ŞUBAT 2017 Doktora–Matematik Bölümü VAKKAS ULUÇAY

**GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# ESNEK NORMLU HALKALAR

**MATEMATİK BÖLÜMÜ**

**DOKTORA TEZİ**

**VAKKAS ULUÇAY**

**ŞUBAT 2017**

# Esnek Normlu Halkalar

**Gaziantep Üniversitesi**

**Matematik Bölümü**

**Doktora Tezi**

**Danışman**

**Doç.Dr. Memet ŞAHİN**

**İkinci Danışman**

**Doç.Dr. Necati OLGUN**

**Vakkas ULUÇAY**

**Şubat 2017**

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı : Esnek Normlu Halkalar

Öğrencinin, Adı Soyadı : Vakkas ULUÇAY

Tez Savunma Tarihi : 06.02.2017

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ahmet Necmeddin YAZICI
FBE Müdürü

Bu tezin Doktora tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Necati OLGUN
İkinci Tez Danışmanı

Doç. Dr. Memet ŞAHİN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Doktora tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

| Jüri Üyeleri: | İmzası |
|---|---|
| Prof. Dr. Adil KILIÇ | ……………………. |
| Prof. Dr. İsmet YILDIZ | ……………………. |
| Doç. Dr. Memet ŞAHİN | ……………………. |
| Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN | ……………………. |
| Yrd. Doç. Dr. İrfan DELİ | ……………………. |

**İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.**

**Vakkas ULUÇAY**

# ABSTRACT

## SOFT NORMED RINGS



ULUÇAY, Vakkas

Ph.D. in Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Memet ŞAHİN

Co-Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Necati OLGUN



February 2017

84 pages



This thesis consists of five sections. The introduction and a brief history of the titles in our study is given in the first section. Second section comprises basic definitions and theorems used in this thesis. In this section, there are the definitions of soft sets and normed rings. In the third section, we define soft normed rings through soft norms and we examine the ideals of soft normed rings, maximal soft ideals, the extension of maximal soft normed rings and the generalization of soft normed rings and also some algebraic structures on these topics are studied. In the fourth section, we define norms on quotient rings and on some algebraic structures which are not vector spaces. In addition, we study the algebraic and topological structure of these norms. Then these structures are defined on soft set theory, a wider theory in mathematics, and some basic properties are examined. The fifth and last section of this thesis is allocated to the results acquired during our study.



**Key Words:** Norm, Rings, Normed rings, Normed Quotient Rings, Modul, Soft sets.

**ÖZET**

**ESNEK NORMLU HALKALAR**

ULUÇAY, Vakkas

Doktora Tezi, Matematik Bölümü

Danışman: Doç. Dr. Memet ŞAHİN

İkinci Danışman: Doç. Dr. Necati OLGUN

Şubat 2017

84 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Tezin ilk bölümü giriş kısmına ayrılmış ve çalıştığımız konuyla ilgili bir tarihçe verilmiştir. İkinci bölümde, tezde geçen temel tanım ve semboller verilmiştir. Bu bölümde esnek kümeler ve normlu halkalarla ilgili tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, esnek norm yardımıyla esnek normlu halkalar tanımlanmış, esnek normlu halkalar üzerinde esnek normlu halkaların idealleri, maksimal esnek idealleri, maksimal esnek ideallerin genişlemesi, esnek normlu halkaların genişletilmesi ve bunlarla ilgili bazı cebirsel yapılar incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise bölüm halkaları ve vektör uzayı olmayan cebirsel yapılar üzerinde norm tanımlanmış ve bu normun cebirsel ve topolojik yapısı incelenmiştir. Daha sonra bu cebirsel yapılar matematikte daha geniş bir teori olan esnek küme teorisi üzerinde tanımlanmış ve bazı temel özellikleri incelenmiştir. Tezin son bölümü olan beşinci bölümde tezde elde edilen sonuçlara ayrılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Norm, Halkalar, Normlu Halkalar, Normlu Bölüm Halkalar, Modül, Esnek Kümeler.

***Ailem’e…***

## TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans ve Doktora öğrenimim süresince tez çalışmalarımın planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteklerini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren, zor durumlarımda yanımda olan danışman hocalarım, Sayın Doç. Dr. Memet ŞAHİN´e ve Sayın Doç. Dr. Necati OLGUN'a sonsuz minnet ve saygılarımı sunarım.

Maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman üzerimden eksik etmeyen sevgili annem Sebiha ULUÇAY ve hakkını hiçbir zaman ödeyemeyeceğim babam Mitat ULUÇAY 'a sabırlarından ötürü şükranlarımı ve saygılarımı sunarım.

Doktora çalışmam süresince araştırmalarıma daha fazla zaman ayırmak adına hiçbir fedakârlıktan kaçınmayan ve desteğini esirgemeyen sevgili eşim Fatma ULUÇAY'a ve canım kızım Ezgi ULUÇAY'a teşekkür ederim.

Son olarak, bu çalışma sırasında verdiği 2211-A Yurt içi doktora bursuyla bana destek olan bilimin ve bilim insanının destekçisi TÜBİTAK kurumuna teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER LİSTESİ

**Sayfa**

# SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $(F,E)$ | Esnek küme |
| $R$ | Reel sayılar kümesi |
| $R(E)$ | Esnek reel sayılar kümesi |
| $R(A)$ | Esnek reel sayılar |
| $r(e) = \bar{r}$ | Esnek reel sayı |
| $\tilde{x}$ | Esnek eleman |
| $\bar{x}$ | Bölüm halkasının elemanı |
| $g_n$ | Dizi |
| $\tilde{s}_n$ | Esnek dizi |
| $H$ | Halka |
| D | Halka |
| $F(H)$ | Esnek normlu halka |
| $F(I;A)$ | Esnek ideal |
| $I$ | İdeal |
| $F(M,A)$ | Maksimal esnek ideal |
| $\tilde{\cap}$ | Esnek birleşim |
| $\tilde{\cup}$ | Esnek kesişim |
| $\tilde{\setminus}$ | Esnek fark |
| $E$ | Parametreler kümesi |
| $\|.\|$ | Klasik norm |
| $\|.\|_A$ | Klasik halka üzerinde norm |
| $\|.\|_{A/I}$ | Klasik bölüm halkası üzerinde norm |
| $\|.\|_z$ | Klasik modül üzerinde norm |
| $\|.\|_s$ | Esnek kümeler üzerinde norm |
| $\|.\|_{sz}$ | Esnek modül üzerinde norm |
| $\|.\|_{F(A/I)}$ | Esnek bölüm halkası üzerinde norm |
| $\oplus$ | Halkalarda toplama işlemi |

| | |
|---|---|
| $\otimes$ | Halkalarda çarpma işlemi |
| $\mathbb{Z}$ | Modül |
| $\mathbb{Z}^{n\times m}$ | Elemanları tamsayı olan matris |
| $\mathbb{Z}(A)^{n\times m}$ | Elemanları esnek tamsayı olan matris |
| $*$ | İkili işlem |
| $\circ$ | Esnek İkili işlem |
| $\phi$ | Halka homomorfizması |
| $\mathcal{P}$ | Esnek yarı normların sınıfı |
| $\upsilon$ | Esnek yarı değerlerin ailesi |
| $B_{\lVert\cdot\rVert}$ | Esnek Banach cebiri |
| $\tilde{<}$ | Esnek küçük |
| $\tilde{>}$ | Esnek büyük |

# BÖLÜM 1

# GİRİŞ

Karşılaşılan problemlerle başa çıkmak için ortaya atılan birçok teori, güçsüz yanlarının da etkisiyle zaman içinde önemini yitirerek, tercih edilmez hale gelmiştir. Bu durum yakınmaları, yakınmalar ise yeni teorilerin ortaya atılması sonucunu doğurmuştur. Ancak bu teorilerin içerisinde, sadece bulundukları çağı değil, asırlar sonrasını bile etkileyenler bulunmaktadır. Cantor'un, bugün klasik olarak adlandırılan “Kümeler Teorisi” buna iyi bir örnektir. Ortaya atıldıktan sonra matematiğin kümelerle tekrar inşa edilebilmesi, Klein'in kümelerle oluşturulan “Grup Teorisi” yardımıyla geometriyi baştan yazabilmesi ve uygulama alanlarının çok olması bu teoriyi güçlü kılan özeliklerden sadece birkaçıdır. Ne var ki, yetersiz ya da belirsiz veriler için klasik küme yazılamamaktadır. Bu da teorinin belirsizlikle başa çıkmak için yeterli olmadığı anlamına gelmektedir. Belirsiz tipteki problemlerin çözümü için, aralık matematiği, olasılık teorisi, bulanık kümeler teorisi, sezgisel bulanık kümeler teorisi, yaklaşımlı kümeler teorisi, esnek kümeler teorisi gibi farklı teoriler geliştirilmiştir. Her bir teorinin güçlü olduğu uygulamalar bulunmaktadır. Bu teoriler arasından en göze çarpanlardan birisi, Zadeh'in [39] bulanık kümeler teorisidir. Bu teori hızla gelişmesine rağmen bazı yapısal zorluklara sahiptir. Bir bulanık küme onun üyelik fonksiyonu yoluyla tanımlanır. Molodtsov'a [20] göre üyelik fonksiyonun doğasının fazlasıyla bireysel olmasından dolayı, her bir durum için bir üyelik fonksiyonu inşa etme zorluğuyla karşılaşılır. Bu nedenle, üyelik fonksiyonu inşasından bağımsız bir kümeler teorisine ihtiyaç vardır. Esnek kümeler teorisi, Molodtsov tarafından belirsizlikle başa çıkmak için bir matematiksel araç olarak ortaya atılmıştır. Molodtsov sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlar, oyun teorisi, işlem araştırmaları, Riemann integrasyonu, Perron integrasyonu, olasılık, ölçüm teorisi vb. alanlarda esnek küme teorisini kullanarak başarılı çalışmalar yapmıştır. Ayrıca, yazar yaklaşımlı nesne tanımı kavramını formüle etmiştir [21].

Maji ve ark. [17-18], Pawlak'ın [27] yaklaşımlı küme teorisi yardımıyla, bir karar verme probleminde esnek kümelerin bir uygulamasını sunmuştur ve esnek kümelerde bazı işlemleri tanımlamıştır. Chen ve ark. [4] ile Kong ve ark. [14] esnek kümelerde parametre indirgemesi üzerine çalışmalar yapmıştır. Xiao ve ark. [35] ile Pei ve Miao [28], esnek tabanlı bilgi sistemleri üzerine çalışmalar sunmuşlardır. Mushrif ve ark. [23], esnek küme temelli sınıflandırmalar üzerine bir çalışma yapmıştır.

Esnek kümelerin cebirsel özelikleri bazı yazarlar tarafından çalışılmaktadır. Jun [12] esnek BCK/BCI-cebirleri ve esnek altcebir kavramlarını ortaya atarak, onların bazı temel özeliklerini türetmiştir. Jun ve Park [13] esnek kümeleri BCK/BCI- cebirlerine uygulayarak, BCK/BCI-cebirlerinde esnek kümelerin cebirsel özeliklerini çalışmıştır. Park ve ark. [26] esnek WS-cebirleri üzerine bir çalışma yapmıştır. Feng ve ark. [7] esnek küme teorisini kullanarak esnek halkalar çalışmasını sunmuştur ve ilgili bazı özelliklerini incelemiştir. Sun ve ark. [33] esnek modüllerin tanımını vermiştir. Ayrıca modülleri ve Molodtsov'un esnek küme tanımını kullanarak bazı temel özellikleri inşa etmiştir.

Maji ve ark. [16], bulanık esnek kümeleri tanımlamıştır. Daha sonra pek çok araştırmacı bulanık esnek kümeler üzerine çalışmalar yapmıştır. Aktaş ve Çağman [1] esnek kümeleri, bulanık kümeler ve yaklaşımlı kümelerin ilgili kavramlarıyla karşılaştırmıştır. Roy ve Maji [30] bir karar verme probleminde bulanık esnek kümelerin bir uygulaması üzerinde bazı sonuçlar ortaya koymuştur. Yang ve ark. [38] bulanık esnek kümelerde indirgemeyi tanımlayarak, bulanık esnek kümeler yoluyla bir karar verme problemini analiz etmiştir. Majumdar ve Samanta [19] bulanık esnek kümelerde benzerlik ölçümünü ortaya atmıştır. Xiao ve ark. [37], bulanık esnek küme üzerine dayalı bazı yaklaşımları konu alan bir çalışma yapmıştır. Molodtsov ve ark. [22] tarafından, esnek küme teorisi üzerine dayalı bir analiz geliştirerek, esnek sayı, esnek türev, esnek integral gibi kavramlar formüle edildi. Bu konular, Kovkov ve ark. [15] tarafından optimizasyon teorisi ile ilgili problemlere uygulanmıştır. Şu anda, esnek küme teorisi ve onun uygulamaları üzerine yapılan çalışmalar hızla gelişmektedir.

Hem cebirsel, hem de topolojik yapıya sahip uzayların incelenebilmesi için bu iki yapı arasında bağlantılar kurularak normlu lineer uzaylar tanımlanmıştır. 1930'da Hilbert uzayında sınırlı lineer operatörlerin cebiri Von Neumann [35] tarafından çalışılmış, sonrasında Muray ve Von Neumann konu üzerinde çalışmalarını sürdürmüştür. Naimark ve ark. [24] normlu halkaları tanımlamıştır ve onlara göre normlu halka, cebirsel anlamda cebiri oluşturan elemanların basit gereklilikleri sağlayan bir norma sahip keyfi bir kümesiydi. Bu bakış açısı Gelfand [9] tarafından sistematik olarak geliştirilmiştir. Gelfand değişmeli normlu halkalar teorisini kurmuştur. Gelfand'ın maksimal ideallerin rolü, bir kompakt uzayın maksimal idealler kullanılarak inşası ve yarı basit cebirin elemanlarının bu uzaydaki bir sürekli fonksiyonlar cebiri biçiminde temsil edilişini keşfetmesi bu bağlantıda belirleyici öneme sahiptir. Shilov [32] ideallerin direkt toplamları içinde değişmeli normlu halka ayrışmasını tanımlamıştır. Freundlich [8], bir normlu halkada sürekli elemanları tanımlamıştır. Richard [31] normlu halkalar teorisini genelleştirmiştir. Raikov [29] üst alma ile normlu halkalar teorisini tanımlamıştır. Jarden [11] 2011 yılında normlu halkalar tanımlamış ve birleşmeli halkaların normları $|.|$ integral alanlarının $\|.\|$ mutlak değerlerinin genelleştirmelerini incelemiştir. 1970'de Naimark [25], halkalar yerine cebirleri kullanarak normlu halkalar konusundaki çalışmaların gelişimini ve devamını sağlamıştır.

Bu tezde, ilk olarak esnek norm yardımıyla esnek normlu halkalar tanımlanmış, esnek normlu halkalar üzerinde esnek normlu halkaların idealleri, esnek maksimal ideallleri, esnek maksimal ideallerin genişlemesi ve bunlarla ilgili bazı cebirsel yapılar incelenmiştir. Sonra, bölüm halkaları ve vektör uzay olmayan cebirsel yapılar üzerinde norm tanımlanmış ve bununla ilgili cebirsel ve topolojik yapılar incelenmiştir. Daha sonra, bu cebirsel yapılar matematikte daha geniş bir teori olan esnek küme teorisi üzerinde tanımlanmış ve bazı temel özellikleri incelenmiştir. Tezin son bölümü olan beşinci bölümde tezde elde edilen sonuçlara ayrılmıştır.

# BÖLÜM 2

# ÖN BİLGİLER

## 2.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde sonraki bölümlerde kullanacağımız temel tanım ve özellikler verilecektir. Bu tezde $U$ evrensel küme, $E$ parametreler kümesini ve $P(U)$ da $U$ nun kuvvet kümesi olarak kabul edilecektir.

**Tanım 2.1.1:**

[20] $(F,E)$ sıralı ikilisi ($U$ üzerinde) bir esnek küme olarak adlandırılır ancak ve ancak $F$, $E$'den $U$'nun tüm alt kümelerinin kümesine bir dönüşümdür. Başka bir ifadeyle bir esnek küme $U$ kümesinin alt kümelerinin parametrize edilmiş bir ailesidir. $\varepsilon \in E$ için bu aileden olan her $F(\varepsilon)$ kümesi, $(F,E)$ esnek kümesinin $\varepsilon-$ elemanlarının yada $\varepsilon-$yaklaşımlı elemanlarının kümesi olarak göz önüne alınabilir.

