TEMMUZ 2017 YÜKSEK LİSANS - MATEMATİK BÖLÜMÜ AYŞEGÜL BECİT

T.C.

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEVANLINNA TEORİSİ VE UYGULAMALARI

MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AYŞEGÜL BECİT

TEMMUZ 2017

Nevanlinna Teorisi ve Uygulamaları

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Ayşegül BECİT

Temmuz 2017

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Nevanlinna Teorisi ve Uygulamaları

Öğrencinin, Adı Soyadı: Ayşegül BECİT

Tez Savunma Tarihi: 03.07.2017

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. A. Necmeddin YAZICI

FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:	İmzası
Prof. Dr. Ayhan ESİ	....
Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ	....
Yrd. Doç. Dr. Mine MENEKŞE YILMAZ	....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Ayşegül Becit

ÖZET

NEVANLINNA TEORİSİ VE UYGULAMALARI

BECİT, Ayşegül

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Temmuz 2017, 98 sayfa

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tezin diğer bölümlerine temel oluşturacak tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölüm tümüyle Nevanlinna teorisine bir giriştir. Pozitif logaritma tanımı verilip bununla ilgili eşitsizlikler gösterilmiştir. Meromorf fonksiyonların sıfır ve kutup yerleriyle ilgili gösterimler verilmiş ve bu gösterimlerden yararlanılarak meromorf fonksiyonun karakteristiği tanımlanmıştır. Nevanlinna teoremi için temel oluşturan birinci ve ikinci esas teoremler ispatlanıp, $f(z)=O(1)$ gösteriminin anlamı verilmiştir. Tam ve meromorf fonksiyonların mertebe ve tip tanımları belirtilip sınıflandırmaları yapılmış olup, son olarak Nevanlinna'nın ikinci temel teoremi gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde ilk olarak, sonlu logaritmik mertebe ile artan fonksiyonlar için karakteristik bir integral geliştirildi. Bu aşamada, bir f meromorfik fonksiyonu ve bu fonksiyonun karakteristik ifadesi olan $T(r, f)$ nin logaritmik mertebeyle ilgili bazı özellikleri verildi. Yaklaşık logaritmik mertebe ve yakınsaklık logaritmik üst tanımları belirtilmiş olup, devamında sonlu çift-logaritmik mertebeyle ilgili tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Meromorf fonksiyonlar, sıfır ve kutup yerleri, Poisson-Jensen formülü, pozitif logaritma, sonlu logaritmik mertebe, yaklaşık logaritmik mertebe, sonlu çift-logaritmik mertebe.

ABSTRACT

NEVANLINNA THEORY AND ITS APPLICATIONS

BECİT, Ayşegül

M. Sc. Thesis, Mathematics Department

Adviser: Associate Professor Mehmet AÇIKGÖZ

July 2017, 98 pages

This thesis consist of three chapters.

In first chapter, we give definitions and theorems which compose a basic for next chapters.

In second chapter, the second part is introduction an entry into the Nevanlinna theory. A positive logarithm definition is given and the inequalities associated with it are proved. Notations of the zero and pole points of the meromorphic functions are given, and the characteristics of the meromorphic functions are described by using these notations. The first and second principal theorems that form the basis for the Nevanlinna Theorem have been proved and the meaning of $f(z)=O(1)$ has been given. The order and type definitions of entire and meromorph functions are indicated and classified. Finally, Nevanlinna's second basic theorem is proved.

In the third chapter, a characteristic integral is developed for the functions increasing with the finite logarithmic order. Subsequently, some properties of a meromorphic function and the characteristic expression $T(r,f)$ of the function are given, and the approximate logarithmic order and convergence logarithmic exponent definitions are denoted. In the continuation of this section, we are interested in the finite double-logarithmic order.

Key Words: Meromorph functions, zero and pole points, Poisson-Jensen formula, positive logarithmic, finite logarithmic order, approximate logarithmic order, finite double-logarithmic order.

Çok kıymetli aileme…

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ' e ve bu tezin oluşumunda ve yazılımında bana yardımcı olan bilgilerini benimle paylaşan, benden desteklerini esirgemeyen Araş. Gör. Erkan AĞYÜZ' e, Dr. Bayram BALA'ya ve bugünlere gelmemde en büyük destekçim anneme, kardeşim Aycihan'a, sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET ... v

ABSTRACT ... vi

TEŞEKKÜR ... viii

İÇİNDEKİLER ... ix

SEMBOLLER LİSTESİ ... x

BÖLÜM 1 ... 1

1.1 Ön Bilgiler ... 1

1.2. Nevanlinna kuramı ile ilgili genel tanımlar ve teoremler ... 8

1.3. Sonlu logaritmik mertebe ... 10

BÖLÜM 2 ... 12

2.1 Poisson-Jensen formülü ... 12

2.2 Pozitif logaritma ve karakteristik fonksiyonlar ... 18

2.3 Karakteristik fonksiyonun özellikleri ... 32

2.4 Tam ve meromorf fonksiyonların mertebeleri ve tipleri ... 43

2.5 Meromorf fonksiyonların diğer özellikleri ... 51

BÖLÜM 3 ... 77

3.1. Pozitif artan fonksiyon için sonlu logaritmik mertebe ... 77

3.2. Meromorf fonksiyonlar için logaritmik mertebe ... 79

3.3. Meromorf fonksiyonlarda yakınsaklık logaritmik üssü ... 80

3.4. Sonlu logaritmik mertebelerin meromorfik fonksiyonlar için özellikleri ... 82

3.5. Meromorf fonksiyonların logaritmik Borel istisnai değerleri ... 84

3.6. Meromorfik fonksiyonların türevleri ile ilgili sonuçlar ... 87

3.7. Pozitif artan fonksiyon için sonlu çift-logaritmik mertebe ... 89

3.8. Bir diskte analitik fonksiyonlar için çift-logaritmik mertebe ... 92

3.9. Açık birim diskte kuvvet serilerinin büyüme indeksleri ... 93

3.10. Maksimum terim ve merkezi indeksi arasındaki büyüme ilişkisi ... 96

KAYNAKLAR ... 98

SEMBOLLER LİSTESİ

$O(1)$	Büyük O
$n\left(t,\dfrac{1}{f}\right)$	Sıfır sayısı
$n(t,f)$	Kutup sayısı
$N(R,f)$	Sayım fonksiyonu
$m(R,f)$	Ortalama değer fonksiyonu
$R_{j,}R_i$	Kutup ve sıfırların modülleri
$\lambda_{\log}(\alpha)$	Logaritmik Borel istisnai değer
$T(R,f)$	Nevanlinna karakteristik fonksiyon
$S(R,f)$	Karakteristik fonksiyonun hata terimi
$U(r,f)$	Karakteristik fonksiyonun logaritmik tipi
$\rho_{\log}(a)$	a - noktasının yakınsaklık logaritmik üssü
$\overline{\lambda}_{\log}(\alpha)$	İndirgenmiş logaritmik Borel istisnai değer
$\lambda(r)$	Karakteristik fonksiyonun yaklaşık logaritmik mertebesi

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Rolf Nevanlinna'nın 1920-1925 yılları arasında yaptığı çalışma değer dağılım teorisinde oldukça önemlidir. Bu teori meromorf fonksiyonların kutup ve sıfır yerleriyle ilgilenmiştir. R. Nevanlinna tarafından tanımlanan karakteristik fonksiyonun uygulaması oldukça geniştir. Son zamanlarda, birçok matematikçi bu kuramdan yararlanarak matematiğin dalı olan projektif geometri, uygulamalı matematik ve kompleks analizde bununla ilgili çalışma yapmıştır. Buradan, Nevanlinna teoresiyle bağlantısı olan konuları yani, yaklaşık mertebe, sonlu logaritmik mertebe, sonlu çift-logaritmik mertebe gibi ifadeler incelenecektir.

1.1 Ön Bilgiler

Bu bölümdeki tanım ve teoremler [1], [2], [3] ve [4] nolu kaynaklardan yararlanarak yazılmıştır.

Tanım 1.1.1: f , x_0 ın delinmiş komşuluğunda tanımlı olsun ve bir L sayısı verilsin. Eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $0 < |x - x_0| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa f nin x_0 daki limiti L dir denir.

Tanım 1.1.2: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n (x-a)^n + \ldots$

şeklindeki bir seriye kuvvet serisi denir. Buradaki c_k sayılarına serinin katsayıları adı verilir [1]. Özel olarak $a = 0$ alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

elde edilir.

Tanım 1.1.3: f , $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $y \in (a,b)$ olsun. Eğer

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

limiti varsa f fonksiyonuna x noktasında türevlenebilir fonksiyon denir.

Tanım 1.1.4: f fonksiyonu a noktasını ihtiva eden bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

serisine a noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor serisi adı verilir [1].

Tanım 1.1.5: Her $a, b \in \mathbb{R}$ için,

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$$

olarak ifade edilen eşitsizliğe üçgen eşitsizliği denir [1].

Tanım 1.1.6: Bir $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının $\varepsilon -$komşuluğu

$$D(z_0, \varepsilon) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

olarak tanımlanan kümedir. Buradaki z_0 noktasına komşuluğun merkezi, ε sayısına ise komşuluğun yarıçapı denir. Bir $D(z_0, \varepsilon)$ komşuluğu verildiğinde,

$$D(z_0, \varepsilon) - \{z_0\} = N_0$$

kümesine z_0 noktasının delinmiş (delikli) komşuluğu denir [2].

Tanım 1.1.7: Bir $w=f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının $D(z_0,r)-\{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 da analitik değilse f, z_0 da bir ayrık aykırı noktaya sahiptir denir.

Tanım 1.1.8: Eğer $w=f(z)$ fonksiyonunun bir z_0 noktasında ayrık aykırılığı varsa, bu noktanın delinmiş bir $A=\{z: S_1<|z-z_0|<S_2\}$ komşuluğunda f fonksiyonunun,

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

açılımı vardır. Bu açılıma Laurent serisi denir ve

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 1.1.9: z_0, f fonksiyonunun ayrık aykırı noktası olsun. Eğer f nin Laurent açılımında a_{-n} katsayılarından sonlu tanesi hariç diğerlerinin tümü sıfıra eşitse z_0, f fonksiyonunun bir kutup (pole) noktasıdır denir. Eğer k, $a_{-k}\neq 0$ özelliğindeki en büyük sayı ise z_0, f nin $k.$ mertebeden kutup noktasıdır denir. Örneğin;

$f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ için $z=0$ bir kutuptur [2].

Uyarı 1.1.1: f, z_0 noktasında $k.$ mertebeden kutba sahiptir $\Leftrightarrow$

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m(z-z_0)^m+\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}+\frac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}$$

fonksiyonuna, f nin z_0 noktasındaki esas kısmı denir.

Tanım 1.1.10: Bir f karmaşık fonksiyonu z_0 noktasının belli bir $D(z_0,\varepsilon)$ komşuluğundaki bütün noktalarda differansiyellenebiliyorsa f, z_0 noktasında analitiktir, denir.

Tanım 1.1.11: f fonksiyonu bir B bölgesinde analitik ve $z_0 \in B$ olsun. z_0 noktasının f nin k. mertebeden sıfır yeri olması için gerek ve yeter koşul

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-2)}(z_0) = f^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

olmasıdır.

Teorem 1.1.12: f nin z_0 noktasının bir komşuluğunda analitik ve z_0 da k. mertebeden sıfır yeri olması için gerekli ve yeterli koşul $g(z_0) \neq 0$ ve g, z_0 da analitik bir fonksiyon olmak üzere, z_0 ın bir komşuluğundan

$$f(z) = (z-z_0)^k g(z)$$

şeklinde yazılabilmesidir.

Tanım 1.1.13: $g:[a,b] \to \mathbb{C}$ tanımlı bir fonksiyon olsun.

$$\left| \int_a^b g(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |g(t)|\,dt$$

olacak şekilde bir eşitsizlik vardır.

Tanım 1.1.14: B, $\mathbb{R}^2$ de bir bölge ve $u: B \to \mathbb{R}$ ikinci kerteden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olsun.

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

eşitliği varsa u, B de bir harmonik fonksiyondur denir. Burada $\nabla^2 u = 0$ denklemine Laplace denklemi denir.

Örnek 1.1.1: $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$ olsun. Burada bütün $z \in \mathbb{C}$ noktaları için,

$$u_x = 2x+2 \qquad u_{xx} = 2 \qquad \text{ve} \qquad u_y = -2y \qquad u_{yy} = -2$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

yani u, $\mathbb{C}$ düzlemde harmonik bir fonksiyondur [2].

Tanım 1.1.15: u bir B bölgesinde harmonik olsun. Eğer B bölgesindeki bir V harmonik fonksiyonu için $f = u + iv$, B bölgesinde analitik ise v ye u nun harmonik eşleniği (conjugate) denir.

Tanım 1.1.16: f fonksiyonu bir B bölgesindeki aykırılıkları sadece kutup noktaları ise f ye B bölgesinde bir meromorf fonksiyon denir [2].

Tanım 1.1.17: Bir f fonksiyonu $\mathbb{C}$ düzleminin tüm noktalarında analitikse, f ye tam (entire) fonksiyon denir.

Tanım 1.1.18: f karmaşık fonksiyonu, bir z_0 noktasının her komşuluğundaki bazı noktalarda analitik fakat z_0 da analitik değilse f fonksiyonunun z_0 da aykırılığı var denir.

Tanım 1.1.19: f, B bölgesinde analitik bir fonksiyon ve z_0, B bölgesinde bir nokta olsun. Eğer $f'(z_0) \neq 0$ ise f fonksiyonu z_0 noktasında konformdur, denir.

Tanım 1.1.20: $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere, $W = \dfrac{az+b}{cz+d}$ biçiminde tanımlanmış fonksiyona homografik fonksiyon denir.

Tanım 1.1.21: Tanım aralığı içindeki her x elemanı için $f(x) \leq U$ olacak şekilde bir $U \in \mathbb{R}$ varsa, $f(x)$ fonksiyonuna bu aralık içinde üstten sınırlı denir. Burada $U \in \mathbb{R}$ sayısına da üst sınır adı verilir.

Tanım 1.1.22: Tanım aralığı içindeki her x elemanı için $f(x) \geq A$ olacak şekilde bir $A \in \mathbb{R}$ varsa, $f(x)$ fonksiyonuna bu aralık içinde alttan sınırlıdır denir. $A \in \mathbb{R}$ sayısına ise alt sınır denir. Öte yandan bu aralık içindeki her x elemanı için $A \leq f(x) \leq U$ olacak şekilde $A, U \in \mathbb{R}$ varsa, $f(x)$ fonksiyonuna sınırlı fonksiyon veya alttan ve üstten sınırlıdır denir.

Tanım 1.1.23: (f_n) dizisi A üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0$ öyle ki $\forall n \geq n_0$ ve $\forall x \in A$ için $\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$ [1].

Teorem 1.1.24: $\gamma : [a,b] \to A$ bir eğri ve (f_n) ise $\gamma([a,b])$ üzerinde tanımlı, sürekli fonksiyonların $\gamma([a,b])$ üzerinde f ye düzgün yakınsayan bir dizisi olsun. Bu durumda;

(i) $\int f_n \to \int f$ (γ üzerinde)

(ii) g_n dizileri γ üzerinde sürekli olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$, γ üzerinde düzgün yakınsıyorsa,

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n(z)\, dz$$

eşitlikleri vardır.

Tanım 1.1.25: $(a,b]$ üzerinde tanımlı, negatif olmayan, integrallenebilen f ve g fonksiyonları için a tek sonsuz süreksizlik noktası ve

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma$$

olsun.

(i) $0 < \gamma < \infty$ ise $\int_a^b f(x)\,dx$ ile $\int_a^b g(x)\,dx$ aynı karakterdedir.

(ii) $\gamma = 0$ ve $\int_a^b g(x)\,dx$ yakınsak ise $\int_a^b f(x)\,dx$ yakınsaktır.

(iii) $\gamma = 0$ ve $\int_a^b g(x)\,dx$ ıraksak ise $\int_a^b f(x)\,dx$ ıraksaktır.

Tanım 1.1.26: $A \subset \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. a noktasının her $\delta -$komşuluğunda A kümesinin a dan farklı en az bir elemanı varsa bu a noktasına A kümesinin bir yığılma noktası denir [1].

Örnek 1.1.2: $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in N \right\}$ kümesinin yığılma noktasını incelersek;

$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in N \right\}$ kümesinin yığılma noktası sıfırdır.

Tanım 1.1.27: Bir A kümesinin en sağda olan yığılma noktasına üst limit veya limit süperiyör denir ve $\limsup A$ veya $\overline{\lim} A$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde, A kümesinin en solda olan yığılma noktasına alt limit veya limit inferiyör denir. $\liminf A$ veya $\underline{\lim} A$ ile gösterilir [1].

Teorem 1.1.28: $\int_a^\infty f(x)dx$ yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists t_0 = t_0(\varepsilon)$ öyle ki $\forall t_2 > t_1 > t_0$ bağıntısını sağlayan her t_1, t_2 için

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

dır. Başka bir yazılışla

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ yakınsaktır} \Leftrightarrow \lim_{\substack{t_1 \to \infty \\ t_2 \to \infty}} \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx = 0$$

dır [1].

1.2. Nevanlinna kuramı ile ilgili genel tanımlar ve teoremler

R. Nevanlinna özellikle meromorf, yani sonlu karmaşık düzlemde kutup noktalarından başka tekil noktaları olmayan fonksiyonların karakteristik özellikleriyle ilgilenmiş, kendi adıyla anılan birinci ve ikinci esas teoremleri tanımlamıştır.

Ayrıca, kutup ve sıfır yerleriyle ilgili gösterimler belirtilmiştir. Tam fonksiyonun tanımından sonra tam ve meromorf fonksiyonların mertebe ve tip tanımları verilip sınıflandırmaları yapılmıştır. Bu bölümle ilgili daha fazla bilgi için [3] nolu kaynaktan yararlanılabilir.

Tanım 1.2.1: $f(z)$, $|z| \le R$ dairesinde $(0 < R < \infty)$ meromorf bir fonksiyon, $a_i\,(i = 1, 2, \ldots, M)$, $b_j\,(j = 1, 2, \ldots, N)$ sıra ile $|z| < R$ dairesinde sıfır ve kutup yerleri olmak üzere $z = re^{i\theta} (0 < r < R)$ ve $f(z) \neq 0, \infty$ ise

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(Re^{i\varnothing}\right)\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rrcos(\theta - \varnothing) + r^2}\, d\varnothing$$

$$+\sum_{i=1}^{M} \log\left|\frac{R(z - a_i)}{R^2 - \overline{a_i} z}\right| - \sum_{j=1}^{N} \log\left|\frac{R(z - b_j)}{R^2 - \overline{b_j} z}\right|$$

eşitliğine Poisson-Jensen formülü denir.

Tanım 1.2.2: $n(r,a)$, $f(z) = a$ denkleminin $|z| \le r$ dairesindeki köklerinin sayısını göstermektedir. $n(t, f)$ ve $n\left(t, \frac{1}{f}\right)$ sırasıyla $f(z)$ meromorf fonksiyonun $|z| \le t$ dairesindeki kutuplarının ve sıfırlarının mertebelerinin sayıları kadar sayılan sayılarını göstermek üzere,

$$N(R, \infty) = N(R, f) = \sum_{j=1}^{N} \log\frac{R}{|b_j|} = \int_0^R n(t, f)\frac{dt}{t}$$

$$N(R, 0) = N\left(R, \frac{1}{f}\right) = \sum_{i=1}^{M} \log\frac{R}{|a_i|} = \int_0^R n\left(t, \frac{1}{f}\right)\frac{dt}{t}$$

$$m(R,\infty)=m(R,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f|\,d\varnothing$$

$$m(R,0)=m\left(R,\frac{1}{f}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f}\right|d\varnothing$$

ifadeleri Nevanlinna gösterimleri olarak bilinir.

Tanım 1.2.3: $T(R,f)=m(R,f)+N(R,f)$ ve $T\left(R,\frac{1}{f}\right)=m\left(R,\frac{1}{f}\right)+N\left(R,\frac{1}{f}\right)$ olmak üzere,

$$T(R,f)=T\left(R,\frac{1}{f}\right)+\log|f(0)|$$

eşitliğindeki $T(R,f)$ gösterimi, $f(z)$ meromorf fonksiyonu karakteristiği olarak adlandırılır.

Teorem 1.2.4: a karmaşık bir sayı, $|f(0)-a|\neq 0,\infty$ ise

$$T\left(R,\frac{1}{f-a}\right)=T(R,f)+O(1)$$

eşitliği bu kuramda Nevanlinna'nın birinci temel teoremi olarak geçer.

Tanım 1.2.5: $f(z)$ meromorf fonksiyonunun mertebesi

$$p=\overline{\lim_{R\to\infty}}\frac{\log T(R,f)}{\log R}$$

olarak tanımlanır.

$$c=\overline{\lim_{R\to\infty}}\frac{T(R,f)}{R^p}$$

ifadesi de $f(z)$ meromorf fonksiyonun tipidir.

Teorem 1.2.6: $f(z)$, $|z|<R$ dairesinde sabit olmayan meromorf bir fonksiyon ve $a_1, a_2, \ldots, a_q$ değerleri farklı karmaşık sayıları olsunlar. Bu halde,

$$\sum_{i=1}^{q} m\left(R, \frac{1}{f-a_i}\right) + N\left(R, \frac{1}{f'}\right) \leq T(R, f') + S(R, f)$$

$$m(R, f) + \sum_{i=1}^{q} m\left(R, \frac{1}{f-a_i}\right) \leq 2T(R, f) - N_1(R, f) + S(R, f)$$

$$(q-1)T(R, f) \leq \sum_{i=1}^{q}\left(R, \frac{1}{f-a_i}\right) + \overline{N}(R, f) - N\left(R, \frac{1}{f'}\right) + S(R, f)$$

veya

$$(q-2)T(R, f) \leq \sum_{i=1}^{q} N\left(R, \frac{1}{f-a_i}\right) - N_1(R, f) + S(R, f)$$

dır.

1.3. Sonlu logaritmik mertebe

Bu bölümde bir f meromorfik fonksiyonu ve bu fonksiyonun karakteristik ifadesi olan $T(r, f)$ nin sonlu logaritmik mertebeleriyle ilgili bazı özellikler ifade edilecektir. Bu bölümde [4] nolu kaynaktan yararlanılmıştır.

Tanım 1.3.1: $S(r)$, $r>0$ için tanımlanan pozitif artan bir fonksiyon olsun. Eğer,

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log S(r)}{\log\log r} = \lambda$$

ise $S(r)$ fonksiyonunun sonlu logaritmik mertebesi λ dır. Yukarıdaki eşitsizlik sonsuz ise $S(r)$ fonksiyonunun logaritmik mertebesi sonsuzdur.

Tanım 1.3.2: $f(z)$, $\mathbb{C}$ düzleminde bir meromorf fonksiyon ise, bu f fonksiyonunun logaritmik mertebesi onun karakteristik ifadesi olan, $T(r,f)$ nin logaritmik mertebesidir.

Tanım 1.3.3: $f(z)$ meromorf bir fonksiyon olsun. Her $a \in \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ noktası $f(z) = a$ denkleminin köküdür. $f(z)$ fonksiyonunun $a-$noktalarının bir dizisi $\{z_j(a)\}$ olsun. Öyle ki $r_j(a) = |z_j(a)|$ olduğu durumda $r_j(a) \leq r_{j+1}(a)$ eşitsizliği vardır. $f(z)$ fonksiyonunun a noktalarının yakınsaklık logaritmik üssü $\rho_{\log}(a)$ olup

$$\rho_{\log}(a) = \inf\left\{ \mu \mid \mu > 0, \sum_j \frac{1}{|\log r_j(a)|^{\mu}} < \infty \right\}$$

dır.

