinin sağlandığını gösterir ve böylece

$$x''(t) + \left(1 + \frac{\sin 2t}{t}\right) x(t) = 0,\ t \geq 0,\ \lambda \in (\mathbb{Z} \setminus \{\pm 2\})$$

denkleminin çözümlerinin (3.3.7) yi sağlayan bir temel sisteme sahip olduğu söylenebilir.

Uyarı 3.3.5. Eğer $\lambda = \pm 2$ ise o zaman kolayca görülebilir ki,

$$\int_a^\infty \frac{\sin^2 \lambda s}{s} ds = \int_a^\infty \frac{1-\cos 4s}{2s} ds = \int_a^\infty \frac{ds}{2} - \int_a^\infty \frac{\cos 4s}{2} ds$$

dir. Burada $\forall a \in [a, \infty)$ için $\int_a^\infty \frac{ds}{2} = \infty$ ve $\int_a^\infty \frac{\cos 4s}{2} ds < \infty$ dur. Bu da $\int_a^\infty \frac{\sin^2 \lambda s}{s} ds = \infty$ demektir ve böylece $g_2(t) = \int_t^\infty \frac{\sin \lambda s}{s} \sin 2s ds$ integralinin var olmadığı ortaya çıkar. Dolayısıyla Teorem 3.7 uygulanmaz.

3.4. Spektral Teori

Bu bölümde sınır şartlarına sahip düzgün Sturm-Liouville özdeğer problemini ele alacağız ve bu tür problemlerin spektrumu ile ilgili teoremleri ispatlamak için 'Prüfer dönüşümünü' kullanacağız. Şimdi aşağıdaki sistemi düşünelim.

$$\begin{aligned}
&(p(t)x'(t))' + (\lambda r(t) - q(t))x(t) = 0, \quad t \in [a,b], \\
&Ax(a) - Bx'(a) = 0, \\
&\Gamma x(b) - \Delta x'(b) = 0.
\end{aligned}$$

Genelliği kaybetmeden, $0 \leq |A| \leq 1$, $0 \leq B/p(a) \leq 1$ ve $\dfrac{A^2 + B^2}{p^2(a)} = 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda öyle bir α $(0 \leq \alpha \leq \pi)$ tek sayısı vardır ki, $Ax(a) - Bx'(a) = 0$ ifadesi $\cos\alpha x(a) - \sin\alpha p(a)x'(a) = 0$ biçiminde yazılabilir. Benzer biçimde yine öyle bir β $(0 \leq \beta \leq \pi)$ tek sayısı vardır ki, $\Gamma x(b) - \Delta x'(b) = 0$ ifadesi $\cos\beta x(\beta) - \sin\beta p(a)x'(a) = 0$ biçiminde yazılabilir. Buradan yukarıdaki sistem aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
&(p(t)x'(t))' + (\lambda r(t) - q(t))x(t) = 0, \quad t \in [a,b], \ \lambda \neq 0, \\
&\cos\alpha x(a) - \sin\alpha p(a)x'(a) = 0, \\
&\cos\beta x(\beta) - \sin\beta p(a)x'(a) = 0.
\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Burada λ reel parametre ve p', r, q reel ve $[a,b]$ de parçalı sürekli ve yine $[a,b]$ de $p > 0$, $r > 0$ dır. (3.4.1) in aşikar olmayan çözümünün olduğu λ değerlerine *özdeğer*, ve buna karşılık gelen aşikar olmayan çözüme de *özfonksiyon* denir.

Şimdi [9] dan alınan ve (3.4.1) in özdeğerleri ve özfonksiyonlarının sıfırları ile ilgili çok önemli bir teoremi ispatlayacağız.

Teorem 3.4.1. $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots$ biçiminde sonsuz sayıda özdeğerler vardır, öyle ki bu özdeğerler monoton artan bir dizi formundadır ve $n \to \infty$ iken $\lambda_n \to \infty$ dur. Ayrıca λ_n özdeğerine karşılık gelen ϕ_n özfonksiyonu (a,b) de tam olarak n tane sıfıra sahiptir. Yine Teorem 2.6 dan (Sturm karşılaştırma teoremi) ϕ_n in sıfırları ϕ_{n+1} in sıfırları içine dağılmıştır.