**Örnek 2.1.2:**

Bir üniversitenin doktora programına öğrenci alımı için yaptığı ilan neticesinde başvuran adayların kümesi $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ olsun. Bu doktora programına öğrenci alımında "not ortalaması", "dil belgesi", "ALES belgesi" ve "lisans diploması" parametrelerini dikkate alsın. Bu parametreleri $i = 1,2,3,4$ olmak üzere sırasıyla $e_i$ ile gösterirsek, parametreler kümesi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olur. Bu doktora programının başvuru jürisinde, üç kişi bulunsun. Bu jüri üyelerinin değerlendirmeleri sırasıyla

$$f_1(e_1) = \{u_1, u_2\}$$

$$f_1(e_2) = \{u_1, u_3\}$$

$$f_1(e_3) = \{u_2, u_3, u_4\}$$

$$f_1(e_4) = \emptyset$$

$$f_2(e_1) = \{u_2, u_3\}$$

$$f_2(e_2) = \emptyset$$

$$f_2(e_3) = \{u_1, u_4\}$$

$$f_2(e_4) = \{u_1, u_3, u_4\}$$

$$f_3(e_1) = \{u_1, u_2, u_3, \}$$

$$f_3(e_2) = \emptyset$$

$$f_3(e_3) = \{u_3\}$$

$$f_3(e_4) = \emptyset$$

biçiminde olduğu kabul edilirse, bunların oluşturacağı $f_1, f_2$ ve $f_3$ esnek kümeleri sırasıyla

$$f_1 = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \{u_1, u_3\}), (e_3, \{u_2, u_3, u_4\})\}$$

$$f_2 = \{(e_1, \{u_2, u_3\}), (e_3, \{u_1, u_4\}), (e_4, \{u_1, u_3, u_4\})\}$$

$$f_3 = \{(e_1, \{u_1, u_2, u_3\}), (e_3, \{u_3\})\}$$

olarak bulunur.

**Tanım 2.1.3:**

[17] Eğer $\forall \varepsilon \in A, F(\varepsilon) = \phi, (boş - küme)$ ise $U$ üzerinde bir $(F, A)$ esnek kümesi boş esnek küme olarak isimlendirilir ve $\Phi$ ile gösterilir.

**Tanım 2.1.4:**

[3] Her $e \in E$ için $f(e) = U$ oluyorsa $f$ esnek kümesine evrensel esnek küme denir ve $U_E$ ile gösterilir.

**Tanım 2.1.5:**

[17] $U$ üzerinde $(F, A)$ ve $(G, B)$ esnek kümeleri için, eğer

*i.* $A \subseteq B$ *ve*

*ii.* $\forall\varepsilon\in A$ için $F(\varepsilon)$ ve $G(\varepsilon)$
ise $(F,A)$, $(G,B)$'nin esnek alt kümesidir diyebiliriz ve $(F,A)\tilde{\subset}(G,B)$ ile gösteririz.

Eğer $(G,B),(F,A)$'nin esnek alt kümesi ise $(F,A)$'ya $(G,B)$'nin esnek üst kümesidir denir ve $(F,A)\tilde{\supset}(G,B)$ ile gösterilir.

**Tanım 2.1.6:**

[17] $U$ üzerinde $(F,A)$ ve $(G,B)$ esnek kümelerinin birleşimi, $(H,C)$ dir. Burada, $C=A\cup B$ and $\forall\varepsilon\in C$ için,

$$\begin{aligned} H(e)&=F(e), \quad \textit{eğer} \quad e\in A-B,\\ H(e)&=G(e), \quad \textit{eğer} \quad e\in B-A,\\ H(e)&=F(e)\cup G(e), \quad \textit{eğer} \quad e\in A\cap B, \end{aligned}$$

ile tanımlanır. Bunu $(F,A)\tilde{\cup}(G,B)=(H,C)$ şeklinde yazarız.

**Tanım 2.1.7:**

[17] $U$ üzerinde $(F,A)$ ve $(G,B)$ esnek kümelerinin kesişimi, $(H,C)$ dir. Burada, $C=A\cap B$ and $\forall\varepsilon\in C$ için, $H(e)=F(e)$ or $G(e)$, (*her ikiside aynı küme olduğunda*) ile tanımlanır. Bunu $(F,A)\tilde{\cap}(G,B)=(H,C)$ şeklinde yazarız.

**Tanım 2.1.8:**

[3] $f,g\in S_E(U)$ ise

$$f\tilde{\setminus}g=\{f(e)\setminus g(e):\mathrm{e}\in\mathrm{E}\}$$

esnek kümesine $f$ ve $g$ esnek kümelerinin esnek farkı denir.

**Tanım 2.1.9:**

[17] Bir $(F,A)$ esnek kümesinin $(F,A)^c$ ile gösterilen tümleyeni $(F,A)^c=(F^c,\neg A)$ yoluyla tanımlanır. Burada, $F^c:\neg A\rightarrow P(U)$, $F^c(\alpha)=U-F(\neg\alpha),\forall\alpha\in\neg A$ ile verilen bir dönüşümdür.

**Tanım 2.1.10**:

[2] $N$ bir lineer uzay olsun. $\|.\|:N\rightarrow R$ fonksiyonunun $x$ deki değeri $\|x\|$ ile gösterilsin. Bu fonksiyon için

N1- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N2- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \quad (\alpha \in F)$

N3- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna $N$ de (veya $N$ üzerinde) norm ve $(N, \|.\|)$ ikilisine ise normlu uzay denir.

**Tanım 2.1.11:**

[5] $R \neq \emptyset$ kümesi üzerinde tanımlı ikili işlem "$+$" ve "$.$" olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(R, +, .)$ cebirsel yapısına halka denir.

H1- $(R, +)$ değişmeli gruptur.

H2- "$.$" işleminin birleşme özelliği vardır. $\forall\, a, b, c \in R$ için

$$a.(b.c) = (a.b).c$$

H3- "$.$" İşleminin "$+$" işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır : $\forall\, a, b, c \in R$ için

$$a.(b + c) = (a.b) + (a.c)$$

$$(a + b).c = (a.c) + (b.c).$$

**Tanım 2.1.12:**

[2] $L$ boş olmayan bir küme ve $F$ reel veya kompleks sayılar cismi olsun. $L$ aşağıdaki şartları sağlıyorsa $F$ üzerinde lineer uzay olarak adlandırılır.

$$+ \ : L \times L \to L \text{ (toplama)}$$

$$. \ : F \times L \to L \text{ (skalerle çarpma)}$$

A. $(L, +)$ değişmeli gruptur.

B. $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere

L1) $\alpha.x \in L$

L2) $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$

L3) $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$

L4) $(\alpha\beta).x = \alpha.(\beta.x)$

L5) $1.x = x$ dir $(1 \in F)$.

**Tanım 2.1.13:**

[2] $C, F$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. . $\forall\, x, y, z \in C$ ve $\alpha \in F$ için

$$. \ : C \times C \to F$$

ikili işlemi aşağıdaki şartları sağlıyorsa $C$ ye $F$ üzerinde cebir denir.

C1) $\alpha.(xy) = (\alpha x).y = x.(\alpha y)$

C2) $x.(y + z) = x.y + x.z$

$(x + y).z = x.z + y.z$

C3) $x.(yz) = (xy).z$

**Not:** Tanımdan da anlaşılacağı gibi cebir, lineer uzay ile halkanın arakesitidir ve burada tanımlanan işlem skalerle çarpma işlemidir.

**Tanım 2.1.14:**

[34] $R$ reel sayılar kümesi, $B(R)$ de $R$ nin sınırlı, boştan farklı tüm alt kümelerinin ailesi ve $A$ parametrelerinin bir kümesi olarak alınsın. O zaman $F: A \to B(R)$ dönüşümü esnek reel küme olarak adlandırılır ve $(F, A)$ ile gösterilir. Eğer $(F, A)$ özel olarak tek elemanlı esnek küme ise $(F, A)$ nın esnek elemanlara karşılık gelecek şekilde tanımlanmasıyla, esnek reel sayılar kümesi olarak adlandırılacaktır. Esnek reel sayıları tanımlarken $\bar{r}, \bar{s}, \bar{t}$ sembollerini kullanarak, her $e \in A$ için şartını sağlayan esnek reel sayı

$$r(e) = \bar{r}$$

ile gösterilir. Örneğin her $e \in A$ için $\bar{1}$ esnek reel sayısı için $1(e) = \bar{1}$ dir.

**Tanım 2.1.15:**

[10] $(A, +, .)$ bir halka ve $I$ da onun bir ideali olsun.

$$A/I=\{I+a:a\in A\}$$

kümesi aşağıda tanımlanan işlemlerle bir halkadır.

$$\text{Toplama : } (I+a)\oplus(I+b)=I+(a+b)$$

$$\text{Çarpma : } (I+a)\otimes(I+b)=I+(a.b).$$

$(A/I,\oplus,\otimes)$ halkasına $A$ ile $I$ nın bölüm halkası denir.

**Tanım 2.1.16:**

[10] $I$, $A$ halkasının bir ideali olsun.

$$\pi:A\to A/I\ ,\ \pi(a)=a+I$$

ile tanımlanan fonksiyon bir örten homomorfizmadır. $\pi$ ye doğal homomorfizma denir.

**Teorem 2.1.17:**

[10] $f:A\to S$ bir örten halka homomorfizması ve $I$, $A$nın bir ideali olsun. $Çekf\subseteq I$ ise

$$A/I\cong S/f(I).$$

dır. $f$ örten değil ise, $A/I$ $S/f(I)$ nın bir alt halkasına izomorf olur.

**Tanım 2.1.18:**

[6] $(M,+)$ değişmeli bir grup ve $R$ bir halka olsun. $M$ deki elemanların, $R$ deki elemanlarla skaler çarpımı, $\cdot : R\times M\to M$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $M$ ye $R$ üzerinde bir modül veya kısaca, $R$- modül denir.

**i.** Her $r\in R$, her $m,m'\in M$ için $r.(m+m')=r.m+r.m'$,

**ii.** Her $r,r'\in R$, her $m\in M$ için $(r+r').m=r.m+r'.m$,

**iii.** Her $r,r'\in R$, her $m\in M$ için $(r.r').m=r.(r'.m)$,

**iv.** Her $m\in M$ için $1_R.m=m$.

# BÖLÜM 3

# ESNEK NORMLU HALKALAR ÜZERİNDE BAZI CEBİRSEL YAPILAR

Bu bölümde, esnek kümeler üzerinde normlu halka tanımlanmış ve ilk kez tanımlanan bu cebirsel yapı esnek normlu halka olarak adlandırılmıştır. Bu cebirsel yapı üzerinde sırasıyla; esnek maksimal idealler, esnek maksimal ideallerin genişlemesi ve esnek normlu halkaların genelleştirilmesi tanımlanmıştır. Bu cebirsel yapılarla ilgili bazı temel özellikler incelenmiştir.

## 3.1. Esnek Normlu Halkalar

**Tanım 3.1.1:**

$H$ birim elemanı $\bar{1}$ olan birleşmeli bir halka olsun. Her $\tilde{x}, \tilde{y} \in H$ için $\|.\|_s: H \to R(A)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\|.\|_s$ fonksiyonuna $H$ de esnek norm denir.

**i.** $\|\tilde{x}\|_s \tilde{\geqq} 0$ ve $\|\tilde{x}\|_s = 0 \Leftrightarrow \tilde{x} = 0$, buradan $\|\bar{1}\|_s = \|-\bar{1}\|_s = 1$.

**ii.** $\exists\, \tilde{x} \in H, \quad 0 \tilde{\leqq} \|\tilde{x}\|_s \tilde{\leqq} 1.$

**iii.** $\|\tilde{x}.\tilde{y}\|_s \tilde{\leqq} \|\tilde{x}\|_s . \|\tilde{y}\|_s$ ve $\|e\|_s = 1$

**iv.** $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_s \tilde{\leqq} max(\|\tilde{x}\|_s, \|\tilde{y}\|_s)$

$H$ üzerinde tanımlanan $\|.\|$ esnek normla birlikte $H$ halkasına esnek normlu halka denir ve $(H, \|.\|_s, A)$ ya da $(H, \|.\|_s)$ ile gösterilir.

**Örnek 3.1.2:**

$R(E)$ esnek reel sayılar kümesi olsun. Her $\tilde{e} \in R(E)$ için $\|.\|_s: R(E) \to R(A)$ ile tanımlanan $\|\tilde{e}\|_s = |\tilde{e}|$, burada $|\tilde{e}|$ esnek reel sayıların modülüdür. O zaman

$\|.\|_s$ fonksiyonu bütün esnek norm şartlarını sağladığından $R(E)$ esnek normlu halka olur ve $(R(E), \|.\|_s)$ ile gösterilir.

**Tanım 3.1.3:**

$H$ esnek normlu halka olsun. Her $\varepsilon \tilde{>} \bar{0}$ için en az bir $\tilde{m}_0$ vardır öyle ki her $\tilde{m}, \tilde{n} \tilde{\geq} \tilde{m}_0$ için $\|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\|_s \tilde{<} \varepsilon$ ise $H$ kümesi üzerinde tanımlı $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots$ esnek dizisi esnek Cauchy dizisidir. Her esnek Cauchy dizisi yakınsak ise $H$ esnek normlu halkası esnek tamdır.

**Lemma 3.1.4:**

$H$ esnek normlu halka ve her $\tilde{x}, \tilde{y} \in H$ olsun. O halde

**i.** $\|-\tilde{x}\|_s = \|\tilde{x}\|_s$

**ii**. $\|\tilde{x}\|_s \tilde{<} \|\tilde{y}\|_s$ ise $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_s = \|\tilde{y}\|_s$.

**iii.** Her $\varepsilon \tilde{>} \bar{0}$ için en az bir $\tilde{m}_0$ vardır öyle ki her $\tilde{m}, \tilde{n} \tilde{\geq} \tilde{m}_0$ için $\|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\|_s \tilde{<} \varepsilon$ ise $H$ kümesi üzerinde tanımlı $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots$ esnek dizisi esnek Cauchy dizisidir.

**iv**. $H$ den $R(E)$ ye esnek dönüşümü $\tilde{x} \rightarrow \|\tilde{x}\|_s$' e esnek süreklidir.

**v.** $H$ esnek tam ise $H$ üzerindeki $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{x}_n$ esnek serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\tilde{x}_n \rightarrow \bar{0}$ olmasıdır.

**İspat:**

**i.** $\|-\tilde{x}\|_s \tilde{\leq} \|-\bar{1}\|_s . \|\tilde{x}\|_s = \|\tilde{x}\|_s$ olduğu görülmektedir. $\tilde{x}$ yerine $-\tilde{x}$ yazarsak $\|\tilde{x}\|_s \tilde{\leq} \|-\tilde{x}\|_s$ elde ederiz.

**ii.** Farz edelim ki $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_s \tilde{\leq} \|\tilde{y}\|_s$ olsun. O zaman (i) den,

$$\|\tilde{y}\|_s = \|(-\tilde{x}) + (\tilde{x} + \tilde{y})\|_s \tilde{\leq} max(\|-\tilde{x}\|_s, \|\tilde{x} + \tilde{y}\|_s) \tilde{\leq} \|\tilde{y}\|_s$$

olur bu bir çelişkidir ve

$$\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_s = \|\tilde{y}\|_s$$

dir.

**iii.** $\tilde{n} \tilde{>} \tilde{m} \tilde{\geq} \tilde{m}_0$ olsun. O zaman

$$\|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\|_s \leqq \max(\|\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}\|_s, \|\tilde{x}_{n-1} - \tilde{x}_{n-2}\|_s, \dots, \|\tilde{x}_{m+1} - \tilde{x}_m\|_s) \lessapprox \varepsilon$$

dur.

**iv.** $\|\tilde{x}\|_s = \|(\tilde{x} - \tilde{y}) + (\tilde{y})\|_s \leqq max(\|\tilde{y}\|_s, \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_s) \leqq \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_s + \|\tilde{y}\|_s$.

Buradan $\|\tilde{x}\|_s - \|\tilde{y}\|_s \leqq \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_s$ simetrik olarak $\|\tilde{y}\|_s - \|\tilde{x}\|_s \leqq \|\tilde{y} - \tilde{x}\|_s = \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_s$. Bundan dolayı

$$|\|\tilde{x}\|_s - \|\tilde{y}\|_s| \leqq \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_s$$

dır. Sonuç olarak esnek dönüşümü $\tilde{x} \to \|\tilde{x}\|_s$ esnek süreklidir.

**v.** $\tilde{s}_n = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{x}_i$ olsun. O zaman $\tilde{s}_{n+1} - \tilde{s}_n = \tilde{x}_{n+1}$ olur. Dolayısıyla (iii) den, $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{s}_3, \dots$ esnek Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart $\tilde{x}_n \to \bar{0}$ olmasıdır. Dolayısıyla $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{x}_n$ esnek serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\tilde{x}_n \to \bar{0}$ olmasıdır.

**Örnek 3.1.5:**

$R(E)$ de

$$\|\tilde{x}\|_s = \max_{0 \leqq t \leqq 1} |\tilde{x}(t)|$$

tanımlı ve [0,1] aralığı üzerinde esnek sürekli olan tüm esnek reel değerli fonksiyonların uzayı olsun. $R(E)$ esnek normlu halkadır ve yukarıdaki Lemma 3.1.4 ün tüm şartlarını sağladığı açıktır.