BÖLÜM 2

Bu bölümde Nevanlinna kuramı için bazı temel teoremler, tanımlar, sonuçlar verilmiş olup geçen kavramlar için daha detaylı olarak [3] nolu kaynak incelenebilir.

İlk olarak Poisson-Jensen formülü verilip ispatlanacaktır. Bu formül Nevanlinna teoremi için çok önemli rol oynar.

2.1 Poisson-Jensen formülü

$f(z)$, $|z| \leq R$ meromorf bir fonksiyon, $f(z)$ fonksiyonu $|z| < R$ bölgesinde sırasıyla sıfır ve kutup yerleri a_i ($i = 1, 2, ..., M$), b_j ($j = 1, 2, \ldots, N$) olsunlar.

$z = re^{i\theta}$ $(0 < r < R)$ ve $f(z) \neq 0, \infty$

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(Re^{i\varnothing}\right)\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varnothing) + r^2} d\varnothing + \sum_{i=1}^{M} \log\left|\frac{R(z - a_i)}{R^2 - \bar{a}_i z}\right|$$

$$-\sum_{j=1}^{N} \log\left|\frac{R(z - b_j)}{R^2 - \bar{b}_j z}\right| \qquad (2.1.1)$$

ifadesine Poisson-Jensen formülü denir.

İspat: $w = z$ için $u = 0$ olacak şekilde $|u| < 1$ üzerine olan dönüşümü kullanalım. Şimdi

$$u = \frac{R(w - z)}{R^2 - \bar{z}w} \qquad (2.1.2)$$

eşitliğini yazalım. Burada, $|w| = R$ ye $|u| = 1$ karşılık gelir. (2.1.2) eşitliğinin her iki tarafının logaritması alınırsa,

$$\log u = \log \mathrm{R}\left(\mathrm{w}-\mathrm{z}\right)-\log(R^2-\bar{z}w)$$

elde edilir. Her iki tarafın türevi alırsa

$$\frac{du}{u}=\frac{dw}{w-z}+\frac{\bar{z}dw}{R^2-w\bar{z}}=\frac{\left(R^2-|z|^2\right)dw}{\left(R^2-w\bar{z}\right)\left(w-z\right)} \tag{2.1.3}$$

bulunur. Bu son eşitliğin her iki yanı $\log f\left(w\right)$ ile çarpılır ve $|w|=R$ eğrisi üzerinden integrali alınırsa

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R}\frac{\log f\left(w\right)}{w-z}dw+\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R}\frac{\bar{z}\log f\left(w\right)}{R^2-\bar{z}w}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R}\log f\left(w\right)\frac{\left(R^2-|z|^2\right)}{\left(R^2-\bar{z}w\right)\left(w-z\right)}dw$$

yazılır. $\log f\left(z\right)$, $|z|\leq R$ bölgesinde analitik olduğu için, Cauchy integral formülü gereğince, eşitliğin birinci tarafındaki ilk integralin değeri $\log f\left(z\right)$, ikinci integralin değeri sıfır olur. Dolayısıyla,

$$\log f\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R}\log f\left(w\right)\frac{\left(R^2-|z|^2\right)}{\left(R^2-\bar{z}w\right)\left(w-z\right)}dw \tag{2.1.4}$$

elde edilir. Buradaki ifadeler $|w|=R$, $w=Re^{i\varnothing}$, $dw=i\,\mathrm{Re}^{i\varnothing}\,d\varnothing$ ve $z=re^{i\theta}$ olduklarından

$$(R^2-\bar{z}w)(w-z)=\left(R^2-(re^{-i\theta}Re^{i\varnothing})\right)\left(Re^{i\varnothing}-re^{i\theta}\right)$$

$$=R\left(R-re^{i(\varnothing-\theta)}\right)\left(Re^{i\varnothing}-re^{i\theta}\right)$$

$$=Re^{i\varnothing}\left\{R^2-2Rr\cos(\varnothing-\theta)+r^2\right\}$$

olur. Bu (2.1.4) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\log f\left(z\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(Re^{i\varnothing}\right)\right|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\left(\theta-\varnothing\right)+r^2}d\varnothing \tag{2.1.5}$$

bulunur. $k = 0,\ 1,\ 2\ ,\ .\ .\ .$ için

$$\log f(z) = \log|\ f(z)| + i\left(\arg f(z) + 2k\pi\right)$$

olduğu (2.1.5) eşitliği ile düşünülür ve gerçel kısımları alınırsa

$$\log\left|f(z)\right| = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log\left|f\left(Re^{i\varnothing}\right)\right|\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rrcos(\theta - \varnothing) + r^2}d\varnothing \qquad (2.1.6)$$

sonucu elde edilir. Şimdi, $f(z)$ fonksiyonunun meromorf olduğunu

$$F(w) = f(w)\frac{\prod_{j=1}^{N}\left\{\dfrac{R(w-b_j)}{R^2 - \bar{b}_j w}\right\}}{\prod_{i=1}^{M}\left\{\dfrac{R(w-a_i)}{R^2 - \bar{a}_i w}\right\}} \qquad (2.1.7)$$

kabul edelim. Burada $|w| < R$ bölgesinde $f(w) \neq 0, \infty$ biçimindedir. Eğer $w = Re^{i\varnothing}$ ve $|a| < R$ ise $|w| = R$ çemberi üzerinde,

$$\left|\frac{R(w-a)}{R^2 - \bar{a}w}\right| = \left|\frac{w(w-a)}{(w\bar{w} - \bar{a}w)}\right| = \frac{|w-a|}{|\bar{w} - \bar{a}|} = \frac{|w-a|}{\left|\overline{w-a}\right|} = \frac{|w-a|}{|w-a|} = 1$$

yazılabileceğinden, $\left|F(w)\right| = |\ f(w)|$ olur. O halde, (2.1.5) eşitliğinde f yerine F yazılırsa,

$$\log F(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log F\left(Re^{i\varnothing}\right)\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rrcos(\theta - \varnothing) + r^2}d\varnothing \qquad (2.1.8)$$

olur. (2.1.7) eşitliğinin her iki yanının logaritması alınırsa

$$\log F(w) = \log f(w) + \sum_{j=1}^{N}\log\left\{\frac{R(w-b_j)}{R^2 - \bar{b}_j w}\right\} - \sum_{i=1}^{M}\log\left\{\frac{R(w-a_i)}{R^2 - \bar{a}_i w}\right\}$$

elde edilir. $\log F(w)$ yerine (2.1.8) eşitliğindeki değeri yazılır ve $w = z$ alınırsa

$$\log f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log F\left(Re^{i\varnothing}\right)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rrcos(\theta-\varnothing)+r^2}d\varnothing+\sum_{i=1}^{M}\log\left\{\frac{R(z-a_i)}{R^2-\bar{a}_i z}\right\}$$

$$-\sum_{j=1}^{N}\log\left\{\frac{R(z-b_j)}{R^2-\bar{b}_j z}\right\} \quad (2.1.9)$$

bulunur. $k=$ 0, 1 ,2 ,... için

$$\log f(z)=\log|f(z)|+i\left(\arg f(z)+2k\pi\right)$$

eşitliği göz önüne alınıp, $|z|=R$ çemberi üzerinde $|f(z)|=|F(z)|$ olduğu düşünülürse, (2.1.9) eşitliğinin her iki tarafının gerçel kısımlarından

$$\log|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(Re^{i\varnothing}\right)\right|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rrcos(\theta-\varnothing)+r^2}d\varnothing+\sum_{i=1}^{M}\log\left|\frac{R(z-a_i)}{R^2-\bar{a}_i z}\right|$$

$$-\sum_{j=1}^{N}\log\left|\frac{R(z-b_j)}{R^2-\bar{b}_j z}\right| \quad (2.1.10)$$

sonucu bulunur. Bu ifadeye Poisson-Jensen formülü denir.

Eğer $f(z)$ fonksiyonunun $|z|\leq R$ dairesinin içinde kutup ve sıfır yerleri yoksa (2.1.9) eşitliği

$$\log f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f\left(Re^{i\varnothing}\right)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rrcos(\theta-\varnothing)+r^2}d\varnothing$$

olarak yazılır. Bu eşitliğe Poisson formülü denir.

Poisson Jensen formülünün en önemli sonucu $z=0$ durumudur. $z=0$ iken $z=re^{i\theta}$ eşitliğinden $r=0$ olur. Böylece $f(0)\neq 0,\infty$ kabul edilirse (2.1.10) eşitliği

$$\log|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(Re^{i\varnothing}\right)\right|d\varnothing+\sum_{j=1}^{N}\log\frac{R}{|b_j|}-\sum_{i=1}^{M}\log\frac{R}{|a_i|} \quad (2.1.11)$$

bulunur. Buna da Jensen formülü denir. Burada, $a_i\left(i=1,2,...,M\right)$, $b_j\left(j=1,2,\ldots,N\right)$ sayıları $f\left(z\right)$ fonksiyonunun $\left|z\right|<R$ bölgesindeki sırasıyla sıfırları ve kutupları olup, her kutup ve sıfır mertebeleri sayıları kadar sayılarak toplama girmiştir.

Buraya kadar $z=0$ için $f\left(0\right)\neq 0$ olduğunu kabul etmiştik. Şimdi ise $z=0$ noktasının $f\left(z\right)$ fonksiyonunun p. mertebeden bir sıfır yeri olduğunu kabul edelim. Bu halde $F\left(z\right)=\dfrac{f\left(z\right)}{z^p}$ için $F\left(0\right)\neq 0$ olur. Buradan $f\left(z\right)$ fonksiyonunun Taylor açılımı

$$f\left(z\right)=A_p z^p+A_{p+1}z^{p+1}+...$$

ise $F(z)=A_p+A_{p+1}z+...$ ve $F(0)=A_p$ olur. $F\left(z\right)=\dfrac{f\left(z\right)}{z^p}$ eşitliğinin önce mutlak değeri alınıp sonra logaritmaya geçilirse

$$\log\left|F\left(z\right)\right|=\log\left|f\left(z\right)\right|-p\log\left|z\right|$$

elde edilir. Yani $\log\left|F\left(z\right)\right|=\log\left|f\left(z\right)\right|-p\log R$ olur. $z=0$ için $F\left(0\right)=A_p$ olup $\log\left|F\left(0\right)\right|=\log\left|A_p\right|$ yazılabileceğinden

$$\log\left|A_p\right|=\log\left|f\left(0\right)\right|-p\log R$$

olarak bulunur. $\log\left|f\left(0\right)\right|$ yerine Jensen formülündeki eşitliği yazılırsa

$$\log\left|A_p\right|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(Re^{i\varnothing}\right)\right|d\varnothing+\sum_{j=1}^{N}\log\frac{R}{\left|b_j\right|}-\sum_{i=1}^{M}\log\frac{R}{\left|a_i\right|}-p\log R$$

sonucu elde edilir. Eğer $z=0$ noktası, $f\left(z\right)$ fonksiyonunun p. mertebeden bir kutbu ise

$$f\left(z\right)=\frac{A_{-p}}{z^p}+...+\frac{A_{-1}}{z}+A_0+A_1z+A_2z^2+...$$

yazılabilir. $F(z)=z^p.f(z)$ fonksiyonu, $z=0$ noktasında sıfırdan farklı ve kutbu olmayan bir fonksiyondur. Buradan

$$F(z)=z^p\left[\frac{A_{-p}}{z^p}+\ldots+\frac{A_{-1}}{z}+A_0+A_1 z+\ldots\right]$$

$$=A_{-p}+..+A_{-1}z^{p-1}+A_0 z^p+\ldots$$

yazılabileceğinden $F(0)=A_{-p}$ ve $\left|F(0)\right|=\left|A_{-p}\right|$ bulunur. Böylece,

$$\log\left|F(0)\right|=\log\left|A_{-p}\right|$$

yazılır. $F\ (z)=z^p f(z)$ eşitliğinin her iki yanının mutlak değeri alınıp logaritmaya geçilirse

$$\log\left|F(z)\right|=\log\left|f(z)\right|+p\log|z|$$

veya

$$\log\left|F(z)\right|=\log\left|f(z)\right|+p\log R$$

elde edilir. $z=0$ için,

$$\log|\ f(0)|=\log|\ f(0)|+p\log R$$

olacağından $\log|\ f(0)|$ yerine Jensen formülündeki eşitliği yazılırsa

$$\log\left|A_{-p}\right|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(Re^{i\varnothing}\right)\right|d\varnothing+\sum_{j=1}^{N}\log\frac{R}{\left|b_j\right|}-\sum_{i=1}^{M}\log\frac{R}{\left|a_i\right|}+p\log R$$

sonucu bulunur.

2.2 Pozitif logaritma ve karakteristik fonksiyonlar

$x \geq 0$ için,

$$\log^+ x = \max\{\log x,\ 0\} = \begin{cases} \log|x|, & |x| \geq 1 \\ 0 & , 0 \leq |x| < 1 \end{cases}$$

ifadesine pozitif logaritma denir. Açıkca, $\log^+ x$ ifadesi $[0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan, sürekli bir fonksiyondur. Uygun bir şekilde $\log x = \log^+ x - \log^+ \dfrac{1}{x}$ ve $|\log x| = \log^+ x + \log^+ \dfrac{1}{x}$ olarak ifade edilebilir. Pozitif logaritmaya ait bazı önemli eşitsizlikler verilip ispatlanacaktır.

I. Durum: $i = 1, 2, \ldots, p$ için a_i sayıları pozitif sayılar olmak üzere,

$$\log^+(a_1 + a_2) \leq \log^+(a_1) + \log^+(a_2) + \log 2$$

veya daha genel olarak,

$$\log^+(a_1 + a_2 + \ldots + a_p) \leq \log^+(a_1) + \log^+(a_2) + \ldots + \log^+(a_p) + \log p \qquad (2.2.1)$$

eşitsizliği vardır.

İspat: $a_1 \leq a_2$ olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\log(a_1 + a_2) \leq \log(a_2 + a_2) = \log 2a_2 = \log 2 + \log a_2$$

yazılabilir. Eğer $a_2 \geq 1$ ise pozitif logaritmanın tanımından $\log a_2 = \log^+ a_2$ ve $a_1 + a_2 \geq 1$ olup $\log(a_1 + a_2) = \log^+(a_1 + a_2)$ eşitliğinden

$$\log^+(a_1 + a_2) \leq \log^+ a_2 + \log 2$$

yazılabileceği açıktır. Diğer taraftan $a_2 < 1$ ise $a_1 + a_2 < 2$ ve $\log^+ a_2 = 0$ olup öyleyse

$$\log^+(a_1 + a_2) \leq \log^+ a_2 + \log 2$$

eşitsizliği yine sağlanır. Eşitsizliğin ikinci yanına $\log^{+}a_1$ eklersek eşitsizlik daha da kuvvetlenir. Yani

$$\log^{+}\left(a_1+a_2\right)\le \log^{+}a_1+\log^{+}a_2+\log 2$$

sonucu bulunur. Genel hal için benzer işlemlerle ispat yapılabilir.

II. Durum: $i=1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,p$ için a_i sayıları pozitif sayılar olmak üzere

$$\log^{+}\left(a_1a_2\ldots a_p\right)\le \log^{+}a_1+\log^{+}a_2+\ldots+\log^{+}p \qquad (2.2.2)$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Analiz bilgilerinden

$$\log\left(a_1a_2\right)=\log a_1+\log a_2$$

olduğu bilinir. Şimdi $a_1\le a_2$ olduğunu varsayalım. Eğer $a_1\ge 1$ ise, $a_2\ge 1$ olacağından $a_1a_2\ge 1$ olup pozitif logaritmanın tanımından dolayı $\log a_1=\log^{+}a_1$ $\log a_2=\log^{+}a_2$ ve $\log\left(a_1a_2\right)=\log^{+}(a_1a_2)$ olarak yazılabilir. Bu durumda,

$$\log^{+}(a_1a_2)=\log^{+}a_1+\log^{+}a_2$$

elde edilir. Eğer $a_1\le 1$ ise $a_1.a_2\le a_2$ eşitsizliğinden,

$$\log^{+}\left(a_1a_2\right)\le \log^{+}a_2$$

elde edilir. Son eşitsizliğin ikinci yanına $\log^{+}a_1$ eklersek eşitsizlik daha da kuvvetleneceğinden

$$\log^{+}(a_1a_2)\le \log^{+}a_1+\log^{+}a_2$$

eşitsizliği vardır. Bu ise istenilen sonuçtur. Genel hal için ispat tümevarım yöntemiyle yapılır.

Pozitif logaritmanın tanımı gereğince, $|f|>0$ ise

$$\log|f| = \log^+|f| - \log^+\left|\frac{1}{f}\right|$$

olacağı açıktır. Bu durumda,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(Re^{i\varnothing}\right)\right|d\varnothing = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(Re^{i\varnothing}\right)\right|d\varnothing - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f\left(Re^{i\varnothing}\right)}\right|d\varnothing$$

yazılır. Bu eşitlik Jensen formülünde kullanılırsa

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f|d\varnothing + \sum_{j=1}^{N}\log\frac{R}{|b_j|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{\mathrm{f}}\right|d\varnothing + \sum_{i=1}^{M}\log\frac{R}{|a_i|} + \log|f(0)|$$

olur. Buradaki integraller $\log^+|f|$ ve $\log^+\left|\frac{1}{f}\right|$ ifadelerinin ortalama değerleri olup

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f|d\varnothing = m(R, f) = m(R, \infty)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f}\right|d\varnothing = m\left(R, \frac{1}{f}\right) = m(R, 0)$$

ile gösterilir. $n(t, f)$ ve $n\left(t, \frac{1}{f}\right)$, $f(z)$ meromorf fonksiyonunun $|z| < t$ dairesinde sırayla kutup ve sıfırlarının mertebeleri sayıları kadar sayılan sayılarını göstersin. Buna göre

$$\sum_{i=1}^{m}\log\frac{R}{|a_i|} = m\log R - \log|a_1| - \log|a_2| - \ldots - \log|a_m|$$

$$= \log R^m - \log|a_1| - \log|a_2| - \ldots - \log|a_m|$$

$$= \left(\log|a_2| - \log|a_1|\right) + 2\left(\log|a_3| - \log|a_2|\right) + \ldots$$

$$+(m-1)\left(\log|a_m| - \log|a_{m-1}|\right) + m\left(\log R - \log|a_m|\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m-1} i\left(\log|a_{i+1}|-\log|a_i|\right)+m\left(\log R-\log|a_m|\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m-1}\int_{|a_i|}^{|a_{i+1}|}\frac{dt}{t}+m\int_{|a_m|}^{R}\frac{dt}{t}$$

olur. $f(z)$ fonksiyonunun $|z|\le t$ yarıçaplı dairesindeki sıfırlarının sayısı $n\left(t,\frac{1}{f}\right)$ olsun. Buna göre, $n\left(t,\frac{1}{f}\right)=0$ iken $0\le t\le|a_1|$, $n\left(t,\frac{1}{f}\right)=i$ iken $|a_i|\le t<|a_{i+1}|$, $i=1,2,\ldots,m-1$ ve $n\left(t,\frac{1}{f}\right)=m$ durumunda iken $|a_m|\le t<R$ olur. Buradan,

$$\sum_{i=1}^{m}\log\frac{R}{|a_i|}=\int_0^R n\left(t,\frac{1}{f}\right)\frac{dt}{t}$$

yazılır. Benzer olarak $|z|\le t$ yarıçaplı çember içindeki kutupların sayısını $n(t,f)$ ile gösterirsek

$$\sum_{j=1}^{N}\log\frac{R}{|b_j|}=\int_0^R n(t,f)\frac{dt}{t}$$

olur. Bunlar da

$$N(R,\infty)=N(R,f)=\sum_{j=1}^{N}\log\frac{R}{|b_j|}=\int_0^R n(t,f)\frac{dt}{t}$$

ve

$$N(R,0)=N\left(R,\frac{1}{f}\right)=\sum_{i=1}^{M}\log\frac{R}{|a_i|}=\int_0^R n\left(t,\frac{1}{f}\right)\frac{dt}{t}$$

işaretleriyle gösterilirse, daha önce belirtilen Jensen formülü, gerekli ifadelerin yerine yazılmasıyla

$$m\left(R,f\right)+N\left(R,f\right)=m\left(R,\frac{1}{f}\right)+N\left(R,\frac{1}{f}\right)+\log\left|f\left(0\right)\right| \tag{2.2.3}$$

şeklini alır. Eğer $m\left(R,f\right)+N(R,f)=T\left(R,f\right)$ ve $m\left(R,\frac{1}{f}\right)+N\left(R,\frac{1}{f}\right)=T\left(R,\frac{1}{f}\right)$ ile gösterilirse, (2.2.3) ifadesi

$$T\left(R,f\right)=T\left(R,\frac{1}{f}\right)+\log\left|f\left(0\right)\right|$$

olur. Burada $f\left(0\right)\neq 0,\infty$ olmalıdır. $T\left(R,f\right)$ gösterimine $f\left(z\right)$ meromorf fonksiyonunun karakteristiği denir.

a, sonlu bir sayı olsun.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f-a}\right|d\varnothing=m\left(R,\frac{1}{f-a}\right)=m\left(R,a\right)$$

ve

$$\sum_{i=1}^{M}\log\frac{R}{|c_i|}=N\left(R,\frac{1}{f-a}\right)=N(R,a)$$

ile gösterilir. Burada c_i değerleri $f-a=0$ denkleminin kökleri göstermektedir. Böylece, $f-a$ fonksiyonunun karakteristiği,

$$T(R,a)=m\left(R,a\right)+N(R,a)=T\left(R,\frac{1}{f-a}\right)$$

şeklini alır. Burada, $f\left(0\right)-a\neq 0,\infty$ olduğu kabul edilecektir. Şimdi de, pozitif logaritmanın iki özelliğini yazıp ispat edelim.

I. Durum: $a_1,a_2,...,a_p$ karmaşık sayılarsa,

$$\log^+\prod_{i=1}^{p}|a_i|\leq\sum_{i=1}^{p}\log^+|a_i| \tag{2.2.4}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : $p=1$ için eşitliğin sağlanacağı açıktır.

$p=2$ için $\log^+|a_1.a_2| \le \log^+|a_1| + \log^+|a_2|$ olacağını göstermeliyiz. Bunun için $|a_1| \le |a_2|$ olduğunu kabul edelim.

i. $0<|a_1| \le |a_2|<1$ olsun. Bu durumda $|a_1.a_2|=|a_1|.|a_2|<1$ olacağından, pozitif logaritmanın tanımı gereğince, $\log^+|a_1a_2|=0$ olur. $|a_1|<1$ ve $|a_2|<1$ eşitliğinden

$$\log^+|a_1|=0 \text{ ve } \log^+|a_2|=0$$

olup

$$\log^+|a_1a_2|=\log^+|a_1|+\log^+|a_2|$$

sonucu bulunur.

ii. $1<|a_1| \le |a_2|$ olsun. Bu durumda $|a_1a_2|=|a_1||a_2|>1$ olacağı açıktır. Öyleyse pozitif logaritmanın tanımına göre

$$\log^+|a_1a_2|=\log|a_1a_2|$$

yazılır. Öte yandan $1<|a_1| \le |a_2|$ olup $\log^+|a_1|=\log|a_1|$ ve $\log^+|a_2|=\log|a_2|$ $\log|a_1a_2|=\log|a_1|+\log|a_2|$ eşitsizliklerinden

$$\log^+|a_1a_2|=\log^+|a_1|+\log^+|a_2|$$

sonucu bulunur.

iii. $|a_1| \le 1$ olsun. Bu durumda $|a_1a_2|=|a_1||a_2| \le |a_2|$ olacağı açıktır. Her iki yanın pozitif logaritması alınırsa

$$\log^+|a_1a_2| \le \log^+|a_2|$$

elde edilir. Son yazılan eşitsizliğin ikinci yanına $\log^+|a_1|$ değerini eklersek eşitsizlik daha da kuvvetleneceğinden

$$\log^+|a_1a_2| \leq \log^+|a_1| + \log^+|a_2|$$

şeklinde bulunur. Sonuç olarak, tümevarım yöntemiyle

$$\log^+\prod_{i=1}^{p}|a_i| \leq \sum_{i=1}^{p}\log^+|a_i|$$

eşitsizliğini elde etmek kolaydır.