ispat: Öncelikle $\phi(t,\lambda)$, (3.4.1) in ilk denkleminin tek çözümü olsun ve $\phi(a,\lambda)=\sin\alpha$, $\phi'(a,\lambda)=\cos\alpha$ şartlarını sağlasın. Bu durumda ϕ (3.4.1) in ikinci denklemini de sağlar. Şimdi $r(t,\lambda)$ ve $w(t,\lambda)$, $\phi(t,\lambda)$ ya karşılık gelen Prüfer dönüşümleri olsun. O zaman başlangıç şartları da $r(a,\lambda)=1$ ve $w(a,\lambda)=\alpha$ formuna dönüşür. Böylece λ değeri için $\phi(t,\lambda)$ (3.4.1) in üçüncü denklemini sağlıyor ise bu λ değerleri özdeğer olurlar. Bu λ lar öyle değerlerdir ki; $w(t,\lambda)=\beta+n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$ dir. Teorem 2.5 (Salınım) den herhangi tespit edilmiş bir $t\in[a,b]$ için, $w(t,\lambda)$ λ ya göre monoton ve artandır. Ayrıca $w(t,\lambda)=0 \pmod{\pi}$ olması için gerek ve yeter koşul $\phi(t,\lambda)=0$ olmasıdır. $\theta'=\frac{1}{p}\cos^2\theta+(\lambda r-q)\sin^2\theta$ olduğundan açıktır ki; ϕ nın bir sıfırında $\theta'=\frac{1}{p}>0$ dır ve böylece $w(t,\lambda)$ bu sıfırın komşuluğunda kesin artandır.

İddia 3.4.2. Tespit edilmiş bir $t=c$, $c\in[a,b]$ için, $\lim\limits_{\lambda\to\infty} w(c,\lambda)=\infty$ dur.

İspat: $\alpha\geq 0$ ve $w=0(\operatorname{mod}\pi)$ için $w'>0$ olduğundan, $w(t,\lambda)\geq 0$ dır. Buradan, geriye $\alpha<t_0<c$ olmak üzere bazı t_0 değerleri için

$$\lim_{\lambda\to\infty}[w(c,\lambda)-w(t_0,\lambda)]=\infty$$

olduğunu göstermek kalır. Şimdi $t_0=\frac{a+b}{2}$ ve P, Q, R sabitler olsun, öyle ki (t_0,c) üzerinde $p(t)\leq P$, $r(t)\geq R>0$ ve $q(t)\leq Q$ olsun. O zaman $\hat{\phi}(t_0,\lambda)=\phi(t_0,\lambda)$, $\hat{\phi}'(t_0,\lambda)=\phi'(t_0,\lambda)$ şartlarını sağlayan $\hat{\phi}$ çözümlü

$$Px''+(\lambda R-Q)=0 \tag{3.4.2}$$

denklemi $\hat{w}(t_0,\lambda)=w(t_0,\lambda)$ eşitliğine sahiptir ve böylece Teorem 2.5 den

$$w(c,\lambda)-w(t_0,\lambda)\geq\hat{w}(c,\lambda)-\hat{w}(t_0,\lambda) \tag{3.4.3}$$

elde edilir. (3.4.2) den $\hat{\phi}$ nın ardışık sıfırları arasındaki mesafe $\pi\sqrt{\dfrac{P}{\lambda R-Q}}$ kadardır ve buradan $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\pi\sqrt{\dfrac{P}{\lambda R-Q}}=0$ dır. $j>1$ tamsayısı için $\hat{\phi}$, yeterince büyük λ değerleri için t_0 ile c arasında j tane sıfıra sahip olacaktır. Böylece $\hat{w}(c,\lambda)-\hat{w}(t_0,\lambda)\geq j\pi$ eşitsizliği elde edilir. j keyfi bir değer olduğundan, (3.4.3) den $\lim\limits_{\lambda\to\infty}[w(c,\lambda)-w(t_0,\lambda)]=\infty$ olur ve iddianın ispatı tamamlanmış olur.

İddia 3.4.3. Tespit edilmiş bir $t=c$, $c\in(a,b]$ için, $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}w(c,\lambda)=0$ dır.