**Teorem 3.1.6:**

Her $H$ esnek normlu halkası için, ona topolojik ve cebirsel olarak izomorf olan ve $\|\tilde{x}.\tilde{y}\|_s \leqq \|\tilde{x}\|_s . \|\tilde{y}\|_s$ ve $\|e\|_s = 1$ özelliklerini sağlayan bir $H'$ esnek normlu halkası vardır.

**İspat:**

$H$ nin her $\tilde{x}$ esnek elemanı çarpmaya göre $\tilde{x}$ : $T_{\tilde{x}}.\tilde{y} = \tilde{x}.\tilde{y}$, $T_{\tilde{x}}$ esnek lineer operatörünü oluşturur. Bu esnek operatör esnek lineerdir. $Q(E)$, $H$ esnek Banach uzayının kendi içinde oluşturduğu bütün esnek lineer operatörlerin esnek halkasıdır. $T_{\tilde{x}}$ esnek operatörü birim elemanlı esnek alt halka olan $H'$ halkasını oluşturur.

$H'$ nün

$$\|T_{\tilde{x}}\|_s = \sup_{\|\tilde{y}\|_s \leqq 1} \|\tilde{x}.\tilde{y}\|_s$$

esnek normu altında esnek normlu halka olduğunu gösterelim.

$H'$ nün sadece esnek tam olduğunu ispatlamamız gerekir, yani $H'$, $Q(E)$ içinde esnek kapalıdır. Çarpmanın birleşme özelliğinden

$$T_{\tilde{x}}(\tilde{y}\tilde{z}) = \tilde{x}.(\tilde{y}\tilde{z}) = (\tilde{x}\tilde{y}).\tilde{z} = T_{\tilde{x}}\tilde{y}.\tilde{z}$$

olur.

Eğer $T$ esnek operatörü ve herhangi $\tilde{y}$ ve $\tilde{z}$ sabitleri için $T_{(\tilde{y}\tilde{z})} = T\tilde{y}.\tilde{z}$ eşitliği sağlanıyorsa, $T_e = \tilde{x}$ alarak,

$$T\tilde{y} = T_{(e\tilde{y})} = T_e.\tilde{y} = \tilde{x}.\tilde{y},$$

yazarız. Burada $T, \tilde{x}$ in çarpmaya göre esnek operatörüdür.

$H$ nin içinde $T_{\tilde{n}}.\tilde{x}$ operatörlerinin bir $T\tilde{x}$ operatörüne yakınsadığını kabul edelim yani her $\tilde{x} \in H$ için $T_{\tilde{n}}.\tilde{x} \to T\tilde{x}$ 'e yakınsar. İlk çarpana göre çarpımın sürekliliğinden

$$T(\tilde{x}\tilde{y}) = \lim T_{\tilde{n}}(\tilde{x}\tilde{y}) = \lim T_{\tilde{n}}\tilde{x}.\tilde{y} = T\tilde{x}.\tilde{y}$$

elde ederiz. Dolayısıyla $T$ nin de $H'$ nün içinde olduğunu göstermiş olduk. Dolayısıyla $H'$ deki esnek operatörün $Q(E)$ operatörlerine esnek düzgün yakınsak olduklarından esnek kapalıdır.

Açıkça $H$ ve $H'$ esnek normlu halkaları esnek cebirsel izomorfiktir. Şimdi $H$ ve $H'$ nün aynı zamanda esnek topolojik izomorfik olduklarını gösterelim. ($e \neq \bar{0}$ ve dolayısıyla $\|e\|_s \gneqq \bar{0}$.)

$$\|T_{\tilde{x}}\|_s = \sup_{\|\tilde{y}\|_s \leqq 1} \|\tilde{x}.\tilde{y}\|_s \geqq \left\|\tilde{x}.\frac{e}{\|e\|_s}\right\|_s = \frac{\|\tilde{x}\|_s}{\|e\|_s}$$

ya da

$$\|\tilde{x}\|_s \leqq \|e\|_s.\|T_{\tilde{x}}\|_s.$$

elde ederiz.

Böylece, $H$ uzayı üzerinde $H'$ uzayının $T_{\tilde{x}} \rightarrow \tilde{x}$ esnek dönüşümü esnek süreklidir; bu iki uzay esnek tam olduğunda, Banach teoreminden, ters esnek dönüşüm $\tilde{x} \rightarrow T_{\tilde{x}}$ esnek süreklidir. Böylece $H$ ve $H'$ esnek halkalarının esnek topolojik izomorfik olduklarını gösterdik ve dolayısıyla teorem ispatlanmıştır, çünkü $H'$ nün esnek norm özelliğinden $\|\tilde{x}.\tilde{y}\|_s \tilde{\leq} \|\tilde{x}\|_s.\|\tilde{y}\|_s$ ve $\|e\|_s = 1$ dir. Aynı zamanda esnek Banach uzayında bir esnek operatörün, her esnek normlu halkanın cebirsel ve topolojik izomorfik esnek normlu halka olduğu sonucunu elde ederiz.

**Not 3.1.7:** Eğer $\|\tilde{x}.\tilde{y}\|_s \tilde{\leq} \|\tilde{x}\|_s.\|\tilde{y}\|_s$ ve $\|e\|_s = 1$ özellikleri $H$ esnek normlu halkasında sağlanırsa, $H$ ve $H'$ esnek izomorfiktir. Bu durumda

$$\|\tilde{x}\|_s \tilde{\leq} \|e\|_s.\|T_{\tilde{x}}\|_s \quad \text{için} \quad \|\tilde{x}\|_s \tilde{\leq} \|T_{\tilde{x}}\|_s \tag{1}$$

dir. Diğer taraftan $\|\tilde{x}.\tilde{y}\|_s \tilde{\leq} \|\tilde{x}\|_s.\|\tilde{y}\|_s$ olduğundan

$$\|T_{\tilde{x}}\|_s = \sup_{\|\tilde{y}\|_s \tilde{\leq} 1} \|\tilde{x}.\tilde{y}\|_s \tilde{\leq} \|\tilde{x}\|_s \sup_{\|\tilde{y}\|_s \tilde{\leq} 1} \|\tilde{y}\|_s = \|\tilde{x}\|_s \tag{2}$$

elde ederiz. Dolayısıyla (1) ve (2) den

$$\|T_{\tilde{x}}\|_s = \|\tilde{x}\|_s$$

elde edilir.

## 3.2. Esnek Maksimal İdealler

**Tanım 3.2.1:**

$F(R,A)$ esnek normlu halka ve $F(I,A) \tilde{\subseteq} F(R,A)$ olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $F(I;A)$ (ya da $I(A)$) kümesine esnek normlu halkanın esnek ideali denir.

**i.** $\forall\, \tilde{x} \in F(I,A)$ ve $\tilde{y} \in F(I,A)$, ise $\tilde{x} + \tilde{y} \in F(I,A)$;

**ii.** $\forall\, \tilde{x} \in F(I,A), \forall\, \tilde{z} \in F(R,A)$ ise $\tilde{z}.\tilde{x} \in F(I,A)$

**iii.** $F(I,A) \neq F(R,A)$

İlk iki şart sağlandığında $F(I, A)$ ya $F(R, A)$ esnek normlu halkasının esnek ideali denir. Üçüncü şart eklenirse $F(I, A)$ ya $F(R, A)$ esnek normlu halkasının esnek öz ideali denir.

**Tanım 3.2.2:**

Herhangi bir esnek öz ideal içermeyen esnek ideale esnek maksimal ideal denir.

**Örnek 3.2.3:**

$\tilde{x}(\tilde{t}) \in C$ için $\tilde{x}(\tilde{t}) = \bar{0}$ olan tüm esnek fonksiyonların kümesi $F(M_{\bar{\tau}}, A)$ olsun. $\tilde{y}(\tilde{t})$, $F(M_{\bar{\tau}}, A)$ kümesine ait olmayan $C$ nin esnek fonksiyonu olsun. $\tilde{y}(\tilde{t})$ ve $F(M_{\bar{\tau}}, A)$ içeren esnek öz idealin olmadığını gösterelim. Ancak bu her $\tilde{z}(\tilde{t}) \in C$ esnek fonksiyonunun

$$\tilde{z}(\tilde{t}) = \frac{\tilde{z}(\bar{\tau})}{\tilde{y}(\bar{\tau})}.\tilde{y}(\tilde{t}) + \left(\tilde{z}(\tilde{t}) - \frac{\tilde{y}(\tilde{t})}{\tilde{y}(\bar{\tau})}.\tilde{z}(\bar{\tau})\right)$$

$$\tilde{z}(\tilde{t}) - \frac{\tilde{y}(\tilde{t})}{\tilde{y}(\bar{\tau})}.\tilde{z}(\bar{\tau}) \in F(M_{\bar{\tau}}; A)$$

eşitliğinden $\tilde{y}(\tilde{t})$ ilk tarafın bir katıdır. $C$ nin herhangi bir esnek maksimal ideali $F(M, A)$ olsun. Bu esnek maksimal ideali oluşturan tüm esnek fonksiyonların $[\bar{0}, \bar{1}]$ aralığında aynı sabit bir esnek noktada olduğunu gösterelim. Gerçekten, böyle olmasaydı; $\bar{\tau} \in [\bar{0}, \bar{1}]$ olurdu. $\bar{\tau}$ içeren bazı aralıklarda $\tilde{x}_{\bar{\tau}}(\tilde{t}) \tilde{>} \delta_{\bar{\tau}} \tilde{>} \bar{0}$ , $\tilde{x}_{\bar{\tau}}(\tilde{t}) \neq \bar{0}$ olacak şekilde $\tilde{x}_{\bar{\tau}}(\tilde{t}) \in F(M, A)$ bir esnek fonksiyon bulabiliriz. $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \dots, \bar{\tau}_n$ aralıkların her birine karşılık gelen esnek noktalar olsun. $F(M; A)$ nın içerdiği bu esnek fonksiyon

$$\tilde{x}(\tilde{t}) = \tilde{x}_{\bar{\tau}_1}(\tilde{t}).\overline{\tilde{x}_{\bar{\tau}_1}(\tilde{t})} + \tilde{x}_{\bar{\tau}_2}(\tilde{t}).\overline{\tilde{x}_{\bar{\tau}_2}(\tilde{t})} + \cdots + \tilde{x}_{\bar{\tau}_n}(\tilde{t}).\overline{\tilde{x}_{\bar{\tau}_n}(\tilde{t})}$$

$$= \left|\tilde{x}_{\bar{\tau}_1}(\tilde{t})\right|^2 + \left|\tilde{x}_{\bar{\tau}_2}(\tilde{t})\right|^2 + \cdots + \left|\tilde{x}_{\bar{\tau}_n}(\tilde{t})\right|^2$$

dır. Ancak diğer taraftan

$$\tilde{x}(\tilde{t}) \tilde{>} \min_{1 \leq k \leq n} \delta^2{}_{\bar{\tau}} \tilde{>} \bar{0}$$

dır. Buradan $\tilde{x}(\tilde{t})$ esnek öz ideale ait olamaz, bu durumda esnek maksimal ideal $F(M,A)$ ya ait olamaz dolayısıyla $\frac{1}{\tilde{x}(\tilde{t})}$ $C$ de bulunmaktadır. $F(M,A)$ tüm $\tilde{x}(\bar{\tau})$ öyle ki $\tilde{x}(\bar{\tau}) = \bar{0}$ esnek nokta $\bar{\tau}$ var olduğunu gösteriyor bu ise çelişkidir. O zaman $F(M,A)$ esnek maksimal olduğu ve $\bar{\tau}$ nun esnek noktasında C nin tüm esnek fonksiyonlarının oluşturduğu $F(M_\tau, A)$ esnek idealdir. $\tilde{x}, \tilde{y} \in R(A)$ esnek elemanlar için $\tilde{x} - \tilde{y} \in F(I,A)$ ise $F(I,A)$ esnek ideali esnek denklik modülü diye adlandırılır. $R(A)/I(A)$ esnek norm

$$\|F(X,A)\|_s = \inf_{\infty \in F(X,A)} \|\tilde{x}\|_s$$

olarak tanımlanır.

**Teorem 3.2.4:**

Eğer $I(A)$ kapalı bir esnek öz ideal ise, $R(A)/I(A)$ esnek normlu halkadır.

**İspat:**

**i.** $\left\|\bar{\lambda}F(X,A)\right\|_s = \left|\bar{\lambda}\right|.\|F(X,A)\|_s$ açıktır.

**ii.** $\|F(X,A) + F(Y,A)\|_s \lesseqqgtr \|F(X,A)\|_s + \|F(Y,A)\|_s$ olduğunu gösterelim.

$$\|F(X,A) + F(Y,A)\|_s = \inf_{\tilde{z} \in F(X,A)+F(Y,A)} \|\tilde{z}\|_s$$

$$= \inf_{\infty \in F(X,A),\, \tilde{y} \in F(Y,A)} \|\tilde{x} + \tilde{y}\|_s$$

$$\lesseqqgtr \inf_{\infty \in F(X,A),\, \tilde{y} \in F(Y,A)} \{\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_s\}$$

$$= \inf_{\infty \in F(X,A)} \|\tilde{x}\|_s + \inf_{\tilde{y} \in F(Y,A)} \|\tilde{y}\|_s$$

$$= \|F(X,A)\|_s + \|F(Y,A)\|_s$$

elde ederiz.

**iii.** $\|F(X,A).F(Y,A)\|_s \lesseqqgtr \|F(X,A)\|_s.\|F(Y,A)\|_s$

$$\|F(X,A).F(Y,A)\|_s = \inf_{\tilde{z} \in F(X,A)+F(Y,A)} \|\tilde{z}\|_s$$

$$= \inf_{\infty \in F(X,A),\, \tilde{y} \in F(Y,A)} \|\tilde{x}.\tilde{y}\|_s$$

$$\lneqq \inf_{\infty\in F(X,A),\, \tilde{y}\in F(Y,A)} \{\|\tilde{x}.\tilde{y}\|_s\}$$

$$= \inf_{\infty\in F(X,A)} \|\tilde{x}\|_s \cdot \inf_{\tilde{y}\in F(Y,A)} \|\tilde{y}\|_s$$

$$= \|F(X,A)\|_s . \|F(Y,A)\|_s$$

elde ederiz.

**iv.** $\|E\|_s = 1$. yani

$e \in E$ olduğunda $\|E\|_s \lneqq 1$ olduğu aşikardır. E nin keyfi esnek elemanı $\tilde{y}$ olsun. $\tilde{y} = e + \tilde{x}$ burada $\tilde{x} \in I(A)$. Şimdi $\tilde{y}\,, \bar{1}$ den küçük olsa idi, $\tilde{x}$ bir tersi olurdu ve $I(A)$ esnek öz idealine ait olmazdı, dolayısıyla ispat tamamlanmış olur. Böylece $\|E\|_s \gneqq 1$ ve buradan $\|E\|_s = 1$ dir.

**v.** $\|F(X,A)\|_s = 0$ ise o halde $F(X,A)$ esnek sıfır sınıfındadır.

$$\|F(X,A)\|_s = \inf_{\infty\in F(X,A)} \|\tilde{x}\|_s$$

tarafından $n \to \infty$ için $\tilde{x}_n \to \bar{0}$ öyleki $\tilde{x}_n \in F(X,A)$ esnek dizisi vardır. $F(X,A)$ keyfi esnek elemanı $\tilde{x}$ olsun. $\tilde{x} - \tilde{x}_n \in I(A)$ ve $\tilde{x}_n \to \bar{0}$ olduğunda

$$\tilde{x} = \lim_{n\to\infty} \tilde{x} - \tilde{x}_n \in \overline{I(A)}$$

vardır. Ancak, kabulümüz, esnek ideal kapalıdır yani $I(A) = \overline{I(A)}$ olduğundan $I(A)$, $F(X,A)$ denk gelir ve benzer şekilde esnek sıfır sınıfındadır.

**vi.** $R(A)/I(A)$ üzerinde tanımlanan

$$\|F(X,A)\|_s = \inf_{\infty\in F(X,A)} \|\tilde{x}\|_s$$

esnek normu esnek tamdır.