II. Durum: $a_1, a_2, ..., a_p$ karmaşık sayılar olmak üzere

$$\log^+\left|\sum_{i=1}^{p}a_i\right| \leq \log^+\left(p\max|a_i|\right) \leq \sum_{i=1}^{p}\log^+|a_i| + \log p \qquad (2.2.5)$$

eşitsizliği vardır.

İspat: $p=1$ için yukarıdaki eşitsizliğin doğruluğu aşikardır. $p=2$ için eşitsizliğin doğruluğunu gösterelim. Bunun için de $|a_1| \leq |a_2|$ olduğunu kabul edelim. Üçgen eşitsizliğine göre $|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$ yazılır ve $|a_1| \leq |a_2|$ olduğu düşünülürse $|a_1 + a_2| \leq 2|a_2|$ olur. Son eşitsizliğin her iki yanının logaritması alınırsa

$$\log|a_1 + a_2| \leq \log\left(|a_1| + |a_2|\right) \leq \log 2|a_2| = \log 2 + \log|a_2| \qquad (2.2.6)$$

şeklinde bulunur. $|a_2| \geq 1$ olduğunu kabul edelim. $0 < |a_1|$ olduğundan $|a_1| + |a_2| > 1$ olacağı açıktır. O halde pozitif logaritmanın tanımına göre

$$\log\left(|a_1| + |a_2|\right) = \log^+\left(|a_1| + |a_2|\right) \text{ ve } \log|a_2| = \log^+|a_2|$$

yazılabileceği gibi bu yukarıdaki eşitlikler (2.2.6) eşitsizliğinde yerine yazılır ve $\log^+|a_1 + a_2| = \log^+\left(|a_1| + |a_2|\right)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\log^+|a_1 + a_2| \leq \log 2 + \log^+|a_2|$$

şeklinde bulunur. Şimdi de $0<|a_1|\le|a_2|<1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $|a_1+a_2|\le|a_1|+|a_2|<1+1=2$ yani $|a_1+a_2|<2$ olur. $|a_2|<1$ olduğundan, pozitif logaritma tanımına göre $\log^+|a_2|=0$ yazılır. Böylece,

$$\log^+|a_1+a_2|\le\log 2+\log^+|a_2|$$

eşitsizliğinden $|a_1+a_2|<2$ ve $\log^+|a_2|=0$ olup

$$\log^+|a_1+a_2|<\log 2$$

şeklinde eşitsizlik yine doğru olur. Kısaca, $|a_2|<1$ eşitsizliğinden de

$$\log^+|a_1+a_2|\le\log^+|a_2|+\log 2$$

yazılır. Sonuç olarak, tümevarım yöntemiyle

$$\log^+\left|\sum_{i=1}^{p}a_i\right|\le\log^+\left(p\max|a_i|\right)\le\sum_{i=1}^{p}\log^+|a_i|+\log p$$

eşitsizliğini elde etmek kolaydır. (2.2.4) ve (2.2.5) eşitsizlikleri $f_1(z), f_2(z),..., f_p(z)$ meromorf fonksiyonlarına uygulanır ve ortalama değerleri alınırsa

$$m\left(R,\ f_1f_2\dots f_p\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f_1f_2\dots f_p|d\varnothing$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{i=1}^{p}\log^+|f_i|\right)d\varnothing$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f_i|d\varnothing\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{p}m(R,\ f_i)$$

elde edilir. İlk ve son terimlerden

$$m\left(R,\prod_{i=1}^{p} f_i(z)\right)\leq \sum_{i=1}^{p} m\left(R, f_i(z)\right)$$

sonucu bulunur. Ayrıca,

$$m\left(R, f_1+f_2+\ldots+f_p\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f_1+f_2+\ldots+f_p\right|d\varnothing$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{i=1}^{p}\log^+\left|f_i\right|\right)d\varnothing+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log p\mathrm{d}\varnothing$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f_i\right|d\varnothing\right)+\frac{1}{2\pi}\varnothing\log p\,\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f_i\right|d\varnothing\right)+\log p$$

$$=\sum_{i=1}^{p} m\left(R, f_i\right)+\log p$$

olarak yazılabilir. İlk ve son terimlerden

$$m\left(R,\sum_{i=1}^{p} f_i(z)\right)\leq \sum_{i=1}^{p} m\left(R, f_i(z)\right)+\log p$$

şeklinde bulunur. Eğer $f(z)$, $f_i(z)$ fonksiyonlarının toplamı veya çarpımı ise, $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasındaki kutbunun mertebesi en fazla, $f_i(z)$ fonksiyonlarının z_0 noktasındaki kutuplarının mertebeleri toplamı kadardır. Buradan,

$$N\left(R,\sum_{i=1}^{p} f_i(z)\right)\leq \sum_{i=1}^{p} N\left(R, f_i(z)\right) \quad \text{ve} \quad N\left(R,\prod_{i=1}^{p} f_i(z)\right)\leq \sum_{i=1}^{p} N(R, f_i(z))$$

eşitsizlikleri yazılır. Bu yapılanlardan

$$T\left(R,\sum_{i=1}^{p} f_i(z)\right)\le \sum_{i=1}^{p} T\left(R, f_i(z)\right)+\log p \text{ ve } T\left(R,\prod_{i=1}^{p} f_i(z)\right)\le \sum_{i=1}^{p} T\left(R, f_i(z)\right)$$

elde edilir.

Tanım 2.2.1: $z \to a$ için $f(z)=O(1)$ gösteriminin anlamı, a noktasının bir komşuluğunda $f(z)$ fonksiyonunun sınırlı olmasıdır. Yani, $|z-a|<\delta$ için $|f(z)|<A$ olacak şekilde z değişkenine bağlı olmayan A ve δ pozitif sayıları vardır.

Bu tanımdan sonra Nevanlinna'nın birinci temel teoremini ifade edip ispatlayabiliriz.

Teorem 2.2.2: a, herhangi bir karmaşık sayı $|f(0)-a|$, sıfır ve sonsuzdan farklı ise

$$T\left(R,\frac{1}{f-a}\right)=T(R,f)+O(1)$$

şeklindedir.

İspat: Önce, $T(R,f-a)=T(R,f)+O(1)$ olduğunu gösterelim. $f-a$ ile f meromorf fonksiyonlarının kutupları aynı olduğundan $N(R,f-a)=N(R,f)$ olduğu hemen yazılabilir. Ayrıca $|f-a|\le|f|+|a|$ eşitsizliğinin her iki yanının pozitif logaritmasından

$$\log^+|f-a|-\log^+|f|\le\log^+|a|+\log 2 \tag{2.2.7}$$

elde edilir. $|f|\le|f-a|+|a|$ eşitsizliğinden benzer olarak

$$\log^+|f|-\log^+|f-a|\le\log^+|a|+\log 2 \tag{2.2.8}$$

olur. (2.2.7) ve (2.2.8) eşitsizliklerinin ortalama değerleri alınırsa, her iki taraftan

$$|m(R,f-a)-m(R,f)|\le\log^+|a|+\log 2$$

elde edilir. Böylece, $m(R, f-a) = m(R, f) + O(1)$ yazılır. Bu ifade, yukarıdaki $N(R, f-a) = N(R, f)$ ile taraf tarafa toplanırsa, karakteristik fonksiyonun tanımıyla

$$T(R, f-a) = T(R, f) + O(1)$$

eşitliği bulunur. $T(R, f-a) = T(R, 1/f-a) + O(1)$ olduğu göz önüne alınırsa, Nevanlinna'nın birinci temel teoremi

$$T\left(R, \frac{1}{f-a}\right) = T(R, f) + O(1)$$

elde edilir.

Teorem 2.2.3: $f(z)$, $|z| < R$ bölgesinde meromorf bir fonksiyon, $a_1, a_2, \ldots, a_q$ farklı karmaşık sayıları sıfır ve sonsuz değilse,

$$\sum_{i=1}^{q} \mathrm{T}\left(\mathrm{R}, \frac{1}{f-\mathrm{a_i}}\right) = qT(R, f) + O(1) \qquad (2.2.9)$$

eşitliği vardır.

İspat: Nevanlinna'nın

$$T\left(R, \frac{1}{f-a}\right) = T(R, f) + O(1)$$

şeklindeki birinci temel teoreminden anlaşılacağı gibi $T(R, f)$ karakteristik fonksiyonu a karmaşık sayısından bağımsızdır. O halde

$$T\left(R, \frac{1}{f-a_i}\right) = T(R, f) + O(1)$$

eşitliği yazılabilir. Buradan da,

$$\sum_{i=1}^{q} T\left(R, \frac{1}{f - a_i}\right) = \sum_{i=1}^{q} \left[T(R, f) + O(1)\right] = qT(R, f) + O(1)$$

sonucu elde edilir.

Örnek 2.2.1: $c \neq 0$ olmak üzere,

$$f(z) = c\frac{z^p + \ldots + a_p}{z^q + \ldots + b_q}$$

rasyonel fonksiyonunu göz önüne alalım.

i. $p > q$ olsun. Bu halde, rasyonel fonksiyonun payının derecesi paydanın derecesinden büyük olduğundan $z \to \infty$ için $f(z) \to \infty$ olur. a sonlu bir sayı olduğunda $r > r_0$ için,

$$m(R, a) = m\left(r, \frac{1}{f(z) - a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|\frac{1}{f(z) - a)}\right| d\varnothing = 0$$

yazılabileceğinden ilk ve son terimlerden $m(R, a) = 0$ bulunur. $f(z) = a$ denkleminin, $t > t_0$ olduğunda $n(t, a) = p$ olacak şekilde p tane kökü olacağı açıktır. Böylece, $r \to \infty$ için

$$N(R, a) = \int_0^R n(t, a)\frac{dt}{t} = p\log R + O(1)$$

olur. $a \neq \infty$ ise $m(R, a) = O(1)$ ve $N(R, a) = p\log R + O(1)$ yazılabileceğinden

$$T(R, f) = p\log R + O(1)$$

sonucu yine bulunur.

ii. $p < q$ olsun. Bu durumda ise $z \to \infty$ için $f(z) = 0$ olur. Dolayısıyla $a \neq 0$ ve $z \to \infty$ için,

$$m(R,a)=m\left(r,\ \frac{1}{f(z)-a}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f(z)-a)}\right|d\varnothing=O(1)$$

yazılır. İlk ve son terimlerden $m(R,a)=O(1)$ elde edilir. Öte yandan $p<q$ iken $f(z)=a$ denkleminin q tane kökü vardır. O halde karakteristik fonksiyon

$$T(R,f)=m(R,a)+N(R,a)=q\log R+O(1)$$

dır.

iii. $p=q$ olsun. Bu durumda $a\neq c$ olduğunu varsayalım. Aksi halde, yani $a=c$ olursa, fonksiyonun derecesi düşer, hatta $z\to\infty$ için $f(z)=c$ olur. Böylece, $a\neq c$ olmak üzere

$$m(R,a)=O(1)\ \text{ ve }\ N(R,a)=q\log R+O(1)$$

sonucu elde edilir. i, ii ve iii sonuçlarını bir arada söylemek için $d=\max(p,q)$ denirse, $a\neq f(\infty)$

$$T(R,f)=d\log R+O(1)$$

$$N(R,a)=d\log R+O(1)\ \text{ ve }\ m(R,a)=O(1)$$

ifadeleri yazılır. Eğer $0<c<d$ olmak üzere, $f(z)=a$ denkleminin, ∞ daki sıfırının katlılığı c ise

$$n(t,a)=d-c$$

$d-c$ tane kökü vardır. Böylece,

$$|f(z)-a|=|(z-z')^c.g(z)|=|(z-z')^c|.|g(z)|$$

$$=R^c.|g(z)|$$

$$\log^{+}\left|f(z)-a\right| = c.\log^{+}R+\log^{+}\left|g(z)\right|$$

yazılır. Dolayısıyla,

$$m(R,a)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log^{+}\left|f(z)-a\right|d\varnothing = c\log R+O(1)$$

olur. İlk ve son terimlerden $m(R,a)=c\log R+O(1)$ bulunur. Ayrıca, sayım fonksiyonu $N(R,a)=(d-c)\log R+O(1)$ olacağından

$$T(R,f)=m(R,a)+N(R,a)=c\log R+O(1)+(d-c)\log R+0(1)$$

$$=d\log R+O(1)$$

bulunur. Yani

$$T(R,f)=d\log R+O(1)$$

yazılır. Şimdi de bir örnekle, $f(z)=e^{z}$ fonksiyonunun karakteristiğini bulmaya çalışalım. $z=re^{i\theta}=r(cos\theta+i\sin\theta)$ olduğu kabul edilirse, $f(z)=e^{rcos\theta+irsin\theta}$ yazılır. Böylece,

$$\left|f(z)\right|=\left|e^{r\cos\theta}e^{irsin\theta}\right|=e^{rcos\theta}\sqrt{cos^{2}(rsin\theta)+sin^{2}\ (rsin\theta)}=e^{rcos\theta}$$

yazılır. Buradan da

$$\log\left|f(z)\right|=rcos\theta$$

$$m(r,\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log^{+}\left|f(z)\right|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}rcos\theta d\theta$$

$$=\frac{r}{2\pi}\sin\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{r}{\pi}$$

bulunur. $f(z)$ tam fonksiyon olduğundan $N(R,\infty)=0$ olur. Böylece

$$T(r,f)=m(r,\infty)+N(r,\infty)=\frac{r}{\pi}$$

sonucu elde edilir. Şimdi de $f(z)=a$ ise, yani $e^z=a$ olması halinde fonksiyonun karakteristiğini bulalım. Bu durumda $e^z=a$ iken $(a\neq 0,\infty)$ z_0 bir kök ise $e^{z_0}=a$ yazılır. Böylece bütün kökler $z=z_0+2k\pi i$ (k tam sayı) şeklindedir. Dolayısıyla $|z|<t$ dairesinde fonksiyonun köklerinin sayısı $\frac{t}{\pi}$ olup $N(r,\infty)=\frac{r}{\pi}+O(\log r)$ şeklindedir. (e^z tam fonksiyon olduğundan $\log r$ ile sınırlıdır.) Aynı şekilde,

$$m(r,\infty)=O(\log r)$$

olacağından

$$T(r,f)=\frac{r}{\pi}+O(\log r)$$

bulunur.

2.3 Karakteristik fonksiyonun özellikleri

Bu bölümde Nevanlinna'nın karakteristik ifadelesi olan $T(r,f)$ için aşağıda verilen belli eşitsizlikler elde edilecektir. Daha fazla bilgi için [5] nolu kaynaktan yararlanılabilir.

I. Durum: $T(R,f_1+f_2)\leq T(R,f_1)+T(R,f_2)+\log 2$.

İspat: $N(R,f_1+f_2)\leq N(R,f_1)+N(R,f_2)$ dir. Çünkü f_1+f_2 nin her kutbu f_1 ve f_2 den en az birinin kutbu olup, f_1 ile f_2 nin ortak bir kutbu, f_1+f_2 için ya adi bir nokta ya da yine kutup olabilir. Diğer yandan,

$$|f_1+f_2|\leq|f_1|+|f_2| \quad \text{ve} \quad \log^+(a_1+a_2)\leq\log^+a_1+\log^+a_2+\log 2$$

özelliğinden

$$\log^{+}|f_1+f_2| \le \log^{+}|f_1| + \log^{+}|f_2| + \log 2$$

olur ki, ortalama değerleri alınırsa

$$m(R, f_1+f_2) \le m(R, f_1) + m(R, f_2) + \log 2$$

ve taraf tarafa toplama ile

$$m(R, f_1+f_2) + N(R, f_1+f_2) \le m(R, f_1) + N(R, f_1) + m(R, f_2) + N(R, f_2) + \log 2$$

bulunur. Bu da istenilen eşitsizliktir.

II. Durum: $T(R, f_1 f_2) \le T(R, f_1) + T(R, f_2)$.

İspat: Sayım fonksiyonlarının özelliğinden

$$N(R, f_1 f_2) \le N(R, f_1) + N(R, f_2)$$

dır. Çünkü, $f_1 f_2$ nin her kutbu, f_1 ve f_2 den en az birisinin kutbudur. f_1 in kutbu f_2 nin sıfırı ise bu takdirde adi bir nokta olur. Diğer taraftan

$$\log^{+}|f_1 f_2| \le \log^{+}|f_1| + \log^{+}|f_2|$$

ortalama değerler için bu son eşitsizlik var olacağından

$$m(R, f_1 f_2) \le m(R, f_1) + m(R, f_2)$$

ve buradan taraf tarafa toplama ile

$$m(R, f_1 f_2) + N(R, f_1 f_2) \le m(R, f_1) + N(R, f_1) + m(R, f_2) + N(R, f_2)$$

olur ki, bu da istenilen bağıntıdır.

III. Durum: $T\left(R, \dfrac{f_1}{f_2}\right) \le T(R, f_1) + T(R, f_2) - \log|f_2(0)|$. (2.3.1)

İspat: Karakteristik fonksiyonunda gerekli işlemler yapılırsa

$$T\left(R,\ f_1.\frac{1}{f_2}\right) \le T\left(R,\ f_1\right)+T\left(R,\frac{1}{f_2}\right)$$

eşitsizliği elde edildikten sonra $T\left(R,\ f\right)=T\left(R,\frac{1}{f}\right)+\log\left|f\left(0\right)\right|$ eşitliğinden

$$T\left(R,\frac{1}{f_2}\right)=T\left(R,\ f_2\right)-\log\left|f_2\left(0\right)\right| \qquad (2.3.2)$$

yazılır. (2.2.9) eşitliği (2.2.8) eşitsizliğinde yerine yazılarak istenen sonuç elde edilir.

IV. Durum: $T\left(R,\ f^n\right)\le n.T\left(R,\ f\right)$ eşitsizliği mevcuttur.

İspat: II. Durumun genelleştirilmesi ile yapılabilir.

Örnek 2.3.1: $f\left(z\right),\ \left|z\right|<R$ de meromorf bir fonksiyon ve a sonlu bir sayı ise

$$T\left(R, af\right)=T\left(R,\ f\right)+O\left(1\right)$$

eşitliği vardır. Eğer $g\left(z\right)=\left(a\,f+b\right)/\left(c\,f+d\right)$ ise, $T\left(R,g\right)=T\left(R,\ f\right)+O\left(1\right)$ olur. Burada a,b,c ve d birer sabit olup, $ad-bc\neq 0$, $f\left(0\right)\neq\infty$, $g(0)\neq\infty$ alınacaktır.

İspat: Pozitif logaritmanın özelliğinden

$$\log^+\left|af\right|\le\log^+\left|f\right|+\log^+\left|a\right| \quad \text{ve} \quad \log^+\left|f\right|=\log^+\left|af.\frac{1}{a}\right|\le\log^+\left|af\right|+\log^+\left|\frac{1}{a}\right|$$

eşitsizlikleri yazılır. Böylece, ilk eşitsizlikten

$$\log^+\left|af\right|-\log^+\left|f\right|\le\log^+\left|a\right|\le\log^+\left|a\right|+\log^+\left|\frac{1}{a}\right|$$

ve ikinci eşitsizlikten

$$\log^+\left|f\right|-\log^+\left|af\right|\le\log^+\left|\frac{1}{a}\right|\le\log^+\left|a\right|+\log^+\left|\frac{1}{a}\right|$$

elde edilir. Bu eşitsizliklerin her iki tarafının ortalama değeri alınırsa

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|af|\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f|\,d\theta\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\log^+|a|+\log^+\left|\frac{1}{a}\right|\right)d\theta$$

$$m(R,af)-m(R,f)\le\log^+|a|+\log^+\left|\frac{1}{a}\right|,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f|\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|af|\,d\theta\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\log^+|a|+\log^+\left|\frac{1}{a}\right|\right)d\theta$$

ve

$$m(R,f)-m(R,af)\le\log^+|a|+\log^+\left|\frac{1}{a}\right|$$

eşitsizlikleri bulunur. Bulunan bu son iki eşitsizlikten de

$$\left|m(r,af)-m(R,f)\right|\le\log^+|a|+\log^+\left|\frac{1}{a}\right|$$

olur. Buradan, $m(R,af)=m(R,f)+O(1)$ bulunur. Diğer yandan af ile f meromorf fonksiyonlarının kutupları aynı olduğundan $N(R,af)=N(R,f)$ şeklindedir. Son iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa

$$m(R,af)+N(R,af)=m(R,f)+N(R,f)+O(1)$$

veya

$$T(R,af)=T(R,f)+O(1)$$

bulunur. Şimdi de $T(R,g)=T(R,f)+O(1)$ olduğunu gösterelim. Bunun için önce $T(R,af+b)=T(R,af)+O(1)$ eşitliğinin varlığını ispatlayalım. Pozitif logaritmanın özelliğinden

$$\log^+|af+b|\le\log^+|af|+\log^+|b|+\log 2$$

veya

$$\log^+|af+b|-\log^+|af|\le\log^+|b|+\log 2$$

yazılır. Ayrıca $|af|=|(af+b)-b|$ olarak yazılabileceğinden

$$\log^+|af|=\log^+|(af+b)-b|\le\log^+|af+b|+\log|-b|+\log 2$$

veya

$$\log^+|af|-\log^+|af+b|\le\log^+|b|+\log 2$$

elde edilir. Bu eşitsizliklerin ortalama değerleri alınırsa

$$m(R,af+b)-m(R,af)\le\log^+|b|+\log 2$$

ve

$$m(R,af)-m(R,af+b)\le\log^+|b|+\log 2$$

bulunur. Buradan, $m(R,af+b)=m(R,af)+O(1)$ olur. $af+b$ ile af meromorf fonksiyonları aynı kutuplara sahip olduğundan $N(R,af+b)=N(R,af)$ yazılır. Bulunan son iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa

$$m(R,af+b)+N(R,af+b)=m(R,af)+N(R,af)+O(1)$$

veya

$$T(R,af+b)=T(R,af)+O(1)$$

bulunur. Benzer ispat yöntemiyle $T\left(R,1/(cf+d)\right)=T(R,f)+O(1)$ olduğu da gösterilebilir. Bu yazılan eşitsizlikler göz önüne alınırsa

$$T(R,g)=T\left(R,\frac{af+b}{cf+d}\right)=T\left(R,\frac{b-\left(ad/c\right)}{cf+d}+\frac{a}{c}\right)=T\left(R,\frac{b-\left(ad/c\right)}{cf+d}\right)+O(1)$$

$$=T\left(R,\frac{1}{cf+d}\right)+O(1)$$

$$=T(R,f)+O(1)$$

sonucuna varılır.

Teorem 2.3.1 Nevanlinna'nın $T(r,f)$ karakteristik fonksiyonu, $\log r$ ifadesinin konveks artan bir fonksiyonudur.