İspat: İspat için $\theta'=\dfrac{1}{p}\cos^2\theta+(\lambda r-q)\sin^2\theta$ denklemini kullanacağız. $\delta>0$ sayısını öyle yeterince küçük seçelim ki $0<\pi-\delta$ olsun. Eğer $\delta\leq w\leq\pi-\delta$, $\lambda<0$ ve eğer $0<P\leq p$, $0<R\leq r$, $Q\geq|q|$ ise, bu durumda $\lambda<[\dfrac{\alpha-\delta}{c-\alpha}-Q-1/p]R\sin^2\delta<0$ iken $w'<1/p-|\lambda|R\sin^2\delta+Q\leq-\dfrac{\alpha-\delta}{c-\alpha}<0$ dır. Buradan yeterince büyük λ değerleri için $w(c,\lambda)\leq\delta$ olur. δ keyfi bir değer olduğundan, $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}w(c,\lambda)=0$ elde edilir ve ispat biter.

Şimdi $c=b$ için, $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}w(b,\lambda)=0$ dır. $\beta>0$ olduğundan ve $w(b,\lambda)$, λ ya göre monoton artan olduğundan $w(b,\lambda_0)=\beta$ olacak bir $\lambda=\lambda_0$ değeri vardır. Yine $0\leq\alpha<\pi$ ve $\beta\leq\pi$ olduğundan, (a,b) de $0<w(t,\lambda_0)<\pi$ dir. Dolayısıyla bundan $\phi(t,\lambda_0)$ ın (3.4.1) in üçüncü denklemini sağladığı hemen görülür ve ayrıca bu çözüm sıfır çözümü değildir. Şimdi λ, λ_0 dan sonra değer alsın. O zaman $w(b,\lambda_1)=\beta+\pi$ olacak tek bir λ_1 değeri vardır. Açıktır ki, $\phi(t,\lambda_1)$ (3.4.1) in üçüncü denklemini sağlar ve (a,b) de tam olarak bir tane sıfırı vardır. Bu düşünce ile devam edersek, n. özdeğer $w(b,\lambda_n)=\beta+n\pi$ ile belirlenir ve n. karşılık gelen özfonksiyon da (a,b) de tam olarak n tane sıfıra sahiptir. Buda ispatı sonlandırır.

Bir boyutlu Sobolev eşitsizliklerindeki Prüfer dönüşümü, düzgün kendine-eş ikinci dereceden özdeğer problemlerinin spektrumu (özdeğerlerinin kümesi) için alt ve üst sınırları elde etmede kullanılır.

Şimdiki teorem aşağıdaki özdeğer problemi ile ilgilidir. q, $s \geq 1$ olmak üzere $L^s(a,b)$ de reel bir fonksiyon ve $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ ve $\phi_0 < \phi_1 < \phi_2 < \cdots$ de sırasıyla aşağıdaki problemin özdeğerleri ve özfonksiyonları olsunlar, (Teorem 3.4.1 e bakınız),

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y(a) = y(b) = 0. \tag{3.4.4}$$

Öncelikle reel bir f fonksiyonu için $f_+(x) \equiv \max(f(x),0)$ ve $f_-(x) \equiv f_+(x) - f(x)$ gösterimlerini verelim. Şimdi [10] dan alınan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.4.4. $\lambda < \lambda_n$ olsun. O zaman (3.4.4) ün özdeğerleri aşağıdaki eşitsizliği sağlar,

$$\lambda_n \leq \lambda + \left(\frac{\pi(n+1)}{2(b-a)} + \left[\frac{(n+1)^2\pi^2}{4(b-a)^2} + \frac{\int_a^b (\lambda - q(x))_- \, dx}{b-a} \right]^{1/2} \right)^2 \tag{3.4.5}$$

ki bu da aşağıdaki eşitsizliktir,

$$\lambda_n \leq \lambda + \frac{(n+1)^2\pi^2}{(b-a)^2} + 2\frac{\int_a^b (\lambda - q(x))_- \, dx}{b-a} \tag{3.4.6}$$

İspat: $-\phi_n'' + q\phi_n = \lambda_n\phi_n$ denkleminde modife edilmiş aşağıdaki Prüfer dönüşümünü kullanalım,

$$\phi_n = r\sin\theta, \quad \phi_n' = \sqrt{\lambda_n - \lambda}\, r\cos\theta, \quad r(x) > 0.$$