$\{X(A)_n\}$, esnek sınıfların esnek bir dizisi olsun, yani $n, m \to \infty$ için

$$\|X(A)_n - X(A)_m\|_s \to \bar{0}$$

olsun. Sonra $\sum_k \left\|X(A)_{n_{k+1}} - X(A)_{n_k}\right\|$ serisinin yakınsaması için $\left\{X(A)_{n_k}\right\}$ da esnek bir alt dizi seçebiliriz. Keyfi bir esnek eleman $\tilde{x}_1 \in X(A)_{n_1}$ için

$$\|F(X,A)\|_s = \inf_{\infty \in F(X,A)} \|\tilde{x}\|_s$$

ile bir esnek eleman

$$\|\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1\|_s \mathrel{\tilde{<}} \left\|X(A)_{n_2} - X(A)_{n_1}\right\|_s;$$

bulabiliriz. Ayrıca $\tilde{x}_2$ için

$$\|\tilde{x}_3 - \tilde{x}_2\|_s \mathrel{\tilde{<}} 2\left\|X(A)_{n_3} - X(A)_{n_2}\right\|_s;$$

olacak şekilde $\tilde{x}_3 \in X(A)_{n_3}$ esnek elemanını bulabiliriz ve açıkçası $\left\{X(A)_{n_k}\right\}$ bir esnek dizidir ve bazı $\tilde{x} \in R(A)$ ya yakınsar. Ancak daha sonra $\left\{X(A)_{n_k}\right\}$ esnek dizisi ve dolayısıyla bütün esnek diziler $\{X(A)_n\}$, $\tilde{x}$ içeren $F(X,A)$ esnek sınıfına yakınsar.

**Not 3.2.5**

$R(A)/I(A)$ da $J(A)$ nın $J'(A)$ görüntüsü altındaki her esnek ideal $I(A)$ ve $J'(A)$ yı içeren esnek kapalı ideal, $R(A)/I(A)$ esnek halkasının esnek kapalı idealleri olan $J(A)$ ile $J'(A)$ arasında bire bir benzerlik vardır.

**Teorem 3.2.6:**

$R(A)$ esnek normlu halkasında $R(A)/M(A)$ esnek rezidü sınıflarının halkası $M(A)$ esnek maksimal idealine göre bir esnek cisimdir.

**İspat:**

Her $I(A)$ esnek öz ideali esnek bir esnek maksimal idealde bulunur. Özellikle esnek halka sıfır olmayan esnek maksimal ideali içermiyorsa, o zaman bir esnek cisim olur. Ancak $R(A)/I(A)$ da $J(A)$ esnek ideal olsaydı, onun $R(A)$ daki ters görüntüsü esnek öz ideal olup, $M(A)$ nın esnek maksimallığı ile çelişkidir. Teorem 3.2.4 den, $R(A)/M(A)$ esnek normlu halkadır, çünkü yukarıda gördüğümüz gibi bir esnek maksimal ideal her zaman esnek kapalıdır.

Teorem 3.2.6 nın tersinin de doğru olduğunu kolayca görebiliriz.

**Teorem 3.2.7:**

$R(A)$ esnek normlu halkasının $R(A)/I(A)$ esnek rezidü sınıflarının halkası $I(A)$ esnek maksimal idealine göre bir esnek cisimse, o halde $I(A)$ bir esnek maksimal idealdir. Burada $I(A)$ nın esnek kapalı olmasına gerek yoktur.

**İspat:**

$R(A)$, $I(A)$ ihtiva eden ve onunla denk olmayan esnek öz ideal $J(A)$ yı içeriyorsa, o halde $R(A)/I(A)$ nın görüntüsü sıfır olmayan esnek öz ideal olacağı ve bu imkansız olduğundan $R(A)/I(A)$ bir esnek cisimdir.

**Örnek 3.2.8:**

$C(A)$ esnek halkasının rezidü sınıfı ile birlikte $M(A)$ esnek maksimal idealini göz önüne alalım. $M(A)$, $\bar{\tau}$ nun bazı esnek noktalardaki ve bu esnek noktalardaki $\lambda_{\tilde{x}}$ in bazı değerleri için $\tilde{x}(\bar{t}) \in C(A)$ nın bütün esnek fonksiyonları $F(X, A)$ esnek rezidü sınıfını oluşturur.

Ayrıca

$$\lambda_{\tilde{x}+\tilde{y}} = \lambda_{\tilde{x}} + \lambda_{\tilde{y}},$$

$$\lambda_{\tilde{x}.\tilde{y}} = \lambda_{\tilde{x}}.\lambda_{\tilde{y}},$$

ve

$$\lambda_{\mu\tilde{x}} = \mu.\lambda_{\tilde{x}}.$$

Ayrıca $\tilde{x}(\bar{t}) \in F(X, A)$ için $\|F(X, A)\| = |\lambda_{\tilde{x}}|$, o halde $\|\tilde{x}\| \gtreqqless |\tilde{x}(\bar{t})| = |\lambda_{\tilde{x}}|$ ve diğer taraftan $|\tilde{x}(\bar{t})| \equiv |\lambda_{\tilde{x}}|$ esnek fonksiyonu $F(X, A)$ esnek sınıfına aittir. Böylece $C(A)/M(A)$ reel sayıların esnek cismi ile izomorfiktir.

### 3.3 Esnek Maksimal İdeallerin Genişlemesi

Esnek normlu halkalarda, çarpımsal esnek lineer fonksiyonellerin genişlemesinin mümkün olup olmadığı, diğer bir deyişle, her $\tilde{x}, \tilde{y}$ için $f(\tilde{x}.\tilde{y}) = f(\tilde{x}).f(\tilde{y})$ ek koşulunu sağlayan esnek lineer fonksiyonellerin $f(\tilde{x})$ genişletilip genişletilmediği sorusu sorulabilir. Genel olarak bu sorunun cevabı olumsuzdur. Örneğin, $F(N,A)$ reel değerli bütün esnek fonksiyonların esnek bir uzayı olsun. $\gamma$,

$$\|\tilde{x}\|_s = \max_{\gamma \leqq 1} |\tilde{x}(\gamma)|$$

verilen esnek norm ile birlikte $\gamma \lesssim \bar{1}$ de esnek sürekli ve bu dairenin içi boyunca esnek düzgün olarak tanımlanmıştır.

$F(N,A)$ normal çarpım altında esnek normlu halkadır. Çarpımsal esnek lineer fonksiyonel $f(\tilde{x}) = \tilde{x}(\bar{0})$ kapalı esnek alt halka olarak $F(N,A)$ yı içeren $\gamma = \bar{1}$ dairesindeki bütün esnek sürekli fonksiyonların çarpımı korunarak esnek halkaya genişletilemez.

Bu genişletilmenin ispatına geçmeden önce aşağıdakileri not edelim. Bir çarpımsal esnek lineer fonksiyonel $f(\tilde{x})$ in esnek normlu halkası $SR_1(A)$ dan daha büyük olan $SR(A)'$ a esnek halkasına genişlediğini varsayalım. Daha sonra, özellikle $\tilde{x} \in SR_1(A)$ için $f(\tilde{x}) = \bar{0}$ olan $SM_1(A)$ kümesindedir. Ancak $SM_1(A)$, $SR_1(A)$ nın ve $SM(A)$ da $SR(A)$ nın esnek maksimal idealidir. Böylece çarpımsal esnek fonksiyonel $f(\tilde{x}_1)$ in genişlemesi $SR_1(A)$ nın esnek maksimal idealinin $SM_1(A)$ ya ve $SR(A)$ nın esnek maksimal idealinin $SM(A)$ ya genişlemesi birlikte olur. Tersine, $SR_1(A)$ nın esnek maksimal ideali $SM_1(A)$ ya, $SR(A)$ nın esnek maksimal ideali de $SM(A)$ ya genişletilirse, çarpımsal esnek lineer fonksiyoneli de $SM(A)(\tilde{x}) = \tilde{x}$ dir. $SR(A)$ üzerindeki $SM(A)$nın $SR_1(A)$ da verilen çarpımsal esnek lineer fonksiyoneli olan $SM_1(A)(\tilde{x})$ 'e bir genişlemesidir. $\tilde{x}_0 \in SR_1(A)$ ve $SM_1(A)(\tilde{x}_0) = \bar{\lambda}_0$ olsun. Daha sonra $SM_1(A)\left(\tilde{x}_0 - \bar{\lambda}_0 e\right) = \bar{0}$ olur ve böylece $\tilde{x}_0 - \bar{\lambda}_0 e \in SM_1(A) \tilde{\subset} SM(A)$ ve bundan dolayı $SM(A)(\tilde{x}_0) = \bar{\lambda}_0$ dır. Sonuç olarak, çarpımsal bir esnek lineer fonksiyonelin genişleme problemi, ilgili esnek maksimal idealin genişlemesine eşdeğerdir.

**Teorem 3.3.1:**

Kapalı esnek normlu halka olarak $SR_1(A)$ yı içeren keyfi bir esnek normlu halka olan $SR(A)'$da $\Upsilon\left(SM_1(A)\right)$ uzayının $\Lambda_1$ sınırındaki her esnek maksimal ideali $SR(A)$ nın esnek maksimal idealine genişletilebilir.

**İspat**: İlk olarak, $\tilde{x} \in SR_1(A)$ ise

$$\max_{SM(A)\widetilde{\subset} SR(A)} |\tilde{x}.[SM(A)]| = \max_{SM_1(A)\widetilde{\subset} SR_1(A)} |\tilde{x}.[SM_1(A)]|$$

olduğunu görüyoruz. İki esnek halka olan $SR_1(A)$ ve $SR(A)$ nın bütün $\tilde{x}^n$ lerin esnek normlarının çakıştığı

$$max|\tilde{x}.[SM(A)]| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\tilde{x}^n\|_s}$$

formülü ile görülür. $SM_1(A)$ nın bütün esnek elemanlarını içeren $SR(A)$' nın esnek maksimal idealinde bulunmayan $SM_1(A) \in \Lambda_1$ in esnek maksimal ideali olduğunu varsayalım, diğer bir deyişle

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i.\tilde{z}_i,$$

$\left(\tilde{x}_i \in SM_1(A), \tilde{z}_i \in SR_1(A)\right)$ $SR(A)$ esnek halkası ile çakışmaktadır, özellikle, bu toplamlardan biri $SR(A)$ esnek halkasının

$$e = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i.\tilde{z}_i$$

birim elemanını verir. Burada genelliği kaybetmeden $max|\tilde{x}.[SM(A)]| \widetilde{\leq} \bar{1}$ olduğunu varsayalım. Burada

$$\mu \widetilde{>} \max_i \left\{ \max_{SM(A)} |\tilde{z}_i.[SM(A)]| \right\}$$

olduğunu farz edelim;

$$|\tilde{x}_i.[SM(A)]| \widetilde{<} \frac{\bar{1}}{2n\mu}$$

$(i = 1,2,3, \dots, n)$ eşitsizliği tarafından tanımlanan $SM_1(A)$ nın komşuluğunu göz önüne alalım. $SM(A) \widetilde{\subset} SR_1(A)$ ve $|\tilde{y}.[SM(A)]||\tilde{y}.[SR_1(A)]|$ esnek fonksiyonunun mutlak değeri $\bar{1}$ den küçüktür.

Yukarıdaki açıklamayla $SR(A)$ nın esnek maksimal idealleri üzerinde

$$\tilde{y}.\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i.\tilde{z}_i = \tilde{y}.e = \tilde{y}$$

çarpımının mutlak değerinin $\bar{1}$ olduğunu kabul eder. Ancak diğer taraftan

$$\max_{SM(A)\tilde{\subset} SR(A)} \left|\left(\tilde{y}.\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i.\tilde{z}_i\right).[SM(A)]\right|$$

$$\tilde{\leq} \sum_{i=1}^{n} max|\tilde{y}.[SM(A)]\tilde{x}_i.[SM(A)]| \; max|\tilde{z}_i.[SM(A)]|$$

$$\tilde{\leq} \sum_{i=1}^{n} \bar{1}.\frac{\bar{1}}{\bar{2}n\mu}.\mu$$

$$= \frac{\bar{1}}{\bar{2}}$$

bulunur ve kabulümüzle çelişki olur. Bu çelişki teoremi ispatlamaktadır.

**Sonuç 3.3.2:** Simetrik $SR_1(A)$ esnek halkasının her esnek maksimal ideali, daha büyük olan $SR_1(A)$ esnek halkasının esnek maksimal idealine genişletilebilir.

**Örnek 3.3.3:**

$SR_1(A)$ da $\|\tilde{x}\| = max|\tilde{x}.[SM(A)]|$ ise sadece $SM(A) \tilde{\subset} SR_1(A)$ esnek halkası için $SR_1(A) \tilde{\subset} SR(A)$ esnek halkasının var olduğunu belirtebiliriz ve bu esnek halka, $\Upsilon(SR_1(A))$ esnek uzayının $\Lambda$ sınırına ait olan esnek maksimal ideallerine kadar genişletilebilir. Bu $SR(A)$ esnek halkası $\Lambda$ üzerinde tanımlanan tüm esnek sürekli fonksiyonların esnek halkası olarak seçilebilir; $\Lambda$ esnek kompakt uzay olduğunda esnek normlu halka olarak $SR_1(A)$ yı içerir; $SR(A)$ tüm esnek maksimal ideallerin esnek kümesi, $\Lambda$ ile çakışır.

### 3.4 Esnek Normlu Halkaların Genelleştirilmesi

Bu bölümdeki genelleştirme, $H$ üzerinde tanımlanan tek bir esnek normdan ziyade, özellikle $\|\tilde{x}\tilde{y}\| \tilde{\leq} \|\tilde{x}\|\|\tilde{y}\|$ şartını sağlayan ve $\tilde{x} \neq \bar{0}$ iken $\|\tilde{x}\| = \bar{0}$ olabilmesine imkan veren bir esnek normlar ailesinin incelenmesidir. Bu aileyi, “yarı” kelimesini kullanarak ifade edeceğiz.

Özet olarak, esnek yarı normlu halka bir $H$ esnek halkası, esnek normlu halkaların bir "ters limiti" denebilir. Temelde, $\|\tilde{x}\| = \overline{0}$ şartını sağlayan $\tilde{x}$'lerin $Z_{\|.\|}$ esnek ideallerini oluşturduğu bir $\|.\|$ esnek yarı normu verildiğinde, bu $\|.\|$ esnek yarı-normun $H/Z_{\|.\|}$ içinde bir esnek norm tanımlamak için kullanılabilir. $H$ esnek tam olduğunda, $\tilde{x}$'in bir tersi olup olmadığı sorusu, $H/Z_{\|.\|}$'nin kapanışı $B_{\|.\|}$'nin bir tersi olup olmadığı sorusuna indirgenebilmektedir. $B_{\|.\|}$ üzerinde çalışmak elbette daha kolaydır, çünkü $H/Z_{\|.\|}$ esnek tam olmak zorunda değildir fakat $B_{\|.\|}$ bir esnek Banach cebiridir.

$H$ esnek yarı normlu halkada bir esnek cebirin birim elemanı mevcutsa, birim elemanı esnek düzgün elemanlar kümesinin bir esnek iç noktası olmayabilir, fakat terslenir olma esnek düzgün elemanlar kümesi üzerinde her durumda esnek süreklidir. Diğer yandan, çok sayıda yoğun esnek öz idealler vardır. Bu bölümde, esnek maksimal, yoğun-olmayan (ve dolayısıyla esnek kapalı), esnek sol idealler uzayının topolojikleştirilmesine yer verilmiştir. Buradan topolojik olarak önemli esnek öz idealler kolayca elde edilebilir.

**Tanım 3.4.1:**

$H$ esnek halkasında bir esnek yarı-değer, aşağıdaki şartları sağlayan bir $\|.\|$ esnek fonksiyonudur.

$$\|\tilde{x}+\tilde{y}\| \tilde{\leq} \|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\|, \quad \|\tilde{x}\tilde{y}\| \tilde{\leq} \|\tilde{x}\|\|\tilde{y}\|, \quad \|-\tilde{x}\| = \|\tilde{x}\|, \quad \|\overline{0}\| = \overline{0}.$$

Eğer $H$, bir $K(E)$ (reel ya da kompleks) esnek cismi üzerinde bir esnek lineer cebir ise, bu durumda

$$\|\lambda\tilde{x}\| = |\lambda|\|\tilde{x}\|$$

olur. Bu özellikleri sağlayan $\|.\|$'ye bir esnek yarı normlu halka adı verilir.

Topolojik bir esnek halkada, üzerinde her esnek reel sayısı için $c(e) = \tilde{c}$ için $\|\tilde{x}\| \tilde{<} \tilde{c}$ şartını sağlayan her esnek küme açık ise, bu esnek yarı-değere esnek süreklidir denir. Eğer her $\|.\| \in \upsilon$ için $\tilde{x} = \overline{0}$ olduğunda $\|\tilde{x}\| = \overline{0}$ olacak şekilde esnek yarı-değerlerin bir $\upsilon$ ailesi varsa, bu durumda $H$ esnek halkasına esnek yarı-değerlidir denir. $\tilde{c}$ esnek reel sayısı, $\|.\| \in \upsilon$ olduğunda, $\|\tilde{x}\| \tilde{<} \tilde{c}$ şartını sağlayan esnek kümeler esnek açık kümelerin bir alt bazı olarak alınırsa, açıkça $H$ bir topolojik esnek halka olur. $H$ esnek yarı-değer halkası, $\|\tilde{x}-\tilde{y}\| \tilde{<} \tilde{c}$ bağıntısıyla tanımlanan yapılar bağlamında esnek tamsa, $H$'ye esnek tam denir.