İspat: Bu teoremi ilk önce Rolf Nevanlinna ispatlamıştır. H. Cartan ise şu ispatı vermiştir. $0<r<R$ olsun. $f(z)$, $|z|<R$ bölgesinde meromorf bir fonksiyon ise, önce

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_{O}^{2\pi}N(r,e^{i\theta})d\theta+\log^{+}|f(0)|$$

olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\log|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_{O}^{2\pi}\log|f(\mathrm{R}e^{i\varnothing})|+\sum_{i=1}^{N}\log\frac{R}{|b_j|}-\sum_{i=1}^{M}\log\frac{R}{|a_i|}$$

eşitliği ile verilen Jensen formülüne, $f(z)=a-z$, $R=1$ uygulanırsa, $|a|\geq 1$ için $f(z)$ fonksiyonunun sıfır ve kutupları olmadığından

$$\log|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_{O}^{2\pi}\log\left|a-e^{i\theta}\right|d\theta$$

yazılır. $z=0$ için $\log|f(0)|=\log|a|$ olduğundan

$$\frac{1}{2\pi}\int_{O}^{2\pi}\log\left|a-e^{i\theta}\right|d\theta=\log|a|$$

elde edilir. $|a|<1$ olması halinde Jensen formülünden, $|f(0)|\neq 0,\infty$ kabul edilirse

$$\log\left|f(0)\right| = \frac{1}{2\pi}\int_{O}^{2\pi}\log\left|a-e^{i\theta}\right|d\theta - \left(-\log|a|\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{O}^{2\pi}\log|a-e^{i\theta}|d\theta + \log|a|$$

yazılır. Diğer taraftan, $\log\left|f(0)\right| = \log|a|$ olduğundan

$$\frac{1}{2\pi}\int_{O}^{2\pi}\log|a-e^{i\theta}|d\theta = 0$$

olur. Pozitif logaritmanın tanımına göre, $|a|\geq 1$ ise $\log|a| = \log^{+}|a|$ ve $|a|<1$ ise $\log^{+}|a| = 0$ olduğundan bütün haller için

$$\frac{1}{2\pi}\int_{O}^{2\pi}\log|a-e^{i\theta}|d\theta = \log^{+}|a| \tag{2.3.3}$$

elde edilir. Jensen formülünde, $f(z)$ yerine $f(z)-e^{i\theta}$ konur ve $\left|f(0)-e^{i\theta}\right| \neq 0,\infty$ denirse

$$\log\left|f(0)-e^{i\theta}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_{O}^{2\pi}\log\left|f(\mathrm{r}e^{i\theta})-e^{i\theta}\right|d\theta + N(r,f) - N\left(r,e^{i\theta}\right)$$

olacaktır. Bu eşitliğin her iki tarafının θ değişkenine göre $[0,2\pi]$ aralığında integralleri alınıp, 2π değerine bölünürse

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log\left|f(0)-e^{i\theta}\right|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{O}^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{O}^{2\pi}\log\left|f(\mathrm{r}e^{i\varnothing})-e^{i\theta}\right|d\varnothing\right]d\theta + N(r,f) - \frac{1}{2\pi}\int_{O}^{2\pi}N(\mathrm{r},e^{i\theta})d\theta$$

yazılır. İkinci taraftaki çift katlı integral mutlak değerce yakınsak olduğundan integrallerin sırası değiştirilirse ve (2.3.3) eşitliğinden

$$\frac{1}{2\pi}\int_{O}^{2\pi}\log\left|f(0)-e^{i\theta}\right|d\theta = \log^{+}\left|f(0)\right|$$

ve

$$\frac{1}{2\pi}\int_{O}^{2\pi}\log\left|f(re^{i\varnothing})-e^{i\theta}\right|d\theta=\ \log^{+}\left|f\left(re^{i\varnothing}\right)\right|$$

oldukları göz önüne alınırsa

$$\log^{+}\left|f\left(0\right)\right|=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log^{+}\left|f\left(re^{i\varnothing}\right)\right|d\varnothing+N\left(r,f\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}N\left(f,re^{i\theta}\right)d\theta$$

çıkar. Böylece, $m(r,f)$ eşitliğinden

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log^{+}\left|f\left(re^{i\varnothing}\right)\right|d\varnothing=m\left(r,f\right)$$

$$T\left(r,f\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}N(r,e^{i\theta})d\theta+\ \log^{+}\left|f\left(0\right)\right|$$

sonucu bulunur. $N(r,e^{i\theta})$, $\log r$ değişkeninin konveks artan bir fonksiyonudur. Çünkü herhangi bir a karmaşık sayısı için

$$N\left(r,a\right)=\int_{0}^{r}n\left(t,a\right)\frac{dt}{t}$$

olduğunu önceden görmüştük. Burada $dN\left(r,a\right)/d\log r=n\left(r,a\right)$ dır.

Burada $n\left(r,a\right)$, $f\left(z\right)-a=0$ denkleminin r yarıçaplı çemberin içindeki sıfırlarının sayılarını göstermektedir. Ayrıca, $n\left(r,a\right)$ negatif değildir ve azalmaz. $N\left(r,a\right)$, $\log r$ ifadesinin konveks artan bir fonksiyonudur. Daha açık olarak,

$$N\left(r,a\right)=\int_{0}^{r}n\left(t,a\right)\frac{dt}{t}$$

eşitliğinden

$$dN\left(r,a\right)=\frac{n\left(r,a\right)-n\left(0,a\right)}{r}dr+n\left(0,a\right)d\log r$$

$$\frac{dN(r,a)}{d\log r}=\frac{n(r,a)-n(0,a)}{r}dr\frac{r}{dr}+n(0,a)$$

$$=n(r,a)\geq 0$$

elde edilir. İlk ve son eşitlikten

$$\frac{dN(r,a)}{d\log r}\geq 0$$

sonucu bulunur. Böylece $N(r,a)$, $\log r$ ifadesinin konveks artan bir fonksiyonudur.

Sonuç 2.3.1: Bütün durumlar için

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m(r,e^{i\theta})d\theta \leq \log 2$$

eşitliği vardır.

İspat: $|G(0)|\leq \log 2$ olsun. Nevanlinna'nın birinci temel teoreminden

$$T(r,f)=m(r,e^{i\theta})+N(r,e^{i\theta})+\log\left|f(0)-e^{i\theta}\right|G(\theta)$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki yanının θ değişkenine göre integrali alınır ve 2π sayısına bölünürse

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m(r,e^{i\theta})d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r,e^{i\theta})d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(0)-e^{i\theta}\right|d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(\theta)d\theta$$

elde edilir. Teorem 2.3.1 de geçen

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r,e^{i\theta})d\theta+\log^+|f(0)| \quad \text{ve} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(0)e^{i\theta}\right|d\theta=\log^+|f(0)|$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m(r,e^{i\theta})d\theta+T(r,f)-\log^+|f(0)|+\log^+|f(0)|+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(\theta)d\theta$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m(r,e^{i\theta})d\theta = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(\theta)\,d\theta$$

elde edilir. Böylece, $|G(\theta)| \le \log 2$ kabulünden,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m(r,e^{i\theta})d\theta \le \frac{1}{2\pi}2\pi.\log 2 = \log 2$$

sonucu bulunur. İlk ve son terimlerden istenen sonuç çıkar. Bu sonuç, $m(r,a)$ fonksiyonunun $|a|=1$ çemberi üzerindeki ortalamasının sınırlı olduğunu gösterir.

Aşağıda tam fonksiyonların kullanışlı olan bazı özellikleri verilecektir.

Teorem 2.3.2: (*Cauchy Eşitsizliği*) $f(z)$ fonksiyonu bir A bölgesinde analitik ve C eğrisi bu bölgede z_0 merkezli ve R yarıçaplı bir çember olsun. $\{z : |z-z_0| < R\}$ dairesinin A bölgesinde olduğunu ve C eğrisi üzerindeki tüm z noktaları için $|f(z)| \le M$ olacağını varsayalım. Bu halde, $k = 0,1,2\ldots$ sayıları için

$$\left|f^{(k)}(z_0)\right| \le \frac{k!M}{R^k} \quad \text{ve} \quad |a_k| \le \frac{M}{R^k}$$

dır.

İspat: Türevler için Cauchy integral formülü yardımıyla, $I(C,z_0)=1$ olduğundan,

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}dw$$

elde edilir. Böylece her iki tarafın mutlak değerlerinin alınmasıyla

$$\left|f^{(k)}(z_0)\right| \le \frac{k!}{2\pi}\int_C \left|\frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{k+1}}\right|$$

yazılır. C eğrisi üzerindeki w değerleri için, $|f(w)| \leq M$ ve ayrıca $|w - z_0| = R$ olduğundan

$$\left| \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} \right| \leq \frac{M}{R^{k+1}}$$

eşitsizliği vardır. Buradan $|dw| = 2\pi R$ olduğu kullanılırsa

$$\left| f^{(k)}(z_0) \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^{k+1}} .2\pi\mathrm{R} = \frac{k!M}{R^k}$$

şeklinde istenilen sonuç elde edilir. $f(z)$ fonksiyonu, $|z - z_0| < R$ bölgesinde analitik olduğundan

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

yazılır. Buradan, $f^{(k)}(z_0) = k!a_k$ değeri birinci eşitsizlikte kullanılırsa

$$|a_k| \leq \frac{M}{R^k}$$

ikinci eşitsizlik bulunur.

Teorem 2.3.3: Eğer f bir tam fonksiyon ve tüm $z \in \mathbb{C}$ değerleri için $|f(z)| \leq M$ olacak şekilde bir M sabiti varsa, f fonksiyonu tüm $\mathbb{C}$ düzleminde sabittir. Bu teorem analizde Liouville teoremi olarak bilinir.

İspat: Herhangi bir $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası için yukarıda ifade edilen Cauchy eşitsizliğinden, $k = 1$ iken $|f(z_0)| \leq M|z|^n$ olarak yazılır. $R \to \infty$ için limit alınırsa $|f'(z_0)| = 0$ olarak bulunur. Yani $f'(z_0) = 0$ olur. O halde $\mathbb{C}$ düzlemi bağlantılı bir bölge ve z_0 noktası keyfi olduğundan tüm z_0 noktaları için $f'(z_0) = 0$ olur. O halde f fonksiyonu $\mathbb{C}$ düzleminde sabittir.

Teorem 2.3.4: *(Genişletilmiş Liouville Teoremi)* f, bir tam fonksiyon, M pozitif bir sabit ve b pozitif bir tamsayı olsun. Eğer $\left|f\left(z\right)\right| \leq M\left|z\right|^n$ ise, f tam fonksiyonu derecesi $\leq n$ olan bir polinom olur.

İspat: $\left|z\right| = R$ denirse, Cauchy eşitsizliğinden

$$\left|a_k\right| \leq \frac{MR^n}{R^k} = \frac{M}{R^{k-n}}$$

eşitsizliği yazılır. $k = n+1, n+2, \ldots$ için $R \to \infty$ giderse, tüm a_k değerleri sıfır olur. Böylece ispat tamamlanır.

Maksimum modül teoremine göre, eğer $f\left(z\right)$ fonksiyonu basit kapalı bir C eğrisi içinde ve üzerinde analitik, bir sabite eşit değilse $\left|f\left(z\right)\right|$ maksimum ve minimum değerlerini C eğrisi üzerinde alacağını biliyoruz. Buna göre, $f\left(z\right)$ bir tam fonksiyon ise

$$M\left(r, f\right) = \max_{\left|z\right|=r} \left|f\left(z\right)\right|$$

olarak tanımlanır.

2.4 Tam ve meromorf fonksiyonların mertebeleri ve tipleri

Tanım 2.4.1: $f\left(z\right)$ bir tam fonksiyon olsun ve $\left|z\right| = r$ çemberi üzerinde $\left|f\left(z\right)\right|$ fonksiyonun maksimumu $M(r, f)$ ile gösterilsin. Borel, $f\left(z\right)$ tam fonksiyonunun mertebesini

$$p = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log M\left(r, f\right)}{\log r}$$

olarak tanımlamıştır. Üst limitin tanımından dolayı, $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde r sayısının belli bir değerden büyük tüm değerleri için $\log\log M\left(r, f\right) < \log r^{\left(p+\varepsilon\right)}$

$$\frac{\log\log M(r,f)}{\log r} < p + \varepsilon$$

olur. $0 < p < \infty$ olmak üzere $f(z)$ tam fonksiyonun mertebesi p ise

$$c = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{T(r,f)}{r^p}$$

şeklinde tanımlanan c sayısına $f(z)$ tam fonksiyonunun tipi denir.

Benzer olarak, meromorf fonksiyonlar için mertebe ve tip tanımlarını verelim.

$$p = \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{\log T(R,f)}{\log R}$$

ifadesine, $f(z)$ meromorf fonksiyonunun mertebesi denir. Eğer $f(z)$ meromorf fonksiyonunun mertebesi p $(0 < p < \infty)$ ise

$$c = \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{T(R,f)}{R^p}$$

olarak tanımlanan c sayısına da $f(z)$ meromorf fonksiyonunun tipi denir. Yukarıdaki tanımların tümünde, üst limit yerine alt limit alınırsa sıra ile alt mertebe ve alt tipler tanımlanmış olur. $0 < p < \infty$ alalım. Bu halde,

1) $c = \infty$ ise, $f(z)$ meromorf foksiyonu maksimum tipten,

2) $0 < c < \infty$ ise, $f(z)$ meromorf fonksiyonu orta tipten,

3) $c = 0$ ise, $f(z)$ meromorf fonksiyonu minumum tipten ve

4) $\int_R^\infty \frac{T(t,f)}{r^{p+1}}dt$ integrali yakınsak ise, $f(z)$ meromorf fonksiyonu

yakınsaklık sınıfından, ıraksak ise ıraksaklık sınıfındandır denir. Eğer

$$\int_{R}^{\infty} \frac{T(t,f)}{t^{p+1}} dt$$

integrali yakınsak ise, $f(z)$ meromorf fonksiyonu minumum tiptendir. Çünkü, bu integralin yakınsak olması

$$\lim_{R\to\infty} \int_{R}^{\infty} \frac{T(t,f)}{t^{p+1}} dt = 0$$

olması demektir. $T(R, f)$ karakteristik fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğundan

$$\int_{R}^{\infty} \frac{T(t,f)}{t^{p+1}} dt \geq T(R,f) \int_{R}^{\infty} \frac{dt}{t^{p+1}} = \frac{T(R,f)}{pR^{p}}$$

yazılabilir. Burada $T(t, f)$ ifadesinde t yerine alt limit yazılarak $T(t, f)$ ifadesinin en küçük değeri integral dışına çıkarılmıştır. $R \to \infty$ için birinci taraf sıfır olduğundan,

$$\lim_{R\to\infty} \frac{T(R,f)}{pR^{p}} = 0$$

çıkar. O halde (4) ifadesi (3) ifadesini gerçekler. Şimdi de, tam ve meromorf fonksiyonların mertebe ve tiplerini karşılaştırmaya çalışalım.

Teorem 2.4.2: Bir tam fonksiyonun mertebesi ile türevinin mertebesi aynıdır.

İspat: Valiron, bu teoremin ispatını 1923 yılında yapmıştır.

C çemberi $|t-z| = R-r$ ve $|z| = r < R$ olmak üzere

$$f(z) = \int_{0}^{z} f'(t)\,dt + f(0) \quad ve \quad f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt$$

eşitliklerini göz önüne alalım. Birinci eşitliğin, her iki yanının mutlak değeri alınıp üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|f(z)-f(0)\right|\leq\left|\int_0^z f'(t)\,dt\right|$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki yanının $|z|=r$ çemberi üzerinde maksimum değerleri düşünülürse

$$M(r,f)-\left|f(0)\right|\leq rM(r,f')$$

ve

$$\frac{1}{r}\left\{M(r,f)-\left|f(0)\right|\right\}\leq M(r,f') \tag{2.4.1}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)}{(t-z)^2}dt$$

eşitliğinin, her iki yanının mutlak değerleri alınıp, C çemberi üzerindeki maksimum değeri düşünülürse

$$M(r,f')\leq\frac{M(R,f)}{R-r}=\frac{M(2r,f)}{r} \tag{2.4.2}$$

sonucu bulunur. (2.4.1) eşitsizliğine mertebe tanımı uygulanıp

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log M(r,f)}{\log r}\leq\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log M(r,f')}{\log r}$$

ve benzer şekilde, (2.4.2) eşitsizliğine mertebe tanımı uygulanırsa

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log M(r,f')}{\log r}\leq\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log M(r,f)}{\log r}$$

elde edilir. Bu iki eşitsizliğin aynı anda düşünülmesiyle

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log M(r,f)}{\log r}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log M(r,f')}{\log r}$$

istenilen sonuç bulunmuş olur.

Teorem 2.4.3: Eğer $f(z)$, $|z|<R$ bölgesinde bir tam fonksiyon ve $0 \le r < R$ için

$M(r,f)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$ ise

$$T(r,f)\le \log^{+}M(r,f)\le \frac{R+r}{R-r}T(R,f)$$

eşitsizliği vardır.

İspat: $f(z)$ bir tam fonksiyon olduğundan, $N(r,f)=0$ yazılır. Böylece,

$$T(r,f)=m(r,f)+N(r,f)$$

eşitliğinden

$$T(r,f)=m(r,f)$$

elde edilir. Bu son eşitlikte, $m(r,f)$ yerine eşiti yazılır ve maksimumu düşünülürse

$$T(r,f)=m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^{+}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta \le \log^{+}M(r,f)$$

eşitsizliği bulunur. Bu ise, teoremde gösterilmesi istenen ilk eşitsizliktir.

Şimdi ikinci eşitsizliği gösterelim. Eğer $M(r,f)\le 1$ ise, $\log^{+}M(r,f)=0$ olacağından teoremin doğruluğu açıktır. $M(r,f)>1$ olduğu durumda, ikinci tarafın doğruluğunu ispatlayalım. Bunun için $|f(z_0)|=M(r,f)$ olacak şekilde $z_0=re^{i\theta}$ seçelim. $f(z)$ fonksiyonu tam (entire) olduğundan $|z|<R$ bölgesinde kutup noktası yoktur. Poisson-Jensen formülünden

$$\log|f(z_0)|=\log^{+}M(r,f)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(Re^{i\varnothing}\right)\right|\frac{R^2-r^2}{R^2-2r\cos(\theta-\varnothing)+r^2}d\varnothing-\sum_{i=1}^{M}\log\left|\frac{R^2-\bar{a}_i z}{R(z-a_i)}\right|$$

yazılır. Bu eşitlik, en büyük değerini $\cos(\theta-\varnothing)=1$ olması durumunda alır. Buna göre, son eşitlikte son terim sıfır ve $\cos(\theta-\varnothing)=1$ alınırsa

$$\log^{+}M(r,f)\leq\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log\left|f(Re^{i\varnothing})\right|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr+r^2}d\varnothing$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{R^2-r^2}{(R-r)^2}\int_{0}^{2\pi}\log^{+}\left|f\left(Re^{i\varnothing}\right)\right|d\varnothing$$

$$=\frac{R+r}{R-r}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log^{+}\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\varnothing}\right)\right|d\varnothing$$

$$=\frac{R+r}{R-r}m(R,f)=\frac{R+r}{R-r}T(R,f)$$

olur. İlk ve son terimlerden istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 2.4.1: $f(z)$ meromorf fonksiyonunun mertebesi ile $g=\dfrac{af+b}{cf+d}$ bölüm dönüşümünün mertebesi aynıdır.

İspat: Örnek 2.3.1 de, $g=\dfrac{af+b}{cf+d}$ olmak üzere,

$$T\left(R,\frac{af+b}{cf+d}\right)=T(R,f)+O(1)$$

eşitliğinin varlığını göstermiştik. $T(R,f)>1$ (yeter büyüklükte R sayısından itibaren) için aşağıdaki eşitsizlik

$$\log\mathrm{T}\left(\mathrm{R},\frac{af+b}{cf+d}\right)\leq\log\mathrm{T}(\mathrm{R},f)+\log^{+}\left|O(1)\right|+\log^{+}2$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik, yukarıdaki eşitliğin her iki yanının logaritması alındıktan sonra pozitif logaritmanın özellikleri de kullanılarak elde edilmiştir. Bulduğumuz bu eşitsizliğin her iki tarafını, $\log R$ ile bölüp $R\to\infty$ için limite geçirilirse

$$q' \leq q$$

bulunur. Benzer olarak, ilk eşitsizlik

$$T\left(R, \frac{af+b}{cf+d}\right) - O(1) = T(R, f)$$

biçiminde yazılarak, aynı işlemler tekrarlanırsa

$$\log T\left(R, \frac{af+b}{cf+d}\right) + \log^+ |O(1)| + \log^+ 2 \geq \log T(R, f)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin, her iki yanını $\log R$ ile bölüp $R \to \infty$ için limit alınırsa

$$q' \geq q$$

sonucu bulunur. Böylece, $q' \leq q$ ve $q' \geq q$ eşitsizliklerinden

$$q' = q$$

şeklinde istenilen sonuç elde edilir. Burada, g fonksiyonu yerine özel olarak $\frac{1}{f}$ alınırsa $\frac{1}{f}$ fonksiyonu ile f fonksiyonunun mertebeleri aynı olur.

Teorem 2.4.4: Eğer $f(z)$ bir tam fonksiyon ise

$$S_1(r) = \log^+ M(r, f) \quad \text{ve} \quad S_2(r) = T(r, f)$$

fonksiyonlarının mertebeleri aynıdır. Daha ileri olarak, eğer $0 < p < \infty$ olduğu düşünülürse, $S_1(r)$ ve $S_2(r)$ fonksiyonlarının her ikisi birden, aynı tipten ve aynı yakınsaklık sınıfındandır.

İspat: Teorem 2.4.3 de geçen

$$T(r, f) \leq \log^+ M(r, f) \leq \frac{R+r}{R-r} T(R, f)$$

eşitsizliğinde, $R = 2r$ alınırsa

$$S_2(r) \leq S_1(r) \leq 3S_2(2r)$$

elde edilir. Bu iki eşitsizliğin birincisinin her iki yanının logaritması alındıktan sonra $S_1(r)$ ve $S_2(r)$ yerine teoremdeki değerleri yazılırsa

$$\log T(r,f) \leq \log\log^{+} M(r,f)$$

bulunur. Yeteri kadar büyük r değerleri için, eşitsizliğin her iki yanı $\log r$ ile bölünür ve $r \to \infty$ için üst limit alınırsa

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r} \leq \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log^{+} M(r,f)}{\log r}$$

sonucu bulunur. $S_1(r)$ ve $S_2(r)$ fonksiyonlarının mertebeleri sırasıyla p ve q ise, son eşitsizlikte

$$q \leq p$$

olarak yazılır. Benzer olarak, $S_1(r) \leq 3S_2(2r)$ eşitsizliğinden mertebenin tanımından hareketle $p \leq q$ elde edilir. Böylece, $p \leq q$ ve $q \leq p$ eşitsizliklerinin aynı anda düşünülmesiyle $p = q$ şeklinde istenilen sonuç bulunur. Başta verilen iki eşitsizlikten yararlanılarak iki fonksiyonun aynı tipten oldukları gösterilebilir ve bu iki fonksiyonun aynı yakınsaklık sınıfından olduklarını gösterelim.

$$S_2(r) \leq S_1(r) \leq 3S_2(2r)$$

eşitsizliğinin birincisinde, her iki tarafı r^{p+1} ile bölünürse

$$\frac{S_2(\mathrm{r})}{r^{p+1}} \leq \frac{S_1(\mathrm{r})}{r^{p+1}}$$

elde edilir. Eğer, $S_1(r)$ fonksiyonu p mertebeli yakınsaklık sınıfından ise

$$\int_R^\infty \frac{S_2(\mathrm{r})}{r^{p+1}} dr \leq \int_R^\infty \frac{S_1(\mathrm{r})}{r^{p+1}} dr < \infty$$

yazılabilir. Buradan $S_2(r)$ fonksiyonu da p mertebeli yakınsaklık sınıfından olur.

Yukarıdaki teorem, tam fonksiyonlar için tanımlanan $S_1(r)=\log^+ M(r,f)$ karakteristik fonksiyonunun mertebesi ile yine tam fonksiyonlar için tanımlanan $S_2(r)=T(r,f)$ karakteristik fonksiyonunun mertebesinin aynı olduğunu göstermektedir.

2.5 Meromorf fonksiyonların diğer özellikleri

Bu kesimde, meromorf fonksiyonların bazı özellikleri verilecek ve gösterilecektir.

Teorem 2.5.1: $f(z)$ meromorf fonksiyonunun $|z|<R$ bölgesinde rasyonel olması için gerek ve yeterli koşul, $T(R,f)/\log R$ bölümünün limite sınırlı olmasıdır.