Bu aynı zamanda

$$\theta' = \sqrt{\lambda_n - \lambda}\cos^2\theta - \frac{(q-\lambda_n)\sin^2\theta}{\sqrt{\lambda_n - \lambda}} = \sqrt{\lambda_n - \lambda} - \frac{(q-\lambda)\sin^2\theta}{\sqrt{\lambda_n - \lambda}} \quad (3.4.7)$$

demektir. Şimdi (3.4.7) den

$$\theta' \geq \sqrt{\lambda_n - \lambda} - \frac{(q-\lambda_n)\sin^2\theta}{\sqrt{\lambda_n - \lambda}} \geq \sqrt{\lambda_n - \lambda} - \frac{(q-\lambda)_-}{\sqrt{\lambda_n - \lambda}} \quad (3.4.8)$$

elde edilir. ϕ_n, (a,b) de n tane sıfıra sahip olduğundan ve a ve b de sıfır olduğundan (Teorem 3.4.1) $\theta(a) = 0$ alabiliriz ki bu da $\theta(b) = (n+1)\pi$ demektir. Şimdi (3.4.8) in integralini alırsak

$$(n+1)\pi \geq (b-a)\sqrt{\lambda_n - \lambda} - \frac{\int_a^b (\lambda - q(x))_- dx}{\sqrt{\lambda_n - \lambda}} \quad (3.4.9)$$

elde ederiz. Bu

$$A \equiv (\lambda_n - \lambda),\ B \equiv (b-a)^{-1}(n+1)\pi,\ C \equiv (b-a)^{-1}\int_a^b (\lambda - q(x))_- dx$$

olmak üzere $A \leq B\sqrt{A} + C$ eşitsizliğine denktir. Dolayısıyla buradan $\sqrt{A} \leq [B + \sqrt{B^2 + 4C}]/2$ eşitsizliğine ulaşılır ki bu da (3.4.5) eşitsizliğine denktir. Ayrıca $\forall x \geq 0$ için $\sqrt{1+x} \leq 1 + x/2$ olduğundan $\sqrt{B^2 + 4C} = B\sqrt{1 + 4C/B^2} \leq B(1 + 2C/B^2) = B + 2C/B$ dir. Buradan $A \leq [B^2 + 2B(B + 2C/B) + B^2 + 4C]/4 \leq B^2 + 2C$ elde edilir ki bu da tam olarak (3.4.6) eşitsizliğidir ve ispat biter.

Uyarı 3.4.5. Teorem 3.4.4 ün ispatı, (3.4.5) i eşit yapacak q nun inşası için gerekli ve yeterli olan koşulları verir. (3.4.5) de eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul (3.4.9) da eşitliğin sağlanmasıdır. Tersine

$$\int_a^b (\lambda - q(x)) - \sin^2\theta(x)dx = \int_a^b (\lambda - q(x))_- dx$$

ki bu da $(\lambda - q(x)) - \cos^2\theta(x) = 0$ demektir. (3.4.7) integrallenirse $(\lambda - q(x)) - \sin^2\theta(x) = 0$ elde edilir. $\theta'(x) > 0$ olduğundan, eğer $x = k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ ise o zaman $(\lambda - q(x))_+ = 0$ olur. Böylece, $E = \{x : \sin^2\theta(x) \neq 1\}$ olmak üzere, E üzerinde $(\lambda - q(x)) = (\lambda - q(x))_-$ ve $(\lambda - q(x))_- = 0$ dir.

Örneğin; $n = 0$ ve $\lambda = 0$ alınırsa, o zaman (3.4.7) den

$$q(x) = \begin{cases} \lambda_0 & \{x : \theta(x) = \pi/2\} \\ 0 & diger\ durumda \end{cases}$$

olur. Şimdi aşağıdaki teoremlerde, q katsayısı üzerinde belirli genel şartlar altında $y''(x) + (\lambda - q(x))y(x) = 0$, $x \in [a,\infty)$ diferansiyel denkleminin $L^2[a,\infty)$ da aşikar olmayan çözüme sahip olması için λ reel parametresi için mümkün olan en iyi üst sınırı belirleyeceğiz.

Tüm değerler reel olmak üzere

$$y'' + (f^2 + fg + fk)y = 0, \quad x \in [a,\infty) \tag{3.4.10}$$

denklemini düşünelim ve aşağıdakileri kabul edelim:

(i) $f(x)$ pozitif, $[a,\infty)$ da lokal mutlak sürekli ve aşağıdaki eşitliği sağlasın,

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)f^{-2}(x) = 0. \tag{3.4.11}$$

(ii) $g(x)$ lokal $L^1[a,\infty)$ dan ve aşağıdaki eşitliği sağlasın,

$$\lim_{x\to\infty} g(x)f^{-1}(x) = 0, \tag{3.4.12}$$

$$k(x) \in L^1(a,\infty) \tag{3.4.13}$$

olsun ve

$$\psi_1(x) = \sup_{t\ge x}\left| f'(t)/f^2(t)\right|, \tag{3.4.14}$$

$$\psi_2(x) = \sup_{t \geq x} \left| g(t) \big/ f(t) \right| \tag{3.4.15}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım ve kabul edelim ki;

$$\psi_1^2 f, \ \ \psi_2^2 f \in L^1(a, \infty) \tag{3.4.16}$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki teorem geçerlidir. (Bkz [11]).