**Tanım 3.4.2:**

Bir $H$ esnek halkasında, eğer

$$\tilde{x}+\tilde{y}+\tilde{x}\tilde{y}=\overline{0}$$

oluyorsa, $\tilde{y}$, $\tilde{x}$'nin bir esnek sağ yarı-tersi ve $\tilde{x}$, $\tilde{y}$'nin bir esnek sol yarı-tersi olarak adlandırılır.

Esnek yarı norm şartları kullanılarak aşağıdaki esnek yarı-terslerin esnek süreklilik özelliği gösterilebilir.

**Teorem 3.4.3:**

$R(A)$, bir esnek yarı-değerli $H$ esnek halkasında esnek sağ yarı-terslere sahip esnek elemanların esnek kümesi olsun. $R(A)$'nin bir esnek limit noktası $\tilde{z}$ ve $\tilde{\eta}$, bu esnek limit noktasının esnek sol yarı-tersi olsun. Her $\tilde{x} \in R(A)$ için $\tilde{x}'$ esnek sağ yarı-tersleri göstersin. Bu durumda,

$$\tilde{y}=\lim_{\tilde{x}\to\tilde{z},\tilde{x}\in R(A)} \tilde{x}'.$$

**İspat:**

$H$ nin birim elemanının $\overline{1}$ olduğunu kabul edelim. Ancak, genişletme ve sadeleştirme ile yok edilebileceği için $H$ nin birim elemanının var olduğu şartını koymamız gerekmez.

Hipotezden, $\tilde{x} \in R(A)$ için

$$(\overline{1}+\tilde{y})(\overline{1}+\tilde{z})=\overline{1} \text{ ve } (\overline{1}+\tilde{x})(\overline{1}+\tilde{x}')=\overline{1}.$$

Şimdi, $\tilde{u} = \tilde{z} - \tilde{x}$ ve $\tilde{v} = \tilde{x}' - \tilde{y}$ olsun. Bu durumda

$$(\bar{1} + \tilde{z} + \tilde{u})(\bar{1} + \tilde{y} + \tilde{v}) = \bar{1}.$$

Eşitliği soldan $(\bar{1} + \tilde{y})$ ile çarptığımızda,

$$\tilde{v} = (\bar{1} + \tilde{y})\tilde{u}\tilde{v} + (\bar{1} + \tilde{y})\tilde{u}(\bar{1} + \tilde{y})$$

elde edilir. $\|.\|$ bir esnek yarı-değer olsun.

$$\|(\bar{1} + \tilde{y})\tilde{u}\| = \|\tilde{u} + \tilde{y}\tilde{u}\| \tilde{\leq} \|\tilde{u}\| + \|\tilde{y}\|\|\tilde{u}\| = (\bar{1} + \|\tilde{y}\|)\|\tilde{u}\|$$

olduğundan,

$$\|\tilde{v}\| \tilde{\leq} (\bar{1} + \|\tilde{y}\|)\|\tilde{u}\|\|\tilde{v}\| + (\bar{1} + \|\tilde{y}\|)^2 \|\tilde{u}\|.$$

Eğer $\|\tilde{u}\| \to \bar{0}$ ise, bu durumda

$$\|\tilde{u}\| \tilde{<} (\bar{1} + \|\tilde{y}\|)^{-1}$$

olup, böylece

$$\|\tilde{v}\| \tilde{\leq} (\bar{1} + \|\tilde{y}\|)^2 \|\tilde{u}\| (\bar{1} - (\bar{1} + \|\tilde{y}\|)\|\tilde{u}\|)^{-1}$$

ve buradan da $\|\tilde{v}\| \to \bar{0}$ olduğu gösterilmiş olur.

$\bar{1} + \tilde{x} \to \bar{1} + \tilde{z}$ ve $\bar{1} + \tilde{x}' \to \bar{1} + \tilde{y}$ yakınsadığından, çarpmanın sürekliliği gereği $(\bar{1} + \tilde{x})(\bar{1} + \tilde{x}') \to (\bar{1} + \tilde{z})(\bar{1} + \tilde{y})$ olup, bu sonuçla $\tilde{y}$ de $\tilde{z}$ için bir esnek sağ yarı-ters olur.

**Sonuç 3.4.4:**

Eğer $\tilde{z}$ esnek sağ düzgün elemanların bir sol düzgün limiti ise, bu durumda $\tilde{z}$ de esnek sağ düzgün olur ve esnek sağ-tersleme işlemi $\tilde{z}$ esnek noktasında esnek süreklidir.

**Tanım 3.4.5:**

$L$ bir esnek grup olsun. $L$ içinde $P$ esnek reel-değerli fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde tanımlanmış olsun.

$$P(\tilde{x}) \geqq \bar{0}, P(0) = \bar{0}, P(\tilde{x} - \tilde{y}) \leqq P(\tilde{x}) + P(\tilde{y}).$$

Burada topolojik esnek lineer uzayların esnek yarı normlarının özel bir durumdur. $\mathcal{P}$, $L$ içinde tanımlanmış bu şekildeki $P$'lerin herhangi bir esnek kümesi olsun. Bu durumda L'den kendine tanımlanmış bir $\alpha$ esnek endomorfizmi her $P \in \mathcal{P}$ ve her pozitif $n$ için $P(\tilde{x}) \tilde{<} d$ olduğunda $P(\alpha\tilde{x}) \tilde{<} n$ şartını sağlıyorsa bu $\alpha$ 'ya esnek ꝑ-direkt denir. Bu şartın sağlanması tabii ki $\mathcal{P}$ ailesinin büyüklüğüne bağlıdır. Örneğin, $L$ bir konveks topolojik esnek lineer uzay ve $\mathcal{P}$, $L$'deki tüm esnek sürekli yarı normların esnek sınıfı ise, $L$'deki bir esnek ꝑ- direkt lineer operatör mutlaka esnek birim elemanın bir skaler katıdır.

Esnek direkt operatörler fikrinin bir başka uygulaması daha vardır. $L$ bir esnek Banach uzayı, $\mathcal{E}'$ da $L$'deki izdüşümlerin bir Esnek Boolean halkası olsun. $\mathcal{E}$ esnek elemanı $E \in \mathcal{E}$ için bir $P_E$ esnek yarı normunu aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz

$$P_E(\tilde{x}) = \|E\tilde{x}\|$$

dir.

**Teorem 3.4.6:**

Sınırlı bir $\alpha \in L$ esnek operatörünün $P_E$ esnek yarı normlarına göre esnek direkt olması için gerek ve yeter şart her $E \in \mathcal{E}$ için $\alpha E = E\alpha$ olmasıdır.

**İspat:**

Her bir $E \in \mathcal{E}$ için

$$\|E\alpha\tilde{x}\| \leqq C_E\|E\tilde{x}\|.$$

ve $\tilde{x} = (\bar{1} - E)\tilde{y}$ olsun. O halde her $\tilde{y}$ veya $E\alpha = E\alpha E$ için

$$\|E\alpha(\bar{1} - E)\tilde{y}\| \leqq C_E\|E(\bar{1} - E)\tilde{y}\| = 0.$$

Benzer şekilde $(\bar{1} - E)\alpha = (\bar{1} - E)\alpha(\bar{1} - E)$ gösterilebilir.

$L$ bir esnek lineer uzay ve $\mathcal{P}$, esnek yarı normların sabitlenmiş bir esnek kümesi olsun. $D_P(L)$, ya da kısaca $D(L)$, $L$'deki esnek lineer operatörlerin esnek ᵽ-direkt bir ailesi olsun.

**Sonuç 3.4.7:**

$D(L)$ ailesi birim elemanlı bir esnek lineer cebirdir ve

$$\|\alpha\|_P = sup_{P(\tilde{x}) \leqq 1} \|\alpha\tilde{x}\|$$

şartını sağlayan $\|.\|_P$, $D(L)$'nin esnek yarı normlu halkalarını oluşturur.

**Tanım 3.4.8:**

$L$ bir esnek lineer uzay ve $\mathcal{P}$, $L$'nin bir esnek yarı normlar ailesi olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan $P$'ye esnek tam denir.

a) Her $P \in \mathcal{P}$ için $P(\tilde{x}) = \bar{0}$ ise $\tilde{x} = \bar{0}$ dır.

b) $L$'deki bir $\tilde{x}_m$ esnek yönlendirilmiş kümesi için $P(\tilde{x}_m - \tilde{x}_v)$ sıfıra yakınsadığında ve her $P \in \mathcal{P}$ için, bir $\tilde{x} \in L$, $P(\tilde{x}_m - \tilde{x})$ her $P$ için sıfıra yakınsayacak şekilde mevcuttur.

Bu tanım esnek yarı normlu halkası ve esnek lineer cebirler için de geçerlidir. $D(L)$'yi göz önüne alarak, aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 3.4.9:**

$L$ ($P \in \mathcal{P}$ esnek yarı-normlarına göre ) esnek tam ise, bu durumda $D(L)$ de $\|.\|_P$'ye göre esnek tamdır.

Buraya kadar gösterdiklerimiz aşağıdaki sonucu mümkün kılar.

**Sonuç 3.4.10:**

A birimli bir esnek lineer cebir ve $\varphi$, her $\|.\| \in \varphi$ için $\|1\| = 1$ şartını sağlayan esnek yarı normlu halkaların bir ailesi olsun. Bu durumda $A$, esnek yarı normları koruyan bir esnek izomorfi ile $D(B)$ esnek altcebirine esnek izomorfiktir. Burada $B$,

$\varphi$ özel esnek yarı normlar ailesi ile esnek yarı normlu lineer uzay olan $A$'yı temsil etmektedir.

**Tanım 3.4.11:**

$A$, $\varphi$ esnek yarı-değerlerine sahip bir esnek halka ve $\|.\|_1, \|.\|_2, \dots, \|.\|_n \in \varphi$ olsun. Bu durumda,

$$\|\tilde{x}\| \equiv max(\|\tilde{x}\|_1, \|\tilde{x}\|_2, \dots, \|\tilde{x}\|_n)$$

ifadesi $A$ içinde bir esnek yarı-değer tanımlar. $\|\tilde{x}\| = 0$ şartını sağlayan $\tilde{x}$'ler $Z_{\|.\|}$ olarak göstereceğimiz bir çift-taraflı esnek ideal oluşturur ve bu da $A$'nın ($\varphi$'a göre) esnek çekirdek idealidir. $A_{\|.\|} = A/Z_{\|.\|}$ bir esnek çekirdek bölüm halkasıdır ve bunun içerisinde doğal olarak bir $\|.\|$ tanımlanabilir. $\|.\|$ bir esnek yarı normlu halka olduğunda $A_{\|.\|}$ esnek normlu halkadır.

$A$'dan $A_{\|.\|}$'ye esnek homomorfizma, yukarıda açıklanan topoloji kullanıldığında ve $A_{\|.\|}$ içinde tanımladığımız $\|.\|$ kullanıldığında esnek süreklidir. $A_{\|.\|}$'nin bu topolojideki esnek kapanışı $\overline{A_{\|.\|}}$ ile gösterilecek ve esnek tamlanmış çekirdek bölümü olarak adlandırılacaktır. Esnek yarı normlu halka durumunda esnek tamlanmış çekirdek bölümlerinin tamamı esnek Banach cebirleridir.

Şimdi, $A$ esnek tam olduğunda $A_{\|.\|}$'un esnek tam olması gerekmediğini gösteren örnek verilecektir.

**Örnek 3.4.12:**

$X$ uzayları üzerinde esnek reel-değerli esnek sürekli $f$ fonksiyonlarının $A$ esnek cebirini ele alıyoruz ve esnek yarı-normlu halkaları şu şekilde kabul ediyoruz. Her $K \in \mathcal{K}$ için $\|.\|_K(f)$ değeri $|f(\tilde{t})|$'lerin maksimumudur.

**Teorem 3.4.13:**

$T$ esnek tam düzgün ve $C(T)$ de $T$ üzerinde esnek sürekli fonksiyonların esnek halkası olsun. Bu durumda $C(T)$ esnek tamdır ve her bir $C(T)_{\|.\|_K}$ esnek tamdır.

**İspat:**

Teorem 3.4.13'de $C(T)$'nin esnek tam olduğu açıktır; $Z_{\|.\|_K}$, $K$ üzerinde sıfırlanan esnek fonksiyonları içerir ve dolayısıyla $C(T)_{\|.\|_K}$ , $C(K)$'nın bir esnek altcebirine doğal olarak esnek izomorfiktir. $K$ üzerinde esnek sürekli olan esnek fonksiyonların $T$'nin tamamına genişletilmesi mümkündür (hatta sınırları genişletmek gerekmemektedir). Dolayısıyla sorudaki esnek altcebir kendi esnek normu içinde esnek tam olan $C(K)$'nın tamamıdır.

Morera'nın teoremine göre $H(D), C(D)$ içinde kapalı ve dolayısıyla esnek tamdır. Yine $H(D)_{\|.\|_K}$ , $C(K)$'nın bir $S$ esnek altcebirine esnek izomorfiktir. (Tabii ki $Z_K$ sadece $\bar{0}$ esnek elemanını içermektedir.) Bu esnek altcebir kapalı değildir, çünkü $D$ üzerinde bir singüler esnek noktaya sahip bir $f$ esnek analitik fonksiyonu bulunabilir. Bu, $K$ üzerindeki polinomların limiti ve $S$'nin $C(K)$'da bir limitidir. Bu sebeple $S$ kapalı değildir. Bu örnek $A_{\|.\|}$'un topolojisi $A$'nın topolojisi ile aynı olmadığında $Z_{\|.\|}$ sadece sıfırdan ibaret olabilir.

**Teorem 3.4.14:**

$BC(R_1)$, reel eksen üzerinde sınırlı esnek sürekli fonksiyonların esnek halkası olsun. Bu durumda $BC(R_1)$ esnek tam değildir; fakat her bir $BC(R_1)_{\|.\|_K}$ esnek tamdır.

**İspat:**

$BC(R_1)$ esnek tam değildir, çünkü $C(R_1)$ üzerinde esnek yoğundur; fakat her bir $BC(R_1)_{\|.\|_K}$ Teorem 3.4.13'de verdiğimiz sebeplerden dolayı esnek tamdır.

Sonraki teoremde esnek tam, esnek yarı-değerli bir $A$ esnek halkasının her esnek maksimal idealinin bir $Z_{\|.\|}$ esnek çekirdek idealinin "böleni" olduğunu göstermek istiyoruz. Gelfand'ın prensibi ile birlikte bu iddianın doğru olduğu gösterilmektedir. $A$ esnek tamsa, her $\overline{A_{\|.\|}}$ ($A_{\|.\|}$'un kapanışı) içinde (iki-taraflı) esnek yarı-tersi olan bir $\tilde{x}$ esnek elemanı $A$'da da esnek yarı-terse sahiptir, iki-taraflı esnek yarı-ters olduğunda esnek sağ yarı-ters tektir. Teorem 3.4.15'deki "tek"lik şartını kaldırmak mümkün değildir, çünkü farklı esnek sağ tersleri birleştirmek zordur.

“tek” kelimesini kullanmanın zorunlu olması esnek yarı-değerli halkalar ve esnek normlu halkalar teorileri arasındaki önemli bir farka işaret etmektedir.

Teorem 3.4.15 sonrasında “tek” kelimesinin kaldırıldığı fakat başka hipotezlerin eklendiği bir teorem daha sunacağız.

**Teorem 3.4.15:**

$\tilde{x}$, bir esnek tam yarı-değerli $A$ esnek halkasının bir elemanı olsun. Bu durumda $\tilde{x}$’in $A'$da bir tek esnek sağ yarı-terse sahip olması için gerek ve yeter şart her bir esnek tamlanmış çekirdek bölümündeki görüntüsünün orada bir tek esnek sağ yarı-terse sahip olmasıdır.