İspat: Önce, $f(z)$ meromorf fonksiyonunun rasyonel olduğunu kabul edelim. Teoremi ispat etmek için $f(z)$ meromof fonksiyonunun sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. $f(z)$ meromorf fonksiyonu rasyonel ise $m>n$ için;

$$f(z)=\frac{a_m z^m + a_{m-1}z^{m-1}+\ldots+a_0}{b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1}+\ldots+b_0}=z^{m-n}\frac{a_m+\dfrac{a_{m-1}}{z}+\ldots+\dfrac{a_0}{z^m}}{b_n+\dfrac{b_{n-1}}{z}+\ldots+\dfrac{b_0}{z^n}}=z^{m-n}Q(z)$$

yazılabilir. Yani, ilk ve son terimlerden $f(z)=z^{m-n}Q(z)$ olur. Bu eşitliğin her iki yanının mutlak değeri alınıp sonra logaritması alınırsa

$$\log|f(z)|=(m-n)\log|z|+\log|Q(z)|$$

elde edilir. R yeteri kadar büyük alınıp $|f(z)|>1$ yapıldıktan sonra pozitif logaritmanın tanımı gereğince, $\log^+ f(z)$ yerine $\log f(z)$ alınabilir. Böylece, son yazılan eşitliğin her iki tarafının integralinden

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(z)|\,d\varnothing=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(m-n)\log|z|\,d\varnothing+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|Q(z)|\,d\varnothing$$

gerekli düzenlemeler yapılır ve ifadeler yerine yazılırsa

$$m(R,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(m-n)\log R d\varnothing+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|Q(z)|d\varnothing$$

sonucu bulunur. $R\to\infty$ için $\lim|Q(z)|=a_m/b_n$ olacağından eşitliğin sağ tarafındaki ikinci integral sınırlıdır. Buradan,

$$m(R,f)=(m-n)\log R+O(1)$$

olur. Öte yandan, $f(z)$ rasyonel bir fonksiyon olduğundan, n tane kutbu vardır. Böylece,

$$N(R,f)=\sum_{j=1}^{n}\log\frac{R}{|b_j|}=n\log R+\sum_{j=1}^{n}\log\frac{1}{|b_j|}$$

eşitliğinin ikinci yanındaki ikinci terim sınırlı olduğundan $N(R,f)=n\log R+O(1)$ yazılır. Bu eşitlik, daha önce bulunan $m(R,f)=(m-n)\log R+O(1)$ eşitliği ile taraf tarafa toplanırsa,

$$m(R,f)+N(R,f)=(m-n)\log R+n\log R+O(1)$$

veya

$$T(R,f)=m\log R+O(1)$$

elde edilir. Bu ise $T(R,f)/\log R=O(1)$ olması demektir.

Eğer $n\geq m$ olsaydı, o zaman $f(z)$ rasyonel fonksiyonu yerine $1/f(z)$ rasyonel fonksiyonu alınırsa, yukarıdaki işlemler ile birlikte $T(R,1/f)/\log R=O(1)$ olarak bulunur. Ayrıca, $T(R,1/f)=T(R,f)+O(1)$ olduğu daha önce gösterilmişti. Bu eşitlik göz önüne alınırsa, $T(R,f)/\log R=O(1)$ sonucu elde edilir.

Özel olarak, $f(z)$ bir polinom olsaydı, yani

$$f(z)=a_pz^p+a_{p-1}z^{p-1}+\ldots+a_0=z^p\left(a_p+\ldots+\frac{a_0}{z^p}\right)=z^pQ(z)$$

şeklinde ise, $f(z)$ polinomunun kutupları olmadığından

$$T(R,f)=m(R,f)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log\left|z^{p}Q(z)\right|d\varnothing$$

$$=p\log R+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log\left|Q(z)\right|d\varnothing$$

yazılabilir. $R\to\infty$ için $\lim\left|Q(z)\right|=a_p$ olduğundan eşitliğin sağ tarafındaki integral sınırlıdır. Yani, bu halde de $T(R,f)/\log R=O(1)$ bulunur. Şimdi de $T(R,f)/\log R=O(1)$ olduğunu kabul ederek $f(z)$ meromorf fonksiyonunun rasyonel olduğunu ispatlayalım.

$O(1)$ gösteriminin tanımı gereğince, $T(R,f)/\log R<M_1$ olacak şekilde M_1 pozitif gerçel sayısı vardır. Böylece,

$$T(R,f)=m(r,f)+N(R,f)<M_1\log R$$

yazılabilir. $M(R,f)\geq 0$ olduğundan $N(R,f)<M_1\log R$ yazılabileceği açıktır. Kutup sayısı sonsuza gittiğinde

$$N(R,f)=\sum_{j=1}^{n}\log\frac{R}{\left|b_j\right|}=n\log R+\sum_{j=1}^{n}\log\frac{1}{\left|b_j\right|}$$

eşitliğindeki $N(R,f)$ ifadesinin $\log R$ değerine göre eğimi M_1 sabitini aşar ve sonuçta $N(R,f)>M_1$ olur. Bu ise bir çelişki olup kutup sayısı sonlu olmalıdır. $f(z)$ fonksiyonunun kutupları $c_1,c_2,\ldots,c_n$ olsun. Bu durumda $f_1(z)=(z-c_1)(z-c_2)\ldots(z-c_n)$ yazmak kolaydır. $f_1(z)$ polinom olduğundan sınırlıdır. Böylece, $T(R,f_1)<M_2\log R$ olacak şekilde M_2 pozitif gerçel sayısı vardır. Diğer taraftan; $T(R,ff_1)\leq T(R,f)\leq T(R,f_1)$ eşitsizliğinden $T(R,ff_1)<(M_1+M_2)\log R=O(\log R)$ ifadesi bulunur. Bu ise

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\mathrm{T}(\mathrm{R}, ff_1)}{\log R}=O(1)$$

demektir. ff_1 fonksiyonunun tam ve $T(R, ff_1)/\log R=O(1)$ olması ff_1 fonksiyonunun polinom olmasını gerektirir. Bu genişletilmiş Liouville teoreminden yararlanılarak gösterilebilir. Teorem 2.4.3 de $R=2r$ alınırsa

$$\log M(r, ff_1)\le 3T(2r, ff_1)$$

yazılır. Buradan,

$$\frac{\log M(r, ff_1)}{\log r}\le 3.\frac{T(2r, ff_1)}{\log 2r}.\frac{\log 2r}{\log r}$$

şeklinde bulunur. Son eşitsizliğin ikinci yanındaki ikinci çarpan limitte bir olur. Eşitsizliğin ikinci yanındaki ilk çarpan da sınırlı olduğundan eşitsizliğin ikinci yanı sınırlıdır. Bu sınıra m dersek, $M(r, ff_1)=\max_{|z|=r}|ff_1|$ olarak tanımlı olduğundan, $M(r, ff_1)\le r^m$ olur. Başka bir ifadeyle $\max(r, ff_1)\le r^m$ veya $|ff_1|\le r^m$ yazılır. ff_1 tam fonksiyon olduğundan, genişletilmiş Liouville teoreminden dolayı,

$$|a_n|\le\frac{r^m}{r^n}=\frac{1}{r^{n-m}}$$

yazılabilir. $n=m+1, m+2,\ldots$ için tüm a_n değerleri sıfır olur. Böylece ff_1, derecesi m den küçük eşit olan bir polinom olur. Bu polinomun kökleri $a_1, a_2, ..., a_m$ ise

$$f(z)=\frac{f(z).f_1(z)}{f_1(z)}=\frac{(z-a_1)\ldots(z-a_m)}{(z-c_1)\ldots(z-c_n)}$$

şeklinde olan bir rasyonel kesirdir.

Teorem 2.5.2: $f(z)$ meromorf bir fonksiyon olsun. Bu halde

$$\lim_{R\to\infty}\frac{T(R, f)}{R^{q+1}}=0$$

olacak şekilde en küçük bir q tamsayısı vardır.

İspat: $f(z)$ meromorf fonksiyonunun, mertebesinin p olduğunu kabul edelim. Bu durumda, mertebenin tanımı gereğince

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\frac{\log T(R,f)}{\log R}=p$$

yazılabilir. Yeteri kadar büyük R sayısı ve her $\varepsilon>0$ için,

$$\frac{\log \mathrm{T}(\mathrm{R},f)}{\log R}<p+\varepsilon \text{ ve } T(R,f)<R^{p+\varepsilon}$$

yazmak kolaydır. Burada p sayısından büyük ilk tamsayının $q+1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, yukarıdaki ikinci eşitsizliğin her iki tarafı R^{q+1} ile bölünürse,

$$\frac{\mathrm{T}(\mathrm{R},f)}{R^{q+1}}<\frac{R^{p+\varepsilon}}{R^{q+1}}$$

bulunur. Burada, $q+1>p+\varepsilon$ olduğundan $R\to\infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{R\to\infty}\frac{T(R,f)}{R^{q+1}}=0$$

sonucu elde edilir.

Teorem 2.5.3: p mertebeli $f(z)$ meromorf fonksiyonu yakınsaklık sınıfından olsun. $f(z)-a$ ifadesinin $|z|<R$ bölgesindeki kutuplarının sayıları $n(R,f)$ ve sıfırlarının sayıları $n(R,a)$ olsun. Ayrıca, R_j ve R_i sayıları da $f(z)-a$ ifadesinin yine sırasıyla kutup ve sıfırlarının modülleri ise

a) $$\int_{R_0}^{\infty}\frac{N(R,f)}{R^{p+1}}dR \text{ ve } \int_{R_0}^{\infty}\frac{N(R,a)}{R^{p+1}}dR,$$

b) $$\int_{R_0}^{\infty}\frac{n(R,f)}{R^{p+1}}dR \text{ ve } \int_{R_0}^{\infty}\frac{n(R,a)}{R^{p+1}}dR,$$

$$\textbf{c)}\quad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{R_j^p} \qquad \text{ve} \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{R_i^p}$$

integral ve serileri birlikte yakınsarlar.

İspat: **a**) $f(z)$ meromorf fonksiyonu yakınsaklık sınıfından olduğundan

$$\int_{R_0}^{\infty}\frac{T(R,f)}{R^{p+1}}dR$$

integrali yakınsaktır. $T(R,f)=m(R,f)+N(R,f)$ eşitliğinin her iki tarafı R^{p+1} ile bölünüp integral alınırsa

$$\int_{R_0}^{\infty}\frac{T(R,f)}{R^{p+1}}dR=\int_{R_0}^{\infty}\frac{m(R,f)}{R^{p+1}}dR+\int_{R_0}^{\infty}\frac{N(R,f)}{R^{p+1}}dR$$

olur. Bu eşitliğin birinci tarafındaki integral yakınsaktır. $m(R,f)$ ve $N(R,f)$ ifadeleri her zaman pozitif olduklarından eşitliğin sağ tarafındaki integraller de yakınsak olacaktır. Ayrıca daha önce gösterilen $T(R,f)=m(R,a)+N(R,a)+O(1)$ eşitliği göz önüne alınırsa yukarıdakine benzer olarak

$$\int_{R_0}^{\infty}\frac{N(R,a)}{R^{p+1}}dR$$

integralinin yakınsak olduğu görülür.

b) $f(z)-a$ ifadesinin kutuplarının sayıları $n(R,f)$ olsun. Bu halde,

$$N(R,f)=n(R,f)\log R-\sum_{j=1}^{n(R,f)}\log R_j$$

yazılır. Ayrıca, $N(R,f)$ teriminin R ifadesine göre türevi alınırsa

$$\frac{dN(R,f)}{dR}=\lim_{\Delta R\to 0}\frac{n(R+\Delta R,f)-n(R,f)}{\Delta R}\log R+\frac{n(R,f)}{R}-\lim_{\Delta R\to 0}\frac{\Sigma'-\Sigma}{\Delta R}$$

elde edilir. Burada, Σ' ile R ifadesine ΔR artması verilmesi ile elde edilen toplam kastedilmektedir. Kutup noktaları ayrık noktalar olduklarından, ΔR yeteri kadar küçük seçildiğinde yeni bir kutup bulunamayacağından, ikinci taraftaki limitler, yani birinci ve üçüncü terimler sıfır olur. Böylece,

$$\frac{dN(R,f)}{dR}=\frac{n(R,f)}{R}$$

yazılır. Öte yandan, kısmi integrasyon yöntemiyle

$$\int_{R_0}^{R}\frac{N(R,f)}{R^{p+1}}dR=\left\{-\frac{1}{p}.\frac{N(R,f)}{R^p}\right\}_{R_0}^{R}+\frac{1}{p}\int_{R_0}^{R}\frac{1}{R^p}.\frac{dN(R,f)}{dR}dR=-\frac{1}{p}.\frac{N(R,f)}{R^p}$$

$$+\frac{1}{p}.\frac{N(R_0,f)}{R_0^p}+\frac{1}{p}\int_{R_0}^{R}\frac{n(R,f)}{R^{p+1}}dR$$

olur. Buradan da

$$\int_{R_0}^{R}\frac{n(R,f)}{R^{p+1}}dR=p\int_{R_0}^{R}\frac{N(R,f)}{R^{p+1}}dR+\frac{N(R,f)}{R^p}-\frac{N(R_0,f)}{R_0^p}$$

eşitliği vardır. Bu eşitlikte ikinci taraftaki ilk terim (a) kısmından dolayı yakınsaktır. $f(z)$ yakınsaklık sınıfından olduğu için minimum tiptendir. Yani, $\lim_{R\to\infty}N(R,f)/R^p=0$ yazılır. Son terim de bir sabittir. Buradan da birinci terim olan

$$\int_{R_0}^{R}\frac{n(R,f)}{R^{p+1}}dR$$

ifadesi de yakınsak olur.

c) $\int_{R_{n-1}}^{R^n}\frac{n(R,f)}{R^{p+1}}dR$ integralini göz önüne alalım. $R_1<R\le R_2$ aralığında, $n(R,f)=1$ ise

$$\int_{R_1}^{R_2}\frac{n(R,f)}{R^{p+1}}dR=-\frac{1}{pR_2^p}+\frac{1}{pR_1^p}$$

olur. $R_2 < R \le R_3$ aralığında $n(R,f)=2$ olup

$$\int_{R_2}^{R_3} \frac{n(R,f)}{R^{p+1}} dR = -\frac{2}{pR_3^p} + \frac{2}{pR_2^p}$$

ve $R_{n-1} < R \le R_n$ aralığında $n(R,f) = n-1$

$$\int_{R_{n-1}}^{R_n} \frac{n(R,f)}{R^{p+1}} dR = -\frac{n-1}{pR_n^p} + \frac{n-1}{pR_{n-1}^p}$$

yazılır. Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$\int_{R_1}^{R_n} \frac{n(R,f)}{R^{p+1}} dR = -\frac{n-1}{pR_n^p} + \frac{1}{pR_1^p} + \frac{1}{pR_2^p} + \ldots + \frac{1}{pR_{n-1}^p} = -\frac{1}{p}\frac{n(R_n,f)}{R_n^p} + \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{R_j^p}$$

elde edilir. Buradan, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{R_j^p} = p\int_{R_1}^{R_n} \frac{n(R,f)}{R^{p+1}} dR + \frac{n(R_n,f)}{R_n^p}$$

bulunur. $R_n \to \infty$ için (b) kısmından dolayı yukarıdaki integral yakınsaktır. Bu integralin yakınsaklığı

$$\lim_{R_n \to \infty} \frac{n(R_n,f)}{R_n^p} = 0$$

olduğunu verir. Böylece, $n \to \infty$ için eşitliğin sol tarafındaki serinin yakınsak olduğu gösterilmiş olur. R_j değerleri yerine R_i değerleri alınıp ispat aynen tekrarlanırsa

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i^p}$$

serisinin de yakınsak olduğu açıktır.

Sonuç 2.5.1: $f(z)$, $|z| \le R$ bölgesinde meromorf bir fonksiyon ve k pozitif bir tamsayı ise

a) $m\left(R, f^k\right) = km\left(R, f\right)$ **b)** $N\left(R, f^k\right) = kN\left(R, f\right)$

c) $T\left(R, f^k\right) = kT\left(R, f\right)$ **d)** $m\left(R, \frac{1}{f^k}\right) = km\left(R, \frac{1}{f}\right)$

e) $N\left(R, \frac{1}{f^k}\right) = kN\left(R, \frac{1}{f}\right)$ **f)** $T\left(R, \frac{1}{f^k}\right) = kT\left(R, f\right) + O(1)$

eşitlikleri vardır.

İspat: **a**) Eğer $\left|f\right| < 1$ ise $|f|^k < 1$ olacağından, pozitif logaritmanın tanımı gereğince $\log^+ |f|^k = 0$ olur. Ayrıca $\left|f\right| \geq 1$ iken $|f|^k \geq 1$ olacağından $\log^+ |f|^k = \log |f|^k$ veya $\log^+ |f|^k = k\log^+ \left|f\right|$ yazılır. Böylece,

$$m\left(R, f^k\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f|^k \, d\varnothing = \frac{k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f\right| d\varnothing = km\left(R, f\right)$$

yazılabileceğinden, ilk ve son terimlerden istenilen sonuç bulunur.

b) $f(z)$ meromorf fonksiyonunun herhangi bir z_0 noktasındaki kutbunun mertebesi q ise, $f^k\left(z\right)$ fonksiyonunun aynı z_0 noktasındaki kutbunun mertebesinin kq olacağı açıktır. Öyleyse,

$$N(R, f^k) = kN\left(R, f\right)$$

eşitliği kolayca yazılır. (a) ve (b) kısımlarını taraf tarafa toplarsak

$$m\left(R, f^k\right) + N\left(R, f^k\right) = km\left(R, f\right) + kN(R, f)$$

veya eşitliğin sağ tarafı k parantezine alınıp gerekli kısaltmalar yapılırsa

$$T\left(R, f^k\right) = kT(R, f)$$

şeklinde (c) kısmında gösterilmek istenilen sonuç bulunur. Buradan (d) ve (e) eşitlikleri $\frac{1}{f} = F$ yazarak yukarıdaki işlemler aynen tekrarlanırsa istenilen sonuç bulunur.

Sonuç 2.5.2: $f(z)$ meromorf fonksiyonunun kutuplarının ve sıfırlarının mertebeleri herhangi bir k pozitif tamsayısının katı ise

a) $m(R,f)=km\left(R,f^{1/k}\right)$ **b)** $N(R,f)=kN\left(R,f^{1/k}\right)$

c) $T(R,f)=kT\left(R,f^{1/k}\right)$ **d)** $m\left(R,\frac{1}{f}\right)=km\left(R,\frac{1}{f^{1/k}}\right)$

e) $N\left(R,\frac{1}{f}\right)=kN\left(R,\frac{1}{f^{1/k}}\right)$ **f)** $T\left(R,\frac{1}{f}\right)=kT\left(R,\frac{1}{f^{1/k}}\right)$

ifadeleri geçerlidir.

İspat: a) $|f|=|f|^{1/k}|f|^{1/k}...|f|^{1/k}$ (k tane) şeklinde yazılabileceği açıktır. Bu eşitliğin her iki tarafının pozitif logaritması alınırsa

$$\log^+|f|=\log^+\left(|f|^{1/k}|f|^{1/k}...|f|^{1/k}\right)=\log^+\left(|f|^{1/k}\right)^k$$

elde edilir. Böylece, ilk ve son ifadelerden

$$\log^+|f|=\log^+\left(|f|^{1/k}\right)^k$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki yanının integrali alınırsa

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f|d\varnothing=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left(|f|^{1/k}\right)^k d\varnothing$$

elde edilir. Sonuç 2.5.1 (a) kısmından dolayı

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f|d\varnothing=\frac{k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f|^{1/k} d\varnothing$$

eşitliği var olacağından

$$m(R,f)=km\left(R,f^{1/k}\right)$$

istenilen sonuç bulunur.

b) $f(z)$ fonksiyonunun herhangi bir z_0 noktasındaki kutbunun mertebesi q ise, $f^{1/k}(z)$ fonksiyonunun aynı z_0 noktasındaki kutbunun mertebesi $\frac{q}{k}$ olur. Hipotezden q, k sayısının katı olduğundan z_0 noktası $f^{1/k}$ fonksiyonun da kutup yeridir. O halde,

$$N(R, f) = kN(R, f^{1/k})$$

eşitliği yazılır. (a) ve (b) ifadelerinin taraf tarafa toplanmasından (c) ifadesi çıkar. Buradan hareketle Sonuç 2.5.2 nin (d), (e) ve (f) kısımları yukarıdaki ispata benzer olarak gösterilir.

Eğer z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun herhangi bir kutbu ise, genel olarak bu z_0 noktası fonksiyonunun kutbu olması gerekmez. Yani $f(z)$ meromorf iken $f^{1/k}(z)$ meromorf olmayabilir. Karakteristik fonksiyonda meromorf fonksiyonlar için tanımlanmıştır. O halde genel olarak $N(R, f^{1/k})$ ifadesi bu teoride tanımsızdır.

Teorem 2.5.4: *(Nevanlinna'nın İkinci Temel Teoremi)* $f(z)$, $|z| < R$ dairesinde sabit olmayan meromorf bir fonksiyon ve $a_1, a_2, \ldots, a_q$ değerleri farklı karmaşık sayılar olsunlar. Bu halde, Nevanlinna'nın ikinci temel teoremi

$$\sum_{i=1}^{q} m\left(R, \frac{1}{f - a_i}\right) + N(R, \frac{1}{f'}) \leq T(R, f') + S(R, f)$$

$$m(R, f) + \sum_{i=1}^{q} m\left(R, \frac{1}{f - a_i}\right) \leq 2T(R, f) - N_1(R, f) + S(R, f)$$

$$(q-1)T(R, f) \leq \sum_{i=1}^{q} N\left(R, \frac{1}{f - a_i}\right) + \overline{N}(R, f) - N\left(R, \frac{1}{f'}\right) + S(R, f)$$

veya

$$(q-2)T(R, f) \leq \sum_{i=1}^{q} N\left(R, \frac{1}{f - a_i}\right) - N_1(R, f) + S(R, f)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $N_1(R,f)=2N(R,f)-N(R,f')+N\left(R,\frac{1}{f'}\right)$ olarak alınmıştır. $S(R,f)$ ise önemli olmayan hata terimidir. $f(z)$ meromorf fonksiyonu sonlu karmaşık düzlemde sonlu veya sonsuz mertebeden oluşuna göre, sırasıyla $S(R,f)=O(\log R)$ veya $S(R,f)=O\left[\log T(R,f)+\log R\right]$ olacaktır. Her iki halde de, $S(R,f)$ hata teriminin R sonsuz için limitte, $T(R,f)$ karakteristik fonksiyonunun yanında ihmal edebilecek küçüklüktedir. $\overline{N}(R,f)$ gösterimiyle de $\overline{N}(R,f)=N(R,f')-N(R,f)$ farkını işaret etmek istiyoruz.

İspat: Bu teoremin Nevanlinna tarafından yapılan ispatı verilecektir.