Teorem 3.4.6. Yukarıdaki (3.4.11) den (3.4.16) ya tüm şartlar sağlansın ve y (3.4.10) un aşikar olmayan çözümü olsun. Ayrıca $R(x)$ fonksiyonunu

$$R^2 = fy^2 + f^{-1}(y')^2, \quad R > 0 \tag{3.4.17}$$

biçiminde tanımlansın. O zaman bir A sabiti için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir,

$$\left| \log R(x) \right| \leq A + 1\big/\pi \int_a^x f(t)(\psi_1(t) + \psi_2(t))dt, \quad \forall x \in [a, \infty). \tag{3.4.18}$$

İspat: Aşağıdaki modifiye edilmiş Prüfer dönüşümünü ele alalım,

$$y = Rf^{-1/2} \cos\theta, \quad y = -Rf^{1/2} \sin\theta. \tag{3.4.19}$$

Bu durumda R ve θ ya göre olan

$$\theta' = f - (1\big/2) f' f^{-1} \sin 2\theta + g \cos^2\theta + k \cos^2\theta \tag{3.4.20}$$

$$R' R^{-1} = (1\big/2) f' f^{-1} \cos 2\theta + (1\big/2) g \sin 2\theta + (1\big/2) k \sin 2\theta \tag{3.4.21}$$

diferansiyel denklemlerini elde ederiz. (3.4.18) deki sınırı elde etmek için (3.4.21) i (a, x) üzerinde integre edelim. (3.4.21) in son terimi (3.4.13) den sonlu bir integraldir. Bu durumda biz sadece geriye kalan terimleri düşünmek zorundayız. (3.4.21) in ilk terimi için (3.4.14) den

$$\left| \int_a^x f' f^{-1} \cos 2\theta dt \right| \leq \int_a^x \psi_1 f \left| \cos 2\theta \right| dt$$

yazılabilir. Şimdi (3.4.20) den

$$\left|\int_a^x f' f^{-1}\cos 2\theta dt\right| \le \int_a^x \psi_1\theta' \left|\cos 2\theta\right| dt + \int_a^x \psi_1(1/2\,\psi_1 f + |g| + |k|)dt$$
$$\le \int_a^x \psi_1\theta'(2/\pi)dt + \int_a^x \psi_1\theta'(\left|\cos 2\theta\right| - 2/\pi)dt$$
$$+ \int_a^x \psi_1(1/2\,\psi_1 f + |g| + |k|)dt$$

(3.4.20) den θ' yerleştirilirse

$$\left|\int_a^x f' f^{-1}\cos 2\theta dt\right| \le \int_a^x \psi_1 f(2/\pi)dt + \int_a^x \psi_1\theta'(\left|\cos 2\theta\right| - 2/\pi)dt$$
$$+ (1 + 2/\pi) + \int_a^x [(1/2)\psi_1^2 f + \psi_1 |g| + \psi_1 |k|)dt \qquad (3.4.22)$$

sonucuna ulaşılır. Sağ taraftaki ilk integral ψ_1 i ifade eder, (Bkz (3.4.14)). Şimdi (3.4.22) de geri kalan iki terimin sınırlı olduğunu gösterelim. Gerçekten de, (3.4.22) deki ikinci integral için, açıktır ki ψ_1 negatif olmayan artmayan bir fonksiyondur ve

$$\int_a^x \theta'(\left|\cos 2\theta\right| - 2/\pi)dt = \int_a^x (\left|\cos 2\theta\right| - 2/\pi)dt \qquad (3.4.23)$$

integrali $x \ge a$ için düzgün sınırlıdır. İntegraller için ortalama değer teoreminden ve $\int_a^x \theta'(\left|\cos 2\theta\right| - 2/\pi)dt$ nin düzgün sınırlılığından $\xi \in (a,x)$ sayısı vardır, öyle ki;