**İspat:**

Genelliği bozmadan, esnek yarı-değerlerin $\varphi$ esnek sınıfının $\|.\|_1, \|.\|_2, \dots, \|.\|_n$’i içerdiğinde

$$\|\tilde{x}\| \equiv max(\|\tilde{x}\|_1, \|\tilde{x}\|_2, \dots, \|\tilde{x}\|_n)$$

içerdiğini varsayabiliriz. $\tilde{x}$’in $A_{\|.\|}$ esnek çekirdek bölümündeki görüntüsünü $X_{\|.\|}$ ile gösterelim. $X_{\|.\|}$’nin $\overline{A_{\|.\|}}$ içindeki esnek sağ yarı-tersi $Y_{\|.\|}$ olsun. Her $n$ pozitif tamsayısı için, $A$ içinde $y_{\|.\|,n}$ ile gösterilebilecek ve $\overline{A_{\|.\|}}$ ’deki görüntüsü olan $Y_{\|.\|,n}$ $Y_{\|.\|}$ ye yakınsayan:

$$\left\|Y_{\|.\|,n} - Y_{\|.\|}\right\| \precsim \frac{\bar{1}}{n}.$$

bir esnek eleman bulunabilir. $Y_{\|.\|,n}$ gösterimindeki $\|.\|,n$ indeks ikilisi $m \leq n$ iken $(\|.\|_1, m) \leq (\|.\|_2, n)$ ve her $\tilde{z} \in A$ için $\|\tilde{z}\|_1 \precsim \|\tilde{z}\|_2$ bağıntılarıyla kısmi olarak sıralanabilir. $U \precsim \|.\|$ olduğunda $Z_{\|.\|_1} \subset Z_{\|.\|_2}$ olur; hatta $\overline{A_{\|.\|_1}}$’den $\overline{A_{\|.\|_2}}$ ye (sınırı $\bar{1}$ olan) doğal bir esnek fonksiyon vardır. Dolayısıyla bir esnek eleman $\overline{A_{\|.\|_1}}$ ’ye ait ise onun aynı zamanda $\overline{A_{\|.\|_2}}$ın esnek elemanı olduğunu kabul edebiliriz. Zaten $\|.\|_1 \precsim \|.\|_2$ olduğunda $Y_{\|.\|_1} = Y_{\|.\|_2}$ olur, çünkü $Y_{\|.\|_2}$, açıkça $X_{\|.\|_1}$’nun $\overline{A_{\|.\|_1}}\,'$deki esnek sağ yarı-tersidir ve bu tektir. Bu gerçeği kullanarak $\{Y_{\|.\|,n}\}$‘nin bir esnek cauchy dizisi oluşturduğunu göstereceğiz. $\|.\|_3 \in \varphi$ ve $\|.\|_2, \|.\|_3 \succsim \|.\|_1$ olsun. Bu durumda,

$$\left\|y_{\|.\|_1,n}-y_{\|.\|_3,n}\right\|_3=\left\|Y_{\|.\|_1,n}-Y_{\|.\|_3,n}\right\|_3$$

$$\precsim \left\|Y_{\|.\|_1,n}-Y_{\|.\|_3}\right\|_3+\left\|Y_{\|.\|_3}-Y_{\|.\|_1,n}\right\|_3$$

$$\precsim \frac{\bar{1}}{n}+\frac{\bar{1}}{m}.$$

Başlangıçtaki kabulümüzden, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$'nin bir esnek küme oluşturması ve $max(\|.\|_1,\|.\|_2)\in\varphi$ olmasından; ayrıca $\{Y_{\|.\|,n}\}$ 'nin bir esnek Cauchy dizisi oluşturmasından dolayı $A$ esnek tamdır. Benzer bir hesaplama ile her $\|.\|$ için,

$$\|\tilde{x}\tilde{y}+\tilde{x}+\tilde{y}\|=\bar{0}$$

olduğunu göstermiştik. Sonuç olarak $\tilde{y}$, $\tilde{x}$ için bir esnek sağ yarı-terstir. 3.4.16 ispatı böylece tamamlanır.

$A$ bir esnek yarı-değerli halka ve her bir $\|.\|\in\varphi$ için $A$'nın seçilmiş bir $u_{\|.\|}$ esnek elemanı olduğunu varsayalım, öyle ki

**i.** Her $\|.\|_2\in\varphi$ için bir $\varphi_{\|.\|_2}$ esnek sonlu kümesi, sadece $\|.\|\in\varphi$ içinde $\left\|u_{\|.\|}\right\|_2\neq\bar{0}$ olan esnek elemanlardan oluşsun ve $\left\|u_{\|.\|}\right\|_2\precsim\bar{1}$ dir.

**ii.** $\left\|y-\sum yu_{\|.\|}\right\|_2=\bar{0}$, bu toplam $u_{\|.\|}$ içindeki bütün esnek normlara genişletilebilir.

**iii.** Sabit bir $\|.\|$ için, sadece $\|.\|\in\varphi_{\|.\|_2}$ olduğunda $\left\|u_{\|.\|}\right\|_2\neq\bar{0}$ dır.

## BÖLÜM 4

## NORMLU BÖLÜM HALKALARI VE NORMLU $\mathbb{Z}$ -MODÜL

Bu bölümde, ilk olarak daha önce tanımlanan bölüm halkaları üzerinde norm tanımlanarak, normlu bölüm halkaları ile ilgili bazı yeni yapılar incelenmiştir. Daha sonra, vektör uzayı olmayan cebirsel yapılar üzerinde norm tanımlanmadığından vektör uzayı yerine daha geniş bir cebirsel yapı olan $\mathbb{Z}$-modül kullanılarak norm şartları sağlanmış ve bu yeni tanımlanan cebirsel yapı normlu $\mathbb{Z}$-modül olarak adlandırılmıştır. Bu bölümde, son olarak elde edilen bu yeni cebirsel yapılar daha geniş bir yapı olan esnek kümeler üzerinde tanımlanmış ve bu esnek yapılarla ilgili bazı temel özellikler incelenmiştir.

### 4.1 Normlu Bölüm Halkaları

**Tanım 4.1.1:**

$A/I$ bir halka olsun. Eğer $A/I$ nın üzerinde bir norm $\|\cdot\|$, yani $\|\cdot\|_{A/I} : A/I \to R$ negatif olmayan, reel-değerli ve $\forall\, \bar{x}, \bar{y} \in A/I$ için aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyon tanımlanmış ise $A$ ya bir normlu halka denir.

**i**. $\|\bar{x}\|_{A/I} = 0 \Leftrightarrow x \in I$,

**ii**. $\|\bar{x} \oplus \bar{y}\|_{A/I} \le \|\bar{x}\|_{A/I} + \|\bar{y}\|_{A/I}$,

**iii**. $\|-\bar{x}\|_{A/I} = \|-1 \otimes (\bar{x})\|_{A/I} = \|-1\| . \|\bar{x}\|_{A/I} = \|\bar{x}\|_{A/I}$ ,

**iv**. $\|\bar{x} \otimes \bar{y}\|_{A/I} \le \|\bar{x}\|_{A/I} . \|\bar{y}\|_{A/I}$ .

**Örnek 4.1.2:**

$Z/_{2Z} = Z_2 = \{\bar{0},\bar{1}\}$ bölüm halkasının norm şartlarını sağladığı aşağıda gösterilmiştir.

**i**. $\|\bar{x}\|_{A/I} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

**ii.** $\|\bar{0} \oplus \bar{1}\|_{A/I} \leq \|\bar{0}\|_{A/I} + \|\bar{1}\|_{A/I}$ .

**iii**. $\|-\bar{1}\|_{A/I} = \|-1 \otimes (\bar{1})\|_{A/I} = \|-1\|.\|\bar{1}\|_{A/I} = \|\bar{1}\|_{A/I}$ .

**iv**. $\|\bar{0} \otimes \bar{1}\|_{A/I} \leq \|\bar{0}\|_{A/I} . \|\bar{1}\|_{A/I}$ .

**Teorem 4.1.3:**

$A$ birim elemanlı halka ise $A/I$ da birim elemanlıdır ve birim eleman $\|\bar{1}\|_{A/I}$ dir.

**İspat:**

$\bar{x}, \bar{y} \in A/I$ olsun, $A/I = \begin{cases} x + I = \|\bar{x}\|, & \mathrm{x} \notin \mathrm{I} \\ x + 0 = 0, & \mathrm{x} \in \mathrm{I} \end{cases}$ kümesi $\|\bar{x}\|_{A/I} = \|x\|_A$ dönüşümü altında normlu birim elemanlı halkadır.

**i**. $\|\bar{x}\|_{A/I} = 0 \Leftrightarrow \|\bar{x}\|_{A/I} = \|x\|_A = 0 \Leftrightarrow x = 0$

**ii**. $\|-\bar{x}\|_{A/I} = \|-x\|_A = |-1|\|x\|_A = \|x\|_A = \|\bar{x}\|_{A/I}$

**iii**. $\|\bar{x} \oplus \bar{y}\|_{A/I} = \|x + y\|_A \leq \|x\|_A + \|y\|_A = \|\bar{x}\|_{A/I} + \|\bar{y}\|_{A/I}$

**iv**. $\|\bar{x} \otimes \bar{y}\|_{A/I} = \|x.y\|_A \leq \|x\|_A . \|y\|_A = \|\bar{x}\|_{A/I} . \|\bar{y}\|_{A/I}$

**Teorem 4.1.4:**

$A$ normlu bir halka olsun. $f : A \to D,\ f(x) = \|x\|$ ile tanımlı fonksiyon bir örten homomorfizmadır. $f$ bir normlu halka homomorfizmasıdır.

**İspat:**

$\forall\ x, y \in A$ verilsin.

**i**. $\|f(x)\|_D = 0 \Leftrightarrow \|f(x)\|_D = \|x\|_A = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(0) = 0$

**ii**. $\|-f(x)\|_D = \|f(-x)\|_D = \|-x\|_A = |-1|\|x\|_A = \|x\|_A = \|f(x)\|_D$

**iii**. $\|f(x \oplus y)\|_D = \|f(x) \oplus f(y)\|_D = \|x + y\|_A \leq \|x\|_A + \|y\|_A = \|f(x)\|_D + \|f(y)\|_D$

**iv**. $\|f(x \otimes y)\|_D = \|f(x) \otimes f(y)\|_D = \|x.y\|_A \leq \|x\|_A . \|y\|_A = \|f(x)\|_D . \|f(y)\|_D$.

**Teorem 4.1.5:**

$A$ normlu bir halka ve $I$ da $A$ nın bir ideali olsun. $\|.\|_{A/I} : A/I \to D$ $x + I = \overline{x} \in A/I$ ile tanımlı fonksiyon bir örten homomorfizmadır. $\|.\|_{A/I}$ bir normlu bölüm halka homomorfizmasıdır.

**İspat:**

$\forall\ \overline{x}, \overline{y} \in A/I$ verilsin.

**i**. $\|x\|_D = 0 \Leftrightarrow \|x\|_D = \|\overline{x}\|_{A/I} = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

**ii**. $\|-\overline{x}\|_{A/I} = \|-x\|_D = |-1|\|x\|_D = \|x\|_D = \|\overline{x}\|_{A/I}$

**iii**. $\|\overline{x} \oplus \overline{y}\|_{A/I} = \|x + y\|_D \leq \|x\|_D + \|y\|_D = \|\overline{x}\|_{A/I} + \|\overline{y}\|_{A/I}$

**iv**. $\|\overline{x} \otimes \overline{y}\|_{A/I} = \|x.y\|_D \leq \|x\|_D . \|y\|_D = \|\overline{x}\|_{A/I} . \|\overline{y}\|_{A/I}$.

Böylece norm şartları sağlandığından ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 4.1.6:**

$f : A \to D$ bir normlu halka homomorfizması ve $I = Çekf$ olsun. $\phi : A \to A/I$ (örten) normlu homomorfizma ve $i : f(A) \to D$ bire-bir fonksiyonu olmak üzere, $f = i\,f\,'\phi$ olacak şekilde tek bir $f\,' : A/I \to f(A)$ normlu homomorfizması vardır.

**İspat:**

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & S \\ \phi\downarrow & & \uparrow i \\ A/I & \xrightarrow[f']{} & f(A) \end{array}$$

Değişmeli diyagram olacak şekilde $f':A/I\to f(A)$ normlu homomorfizmasını, her $r\in A,\ f'(\overline{r})=f(r)$ ile tanımlamak yeterlidir.

Önce $f'$ nün iyi tanımlı olduğunu gösterelim.

$$\overline{r}=\overline{r}'\Rightarrow r-r'\in I=Çekf,$$

$$\Rightarrow\|r\|_A=\|r'\|_A$$

$$\Rightarrow f(r)=f(r'),$$

$$\Rightarrow f'(\overline{r})=f'(\overline{r}').$$

bulunur. Buna göre $f'$ iyi tanımlıdır. $f=if'\phi$ eşitliğinin sağlandığı ve $f'$ nün örten bir normlu homomorfizma olduğu açıktır. Şimdi $f'$ nün tekliğini gösterelim. $f=ig\phi$ olacak şekilde, başka bir $g:A/I\to f(A)$ normlu homomorfizması olsa, her $r\in A$ için

$$f'(\overline{r})=f(r)=ig(\phi(r))$$

$$=ig(\overline{r})=g(\overline{r})$$

sağlandığından $f'=g$ bulunur.

**Teorem 4.1.7:**

$A$ normlu bir halka ve $I$ da $A$ nın bir ideali olsun. $\pi:A\to A/I$ normlu homomorfizması için

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\pi} & A/I \\ \|\cdot\|\downarrow & & \downarrow\|\cdot\|_{A/I} \\ R & \xrightarrow[\alpha]{} & R \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan $\alpha : R \to R$,

$$\alpha\left(\|x\|_A\right) = \begin{cases} \alpha\left(\|x\|_A\right) = \|\bar{x}\|_{A/I}, & \mathrm{x} \in A \\ \alpha\left(\|x\|_A\right) = x, & \mathrm{x} \notin A \end{cases}$$

olacak şekilde $\alpha$ dönüşümü vardır.

**İspat:**

$\bar{x} \in A/I$ olsun. $\alpha\left(\|x\|_A\right) = \|\bar{x}\|_{A/I}$ olup $\alpha$ örtendir. Ayrıca her $x, y \in A$ için

$$\alpha\left(\|x+y\|_A\right) = \|\bar{x} \oplus \bar{y}\|_{A/I} \leq \|\bar{x}\|_{A/I} + \|\bar{y}\|_{A/I} = \alpha\left(\|x\|_A\right) + \alpha\left(\|y\|_A\right)$$

$$\alpha\left(\|x.y\|_A\right) = \|\bar{x} \otimes \bar{y}\|_{A/I} = \|\bar{x}\|_{A/I} . \|\bar{y}\|_{A/I} = \alpha\left(\|x\|_A\right) . \alpha\left(\|y\|_A\right).$$

olup $\alpha$ bir normlu homomorfizmadır. Şimdi

$$\bar{k} \in \c{C}ek(\alpha) \Leftrightarrow \alpha\left(\|k\|_A\right) = \|\bar{k}\|_{A/I} = 0 = I \Leftrightarrow k = I \Leftrightarrow k \in I ,$$

olup $\c{C}ek(\alpha) = I$ olduğu görülür.

**Örnek 4.1.8:**

$A$ normlu bir halka $I$ da $A$ nın bir ideali olsun. $A/I$ nın değişmeli olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in A,\ x.y - y.x \in I$ olmasıdır. Yani

$$\begin{aligned} A/I \text{ değişmeli} &\Leftrightarrow \forall\, x, y \in A,\ \|\bar{x}\|_{A/I} . \|\bar{y}\|_{A/I} = \|\bar{y}\|_{A/I} . \|\bar{x}\|_{A/I} \\ &\Leftrightarrow \forall\, x, y \in A,\ \|\bar{x} \otimes \bar{y}\|_{A/I} = \|\bar{y} \otimes \bar{x}\|_{A/I} \\ &\Leftrightarrow \forall\, x, y \in A,\ \|\bar{x} \otimes \bar{y}\|_{A/I} - \|\bar{y} \otimes \bar{x}\|_{A/I} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall\, x, y \in A,\ \|\bar{x} \otimes \bar{y} - \bar{y} \otimes \bar{x}\|_{A/I} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall\, x, y \in A,\ x.y - y.x \in I\ . \end{aligned}$$

**Teorem 4.1.9:**

$f:A\to D$ bir örten normlu halka homomorfizması ve $I$, $A$nın bir ideali olsun. $Çekf \subseteq I$ ise

$$A/I \cong D/f(I).$$

dır. $f$ örten değil ise, $A/I$, $D/f(I)$nın bir normlu alt halkasına izomorf olur.

**İspat:**

$\phi: D\to D/f(I)$ normlu homomorfizma olmak üzere $g:A\to D/f(I)$, $g=\phi f$ normlu homomorfizmasını alalım. O halde, her $r\in A$ için

$$g(r)=\phi(f(r))=\|\overline{f}(r)\|_{A/I}.$$

$g$ örten iki normlu homomorfizmanın bileşkesi olduğundan örten bir normlu homomorfizmadır.

$$\begin{aligned}Çekg &= \{r\in A: \overline{f}(r)=f(I)\}\\ &= \{r\in A: f(r)\in f(I)\}\\ &= f^{-1}(f(I)).\end{aligned}$$

dır. $I\subseteq f^{-1}(f(I))$ olduğu açıktır. Diğer taraftan, $Çekf \subseteq I$ kabul ettiğimizden,

$$\begin{aligned}x\in f^{-1}(f(I)) &\Rightarrow f(x)\in f(I)\\ &\Rightarrow \|x\|_A=\|a\|_A, \text{ bir } a\in I \text{ var}\\ &\Rightarrow \|x-a\|_A\\ &\Rightarrow x-a\in Çekf \subseteq I\\ &\Rightarrow x\in I.\end{aligned}$$

Yani, $f^{-1}(f(I))\subseteq I$ olur, her iki kapsamadan, $Çekg = f^{-1}(f(I)) = I$ bulunur. Teorem 4.1.6 ‘dan,

$$A/I \cong D/f(I)$$

elde edilir. $f$ örten değil ise $A/I$ nın $D/f(I)$ nın bir normlu alt halkasına izomorf olduğu açıktır.