$a_1,a_2,\ldots a_q$ farklı karmaşık sayılar, $1\le i\le j\le q$ için $k>0$ ve $\left|a_i-a_j\right|\ge k$ olsun,

$$F(z)=\prod_{i=1}^{q}\left[f(z)-a_i\right] \text{ ve } U(z)=\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{f(z)-a_i}$$

olarak tanımlansın. Buradan

$$F(z)=\left[f(z)-a_1\right]\ldots\left[f(z)-a_q\right]$$

eşitliğinin her iki yanının önce logaritması ve daha sonra türevi alınırsa

$$U(z)=\frac{1}{f(z)}.\frac{f(z)}{f'(z)}.\frac{F'(z)}{F(z)}$$

yazılabilir. Böylece, bu son eşitliğin her iki yanının önce pozitif logaritması alınır ve ortalama değerleri düşünülürse

$$m(R,U)\le m\left(R,\frac{1}{f}\right)+m\left(R,\frac{f}{f'}\right)+m\left(R,\frac{F'}{F}\right) \tag{2.5.1}$$

bulunur. Nevanlinna'nın birinci temel teoreminden

$$m\left(R,\frac{1}{f}\right)=m(R,f)+N(R,f)-N\left(R,\frac{1}{f}\right)+O(1)$$

olduğu bilinmektedir. $f(z)$ fonksiyonunun sıfır civarındaki açılımı

$$f(z)=c+c_k z^k+\dots$$

biçiminde ise, yine birinci temel teorem gereğince

$$m\left(R,\frac{f}{f'}\right)=m\left(R,\frac{f'}{f}\right)+N\left(R,\frac{f'}{f}\right)-N\left(R,\frac{f}{f'}\right)+O(1)$$

olacaktır. $f(z)$ meromorf bir fonksiyon ise

$$N\left(R,\frac{f'}{f}\right)-N\left(R,\frac{f}{f'}\right)=N(R,f')+N\left(R,\frac{1}{f}\right)-N\left(R,\frac{1}{f'}\right)-N(R,f)$$

şeklinde yazılabilir. Bu son eşitlik göz önüne alınır ve (2.5.1) eşitliğinde $m\left(R,\frac{f}{f'}\right)$ ve $m\left(R,\frac{1}{f}\right)$ yerine eşitlikleri yazılırsa

$$m(R,U)\le m(R,f)+N(R,f)-N\left(R,\frac{1}{f}\right)+O(1)+m\left(R,\frac{f'}{f}\right)$$

$$+N\left(R,\frac{f'}{f}\right)-N\left(R,\frac{f}{f'}\right)+O(1)+m\left(R,\frac{F'}{F}\right)$$

veya

$$m(R,U)\le m(R,f)+N(R,f)-N\left(R,\frac{1}{f}\right)+O(1)+m\left(R,\frac{f'}{f}\right)$$

$$+N(R,f')+N\left(R,\frac{1}{f}\right)-N\left(R,\frac{1}{f'}\right)-N(R,f)+m\left(R,\frac{F'}{F}\right)$$

elde edilir. Gerekli kısaltmalar yapılırsa

$$m(R,U)\le m(R,f)+m\left(R,\frac{f'}{f}\right)+m\left(R,\frac{F'}{F}\right)+N(R,f')-N\left(R,\frac{1}{f'}\right)+O(1) \qquad (2.5.2)$$

şeklinde bulunur. Σ', $i \neq j$ olduğunu göstersin. $j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ olmak üzere

$$U(z) = \frac{1}{f(z) - a_i}\left[1 + \sum_j{}' \frac{f(z) - a_i}{f(z) - a_j}\right]$$

ile gösterilsin. $\left| f(z) - a_i \right| < \dfrac{k}{2q}$ olan noktalar kümesi için

$$\left| f(z) - a_j \right| = \left| f(z) - a_j + a_i - a_i \right| = \left| \left(a_i - a_j\right) - \left(a_i - f(z)\right) \right|$$

$$\geq \left| a_i - a_j \right| - \left| f(z) - a_i \right| > k - \frac{k}{2q} > \frac{3k}{4}$$

olur. Böylece aşağıdaki eşitlik

$$\left| \sum_j{}' \frac{f(z) - a_i}{f(z) - a_j} \right| = q\left| f(z) - a_i \right| \left| \sum_j{}' \frac{1}{f(z) - a_j} \right| < q.\frac{k}{2q}.\frac{4}{3k} = \frac{2}{3}$$

elde edilir. Buradan, $U(z)$ fonksiyonu

$$\left| U(z) \right| > \frac{1}{\left| f(z) - a_i \right|}\left[1 - \left| \sum_j{}' \frac{f(z) - a_i}{f(z) - a_j} \right| \right] > \frac{1}{\left| f(z) - a_i \right|}\left[1 - \frac{2}{3}\right]$$

$$\left| U(z) \right| > \frac{1}{3\left| f(z) - a_i \right|}$$

olur. Bu eşitsizliğin her iki yanının pozitif logaritması alınırsa

$$\log^+ \left| U(z) \right| > \log^+ \frac{1}{\left| f(z) - a_i \right|} - \log^+ 3$$

eşitsizliği var olur. R çemberi üzerindeki noktaların kümesi $C_i\left(i = 1, 2, \ldots, q\right)$ ve $\left| f(z) - a_i \right| < \dfrac{k}{2q}$ eşitsizliğinden

$$m\left(R,U\right)>\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{2\pi}\int_{C_i}\left[\log^{+}\frac{1}{\left|f\left(z\right)-a_i\right|}-\log 3\right]d\varnothing$$

olur. $C_i\,'$, C_i kümesinin R çemberi üzerindeki noktalar kümesinin tümleyen kümesini göstersin. Bu halde

$$\frac{1}{2\pi}\int_{C_i}\log^{+}\frac{1}{\left|f\left(z\right)-a_i\right|}d\varnothing=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log^{+}\frac{1}{\left|f\left(z\right)-a_i\right|}d\varnothing-\frac{1}{2\pi}\int_{C_i'}\log^{+}\frac{1}{\left|f\left(z\right)-a_i\right|}d\varnothing \qquad (2.5.3)$$

yazılır. $C_i\,'$ kümesi üzerinde $\left|f\left(z\right)-a_i\right|>\dfrac{k}{2q}$ olduğu için

$$\frac{1}{2\pi}\int_{C_i'}\log^{+}\frac{1}{\left|f\left(z\right)-a_i\right|}d\varnothing<\log\frac{2q}{k}$$

yazılır. (2.5.2) eşitsizliğinden

$$\frac{1}{2\pi}\int_{C_i}\log^{+}\frac{1}{\left|f\left(z\right)-a_i\right|}d\varnothing<m\left(\mathrm{R},a_i\right)-\log\frac{2q}{k}$$

bulunur. Diğer yandan

$$\sum_{i}\frac{1}{2\pi}\int_{C_i}\log 3\,d\varnothing<\log 3$$

olduğu düşünülürse

$$m\left(R,U\right)>\sum_{i=1}^{q}m(R,a_i)-q\log\frac{2q}{k}-\log 3$$

yazılır. Bu (2.5.2) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$\sum_{i=1}^{q}m(R,a_i)-q\log\frac{2q}{k}-\log 3<m\left(R,f\right)+N\left(R,f'\right)+m\left(R,\frac{f'}{f}\right)+m\left(R,\frac{F'}{F}\right)$$

$$-N\left(R,\frac{1}{f'}\right)+O\left(1\right) \qquad (2.5.4)$$

olur. Böylece,

$$S(R,f)=m\left(R,\frac{f'}{f}\right)+m\left(R,\frac{F'}{F}\right)+q\log\frac{2q}{k}+\log 3+O(1)$$

ile gösterilirse, (2.5.4) eşitsizliği daha kısa şekilde

$$\sum_{i=1}^{q} m(R,a_i)\le m(R,f)+N(R,f')-N\left(R,\frac{1}{f'}\right)+S(R,f) \tag{2.5.5}$$

yazılır. $N(R,f')=\overline{N}(R,f)+N(R,f)$ eşitliğinden

$$\sum_{i=1}^{q} m(R,a_i)\le \overline{N}(R,f)+T(R,f)-N\left(R,\frac{1}{f'}\right)+S(R,f) \tag{2.5.6}$$

veya $T(R,f)=m(R,a_i)+N(R,a_i)+O(1)$ olduğu düşünülürse

$$(q-1)T(R,f)\le \overline{N}(R,f)+\sum_{i=1}^{q} N(R,a_i)-N\left(R,\frac{1}{f'}\right)+S(R,f) \tag{2.5.7}$$

yazılır. (2.5.5) eşitsizliği, gerekli düzenlemelerle

$$\sum_{i=1}^{q} m(R,a_i)\le 2T(R,f)-N\left(R,\frac{1}{f'}\right)+S(R,f)$$

olarak elde edilir. Eğer a_i değerlerinden herhangi biri sonsuz ise, $m(R,\infty)=m(R,f)$ terimi, (2.5.5) ifadesinin her iki yanına eklenirse

$$\sum_{i=1}^{q} m(R,a_i)\le m(R,f)+N(R,f')-N\left(R,\frac{1}{f'}\right)+S(R,f)+m(R,f) \tag{2.5.8}$$

olur. $N_1(R,f)=2N(R,f)-N(R,f')+N\left(R,\frac{1}{f'}\right)$ ile gösterilirse (2.5.8) eşitsizliği

$$(q-2)T(R,f)\le \sum_{i=1}^{q} N(R,a_i)-N_1(R,f)+S(R,f)$$

şeklini alır. Şimdi de, Nevanlinna'nın ikinci temel teoreminin Ullrich tarafından yapılan ispatını verelim. Bunun için $f(z)$, sonlu karmaşık düzlemde meromorf bir fonksiyon ve $a_i (i=1,2,\ldots,q)$ sayıları karmaşık sayılar ve

$$g=\prod_{i=1}^{q}\left(f-a_i\right)$$

olsun. Nevanlinna'nın birinci temel teoreminden, f' türev fonksiyonu için

$$T\left(R,f'\right)=m\left(R,\frac{1}{f'}\right)+N\left(R,\frac{1}{f'}\right)+O(1)$$

yazılır. Ayrıca,

$$\frac{1}{g}=\prod_{i=1}^{q}\frac{1}{f-a_i}=\prod_{i=1}^{q}\frac{f'}{f-a_i}.\frac{1}{f'}$$

yazmak mümkündür. Her iki tarafın mutlak değerleri ve pozitif logaritmalarından ortalama değerlere geçilirse,

$$m\left(R,\frac{1}{g}\right)\leq m\left(R,\frac{1}{f'}\right)+\sum_{i=1}^{q}(m\left(R,\frac{f'}{f-a_i}\right)=m\left(R,\frac{1}{f'}\right)+S\left(R,f\right) \qquad (2.5.9)$$

yazılır. Yine birinci temel teoremden

$$m\left(R,\frac{1}{g}\right)=N\left(R,g\right)+m\left(R,g\right)-N\left(R,\frac{1}{g}\right)+O(1) \qquad (2.5.10)$$

olduğu bilinmektedir.

$$g=\prod_{i=1}^{q}(f-a_i)$$

eşitliğinden, $N\left(R,g\right)=qN(R,f)$ yazılır. Ayrıca,

$$N\left(R,\frac{1}{g}\right)=\sum_{i=1}^{q}N(R,a_i)$$

olduğu açıktır. Şimdi de, $qm(R,f)+O(1)\le m(R,g)$ eşitsizliğini gösterelim.

$$g=\prod_{i=1}^{q}(f-a_i) \text{ eşitsizliğinden } f^q=\prod_{i=1}^{q}\left(1-\frac{a_i}{f}\right)^{-1} g$$

yazılabilir. $a=\max|a_i|$ ise $|f|>2a$ için $|f|^q<2^q|g|$ olur. Böylece

$$qm(R,f)=\frac{q}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(Re^{i\varnothing}\right)\right|d\varnothing+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(Re^{i\varnothing}\right)\right|^q d\varnothing$$

denklemin sağ tarafındaki ilk terim $|f|\le 2a$ için doğru olup ikinci terim için $|f|>2a$ dır. Bu eşitlikten

$$qm(R,f)\le q\log^+ 2a+q\log 2+m(R,g)$$

elde edilir. Buraya kadar bulunanlar (2.5.10) eşitliğinde kullanırsa

$$m\left(R,\frac{1}{g}\right)\ge qN(R,f)-\sum_{i=1}^{q}N(R,a_i)+qm(R,f)+O(1)$$

$$=\sum_{i=1}^{q}m(R,a_i)+O(1)$$

bulunur. Elde edilen bu eşitsizliği (2.5.9) ifadesinde kullanılırsa

$$\sum_{i=1}^{q}m(R,a_i)\le m\left(R,\frac{1}{f'}\right)+S(R,f)$$

olur. Birinci temel teoremden

$$\sum_{i=1}^{q}m(R,a_i)\le T(R,f')-N\left(R,\frac{1}{f'}\right)+S(R,f)$$

veya

$$qT(R,f)\le T(R,f')+\sum_{i=1}^{q}N(R,a_i)-N\left(R,\frac{1}{f'}\right)S(R,f) \qquad (2.5.11)$$

yazılabilir. Diğer yandan,

$T(R, f') \le 2T(R, f) + S(R, f)$ olduğu (2.5.11) eşitsizliğinde kullanılırsa,

$$(q-2)T(R, f) \le \sum_{i=1}^{q} N(R, a_i) - N\left(R, \frac{1}{f'}\right) + S(R, f) \qquad (2.5.12)$$

eşitsizliği bulunur. Bu, Nevanlinna'nın Ullrich tarafından verilen ikinci temel teoreminin bir şeklidir.

Ayrıca, $m(R, f') \le m(R, f) + S(R, f)$ ve $N(R, f') = N(R, f) + \overline{N}(R, f)$ ifadelerinden $T(R, f') \le \overline{N}(R, f) + T(R, f) + S(R, f)$ elde edilen bu eşitsizlik (2.5.11) de kullanılırsa

$$(q-1)T(R, f) \le \overline{N}(R, f) + \sum_{i=1}^{q} N(R, a_i) - N\left(R, \frac{1}{f'}\right) + S(R, f)$$

formülü elde edilir.

Teorem 2.5.5: $f(z)$ meromorf bir fonksiyon ise,

$$\overline{N}(R, f) \le N(R, f)$$

eşitsizliği vardır [6].

İspat: $N\left(R, f^{(k)}\right) \le (k+1)N(R, f)$ eşitsizliğinde özel olarak $k=1$ alınırsa,

$$N(R, f') \le 2N(R, f)$$

bulunur. Öte yandan $\overline{N}(R, f) = N(R, f') - N(R, f)$ olduğu göz önüne alınırsa yukarıdaki son eşitsizlik

$$\overline{N}(R, f) \le N(R, f)$$

biçimine dönüşür.

Lemma 2.5.1: Eğer $f_1(z)$ ve $f_2(z)$, $|z|<R\ (R\le\infty)$ bölgesinde birer meromorfik fonksiyonlarsa, $0<r<R$ için,

$$N(r, f_1 f_2) - N\left(r, \frac{1}{f_1 f_2}\right) = N(r, f_1) + N(r, f_2) - N\left(r, \frac{1}{f_1}\right) - N\left(r, \frac{1}{f_2}\right) \qquad (2.5.13)$$

eşitliği mevcuttur [7].

Teorem 2.5.6: $f(z)$**,** $|z|<R(\le\infty)$ bölgesinde meromorfik bir fonksiyon olsun. $f'(0)\ne 0$ ve $f(0)\ne 0,1,\infty$ ise $r\in(0,R)$ için

$$T(r, f) \le N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-1}\right) - N_1(r) + S(r, f) \qquad (2.5.14)$$

$$N_1(r) = \left(2N(r, f) - N(r, f')\right) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right) \qquad (2.5.15)$$

olduğu durumda

$$S(r, f) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) + \log\left|\frac{f(0)\left(f(0)-1\right)}{f'(0)}\right| + \log 2 \qquad (2.5.16)$$

eşitliği vardır [7].

İspat:

$$\frac{1}{f} = 1 - \frac{f'}{f} \cdot \frac{f-1}{f'}$$

eşitliğinin her iki tarafının ortalama değeri alınırsa,

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) \le m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f-1}{f'}\right) + \log 2 \qquad (2.5.17)$$

elde edilir. $m\left(r, \frac{1}{f}\right)$ terimine Jensen formülü uygulanırsa

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)=T(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log\frac{1}{|f(0)|} \tag{2.5.18}$$

olur. Benzer şekilde

$$m\left(r,\frac{f-1}{f'}\right)=m\left(r,\frac{f'}{f-1}\right)+\log\left|\frac{f(0)-1}{f'(0)}\right|+\left\{N\left(r,\frac{f'}{f-1}\right)-N\left(r,\frac{f-1}{f'}\right)\right\}$$

eşitliği vardır. Lemma 2.5.1 den

$$m\left(r,\frac{f-1}{f'}\right)=m\left(r,\frac{f'}{f-1}\right)+\log\left|\frac{f(0)-1}{f'(0)}\right|$$

$$+\left\{N(r,f')+N\left(r,\frac{1}{f-1}\right)-N(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f'}\right)\right\} \tag{2.5.19}$$

elde edilir. (2.5.17) eşitsizliğinin içine (2.5.18) ve (2.5.19) eşitsizliklerini yerleştirirsek ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2.5.2: $f(z)$, $|z|<R\ (\leq\infty)$ bölgesinde meromorfik bir fonksiyon olsun. Eğer $f(0)\neq(0,\infty)$ ise, $0<r<\rho<R$ olduğu durumda,

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)<10+4\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+2\log^+\frac{1}{r}$$

$$+3\log^+\frac{1}{\rho-r}+4\log^+p+4\log^+T(\rho,f) \tag{2.5.20}$$

dır [7].

İspat: Poisson-Jensen formülünde $z=re^{i\theta}$ alınıp ve $\frac{f'}{f}=(\log f)'$ eşitliğinden

$$\log\left|f(z)\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,d\varphi - \sum_{|a_\mu|<\rho}\log\left|\frac{\rho^2 - \bar{a}_\mu z}{\rho\left(z-a_\mu\right)}\right|$$

$$+\sum_{|b_\nu|<\rho}\log\left|\frac{\rho^2 - \bar{b}_\nu z}{\rho\left(z-b_\nu\right)}\right|.$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim

$$\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r\cos(\varphi-\theta)+r^2} = Re\left(\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}\right)$$

olduğu için,

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}\,d\varphi$$

$$-\sum\log\frac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho\left(z-a_\mu\right)}+\sum\log\frac{\rho^2-\bar{b}_\nu z}{\rho\left(z-b_\nu\right)}+iC \qquad (2.5.21)$$

yazılabilir. Buradan her iki tarafın türevi alınırsa

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|\frac{2\rho e^{i\varphi}}{(\rho e^{i\varphi}-z)^2}\,d\varphi - \sum\frac{\left|a_\mu\right|^2-\rho^2}{\left(z-a_\mu\right)\left(\rho^2-\bar{a}_\mu z\right)}$$

$$+\sum\frac{\left|b_\nu\right|^2-\rho^2}{\left(z-b_\nu\right)\left(\rho^2-\bar{b}_\nu z\right)}$$

elde edilir ve $|z| = r$ olduğunda

$$\left|\frac{\left|a_\mu\right|^2-\rho^2}{\left(z-a_\mu\right)\left(\rho^2-\bar{a}_\mu z\right)}\right| = \frac{\rho\left(\rho^2-\left|a_\mu\right|^2\right)}{|\rho^2-\bar{a}_\mu z|^2}\left|\frac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho\left(z-a_\mu\right)}\right| \le \frac{\rho^3}{(\rho^2-\rho r)^2}\left|\frac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}\right|$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\left|\frac{|b_\nu|^2-\rho^2}{(z-b_\nu)\left(\rho^2-\bar{b}_\nu z\right)}\right|\le\frac{\rho}{(\rho-r)^2}\left|\frac{\rho^2-\bar{b}_\nu z}{\rho(z-b_\nu)}\right|.$$

eşitsizliği mevcuttur. Buradan

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\le\frac{2\rho}{(\rho-r)^2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log\left|f(\rho e^{i\varphi})\right|\right|d\varphi+\sum\left|\frac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}\right|+\sum\left|\frac{\rho^2-\bar{b}_\nu z}{\rho(z-b_\nu)}\right|\right\}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log\left|f(\rho e^{i\varphi})\right|\right|d\varphi=m(\rho,f)+m\left(\rho,\frac{1}{f}\right)\le 2T(\rho,f)+\log\frac{1}{|f(0)|}$$

olduğu için

$$\log^+\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\le\log^+\frac{2\rho}{(\rho-r)^2}+\log^+2T(\rho,f)\ +\ \log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}$$

$$+\sum\left|\frac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}\right|+\sum\left|\frac{\rho^2-\bar{b}_\nu z}{\rho(z-b_\nu)}\right|+\log\left\{n(\rho,f)+n\left(\rho,\frac{1}{f}\right)+2\right\}$$

eşitsizliği vardır. $\dfrac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}$ fonksiyonuna Jensen formülü uygulanırsa

$$\log\frac{\rho}{|a_\mu|}=m\left(r,\frac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}\right)+\log^+\frac{r}{|a_\mu|}$$

$$\sum m\left(r,\frac{\rho^2-\bar{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}\right)=\sum\log\frac{\rho}{|a_\mu|}-\sum\log^+\frac{r}{|a_\mu|}$$

$$=N\left(\rho,\frac{1}{f}\right)-N\left(r,\frac{1}{f}\right)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\sum m\left(r,\frac{\rho^2-\bar{b}_\nu z}{\rho(z-b_\nu)}\right)=N(\rho,f)-N(r,f)$$

dır. Bulunan ifadeler (2.5.21) denkleminin yerine yazılırsa

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)<2\log 2+\log^{+}\rho+2\log^{+}\frac{1}{\rho-r}$$

$$+\log^{+}T\left(\rho,f\right)+\log^{+}\log^{+}\frac{1}{\left|f\left(0\right)\right|}+N\left(\rho,f\right)$$

$$-N\left(r,f\right)+N\left(\rho,\frac{1}{f}\right)-N\left(r,\frac{1}{f}\right)$$

$$+\log\left\{n\left(\rho,f\right)+n\left(\rho,\frac{1}{f}\right)+2\right\} \qquad (2.5.22)$$

olur. $n(\rho)=n\left(\rho,f\right)+n\left(\rho,\frac{1}{f}\right)$ eşitliğini ispatlamak için onun karşıtı olan $N(\rho)$ ifadesi belirtilmelidir. Öyle ρ' seçilmelidir ki $\left(\rho<\rho'<R\right)$

$$N\left(\rho'\right)\geq\int_{\rho}^{\rho'}\frac{n\left(t\right)dt}{t}\geq n\left(\rho\right)\frac{\rho'-\rho}{\rho'}$$

ve

$$n\left(\rho\right)\leq\frac{\rho'}{\rho'-\rho}N\left(\rho'\right)\leq\frac{\rho'}{\rho'-\rho}\left\{2T\left(\rho',f\right)+\log^{+}\frac{1}{\left|f\left(0\right)\right|}\right\}$$

olur. Buradan,

$$\log^{+}\left\{n\left(\rho\right)+2\right\}\leq\log^{+}\rho'+\log^{+}\frac{1}{\rho'-\rho}+\log^{+}\log^{+}\frac{1}{\left|f\left(0\right)\right|}$$

$$+\log^{+}T\left(\rho',f\right)+4\log 2 \qquad (2.5.23)$$

olur. $N\left(\rho\right)-N\left(r\right)$ ifadesini ispatlayalım. $\log\left(t\right)$ teriminin konveks fonksiyonu $N\left(t\right)$ olup, $0<r<\rho<\rho'<R$ olduğu yerde

$$\frac{N(\rho)-N(r)}{\log\rho-\log r}\leq\frac{N(\rho')-N(r)}{\log\rho'-\log r}$$

ve

$$\log\frac{\rho}{r}=\int_r^{\rho}\frac{dt}{t}\leq\frac{\rho-r}{r}$$

$$\log\frac{\rho'}{r}=\int_r^{\rho'}\frac{dt}{t}\leq\frac{\rho'-r}{r}$$

eşitliklerinden faydalanılarak aşağıdaki ifade

$$N(\rho)-N(r)\leq\frac{\rho'}{r}.\frac{\rho-r}{\rho'-r}\left\{2T(\rho',f)+\log^+\frac{1}{|f(0)|}\right\}$$

elde edilir. Öyle bir ρ sayısı seçelim ki $(0<r<\rho<\rho'<R)$ aşağıdaki ifadeler var olsun. Böylece,

$$\rho=r+\frac{r(\rho'-r)}{2\rho'\left\{T(\rho',f)+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+1\right\}} \tag{2.5.24}$$

ve

$$N(\rho)-N(r)<1 \tag{2.5.25}$$

olarak bulunur. Buradan, (2.5.24) eşitliğinde gerekli işlemler yapılıp her iki tarafın pozitif logaritması alınırsa

$$\frac{1}{\rho-r}=\frac{2\rho'\left\{T(\rho',f)+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+1\right\}}{r(\rho'-r)}$$

elde edilir. Her iki tarafın pozitif logaritması alınıp (2.2.1) ve (2.2.2) eşitsizliklerinden faydalanılırsa

$$\frac{1}{\rho-r}\leq \log^{+}2+\log^{+}\rho'+\log^{+}T\left(\rho',f\right)+\log^{+}\frac{1}{\left|f\left(0\right)\right|}+\log 3+\log^{+}\frac{1}{r}+\log^{+}\frac{1}{\left(\rho'-r\right)}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\log^{+}\frac{1}{\rho-r}\leq \log^{+}\frac{1}{r}+\log^{+}\frac{1}{\rho'-r}+\log^{+}\rho'+\log^{+}T\left(\rho',f\right)$$

$$+\log^{+}\log^{+}\frac{1}{\left|f\left(0\right)\right|}+\log 6 \qquad (2.5.26)$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\rho-r<\frac{\rho'-r}{2}$$

$$\rho'-\rho=\left(\rho'-r\right)-\left(\rho-r\right)>\frac{\rho'-r}{2}$$

eşitsizlikleri vardır. Benzer olarak,

$$\frac{1}{\rho'-\rho}<\frac{2}{\rho'-r}$$

her iki tarafın pozitif logaritması alınırsa (2.2.2) eşitliğinden

$$\log^{+}\frac{1}{\rho'-\rho}<\log^{+}2+\log^{+}\frac{1}{\rho'-r} \qquad (2.5.27)$$

olur. (2.5.22) ve (2.5.27) eşitsizliklerinin içine (2.5.23), (2.5.25) ve (2.5.26) eşitsizlikleri yerleştirilirse

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)<9\log 2+2\log 3+1+4\log^{+}\log^{+}\frac{1}{\left|f\left(0\right)\right|}+2\log^{+}\frac{1}{r}$$

$$+3\log^{+}\frac{1}{\rho'-r}+4\log^{+}\rho'+4\log^{+}T\left(\rho',f\right)$$

elde edilir. Böylece Lemma 2.5.2 ispatlanmış olur.