$$\int_a^x \psi_1\theta'(\left|\cos 2\theta\right| - 2/\pi)dt = \xi\int_a^x (\theta'\left|\cos 2\theta\right| - 2/\pi)dt \le C$$

dir. Burada C sabit bir sayıdır. Böylece (3.4.22) deki ikinci terimin sınırlı olduğu gösterilmiş oldu. Şimdi de (3.4.22) deki son terime bakalım. Son terimdeki üç alt taplamda $L^1(a,\infty)$ dandır. Birinci terim ki bu (3.4.16) da kabul edilmişti. İkinci terim için $|g| \le \psi_2 f$ olduğu düşünülürse yine (3.4.16) dan elde edilir. Üçüncü terim için de ψ_1 in sınırlılığı kullanılarak (3.4.13) den doğrulanır. Böylece $\int_a^x \left| f' f^{-1} \cos 2\theta \right| dt$ sınırlıdır. Benzer şekilde (3.4.21) deki ikinci terimin sınırlı integrali ifade ettiği ispatlanabilir. (Bu ψ_1 i ψ_2 ile ve $\cos 2\theta$ yı da $\sin 2\theta$ ile değiştirmekle yapılır). Böylece ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki teorem [11] den alınmıştır.

Teorem 3.4.7. $r(x)$ lokal olarak $L^1(a,\infty)$ dan ve $\lim_{x\to\infty} r(x) = 0$ olsun. $p(x) = \sup_{t\geq x} \left| r(x) \right|$ diyelim ve $p \in L^2(a,\infty)$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca, y $y'' + (\lambda - r(x))y = 0$ denkleminin aşikar olmayan çözümü olsun. Burada $x \in [a,\infty)$ ve $R > 0$ olmak üzere R yi $R^2 = \lambda^{1/2} y^2 + \lambda^{-1/2} (y')^2$ biçiminde tanımlayalım. O zaman tespit edilmiş bir $\lambda > 0$ ve yine tespit edilmiş bazı $A > 0$ sabiti için aşağıdaki eşitsizlik vardır,

$$\left| \log R(x) \right| \leq A + \frac{\lambda^{-1/2}}{\pi} \int_a^x p(x)dt, \qquad \forall x \in [a,\infty) \tag{3.4.24}$$

İspat: $f = \lambda^{1/2}$, $g = -r\lambda^{1/2}$ ve $k = 0$ alınarak Teorem 3.4.6 uygulanır ve ispat yapılır.

Yukarıdaki teorem kullanılarak, $\lambda^{1/2}$ nin (3.4.24) için mümkün olan en iyi seçim olduğu diğer $c < \lambda^{1/2}\pi$ sabitlerinin (3.4.24) eşitsizliğini sağlamadığı gösterilerek ispatlanabilir.

Teorem 3.4.8. $I \subset \mathbb{R}$ sonlu kapalı bir aralık olmak üzere $L^2(I)$ üzerinde tanımlı $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ Schrödinger operatörü olsun ve Dirichlet sınır şartları I nın her iki ucuna uygulansın. Ayrıca kabul edelim ki, I üzerine $V \in L^1(I)$ ve $V(x) \geq 0$ olsun. O zaman, H ın $n.$ özdeğerinin birinci özdeğerine oranı olan $\frac{\lambda_n}{\lambda_1}$ değeri

$\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \leq n^2$ sınırına sahiptir. Bu sınır mümkün olan en iyi sınırdır ve $V \in L^2(I)$ ve $n > 1$ için eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul I üzerinde $V \equiv 0$ olmasıdır.

Bu teoremin ispatı [12] de verilmiştir. İspat için aşağıdaki Prüfer dönüşümü kullanılır.

$$y(x) = r(x)\sin(\sqrt{\lambda}\,\theta(x))$$
$$y'(x) = \sqrt{\lambda}\,r(x)\cos(\sqrt{\lambda}\,\theta(x)).$$