**Teorem 4.1.10:**

$A$ değişmeli ve birim elemanlı bir normlu halka ve $I\subseteq A$ bir ideali olsun. $I$ normlu asal idealdir $\Leftrightarrow$ $A/I$ tamlık bölgesidir.

**İspat:**

($\Rightarrow$) $I$ asal ideal olsun. $I\neq A$ olup $A/I$ en az iki elemanlıdır. $\bar{x},\bar{y}\in A/I$ alalım ve $A/I$ nın sıfırının $I$ olduğunu hatırlayalım.

$$\bar{x}.\bar{y} = I \Rightarrow xy + I = I$$

$$\Rightarrow (x+I).(y+I) = I$$

$$\Rightarrow x.y \in I$$

$$\Rightarrow x\in I \text{ veya } y\in I \text{ (} I \text{ asal ideal olduğunda)}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = I \text{ veya } \bar{y} = I$$

$(x+I=I)$veya$(y+I=I)$ olup, $A/I$ sıfır bölensizdir. $A$ birim elemanlı ve değişmeli olup $A/I$ da birim elemanlı ve değişmelidir, yani $A/I$ tamlık bölgesidir.

($\Leftarrow$) $A/I$ bir tamlık bölgesi olsun. $A/I$ en az iki elemanlı olup $I\neq A$ dır. $x,y\in A$ olsun.

$$x.y\in I \Rightarrow \|\bar{x}\otimes\bar{y}\|_{A/I}$$

$$\Rightarrow \|\bar{x}\|_{A/I}.\|\bar{y}\|_{A/I}$$

$$\Rightarrow x.y\in I$$

$\Rightarrow\ x = I$ veya $y = I$ ( $A/I$ tamlık bölgesi olduğunda)

$\Rightarrow\ x \in I$ veya $y \in I$ ,

olup $I$ nın asal ideal olduğu gösterilmiş olur.

**4.2 Normlu ℤ- modül**

**Tanım 4.2.1:**

$(G,*)$ değişmeli bir grup olsun. Eğer $G$ üzerinde bir norm $\|\cdot\|_Z$ yani $\|\cdot\|_z : G \rightarrow R$ negatif olmayan reel değerli ve her $g_1, g_2 \in G$ için aşağıdaki şartları sağlayan bir dönüşüm tanımlanmış ise $G$ ye normlu ℤ- modül denir.

**i.** $g = 0 \Leftrightarrow \|g\|_z = 0$

**ii.** $\|kg\|_z = |k|\|g\|_z$

**iii.** $\|g_1 * g_2\|_z \leq \|g_1\|_z + \|g_2\|_z$

Üzerinde bir $\|\cdot\|_Z$ normu tanımlanmış olan bir ℤ- modülüne normlu ℤ- modül denir ve $\left(G, \|\ \|_z\right)$ ile gösterilir.

**Örnek 4.2.2:**

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2})(\bar{0},\bar{3}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2}),(\bar{1},\bar{3})\}$ kümesi verilsin. $(a,b) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ için $\left\|(\bar{a},\bar{b})\right\|_z = \sqrt{a^2+b^2}$

**i.** $\|(\bar{0},\bar{0})\|_z = \sqrt{0^2+0^2} = 0$

**ii** $\left\|(k\bar{a},k\bar{b})\right\|_z = \sqrt{(ka)^2+(kb)^2} = \sqrt{k^2(a^2+b^2)} = |k|\sqrt{a^2+b^2} = |k|\left\|(\bar{a},\bar{b})\right\|_z.$

**iii.** $\|(\bar{0},\bar{0})\|_z \leq \|(\bar{0},\bar{1})\|_z + \|(\bar{1},\bar{0})\|_z$ dir.

Benzer şekilde $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ için $\left\|(\bar{a},\bar{b})\right\|_z \leq \|(\bar{a},\bar{c})\|_z + \left\|(\bar{c},\bar{b})\right\|_z$ dir.

**Önerme 4.2.3:**

$\left(G, \|\ \|_z\right)$ normlu ℤ-modül olsun. $d\left(g_1, g_2\right) = \left\|g_1 * g_2^{-1}\right\|_z$ ile tanımlı $d : G \times G \to R^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu $G$ üzerinde bir metrik tanımlar.

**İspat:**

$\forall\ g_1, g_2, g_3 \in G$ olsun. Normlu ℤ -modül özelliklerini kullanarak,

**i**. $d\left(g_1, g_2\right) = \left\|g_1 * g_2^{-1}\right\|_z > 0_z$

**ii**. 
$$\begin{aligned} d\left(g_1, g_3\right) &= \left\|g_1 * g_3^{-1}\right\|_z \\ &= \left\|g_1 * g_2^{-1} * g_2 * g_3^{-1}\right\|_z \\ &\leq \left\|g_1 * g_2^{-1}\right\|_z + \left\|g_2 * g_3^{-1}\right\|_z \\ &= d\left(g_1, g_2\right) + d\left(g_2, g_3\right) \end{aligned}$$

**iii**. 
$$\begin{aligned} d\left(g_1, g_2\right) &= \left\|g_1 * g_2^{-1}\right\|_z \\ &= \left\|\|-1\|_z \left(g_2 * g_1^{-1}\right)\right\|_z \\ &= \left\|g_2 * g_1^{-1}\right\|_z \\ &= d\left(g_2, g_1\right) \end{aligned}$$

**iv**. $d\left(g_1, g_2\right) = 0_z \Leftrightarrow \left\|g_1 * g_2^{-1}\right\|_z = 0_z \Leftrightarrow g_1 - g_2 = 0_z \Leftrightarrow g_1 = g_2$.

O halde $d$ metrik uzay şartlarını sağlar.

**Sonuç:** $X$ normlu vektör uzay olsun. $X$ aynı zamanda normlu ℤ -modüldür.

**Örnek 4.2.4:**

$\mathbb{Z}^{n \times m}$, ℤ-modülünde $G = \left(g_{ij}\right) \in \mathbb{Z}^{n \times m}$ için (katsayıları ℤ olan matris)

$$\|G\|_z = \max_j \left( \sum_{i=1}^{n} \left|g_{ij}\right| \right)$$

olarak tanımlı fonksiyonu normlu ℤ-modüldür.

**i.** $$G=0=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \|G\|_z=|0|+|0|+\ldots+|0|=0\ ,$$

**ii.** $$\|k.G\|_z=\left\|\begin{pmatrix}k.g_{11} & k.g_{12}\cdots & k.g_{1n}\\ k.g_{21} & k.g_{22}\cdots & k.g_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ k.g_{m1} & k.g_{m2}\cdots & k.g_{mn}\end{pmatrix}\right\|_z=\max_j\left(\sum_{i=1}^{n}|g_{ij}|\right)$$

$$=|k.g_{1m}|+|k.g_{2m}|+\ldots+|k.g_{nm}|$$

$$=|k|.|g_{1m}|+|k|.|g_{2m}|+\ldots+|k|.|g_{nm}|$$

$$=|k|.\left(|g_{1m}|+|g_{2m}|+\ldots+|g_{nm}|\right)$$

$$=|k|.\left(\max_j\left(\sum_{i=1}^{n}|g_{ij}|\right)\right)$$

$$=|k|.\|G\|_z$$

**iii**. $\|G*H\|_z\le\|G\|_z+\|H\|_z$ .

**Önerme 4.2.5:**

$\left(G,\|\ \|_z\right)$ normlu $\mathbb{Z}$-modül olsun. Bu durumda her $g,h\in G$ ve $g_1,g_2,\ldots,g_n\in G$ için

**i**. $\left|\|g\|_z-\|h\|_z\right|\le\|g*h\|_z$

**ii**. $\|g_1*g_2*\ldots*g_n\|_z\le\|g_1\|_z+\|g_2\|_z+\ldots+\|g_n\|_z$

eşitsizlikleri sağlanır.

**İspat:**

**i**. $\|g\|_z=\|g*h^{-1}*h\|_z\le\|g*h^{-1}\|_z+\|h\|_z\ \Rightarrow\ \|g\|_z-\|h\|_z\le\|g*h^{-1}\|_z$ (1)

ve

$$\|h\|_z = \|h * g^{-1} * g\|_z \leq \|h * g^{-1}\|_z + \|g\|_z \Rightarrow \|h\|_z - \|g\|_z \leq \|h * g^{-1}\|_z = \|g * h^{-1}\|_z \quad (2)$$

dir. (1) ve (2) den

$$\left| \|g\|_z - \|h\|_z \right| \leq \|g * h\|_z$$

elde edilir.

**ii**. Tanım 4.2.1 in iii. aksiyomundan yararlanılıp tümevarım yöntemiyle kolayca yapılır.

**Tanım 4.2.6:**

$\left(G, \|\ \|_z\right)$ normlu $\mathbb{Z}$-modülde bir dizi $\{g_n\}$ olsun.

**a)** $g \in G$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık gelen her $n \geq N$ için

$$\|g * g_n^{-1}\|_z < \varepsilon,$$

olacak biçimde en az bir $N \in \mathbb{N}$ varsa $\{g_n\}$ dizisi $g \in G$ ye yakınsar (ya da $\{g_n\}$ dizisi yakınsaktır) denir. Bu durumda

$$\lim_{n \to \infty} g_n = g$$

veya

$$g_n \to g$$

yazarız.

**b)** Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık gelen her $m, n \in \mathbb{N}$ olacak şekilde her $m, n \geq N$ için

$$\|g_m * g_n^{-1}\|_z < \varepsilon,$$

olacak biçimde en az bir $N \in \mathbb{N}$ varsa $\{g_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

**Örnek 4.2.7:**

$G$ ve $H$, $\mathbb{Z}$ halkası üzerinde $\mathbb{Z}$- modülleri olsun ve $G$ ve $H$ in kartezyen çarpımı $G\times H=\{(g,h):g\in G,h\in H\}$ olsun. $\|\ \|_{z_1}$, $G$ üzerinde normlu $\mathbb{Z}$- modül ve $\|\ \|_{z_2}$, $H$ üzerinde normlu $\mathbb{Z}$- modül olsun. O zaman $\{(g_n,h_n)\}$, $G\times H$ içinde bir Cauchy dizisidir ancak ve ancak $\{g_n\}$, $G$ içinde bir Cauchy dizisidir ve $\{h_n\}$, $H$ içinde bir Cauchy dizisidir.

$(\Rightarrow)$ $\{(g_n,h_n)\}$, $G\times H$ içinde bir Cauchy dizisi olsun. O zaman her $m,n\geq N$ için

$$\left\|\left(g_n * g_m^{-1}, h_n * h_m^{-1}\right)\right\|_z = \left\|\left(g_n,h_n\right) * \left(g_m,h_m\right)^{-1}\right\|_z \leq \varepsilon \ .$$

Olacak şekilde en az bir $N\in\mathbb{N}$ vardır. Böylece $m,n\geq N$ için

$$\begin{aligned}\left\|g_n * g_m^{-1}\right\|_{z_1} &\leq \left\|g_n * g_m^{-1}\right\|_{z_1} + \left\|h_n * h_m^{-1}\right\|_{z_2}\\ &= \left\|\left(g_n * g_m^{-1}\right) * \left(h_n * h_m^{-1}\right)\right\|_z\\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\left\|h_n * h_m^{-1}\right\|_{z_2} &\leq \left\|g_n * g_m^{-1}\right\|_{z_1} + \left\|h_n * h_m^{-1}\right\|_{z_2}\\ &= \left\|\left(g_n * g_m^{-1}\right) * \left(h_n * h_m^{-1}\right)\right\|_z\\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak, $\{g_n\}$, $G$ içinde bir Cauchy dizisi ve $\{h_n\}$, $H$ içinde bir Cauchy dizisidir.

$(\Leftarrow)$ $\{g_n\}$, $G$ içinde bir Cauchy dizisi ve $\{h_n\}$, $H$ içinde bir Cauchy dizisi olsun. O zaman her $m,n\geq N_1$ için

$$\left\| g_m * g_n^{-1} \right\|_{z_1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ve her $m,n \geq N_2$ için

$$\left\| h_m * h_n^{-1} \right\|_{z_1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde en az bir $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. O zaman $\forall\ m,n \geq N_0$ için

$$\begin{aligned}
\left\| (g_n, h_n) * (g_m, h_m)^{-1} \right\|_z &= \left\| g_n * g_m^{-1}, h_n * h_m^{-1} \right\|_z \\
&\leq \left\| g_n * g_m^{-1} \right\|_{z_1} + \left\| h_n * h_m^{-1} \right\|_{z_2} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

olduğundan $\{(g_n, h_n)\}$, $G$ içinde bir Cauchy dizisidir.

**Tanım 4.2.8:**

$\left(G, \| \ \|_z\right)$ normlu $\mathbb{Z}$- modül ve bunun bir alt kümesi $A$ olsun.

$$d(A) = \sup\left\{ \left\| g_1 * g_2^{-1} \right\|_z : g_1 \in A, g_2 \in A \right\} \geq 0$$

sayısına $A$ kümesinin çapı denir. Eğer bir $A \subset G$ kümesinin çapı sonlu ise, $A$ kümesine sınırlı küme denir.

**Tanım 4.2.9:**

$\left(G, \| \ \|_z\right)$ normlu $\mathbb{Z}$-modül, bir $g_0 \in G$ noktası ve $r > 0$ verilsin. O zaman

$$S_r(g_0) = \left\{ g \in G : \left\| g * g_0^{-1} \right\|_z < r \right\}$$

kümesine $g_0$-merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar,

$$\overline{S_r}(g_0)=\left\{g\in G:\left\|g*g_0^{-1}\right\|_z\le r\right\}$$

kümesine $g_0$-merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar ve

$$\overline{\sigma_r}(g_0)=\left\{g\in G:\left\|g*g_0^{-1}\right\|_z=r\right\}$$

kümesine $g_0$-merkezli ve r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

**Teorem 4.2.10:**

$\left(G,\|\ \|_z\right)$ normlu ℤ- modülünde bir dizi $(g_n)$ ve $g_0\in G$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} g_n=g_0,$$

ise aşağıdaki önermeler doğrudur:

**i.** $g_0$ limiti tektir.

**ii.** $(g_n)$ dizisi sınırlıdır.

**iii.** $(g_n)$ dizisinin her $\left(g_{n_k}\right)$ alt dizisinin de limiti $g_0$ dır.

**iv.** $(a_n)\to a$ $(a,a_n\in K)$ iken $a_n.g_n\to a.g_0$ .

**v.** Eğer ilave olarak $h_n\to h_0$ $(h,h_n\in G)$ ise $g_n+h_n\to g_0+h_0$ dır.

**İspat:**

$\forall\, g,h\in G$,için $d(g,h)=\|g-h\|$ tanımı ile $(G,d)$ bir metrik normlu ℤ-modüldür.

**i.**

$$\lim_{n\to\infty}\left\|g_n*g_0^{-1}\right\|_Z\Rightarrow\lim_{n\to\infty}d(g_n,g_0)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|g_n*g_1^{-1}\right\|_Z\Rightarrow\lim_{n\to\infty}d(g_n,g_1)=0$$

olsun. O halde

$$0\le d(g_0,g_1)\le d(g_0,g_n)+d(g_n,g_1)=0+0$$

ve metriğin ilk aksiyomundan dolayı $g_0 = g_1$ elde edilir.

**ii**. Herhangi sabit bir $a \in G$ noktası için metriğin iii. aksiyomu gereğince $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|g_n * a^{-1}\right\|_Z \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d\left(g_n, a\right) = 0$$

için

$$d\left(g_n, a\right) \leq d\left(g_n, g_0\right) + d\left(g_0, a\right)$$

dır.

$\lim_{n\to\infty}\left\|g_n * g_0^{-1}\right\|_Z = 0 \Rightarrow\ \varepsilon > 0$ için en az bir $n_1 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall\, n > n_1$ için $d\left(g_n, g_0\right) < 1$ dir. O halde

$$M = \max\left\{d(g_1, g_0), d\left(g_2, g_0\right), \ldots, d\left(g_{n_1}, g_0\right), 1 + d\left(g_0, a\right)\right\}$$

olmak üzere $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $d\left(g_n, a\right) \leq M$ olduğu ve dolayısıyla $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $g_n \in \overline{S_M}\left(a\right)$ elde edilir. Bu da $\left\{g_n\right\}$ nin $G$ içinde sınırlı dizi olması demektir.