BÖLÜM 3

Bu bölümde ilk olarak, sonlu logaritmik mertebe ile artan fonksiyonlar için karakteristik bir integral üzerine çalışıldı. Bir f meromorfik fonksiyonu ve bu fonksiyonun karakteristik ifadesi olan $T(r,f)$ nin logaritmik mertebeleriyle ilgili bazı özellikler ifade edildi. Son olarak sonlu çift-logaritmik mertebeden bahsedildi [4].

3.1. Pozitif artan fonksiyon için sonlu logaritmik mertebe

$S(r)$, $r > 0$ için tanımlanan pozitif artan fonksiyon olsun. Eğer

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log S(r)}{\log\log r} = \lambda \tag{3.1.1}$$

ise $S(r)$ fonksiyonunun sonlu logaritmik mertebesi λ dır denir. (3.1.1) eşitliği sonsuz ise $S(r)$ fonksiyonunun logaritmik mertebesi sonsuzdur.

Teorem 3.1.1: $r > 0$ için tanımlanan $S(r)$ pozitif artan bir fonksiyon olsun. Buradan $S(r)$ nin logaritmik mertebesinin λ $(0 \le \lambda < +\infty)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\int_0^\infty \frac{S(r)}{r(\log r)^{\mu+1}}\,dr \tag{3.1.2}$$

olmasıdır. Burada, integral $\mu > \lambda$ için yakınsak ve $\mu < \lambda$ için ıraksaktır.

Teorem 3.1.1 i ispatlamak için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır.

Lemma 3.1.1: $\mu > \lambda$ için (3.1.2) integrali yakınsaksa, $S(r)$ fonksiyonunun logaritmik mertebesi μ değerini aşamaz.

İspat: $S(r)$ fonksiyonu pozitif ve artan olduğu için

$$\frac{S(r)}{\mu(\log r)^{\mu}} = S(r)\int_r^{\infty}\frac{1}{t(\log t)^{\mu+1}}dt$$

$$< \int_3^{\infty}\frac{S(r)}{r(\log r)^{\mu+1}}dr < +\infty \qquad (3.1.3)$$

dir. Bu eşitsizlik $r > 3$ için geçerli olup $S(r)$ fonksiyonun logaritmik mertebesi μ değerini aşamaz.

İspat: *(Teorem 3.1.1)* Bu teorem iki durumda ispatlanacaktır.

I. Durum: $S(r)$ fonksiyonunun logaritmik mertebesi λ olsun. $\mu = \lambda + \varepsilon$ $(> \lambda)$ için bir r_ε pozitif sayı vardır. Öyle ki, $S(r) < (\log r)^{\lambda + \frac{\varepsilon}{2}}$ eşitsizliği mevcuttur $(r > r_\varepsilon)$. Buradan,

$$\begin{aligned}\int_r^{\infty}\frac{S(r)}{r(\log r)^{\mu+1}}dr &= \int_r^{r_\varepsilon}\frac{S(r)}{r(\log r)^{\mu+1}}dr + \int_{r_\varepsilon}^{\infty}\frac{S(r)}{r(\log r)^{\mu+1}}dr \\ &< O(1) + \int_{r_\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{r(\log r)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}dr < \infty\end{aligned} \qquad (3.1.4)$$

dır. Başka bir deyişle, $(r > r_\varepsilon)$ için (3.1.2) integrali ıraksaktır. Aslında (3.1.2) integrali yakınsaksa Lemma 3.1.1 den $S(r)$ fonksiyonunun logaritmik mertebesi $\leq \mu < \lambda$ dır. Bu ise, $S(r)$ fonksiyonunun logaritmik mertebesinin λ olmasıyla çelişir. Bu yüzden (3.1.2) integrali $\mu > \lambda$ için yakınsak ve $\mu < \lambda$ için ıraksaktır.

II. Durum: Farz edelim ki (3.1.2) integrali $\mu > \lambda$ için yakınsak ve $\mu < \lambda$ için ıraksak olsun. Lemma 3.1.1 den $S(r)$ fonksiyonunun logaritmik mertebesi $\leq \lambda + \varepsilon$ ve herhangi pozitif bir ε sayısı için $S(r)$ nin logaritmik mertebesi $\leq \lambda$ dır. Bazı pozitif ε sayısı için $S(r)$ fonksiyonunun logaritmik mertebesinin $\lambda - 2\varepsilon$ olduğunu varsayalım. I. Durumdan anlaşılacağı gibi $\mu = (\lambda - 2\varepsilon) + \varepsilon = \lambda - \varepsilon$ için (3.1.2) integrali yakınsak olur. Bu II. Durumdaki varsayımla çelişir.

Buradan $S(r)$ fonksiyonun logaritmik mertebesi λ olmaktadır. Böylece I. Durum ve II. Durumdan, Teorem 3.1.1 ispatlanmış olur.

Teorem 3.1.1 de kullanılan (3.1.2) integrali, $r > 0$ için tanımlanan herhangi bir pozitif artan $S(r)$ fonksiyonunun büyüme oranını ölçmek için oldukça önemlidir. $f(z)$ sabit olmayan bir meromorfik fonksiyon ise, $S(r)$ için $T(r, f)$ ve $n(r, f = a)$ karakteristikleri kullanılabilir. İlave olarak, $f(z)$ bir tam fonksiyonsa, $S(r)$ için $\log^+ M(r, f)$ kullanılır.

3.2. Meromorf fonksiyonlar için logaritmik mertebe

Tanım 3.2.1: $f(z)$, $\hat{\mathbb{C}}$ düzlemde bir meromorf fonksiyon ise, bu f fonksiyonun logaritmik mertebesi onun karakteristik ifadesi olan $T(r, f)$ nin logaritmik mertebesidir. $|z| \le r$ üzerinde $f(z)$ tam fonksiyonunun maksimum modülü, $M(r, f)$ olsun. $0 < r < p$ için

$$T(r, f) \le \log^+ M(r, f) \le ((\rho + r)/(\rho - r)) T(\rho, f)$$

eşitsizliğinden $T(r, f)$ ve $\log^+ M(r, f)$ nin logaritmik mertebeleri aynıdır. Buradan $f(z)$ fonksiyonu

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log^+ \log^+ M(r, f)}{\log \log r} \tag{3.2.1}$$

olarak ifade edilebilir.

Tanım 3.2.2: $f(z)$ bir meromorf fonksiyon ve pozitif logaritmik mertebesi λ olsun. $(0, +\infty)$ aralığında tanımlı negatif olmayan sürekli bir $\lambda(r)$ fonksiyonu,

$T(r, f)$ karakteristik ifadenin yaklaşık logaritmik mertebesi olarak tanımlanır ve aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $\lim\limits_{r\to\infty} \lambda(r) = \lambda$

$$\text{(2) } \lim_{r\to+\infty} r(\log r)\lambda'(r)\log\log r = 0 \tag{3.2.2}$$

(3) $U(r, f) = (\log r)^{\lambda(r)}$

dır. Yeteri kadar büyük r değeri için

$$T(r, f) \le U(r, f)$$

ve

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{T(r, f)}{U(r, f)} = 1 \tag{3.2.3}$$

eşitlikleri vardır. Yukarıdaki $U(r, f)$ fonksiyonu $T(r, f)$ karakteristik ifadenin logaritmik tipi olarak adlandırılır.

3.3. Meromorf fonksiyonlarda yakınsaklık logaritmik üssü

$f(z)$ meromorf bir fonksiyon olsun. Her $a \in \hat{\mathbb{C}}$ noktası $f(z) = a$ denkleminin köküdür. $f(z)$ fonksiyonunun $a-$noktaları dizisi $\{z_j(a)\}$ olsun. Bu dizi $r_j(a) = |z_j(a)|$ olduğu durumda $r_j(a) \le r_{j+1}(a)$ dır. $f(z)$ meromorf fonksiyonunun $a-$noktalarının yakınsaklık logaritmik üssü;

$$\rho_{\log}(a) = \inf\left\{\mu \mid \mu > 0,\ \sum_j 1\big/\left|\log r_j(a)\right|^{\mu} < +\infty\right\} \tag{3.3.1}$$

olarak tanımlanır. Bu eşitlik $f(z)$ fonksiyonunun $a-$noktalarının dağılım değerlerinin ölçümünde önemli rol oynar. Bu çalışma boyunca $n(r, f = a)$ ifadesinin logaritmik mertebesi, $\lambda_{\log}(a)$ ile gösterilecektir. Burada $n(r, f=a)$, $f(z)=a$ denkleminin $|z| \le r$ bölgesindeki köklerinin sayısıdır. $f(z)$ meromorf fonksiyonun $a-$noktalarının yakınsaklığının üssüne eşittir. Aşağıdaki teorem sonlu logaritmik mertebenin meromorf fonksiyonlar için karşılık gelen bir sonucudur.

Teorem 3.3.1: $f(z)$ sabit olamayan meromorf fonksiyon ve sonlu logaritmik mertebe ise, her $a \in \hat{\mathbb{C}}$ için $n(r, f=a)$ ifadesinin logaritmik mertebesi, $f(z)$ fonksiyonunun $a-$noktalarının yakınsaklık logaritmik üssüne eşittir.

İspat: Her $\varepsilon > 0$ için,

$$j < (\log r_j(a))^{\lambda_{\log}(a)+\varepsilon} \tag{3.3.2}$$

yazılabilir. $\mu > \lambda_{\log}(a)$ ise, $(\varepsilon > 0)$ için $\mu > \lambda_{\log}(a)+\varepsilon$ ve $\mu_1 = \mu / (\lambda_{log}(a)+\varepsilon)$ eşitliği vardır.

$$\frac{1}{|\log r_j(a)|^{\mu}} < j^{-\mu_1} \tag{3.3.3}$$

ve

$$\sum_j \frac{1}{|\log r_j(a)|^{\mu}} < \sum_j j^{-\mu_1} < +\infty \tag{3.3.4}$$

bu eşitsizliklerden

$$\rho_{\log}(a) \le \lambda_{\log}(a) \tag{3.3.5}$$

olur. $\mu < \lambda_{\log}(a)$ ise

$$b_{n_j} = \frac{1}{|\log r_{n_j}(a)|^{\mu}} > \frac{1}{n_j} \tag{3.3.6}$$

olacak şekilde $\{n_j\}$ pozitif tamsayıların bir dizisi vardır. $n_j > 2$ için $\frac{n_j}{2}$ ifadesinin integral parçası i_j ve $b_k = \frac{1}{|\log r_k(a)|^{\mu}}$ olarak göstereceğiz. Buradan,

$$b_{i_j} + b_{i_j+1} + \ldots + b_{n_j} > \frac{(n_j - i_{j+1} + 1)}{n_j} > \frac{1}{2} \tag{3.3.7}$$

ve

$$\sum_j 1/\left|\log r_j(a)\right|^{\mu} = +\infty \tag{3.3.8}$$

eşitliklerinden,

$$\lambda_{\log}(a) \leq \rho_{\log}(a) \tag{3.3.9}$$

elde edilir. (3.3.5) ve (3.3.9) dan teorem ispat edilmiş olur.

3.4. Sonlu logaritmik mertebelerin meromorfik fonksiyonlar için özellikleri

Lemma 3.4.1: $f(z)$, $\mathbb{C}$ düzleminde meromorfik bir fonksiyon olsun. $r_j(a)$, $f(z)$ fonksiyonunun $a-$noktalarının bir modülü olsun $\left(r_j(a) \leq r_{j+1}(a)\right)$. Eğer, $\mu > 0$ ise,

$$\sum_j \frac{1}{\left|\log r_j(a)^{\mu}\right|} \tag{3.4.1}$$

ve aşağıdaki integraller

$$\int^{\infty} \frac{n(t, f = a)}{t(\log t)^{\mu+1}} dt \tag{3.4.2}$$

$$\int^{\infty} \frac{N(t, f = a)}{t(\log t)^{\mu+2}} dt \tag{3.4.3}$$

aynı anda yakınsak veya aynı anda ıraksaktır.

İspat: $$\sum_{j=j_0}^{J}\frac{1}{|\log r_j|^{\mu}}=\int_{r_0}^{R}\frac{1}{|\log t|^{\mu}}dn\left(t, f=a\right)$$

$$=\left[\frac{n\left(t, f=a\right)}{(\log t)^{\mu}}\right]_{t=r_0}^{t=R}+\mu\int_{r_0}^{R}\frac{n\left(t, f=a\right)}{t(\log t)^{\mu+1}}dt \tag{3.4.4}$$

eşitliklerinden (3.4.1) serisi ve (3.4.2) integrallerinin aynı anda yakınsak ya da aynı anda ıraksak olduğu anlaşılır.

$$\int_{3}^{R}\frac{n\left(t, f=a\right)}{t(\log t)^{\mu+1}}dt=\left[N\left(t, f=a\right)(\log t)^{-\mu-1}\right]_{t=3}^{t=R}+\left(\mu+1\right)\int_{3}^{R}\frac{N\left(t, f=a\right)}{t(\log t)^{\mu+2}}dt$$

eşitliğini kullanarak (3.4.2) ve (3.4.3) integrallerinin aynı anda yakınsak veya aynı anda ıraksak olduğu görülür. Böylece Lemma 3.4.1 ispatlanmış olur.

Lemma 3.4.2: $n\left(r, f=a\right)$ sonlu pozitif logaritmik mertebeyse,

$$\begin{cases}\sum_{j}1/\left|\log r_j\left(a\right)\right|^{\mu}<+\infty, & \mu>\lambda_{\log}\left(a\right)\\ \sum_{j}1/\left|\log r_j\left(a\right)\right|^{\mu}=+\infty, & \mu<\lambda_{\log}\left(a\right)\end{cases} \tag{3.4.5}$$

$$\begin{cases}\int^{\infty}\frac{n\left(t, f=a\right)}{t(\log t)^{\mu+1}}<+\infty, & \mu>\lambda_{\log}\left(a\right)\\ \int^{\infty}\frac{n\left(t, f=a\right)}{t(\log t)^{\mu+1}}=+\infty, & \mu<\lambda_{\log}\left(a\right)\end{cases} \tag{3.4.6}$$

$$\begin{cases}\int^{\infty}\frac{N\left(t, f=a\right)}{t(\log t)^{\mu+2}}<+\infty, & \mu>\lambda_{\log}\left(a\right)\\ \int^{\infty}\frac{N\left(t, f=a\right)}{t(\log t)^{\mu+2}}=+\infty, & \mu<\lambda_{\log}\left(a\right)\end{cases} \tag{3.4.7}$$

eşitsizlikleri vardır.

İspat: $\rho_{\log}\left(a\right)$ nın tanımından

$$\begin{cases} \sum_j 1/|\log r_j(a)|^{\mu} < +\infty, & \mu > \rho_{\log}(a) \\ \sum_j 1/|\log r_j(a)|^{\mu} = +\infty, & \mu < \rho_{\log}(a) \end{cases} \tag{3.4.8}$$

yazılır.

Teorem 3.3.1 de ifade edilen $\rho_{\log}(a) = \lambda_{\log}(a)$ ve (3.4.8) durumundan (3.4.5) eşitliği; (Lemma 3.4.1) eşitliğinde ifade edilen (3.4.1) serisi ve (3.4.2) integrali aynı anda yakınsak ya da aynı anda ıraksak olduğu için (3.4.5) dan (3.4.6) eşitliği bulunur. Benzer şekilde (3.4.1) serisi ve (3.4.3) integrali aynı anda yakınsak ya da aynı anda ıraksak olduğu için (3.4.5) dan (3.4.7) elde edilir. Böylece Lemma 3.4.2 nin ispatı tamamlanır.

Sonlu pozitif mertebeyle verilen meromorfik fonksiyon $f(z)$ ve herhangi $a \in \hat{\mathbb{C}}$ için, $N(r, f)$ ve $n(r, f)$ sayma fonksiyonlarının, her ikisi de aynı mertebeye sahip olmalarına rağmen, sonlu logaritmik mertebede durum farklıdır.

Teorem 3.4.1: $f(z)$**,** $\mathbb{C}$ düzleminde sabit olmayan meromorfik bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $a \in \hat{\mathbb{C}}$ için, $n(r, f = a)$ ifadesinin logaritmik mertebesi, $\lambda_{\log}(a)$ ve $N(r, f = a)$ nın logaritmik mertebesi $\lambda_{\log}(a) + 1$ dir.

3.5. Meromorf fonksiyonların logaritmik Borel istisnai değerleri

Nevanlinna teoremine göre, $n(r, f = \alpha)$ ifadesinin mertebesi $f(z)$ fonksiyonun mertebesinden daha az ise, $f(z)$ nin Borel istisnai değeri $\alpha \in \mathbb{C}$ ile gösterilir. $f(z)$ nin mertebesinin λ olduğu durumda

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log n(r, f = \alpha)}{\log r} < \lambda$$

dır. Sıfırıncı mertebeden bir meromorf fonksiyon için, $n(r, f = \alpha)$ fonksiyonun mertebesi her $\alpha \in \mathbb{C}$ için sıfıra eşittir. Ancak sonlu logaritmik mertebe fonksiyonlarına göre Borel istisnai değer aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.5.1: Eğer $f(z)$ meromorfik fonksiyonun $\hat{\mathbb{C}}$ düzleminde sonlu logaritmik mertebesi λ ise, bir α karmaşık sayısı

$$\lambda_{\log}(\alpha)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log n(r, f=\alpha)}{\log\log r}<\lambda-1 \tag{3.5.1}$$

olacak şekilde $f(z)$ nin logaritmik Borel istisnai değeri olarak adlandırılır. İlave olarak, $|z|\le r$ bölgesinde $f(z)=\alpha$ denkleminin köklerinin $\overline{n}(r, f=a)$ ile belirtildiği yerde

$$\overline{\lambda}_{\log}(\alpha)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log \overline{n}(r, f=\alpha)}{\log\log r}<\lambda-1 \tag{3.5.2}$$

α sayısı $f(z)$ fonksiyonunun indirgenmiş logaritmik Borel istisnai değeri olarak adlandırılır.

Teorem 3.5.2: *(Logaritmik Borel istisnai değer)* $f(z)$, $\mathbb{C}$ düzleminde sonlu logaritmik mertebenin sabit olmayan bir meromorfik fonksiyonu ise, $f(z)$ fonksiyonu en fazla iki logaritmik Borel istisnai değerlerine sahiptir.

İspat:

I. Durum: Eğer $f(z)$ sabit olmayan bir rasyonel sayı ise, $f(z)$ fonksiyonunun logaritmik mertebesi 1 ve herhangi $\alpha\in\hat{\mathbb{C}}$ için $\lambda_{\log}(\alpha)=0$ dır.

II. Durum: $f(z)$ transandantal fonksiyon ve sonlu logaritmik mertebesi λ olduğu halde, $a_i\,(i=1,2,3)$ için üç tane logaritmik Borel istisnai değeri olduğunu varsayalım. Buradan,

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log n(r, f=\alpha_i)}{\log\log r}<\lambda-1 \tag{3.5.3}$$

$(i=1,2,3)$ için Teorem 3.4.1 ve (3.5.3) eşitsizliğinden;

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log N\left(r, f=\alpha_i\right)}{\log\log r} < \lambda \tag{3.5.4}$$

dır. Genel hali bozmaksızın, $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = \infty$ ve $f\left(0\right) \neq 0,1,\infty$ ve $f'\left(0\right) \neq \infty$ için R. Nevanlinna'nın ikinci esas teoreminden

$$T\left(r, f\right) \leq \sum_{i=1}^{3} N\left(r, f=\alpha_i\right) - \{2N(r, f=\infty) - N\left(r, f'=\infty\right) + N\left(r, f'=0\right)\} + S\left(r, f\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{3} N\left(r, f=\alpha_i\right) + S\left(r, f\right) \tag{3.5.5}$$

$$S\left(r, f\right) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) + \log\left|\frac{f(0)\left(f(0)-1\right)}{f'(0)}\right| + \log 2 \tag{3.5.6}$$

dır [7, syf.17, Lemma 1.3]. Logaritmik türevler lemmasından

$$S\left(r, f\right) = O\left(\log r\right) + 4\log^{+} T\left(\rho, f\right) \tag{3.5.7}$$

yeteri büyüklükte r sayısı için $(0 < r < \rho)$ yukarıdaki (3.5.7) eşitliği vardır. $f(z)$ sonlu logaritmik mertebenin transandantal meromorfik fonksiyonu olup, (3.5.7) eşitliği

$$S\left(r, f\right) = O\left(\log r\right) = o\left(T\left(r, f\right)\right) \tag{3.5.8}$$

ile ifade edilebilir. Buradan (3.5.5) ve (3.5.8) aşağıdaki eşitsizliğin

$$\left(1 - O(1)\right) T\left(r, f\right) < \sum_{i=1}^{3} N\left(r, f=\alpha_i\right) \tag{3.5.9}$$

yeteri büyüklükte r sayısı için var olduğunu ima eder. (3.5.4) ve (3.5.9) kullanılarak

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log T\left(r, f\right)}{\log\log r} < \lambda \tag{3.5.10}$$

elde edilir ve bu da $T\left(r, f\right)$ ifadesinin logaritmik mertebesinin λ olduğuyla çelişir. Böylece Teorem 3.5.2 nin ispatı tamamlanmış olur. $N\left(r, f=a\right)$ ifadesinin logaritmik mertebesi $\lambda_{\log}(a)+1$ gerçeği ile Teorem 3.5.2 den aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

Sonuç 3.5.1: $f(z)$, sonlu logaritmik mertebeyle $\mathbb{C}$ düzleminde sabit olmayan bir meromorfik fonksiyon ise, her $\alpha \in \hat{\mathbb{C}}$ için

$$\lambda_{\log}(\alpha) = \lambda - 1$$

α noktasının en fazla iki değeri vardır.