BÖLÜM 4

SONUÇLAR

Bu tezde Prüfer dönüşümünü kullanarak adi diferansiyel denklemlerdeki temel teoremlerin ispatları yapılmıştır. Bu tezin ana çalışma konusu

$$\mathcal{L}x = (p(t)x'(t))' + g(t)x(t) = 0, \quad t \in (a, b)$$

biçimindeki lineer ikinci mertebeden diferansiyel denklemin temel teoremlerini ele almaktır. Bu çerçevede öncelikle denklemle ilgili salınım teoremlerinin (salınım teoremi, karşılaştırma teoremi, disconjugacy teoremi) ispatları Prüfer dönüşümü kullanılarak klasik yöntemden daha basit bir şekilde yapılmıştır. Daha sonra yine bu denklemin çözümlerinin asimptotik formüllerinden faydalanarak çözümlerinin sınırlılığı gösterilmiştir. Son olarak da denklemin spektrumu incelenmiş ve özdeğerler ve özfonksiyonlar ile ilgili temel teoremlerin ispatları yine Prüfer dönüşümü kullanarak yapılmıştır. Özellikle son zamanlarda Prüfer dönüşümünün çeşitli Sturm-Liouville denklem tiplerine uygulanması birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Bu konu ile ilgili daha ayrıntılı bilgilere [17]-[23] kaynaklarından ulaşılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Ince, EL. 1956. Ordinary Differential Equations. Dover Publications. New York: INC.

[2] Prüfer, H. (1926). Neue herleitung der Sturm-Liouvilleschen Reihenentwicklung stetiger funktionen. *Mathematische Annalen.* **95(1)**, 499-518.

[3] Kelley, WG, Peterson, AC. 2010. The theory of differential equations: classical and qualitative. London: Springer Science.

[4] Coddington, E, Levinson, N. 1995. Theory of ordinary differential equations, New York: Mc-Graw Hill.

[5] Barrett, JH, Bradley, JS. 1989. Ordinary differential equations. Scranton: Intext Educ. Publisher.

[6] Harris, W. B. (1991). On an oscillation criterion of cohn. *Quart. Journal of Math. Oxford.* **42**, 309–313.

[7] Coppel, WA. 1965. Stability and asymptotic behavior of differential equations, Boston: D.C. Heath and Company.

[8] Spiegel, MR. 1968. Mathematical handbook of formulas and tables. New York: Mc Graw Hill Company.

[9] Birkhoff, G, Rota, GC. 1969. Ordinary differential equations. Waltham: Blaisdell Publishing Company.

[10] Brown, D. B., Hintonand, R. C., Schwabik, S. (1996). Applications of one-dimensional Sobolev in equality to eigenvalue problems. *Differential and Integral Equations*. **9**, 481–498.

[11] Atkinson, F. V., Everitt, W. (1978). Bound for the point spectrum for a Sturm Liouville equation. *Proc. of Royal Soc. Edinburgh.* **80 A**, 57-66.

[12] Ashbaugh, M. S., Benguria, R. (1989). Optimal bounds for ratios of eigenvalues of one dimensional Schrödinger operators with Dirichlet boundary conditions and positive potentials. *Comm. of Math. Physics.* **124**, 403–415.

[13] Binding, P. (2013). Prufer's Transformation. *Introduction to Mathematical Analysis.* **1838**, 149-160.

[14] Binding, P., Volkmer, H. (2013). A Prüfer angle approach to semidefinite Sturm–Liouville problems with coupling boundary conditions. *Journal of Differential Equations*. **255(5)**, 761-778.

[15] Binding, P., Volkmer, H. (2012). A Prüfer angle approach to the periodic Sturm-Liouville problem. *American Mathematical Monthly*. **119(6)**, 477-484.

[16] Binding, P., Volkmer, H. (2005). Prüfer angle asymptotics for Atkinson's semi-definite Sturm–Liouville eigenvalue problem. *Mathematische Nachrichten*. **278(12-13)**, 1458-1475.

[17] Cohn, J. H. (1988). On an oscillation criterion de la Valle Poussin. *Quart. Journal of Math. Oxford.* **39**, 173–174.

[18] Harris, W. B., Lutz, D. (1975). Asymptotic integration of adiabatic oscillators. *J.Math. Anal. Appl.* **51**,76–93.

[19] Hartman, P. (1952). On the zeros of solutions of second order linear differential equations. *J. London Math. Soc.* **27**, 492–496.

[20] Hartman, P. (1968). On a class of perturbations of the harmonic oscillator. *Proc. AMS.* **19**, 533–540.

[21] Pryce, J. 1993. Numerical solutions of Sturm–Liouville problems. New York-Tokyo, Oxford: Clarendon Press.

[22] Reid, WT. 1988. Sturmian theory of ordinary differential equations. New York: Mc Graw Hill.

[23] Chailos, G. (2009). Applications of Prüfer transformations in the theory of ordinary differential equations. *Irish Math. Soc. Bulletin.* **63**, 11-31.