3.6. Meromorfik fonksiyonların türevleri ile ilgili sonuçlar

$f(z)$ ifadesinin logaritmik mertebesi $\lambda_{\log}(f)$ olsun.

Teorem 3.6.1: Eğer $f(z)$ sonlu logaritmik mertebeyle $\mathbb{C}$ düzleminde transandantal meromorfik bir fonksiyonsa, $f(z)$ ve $f'(z)$ aynı logaritmik mertebeye sahiptir.

İspat:

$$T(r,f) = m(r,f') + N(r,f') \le 2T(r,f) + m(r,f'/f)$$

ve

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right) = O(\log r),\ r \to \infty \text{ iken } \lambda_{\log}(f') \le \lambda_{\log}(f)$$

diğer taraftan, [7, syf.95, Teorem 4.1] deki eşitsizliği kullanarak $\lambda_{\log}(f) \le \lambda_{\log}(f')$ dır. Böylece, Teorem 3.6.1 ispatlanmış olur.

Teorem 3.6.2: $f(z)$ sonlu logaritmik mertebesi λ ve $\mathbb{C}$ düzleminde transandantal meromorfik bir fonksiyonsa her bir pozitif k tamsayısı için,

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log\left\{n(r,f=0) + \bar{n}\left(r,f^{(k)}=1\right)\right\}}{\log\log r} = \lambda - 1 \qquad (3.6.1)$$

vardır.

Lemma 3.6.1: $f(z)$, $\mathbb{C}$ düzleminde sabit olmayan bir meromorfik fonksiyon olsun. Eğer $f(0)\neq 0,\infty$ ise, her pozitif k tamsayısı için,

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)<C_k\left\{1+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log^+\frac{1}{r}\right.$$

$$\left.+\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+\rho+\log^+T(\rho,f)\right\} \tag{3.6.2}$$

eşitsizliği vardır. Burada $0<r<\rho<R$ ve C_k sadece k ya bağlı bir sabittir [7].

Lemma 3.6.2: $f(z)$, $\mathbb{C}$ düzleminde transandantal meromorfik fonksiyon ve k bir pozitif tamsayı olsun. Eğer $f(0)\neq 0,\infty$, $f^{(k)}(0)\neq 1$, $f^{(k+1)}(0)\neq 0$ ve $(k+1)f^{(k+2)}(0)\left(f^{(k)}(0)-1\right)-(k+2)f^{(k+1)}(0)^2\neq 0$ ifadeleri varsa

$$T(r,f)<\left(2+\frac{1}{k}\right)N(r,f=0)+\left(2+\frac{2}{k}\right)\bar{N}\left(r,f^{(k)}=1\right)+S^*(r,f) \tag{3.6.3}$$

eşitsizliği ve $0<r<R$ için

$$S^*(r,f)=\left(2+\frac{k}{2}\right)m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)+\left(2+\frac{1}{k}\right)\left\{m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{k}m\left(r,\frac{f^{(k+2)}}{f^{(k+1)}}\right)+4+\left(2+\frac{1}{k}\right)\log\left|\frac{f(0)\left(f^{(k)}(0)-1\right)}{f^{(k+1)}(0)}\right|$$

$$+\frac{1}{k}\log\left|\frac{f^{(k+1)}(0)\left(f^{(k)}(0)-1\right)}{(k+1)f^{(k+2)}(0)\left(f^{(k)}(0)-1\right)-(k+2)f^{(k+1)}(0)^2}\right| \tag{3.6.4}$$

eşitliği vardır [7].

İspat: *(Lemma 3.6.2)* $f(z)$ fonksiyonunun sonlu logaritmik mertebesi λ olup, Teorem 3.4.1 ve Teorem 3.6.1 den $n(r,f=0)+\bar{n}\left(r,f^{(k)}=1\right)$ ifadenin logaritmik mertebesi $\lambda-1$ den küçük ve eşittir. Bu nedenle, (3.6.1) i ispatlamak için aşağıdaki eşitliği,

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\left\{n(r,f=0)+\overline{n}\left(r,f^{(k)}=1\right)\right\}}{\log\log r}\geq\lambda-1 \tag{3.6.5}$$

göstermek yeterlidir. (3.6.5) eşitsizliğinin olmadığını varsayalım. Buradan,

$n(r,f=0)+\overline{n}\left(r,f^{(k)}=1\right)$ ifadesinin logaritmik mertebesi $\lambda-1$ den küçüktür.

Lemma 3.6.1 ve Lemma 3.6.2 eşitsizliklerini kullanarak, herhangi bir $\alpha>1$ sabiti için

$$S^{*}(r,f)=O\left(\log^{+}T(\tau r,f)\right)+O(\log r),\quad (r\to\infty) \tag{3.6.6}$$

dir. Yukarıdaki (3.6.6) eşitliği ve [7, syf.25, Lemma 1.5] ifadenin sonucundan

$$S^{*}(r,f)=O(\log r)=o\left(T(r,f)\right) \tag{3.6.7}$$

elde edilir. Bu nedenle, (3.6.3) eşitsizliğinden faydalanılarak $T(r,f)$ ifadesinin logaritmik mertebesi λ dan küçüktür. Bu, $T(r,f)$ nin logaritmik mertebesinin λ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla (3.6.5) eşitsizliği geçerlidir. Teorem 3.6.2 de bu lemmalardan faydalanarak ispatlanır.

3.7. Pozitif artan fonksiyon için sonlu çift-logaritmik mertebe

Bu bölümünde bir açık birim diskteki kuvvet serileri ve bu serilerin sonlu çift-logaritmik mertebe ile ilgisine değinilecektir. Daha fazla bilgi için [8] nolu kaynaktan yararlanılabilir.

$S(r)$, $r>0$ için tanımlanan sınırsız artan fonksiyon olsun. Eğer,

$$\limsup_{r\to1^{-}}\frac{\log S(r)}{\log\log\log\dfrac{1}{1-r}}=\lambda \tag{3.7.1}$$

ise $S(r)$ fonksiyonunun çift-logaritmik mertebesi λ dır. $S(r)$ fonksiyonunun sonlu pozitif çift-logaritmik mertebesi λ olsun.

$$\limsup_{r\to 1^-} \frac{S(r)}{\left(\log\log\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda}} \tag{3.7.2}$$

limit sonucunun sonsuz, sonlu pozitif veya sıfır olmasına göre $S(r)$ fonksiyonu sırasıyla maksimum, orta veya minimum çift-logaritmik tip olarak adlandırılır.

$S(r)$, çift-logaritmik mertebesi λ ve minimum çift-logaritmik tipse

$$\int^{1} \frac{S(r)}{(1-r)\left(\log\frac{1}{1-r}\right).\left(\log\log\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda+1}}dr \tag{3.7.3}$$

integralinin sonucuna göre ya yakınsaklık sınıfındandır ya da ıraksaklık sınıfındandır. Örneğin, $S(r)=\left(\operatorname{loglog}\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda}.\left(\operatorname{logloglog}\frac{1}{1-r}\right)^{\mu}$ fonksiyonunun çift-logaritmik mertebesi λ ve μ bir reel sayı olsun. O halde;

$\mu > 0$ için $S(r)$ maksimum çift-logaritmik tip

$\mu = 0$ için $S(r)$ orta çift-logaritmik tip

$\mu < 0$ için $S(r)$ minimum çift-logaritmik tip

olur. Ayrıca, $S(r)$ fonksiyonu $-1 \le \mu \le 0$ için ıraksaklık sınıfındadır ve $\mu < -1$ durumunda da yakınsaklık sınıfındandır.

Teorem 3.7.1: *(Bir integral kriteri)* $S(r)$, $r \in (0,1)$ için tanımlanan sınırsız pozitif artan fonksiyon olsun. $S(r)$ fonksiyonunun çift-logaritmik mertebesi λ $(0 < \lambda < \infty)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\int_{0}^{1} \frac{S(r)}{(1-r)\left(\log\frac{1}{1-r}\right).\left(\log\log\frac{1}{1-r}\right)^{\mu+1}}dr \tag{3.7.4}$$

integralinin $\mu > \lambda$ için yakınsak ve $\mu < \lambda$ için ıraksak olmasıdır.

Teorem 3.7.1 i ispat etmek için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır.

Lemma 3.7.1: Eğer $S(r)$, $r \in (0,1)$ için tanımlanan sınırsız pozitif artan fonksiyon ve (3.7.4) integrali yakınsaksa, $S(r)$ fonksiyonunun çift-logaritmik mertebesi μ değerini aşamaz.

İspat: *(Lemma 3.7.1)* $S(r)$ pozitif ve azalan olduğunda

$$+\infty > \int^{1} \frac{S(r)}{(1-r)\left(\log\frac{1}{1-r}\right).\left(\log\log\frac{1}{1-r}\right)^{\mu+1}}dr$$

$$= \int^{1} \frac{S(r)}{\left(\log\log\frac{1}{1-r}\right)^{\mu+1}} d\left(\log\log\frac{1}{1-r}\right)$$

$$> S(r)\int_{t}^{1} \frac{1}{\left(\log\log\frac{1}{1-t}\right)^{\mu+1}} d\left(\log\log\frac{1}{1-t}\right) = \frac{S(r)}{\mu\left(\log\log\frac{1}{1-t}\right)^{\mu}} \qquad (3.7.5)$$

dür. $r > 1-\frac{1}{e^e}$ için $S(r)$ fonksiyonunun çift-logaritmik mertebesi μ değerini aşamaz.

İspat: (*Teorem 3.7.1)* Bu teorem iki durumda ispatlanacaktır.

I. Durum: $S(r)$ fonksiyonunun sonlu çift-logaritmik mertebesi λ olsun. $\mu = \lambda + \varepsilon (> \lambda)$ için bir pozitif r_ε sayısı vardır. Öyle ki, $S(r) < \left(\log\log\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda+\frac{r}{2}}$ için $r > r_\varepsilon > 1-\frac{1}{e^e}$ dir. Buradan

$$\int_{1-\frac{1}{e^e}}^{1} \frac{S(r)}{(1-r)\left(\log\frac{1}{1-r}\right).\left(\log\log\frac{1}{1-r}\right)^{\mu+1}}dr$$

$$= \int_{1-\frac{1}{e^e}}^{r_e} \frac{S(r)}{(1-r)\left(\log\frac{1}{1-r}\right).\left(\log\log\frac{1}{1-r}\right)^{\mu+1}}dr$$

$$+\int_{r_e}^{1} \frac{S(r)}{(1-r)\left(\log\frac{1}{1-r}\right).\left(\log\log\frac{1}{1-r}\right)^{\mu+1}}dr$$

$$= O(1) + \int_{r_e}^{1} \frac{S(r)}{(1-r)\left(\log\frac{1}{1-r}\right).\left(\log\log\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}+1}}dr$$

$$= O(1) + \lim_{r\to 1^-} \int_{\log\log\frac{1}{1-r_\varepsilon}}^{\log\log\frac{1}{1-r}} \frac{1}{x^{(\varepsilon/2)+1}}dx < \infty \qquad (3.7.6)$$

eşitliği vardır. Diğer taraftan, $\mu < \lambda$ için (3.7.4) integrali ıraksak olmalıdır. Eğer, (3.7.4) integrali yakınsaksa, Lemma 3.7.1 den dolayı $S(r)$ nin çift-logaritmik mertebesi $\leq \mu < \lambda$ dır. Bu ise $S(r)$ fonksiyonunun çift-logaritmik mertebesinin λ olmasıyla çelişir. Bu yüzden (3.7.4) integrali $\mu > \lambda$ için yakınsak ve $\mu < \lambda$ için ıraksaktır.

II. Durum: (3.7.4) integralinin $\mu > \lambda$ için yakınsak ve $\mu < \lambda$ için ıraksak olduğunu varsayalım. Lemma 3.7.1 den $S(r)$ nin çift-logaritmik mertebesi $\leq \lambda$ dır. Varsayalım ki $S(r)$ fonksiyonunun çift-logaritmik mertebesi $\lambda - 2\varepsilon$ (ε pozitif sayı olsun). I. Durumda (3.7.4) integralinin $\mu = (\lambda - 2\varepsilon) + \varepsilon = \lambda - \varepsilon$ için yakınsak olduğu görülür. Bu ise II. Durumdaki varsayımla çelişir. Buradan $S(r)$ fonksiyonunun çift-logaritmik mertebesi λ dır. Teorem 3.7.1 in ispatı I. Durum ve II. Durumdan tamamlanmış olur.

3.8. Bir diskte analitik fonksiyonlar için çift-logaritmik mertebe

Tanım 3.8.1: D bir açık birim disk olsun. D bölgesindeki $f(z)$ analitik fonksiyonu ile $\log\mu(r, f)$ ifadesinin çift-logaritmik mertebesi ve tipi aynıdır.

Teorem 3.8.2: D bölgesinde $f(z)$ analitik ve $\mu(r, f)$ sınırsız bir fonksiyon olsun. Buradan $\log\mu(r, f)$ ifadesinin çift-logaritmik mertebesi λ $(0<\lambda<\infty)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\int^{1} \frac{\log\mu(r, f)}{(1-r)\left(\log\frac{1}{1-r}\right).\left(\log\log\frac{1}{1-r}\right)^{\mu+1}}dr \tag{3.8.1}$$

integralinin $\mu>\lambda$ için yakınsak ve $\mu<\lambda$ için ıraksak olmasıdır.

İspat: $\log\mu(r, f)$, $r\in(0,1)$ aralığında sınırsız artan bir fonksiyon olsun. O halde, Teorem 3.8.2 nin ispatı, Teorem 3.7.1 in bir sonucudur.

Tanım 3.8.3: $\lambda(r):(0,1)\to(0,+\infty)$ tanımlı negatif olmayan sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $\lambda(r)$ ifadesi aşağıdaki özellikleri sağlarsa

(i) $\lim\limits_{r\to1^-}\lambda(r)=\lambda$

(ii) $$\lim_{r\to1^-}(1-r).\log\frac{1}{1-r}.\log\log\frac{1}{1-r}.\log\log\log\frac{1}{1-r}.\lambda'(r)=0 \tag{3.8.2}$$

(iii) $U(r)=\left(\log\log\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda(r)}$ olsun. $S(r)\le U(r)$ için

$$\limsup_{r\to1^-}\frac{S(r)}{U(r)}=1 \tag{3.8.3}$$

bu $\lambda(r)$ ye $S(r)$ fonksiyonunun yaklaşık çift-logaritmik mertebesi olarak adlandırılır. $U(r)$ fonksiyonu, $S(r)$ ifadesinin çift-logaritmik tipi olarak bilinir.

3.9. Açık birim diskte kuvvet serilerinin büyüme indeksleri

Bir D bölgesinde $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ kuvvet serisi fonksiyonu analitik ve $\log\mu(r, f)$ sonlu çift-logaritmik mertebe olsun. Bu başlıkta $\nu(r, f)$ nin iki büyüme indeks belirtilecektir. $\nu(r, f)$ ifadesinin sıçrama noktaları dizisi $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ olsun.

$\left(a \le r_0 < r_1 < \ldots < r_j < r_{j+1} < \ldots < 1\right)$ ve $r \to 1^-$ iken $t_0 = \frac{r_1}{2}$ için

$$g_\mu(t) = \int_{t_0}^{t} -\left(\log\log\frac{1}{1-s}\right)^{-\mu} ds + g_\mu(0) = \int_{t_0}^{t}\left(\log\log\frac{1}{1-s}\right)^{-\mu} ds \ \downarrow 0$$

olduğu yerde

$$\rho_{\log\log}(f) = \inf\left\{\mu \mid \mu > 0,\ \sum_j g_\mu(r_j) < \infty\right\} \tag{3.9.1}$$

ve

$$\lambda_{\log\log}(f) = \inf\left\{\mu \mid \mu > 0,\ \int_{t_0}^{1} v(t, f),\ \left(\log\log\frac{1}{1-t}\right)^{-\mu} dt < \infty\right\} \tag{3.9.2}$$

eşitlikleri mevcuttur.

Teorem 3.9.1: Bir D bölgesinde $f(z)$ fonksiyonu analitik ve $\log\mu(\mathrm{r}, f)$ sonlu çift-logaritmik mertebesi ise

$$\rho_{\log\log}(f) = \lambda_{\log\log}(f) \tag{3.9.3}$$

dir. (3.9.3) ifadesi ya $\rho_{\log\log}(f) = 0$ ya da $\lambda_{\log\log}(f) = 0$ olduğu yerdeki durumları içerir.

İspat: $\mu > 0$ için,

$$\sum_{j_0}^{j} g_\mu(t) dv(t, f)$$

$$= v(t, f)\, g_\mu(t) \Big|_{t_0}^{R} + \int_{t_0}^{R} v(t, f)\left(\log\log\frac{1}{1-t}\right)^{-\mu} dt \tag{3.9.4}$$

eşitliği vardır. $\varepsilon > 0$ ve $\mu = \lambda_{\log\log}(f) + \varepsilon$ olsun. $\lambda_{\log\log}(f)$ ifadesinin tanımından

$$\int_{t_0}^{1} v(t, f)\left(\log\log\frac{1}{1-t}\right)^{-\mu} dt < +\infty \tag{3.9.5}$$

dır. Her bir $\delta > 0$ için bir $R_0\,(<1)$ sayısı vardır. Öyle ki $r \in (R_0, 1)$ ise

$$\delta > \int_r^1 v(t,f)\left(\log\log\frac{1}{1-t}\right)^{-\mu}$$

$$\geq v(r,f)\int_r^1\left(\log\log\frac{1}{1-t}\right)^{-\mu}dt = v(r,f)\,g_\mu(r) \qquad (3.9.6)$$

eşitsizlikleri vardır. (3.9.4), (3.9.5) ve (3.9.6) eşitsizliklerini birleştirilmesiyle, $\varepsilon > 0$ sabiti için $\sum_{j=1}^{\infty} g_\mu(r_j) < \infty$ elde edilir. Buradan,

$$\lambda_{\log\log}(f) \leq \rho_{\log\log}(f)$$

dir. Diğer taraftan

$$\sum_{j=1}^{\infty} g_\mu(r_j) < \infty \qquad (3.9.7)$$

ise (3.9.4) ve (3.9.7) eşitliklerinden

$$+\infty > \sum_{j=1}^{J} g_\mu(r_j) + v(t_0,f)\,g_\mu(t_0)$$

$$= v(R,f)\,g_\mu(R) + \int_{t_0}^{R}\frac{v(t,f)}{\left(\log\log\frac{1}{1-t}\right)^{\mu}}dt \qquad (3.9.8)$$

elde edilir. (3.9.8) eşitliğinin sağ tarafındaki iki eşitlikte negatif olmadığından,

$$\int_{t_0}^{1} v(t,f)\left(\log\log\frac{1}{1-t}\right)^{-\mu} dt < \infty$$

dır. Buradan $\rho_{\log\log}(f) \geq \lambda_{\log\log}(f)$ olur. Böylece, Teorem 3.9.1 ispatlanmış olur.

3.10. Maksimum terim ve merkezi indeksi arasındaki büyüme ilişkisi

Lemma 3.10.1: Her $\mu > 0$ için $f(z)$ kuvvet serisi fonksiyonu bir D bölgesinde analitik ve $\log^{+} \mu(r, f)$ sonlu logaritmik mertebe ise,

$$\sum_{j=1}^{\infty} g_{\mu}\left(r_j\right) \tag{3.10.1}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-r_j}{\left(\log\log \frac{1}{1-r_j}\right)^{\mu}} \tag{3.10.2}$$

$$\int^{1} v\left(t, f\right)\left(\log\log \frac{1}{1-t}\right)^{-\mu} dt \tag{3.10.3}$$

$$\int^{1} \frac{\log \mu\left(t, f\right)}{\left(1-t\right).\left(\log \frac{1}{1-t}\right)\left(\log\log \frac{1}{1-t}\right)^{\mu+1}} dt \tag{3.10.4}$$

serileri ve integralleri $f(z)$ kuvvet serisi fonksiyonunun merkez indeksinin $v(r, f)$ olduğu durumda ya aynı anda yakınsak ya da aynı anda ıraksaktır.

İspat: (3.9.4) ve (3.9.6) eşitsizliklerinden (3.10.1) serisi, (3.10.3) integralinin her ikisi de aynı anda ıraksaktır. Stieltjes integralinin özelliğinden,

$$\sum_{r_j(a) > 1-\frac{1}{e^e}}^{J} \frac{1-r_j}{\left(\log\log \frac{1}{1-r_j}\right)^{\mu}} = \int_{1-\frac{1}{e^e}}^{R} \frac{1-r}{\left(\log\log \frac{1}{1-r}\right)^{\mu}} dv\left(r, f\right)$$

$$= \frac{\left(1-r\right)v\left(r, f\right)}{\left(\log\log \frac{1}{1-r}\right)^{\mu}} \Bigg|_{1-\frac{1}{e^e}}^{R} + \int v\left(r, f\right).\left\{ \frac{1}{\left(\log\log \frac{1}{1-r}\right)^{\mu}} + o\left(\frac{1}{\left(\log\log \frac{1}{1-r}\right)^{\mu}} \right) \right\} dr \tag{3.10.5}$$

yazılır. (3.10.5) eşitliği kullanılarak, (3.10.2) serisi ve (3.10.3) integrali aynı anda yakınsak ya da aynı anda ıraksaktır. Sonuç olarak,

$$\int_{r_0}^{R} \frac{\nu(t,f)}{t}\left(\log\log\frac{1}{1-t}\right)^{-\mu} dt$$

$$= \log\mu(R,f)\left(\log\log\frac{1}{1-R}\right)^{-\mu} - \log\mu(\mathrm{r}_0,f)\left(\log\log\frac{1}{1-\mathrm{r}_0}\right)^{-\mu}$$

$$+\mu\int_{r_0}^{R} \frac{\log\mu(t,f)}{(1-t)\left(\log\frac{1}{1-t}\right)\left(\log\log\frac{1}{1-t}\right)^{\mu+1}} dt$$

eşitliğinden Teorem 3.9.1 in ispatına benzer olarak (3.10.3) ve (3.10.4) integralleri aynı anda yakınsak ya da aynı anda ıraksaktır. Buradan Lemma 3.10.1 ispatlanmış olur.

KAYNAKLAR

[1] Balcı M. 2013. Matematik Analiz-I-II. Cilt no : 9. Baskı. İstanbul. Sürat yayınları.

[2] Başkan T. 2012. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Cilt no : 7. Baskı. Bursa. Dora yayınları.

[3] Kamali M. 1986. Nevanlinna Kuramına Giriş.Yüksek Lisans Tezi. Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı. Erzurum.

[4] Chern P.T.Y. (2005). On Meromorphic Functions with Finite Logarithmic Order. *Transactions of the American Mathematical Society*, **358**, 473-489.

[5] San N. 1977. Analitik Fonksiyonlar Teorisi. Cilt no: II. Baskı. İzmir. E. Ü. Fen Fakültesi Baskı İşleri Kitaplar Serisi No.74

[6] Uğraş S. 1985. Nevanlinna Kuramı'nda Genelleştirmeler Defo ve Asimtotiklik Problemleri. Doktora Tezi. Dicle Üniversitesi. Diyarbakır.

[7] Lo Y. (1991). Value Distribution Theory. Springer – Verlag Berlin, Heidelberg, New York and Science Press, Beijing.

[8] Açıkgöz M., Chern P.T.Y. (2008). On power Series Analytic in the Open Unit Disk with Finite Double-Logarithmic Order. *Applied Mathematical Sciences*. **2**, **32**, 1549-1569.