**iii**. $\left(g_{n_k}\right), \left(g_n\right)$ dizisinin herhangi bir alt dizisi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} g_n = g_0,$$

iken $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \in \mathrm{N}$ öyleki $\forall n > n_\varepsilon$ için $\left\|g_{n_k} * g_0^{-1}\right\| < \varepsilon$. Böylece, $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$,

$\exists k_\varepsilon \in \mathrm{N}$ öyleki $\forall k > k_\varepsilon$ için

$$\left\|g_{n_k} * g_0\right\|_z < \varepsilon \Rightarrow \lim_{k\to\infty} g_{n_k} = g_0$$

elde ederiz.

**iv**. $\left(g_n\right)$, $G$ içinde yakınsak bir dizi olduğundan $\forall n \in \mathrm{N}$ için $\left\|g_n\right\|_z < M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow$ $\exists n'_\varepsilon \in \mathrm{N}$ öyle ki $\forall n > n'_\varepsilon$ için

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

elde ederiz. $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g_0 \Rightarrow\ \exists n''_\varepsilon \in \mathrm{N}$ öyle ki $\forall n > n''_\varepsilon$ için

$$\|g_n - g_0\|_z < \frac{\varepsilon}{2\left(|a|+1\right)}$$

dir. Buradan da $\forall n > n_\varepsilon = \max\{n', n''\}$ için

$$\begin{aligned}\left\|a_n g_n * (a g_0)^{-1}\right\|_z &= \left\|\left(a_n * a^{-1}\right) g_n * a\left(g_n * g_0^{-1}\right)\right\|_z \\ &\le \left|a_n * a^{-1}\right| \|g_n\|_z + |a| \left\|g_n * g_0^{-1}\right\|_z \\ &\le \frac{\varepsilon}{2M}.M + |a|.\frac{\varepsilon}{2\left(|a|+1\right)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

bulunur. Demek ki

$$\lim_{n\to\infty} \left\|a_n g_n * (a g_0)^{-1}\right\|_z = 0$$

dır.

**v**. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g_0 \Rightarrow \exists n'_\varepsilon \in \mathrm{N}$ öyle ki $\forall n > n'_\varepsilon$ için

$$\left\|g_n * g_0^{-1}\right\|_z < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = h_0 \Rightarrow \exists n''_\varepsilon \in \mathrm{N}$ öyle ki $\forall n > n'_\varepsilon$ için

$$\left\|h_n * h_0^{-1}\right\|_z < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Buradan da $\forall n > n_\varepsilon = \max\{n', n''\}$ için

$$\left\| g_n * h_n * (g_0 * h_0)^{-1} \right\|_z = \left\| g_n * g_0^{-1} * h_n * h_0^{-1} \right\|_z$$

$$\leq \left\| g_n * g_0^{-1} \right\|_z + \left\| h_n * h_0^{-1} \right\|_z$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. Bu ise $n \to \infty$ iken $g_n * h_n \to g_0 * h_0$ olması demektir.

### 4.3 Esnek Normlu Bölüm Halkaları

**Tanım 4.3.1:**

$H/I$ bir halka olsun. Eğer $H/I$ nın üzerinde bir norm $\|\cdot\|$, yani $\|\cdot\|_{F(H/I)} : F(H/I) \to R(A)$ fonksiyonuna ve her $\tilde{x}, \tilde{y} \in F(H/I)$ için aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyon tanımlanmış ise $F(H/I)$ $(ya \text{ da } F(H/I, A))$ ya bir esnek normlu bölüm halkası denir.

**i**. $\|\tilde{x}\|_{F(H/I)} = 0 \Leftrightarrow \tilde{x} \in F(I),$

**ii**. $\|\tilde{x} \oplus \tilde{y}\|_{F(H/I)} \leq \|\tilde{x}\|_{F(H/I)} + \|\tilde{y}\|_{F(H/I)},$

**iii**. $\|-\tilde{x}\|_{F(H/I)} = \left\|-\bar{1} \otimes (\tilde{x})\right\|_{F(H/I)} = \|-\bar{1}\| . \|\tilde{x}\|_{F(H/I)} = \|\tilde{x}\|_{F(H/I)}$ ,

**iv**. $\|\tilde{x} \otimes \tilde{y}\|_{F(H/I)} \tilde{\leq} \|\tilde{x}\|_{F(H/I)} . \|\tilde{y}\|_{F(H/I)}$ .

**Teorem 4.3.2:**

$F(H)$ birim elemanlı esnek halka ise $F(H/I)$ da birim elemanlıdır ve birim elemanı $\|\bar{1}\|_{F(H/I)}$ dir.

**İspat:**

$\tilde{x}, \tilde{y} \in F(H/I)$ olsun, $F(H/I) = \begin{cases} \tilde{x} + F(I) = \|\bar{x}\|, & \tilde{x} \notin F(\mathrm{I}) \\ \tilde{x} + 0 = 0, & \tilde{x} \in F(\mathrm{I}) \end{cases}$ kümesi $\|\tilde{x}\|_{F(H/I)} = \|\bar{x}\|_{F(H)}$ dönüşümü altında birim elemanlı esnek normlu bölüm halkasıdır.

**i**. $\|\tilde{x}\|_{F(H/I)}=0 \Leftrightarrow \|\tilde{x}\|_{F(H/I)}=\|\bar{x}\|_{F(H)}=0 \Leftrightarrow x=0$

**ii**. $\|-\tilde{x}\|_{F(H/I)}=\|-\bar{x}\|_{F(H)}=|-\bar{1}|\|\bar{x}\|_{F(H)}=\|\bar{x}\|_{F(H)}=\|\tilde{x}\|_{F(H/I)}$

**iii**. $\|\tilde{x}\oplus\tilde{y}\|_{F(H/I)}=\|\bar{x}+\bar{y}\|_{F(H)}$

$$\tilde{\leq}\|\bar{x}\|_{F(H)}+\|\bar{y}\|_{F(H)}$$

$$=\|\tilde{x}\|_{F(H/I)}+\|\tilde{y}\|_{F(H/I)}.$$

**iv**. $\|\tilde{x}\otimes\tilde{y}\|_{F(H/I)}=\|\bar{x}.\bar{y}\|_{F(H)}$

$$\tilde{\leq}\|\bar{x}\|_{F(H)}.\|\bar{y}\|_{F(H)}$$

$$=\|\tilde{x}\|_{F(H/I)}.\|\tilde{y}\|_{F(H/I)}.$$

**Teorem 4.3.3:**

$F(H)$ bir esnek normlu halka olsun. $f:F(H)\to F(S),\ \ f(\tilde{x})=\|\tilde{x}\|$ ile tanımlı fonksiyon bir esnek örten homomorfizmadır. $f$ bir esnek normlu halka homomorfizmasıdır.

**İspat:**

$\forall\ \tilde{x},\tilde{y}\in F(H)$ verilsin.

**i**. $\|f(\tilde{x})\|_{F(S)}=0$

$$\Leftrightarrow\|f(\tilde{x})\|_{F(S)}=\|\bar{x}\|_{F(H)}=0$$

$$\Leftrightarrow x=0$$

$$\Leftrightarrow f(x)=f(\bar{0})=0$$

**ii**. $\|-f(\tilde{x})\|_{F(S)}=\|f(-\tilde{x})\|_{F(S)}=\|-\bar{x}\|_{F(H)}=|-\bar{1}|\|\bar{x}\|_{F(H)}=\|\bar{x}\|_{F(H)}=\|f(\tilde{x})\|_{F(S)}$

**iii.** $\|f(\tilde{x}\oplus\tilde{y})\|_{F(S)}=\|f(\tilde{x})\oplus f(\tilde{y})\|_{F(S)}$

$$=\|\bar{x}+\bar{y}\|_{F(H)}$$

$$\leq\|\bar{x}\|_{F(H)}+\|\bar{y}\|_{F(H)}$$

$$=\|f(\tilde{x})\|_{F(S)}+\|f(\tilde{y})\|_{F(S)}.$$

**iv.** $\|f(\tilde{x}\otimes\tilde{y})\|_{F(S)}=\|f(\tilde{x})\otimes f(\tilde{y})\|_{F(S)}$

$$=\|\bar{x}.\bar{y}\|_{F(H)}$$

$$\leq\|\bar{x}\|_{F(H)}.\|\bar{y}\|_{F(H)}$$

$$=\|f(\tilde{x})\|_{F(S)}.\|f(\tilde{y})\|_{F(S)}.$$

**Teorem 4.3.4:**

$F(H)$ bir esnek normlu halka ve $F(I)$ da $F(H)$ nın bir esnek ideali olsun. $\|.\|_{F(H/I)}:F(H/I)\rightarrow F(S),\bar{x}+F(I)=\tilde{x}\in F(H/I)$ ile tanımlı fonksiyon bir esnek örten homomorfizmadır. $\|.\|_{F(H/I)}$ bir esnek normlu bölüm halka homomorfizmasıdır.

**İspat:**

$\forall\ \tilde{x},\tilde{y}\in F(H/I)$ verilsin.

**i.** $\|\bar{x}\|_{F(S)}=0\Leftrightarrow\|\bar{x}\|_{F(S)}=\|\tilde{x}\|_{F(H/I)}=0\Leftrightarrow x=0\Leftrightarrow\|\bar{x}\|=0\Leftrightarrow x=0$

**ii.** $\|-\tilde{x}\|_{F(H/I)}=\|-\bar{x}\|_{F(S)}=|-\bar{1}|\|\bar{x}\|_{F(S)}=\|\bar{x}\|_{F(S)}=\|\tilde{x}\|_{F(H/I)}$

**iii.** $\|\tilde{x}\oplus\tilde{y}\|_{F(H/I)}=\|\bar{x}+\bar{y}\|_{F(S)}$

$$\leq\|\bar{x}\|_{F(S)}+\|\bar{y}\|_{F(S)}$$

$$=\|\tilde{x}\|_{F(H/I)}+\|\tilde{y}\|_{F(H/I)}$$

**iv.** $\|\tilde{x}\otimes\tilde{y}\|_{F(H/I)}=\|\bar{x}.\bar{y}\|_{F(S)}$

$\leq \|\bar{x}\|_{F(S)} \cdot \|\bar{y}\|_{F(S)}$

$= \|\tilde{x}\|_{F(H/I)} \cdot \|\tilde{y}\|_{F(H/I)}$

**Teorem 4.3.5:**

$f : F(H) \rightarrow F(S)$ bir esnek normlu halka homomorfizması ve $F(I) = çekf$ olsun. $\phi : F(H) \rightarrow F(H/I)$ (örten) esnek normlu halka homomorfizması ve $i : f(F(H)) \rightarrow F(S)$ bire-bir fonksiyonu olmak üzere, $f = i\, f\,'\phi$ olacak şekilde tek bir $f\,' : F(H/I) \rightarrow f(F(H))$ esnek normlu halka homomorfizmasıdır.

**İspat:**

$$\begin{array}{ccc} F(H) & \xrightarrow{f} & \mathrm{F}(S) \\ \phi\downarrow & & \uparrow i \\ \mathrm{F(H}/I) & \xrightarrow[f\,']{} & f(F(H)) \end{array}$$

değişmeli diyagram olacak şekilde $f\,' : F(H/I) \rightarrow f(F(H))$ esnek normlu homomorfizmasını, her $\tilde{r} \in F(H)$, $f\,'(\bar{r}) = f(\tilde{r})$ ile tanımlamak yeterlidir.

Önce $f\,'$ nün iyi tanımlı olduğunu gösterelim.

$$\bar{r} = \bar{r}\,' \Rightarrow \tilde{r} - \tilde{r}\,' \in F(I) = çekf,$$

$$\Rightarrow \|\tilde{r}\| = \|\tilde{r}\,'\|_{F(H)}$$

$$\Rightarrow f(\tilde{r}) = f(\tilde{r}\,'),$$

$$\Rightarrow f\,'(\bar{r}) = f\,'(\bar{r}\,').$$

bulunur. $f\,'$ iyi tanımlıdır. $f = if\,'\phi$ eşitliğinin sağlandığı ve $f\,'$ nün esnek örten bir esnek normlu halka homomorfizması olduğu açıktır. Şimdi $f\,'$ nün tekliğini gösterelim. $f = ig\phi$ olacak şekilde, başka bir $g : F(H/I) \rightarrow f(F(H))$ esnek normlu halka homomorfizması olsa, her $\tilde{r} \in F(H)$ için

$$f\,'(\bar{r}) = f(\tilde{r}) = ig(\phi(\tilde{r}))$$

$$=ig\left(\bar{r}\right)=g\left(\bar{r}\right)$$

sağlandığından $f'=g$ bulunur.

**Teorem 4.3.6:**

$F(H)$ bir esnek normlu halka ve $F(I)$ da $F(H)$ nın bir esnek ideali olsun. $\pi: F(H)\to F(H/I)$ esnek normlu halka homomorfizması için

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{F(H)} & \xrightarrow{\pi} & F(H/I) \\ \|.\|\downarrow & & \downarrow\|.\|_{F(H/I)} \\ R(A) & \xrightarrow[\psi]{} & R(A) \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan $\psi: R(A)\to R(A)$,

$$\psi\left(\|\bar{x}\|_{F(H)}\right)=\begin{cases}\psi\left(\|\bar{x}\|_{F(H)}\right)=\|\tilde{x}\|_{F(H/I)}, & \bar{\mathrm{x}}\in F(H)\\ \psi\left(\|\bar{x}\|_{F(H)}\right)=\bar{x}, & \bar{\mathrm{x}}\notin \mathrm{F(H)}\end{cases}$$

olacak şekilde $\psi$ esnek dönüşümü vardır.

**İspat:**

$\tilde{x}\in F(H/I)$ olsun. $\psi\left(\|\bar{x}\|_{F(H)}\right)=\|\tilde{x}\|_{F(H/I)}$ olup $\psi$ esnek örtendir. Ayrıca her $\bar{x},\bar{y}\in F(H)$ için

$$\begin{aligned}\psi\left(\|\bar{x}+\bar{y}\|_{F(H)}\right)&=\|\tilde{x}\oplus\tilde{y}\|_{F(H/I)}\\ &\leq\|\tilde{x}\|_{F(H/I)}+\|\tilde{y}\|_{F(H/I)}\\ &=\psi\left(\|\bar{x}\|_{F(H)}\right)+\psi\left(\|\bar{y}\|_{F(H)}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi\left(\|\bar{x}.\bar{y}\|_{F(H)}\right)&=\|\tilde{x}\otimes\tilde{y}\|_{F(H/I)}\\ &=\|\tilde{x}\|_{F(H/I)}.\|\tilde{y}\|_{F(H/I)}\end{aligned}$$

$$=\psi\left(\|\bar{x}\|_{F(H)}\right).\psi\left(\|\bar{y}\|_{F(H)}\right).$$

olup $\psi$ bir esnek normlu homomorfizmadır. Şimdi

$$\bar{k}\in Çek(\psi)\Leftrightarrow\psi\left(\|\bar{k}\|_{F(H)}\right)=\|\tilde{k}\|_{F(H/I)}$$

$$=\bar{0}=F(I)$$

$$\Leftrightarrow\bar{k}=F(I)$$

$$\Leftrightarrow\bar{k}\in F(I),$$

olup $çek(\psi)=F(I)$ olduğu görülür.

**Örnek 4.3.7:**

$F(H)$ esnek normlu bir halka $F(I)$ da $F(H)$ nın bir esnek ideali olsun. $F(H/I)$ nın değişmeli olması için gerek ve yeter şart her $\bar{x},\bar{y}\in F(H)$, $\bar{x}.\bar{y}-\bar{y}.\bar{x}\in F(I)$ olmasıdır. Yani

$$F(H/I)\text{ değişmeli }\Leftrightarrow\ \forall\ \bar{x},\bar{y}\in F(H),\|\tilde{x}\|_{F(H/I)}.\|\tilde{y}\|_{F(H/I)}=\|\tilde{y}\|_{F(H/I)}.\|\tilde{x}\|_{F(H/I)}$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\ \bar{x},\bar{y}\in F(H),\ \|\tilde{x}\otimes\tilde{y}\|_{F(H/I)}=\|\tilde{y}\otimes\tilde{x}\|_{F(H/I)}$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\ \bar{x},\bar{y}\in F(H),\ \|\tilde{x}\otimes\tilde{y}\|_{F(H/I)}-\|\tilde{y}\otimes\tilde{x}\|_{F(H/I)}=0$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\ \bar{x},\bar{y}\in F(H),\ \|\tilde{x}\otimes\tilde{y}-\tilde{y}\otimes\tilde{x}\|_{F(H/I)}=0$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\ \bar{x},\bar{y}\in F(H),\ \bar{x}.\bar{y}-\bar{y}.\bar{x}\in F(I).$$

**Teorem 4.3.8:**

$f:F(H)\to F(S)$ bir esnek örten normlu halka homomorfizması ve $F(I)$, $F(H)$ nın bir esnek ideali olsun. $Çekf\subseteq F(I)$ ise

$$F(H/I)\cong F(S)/f(F(I)).$$

dır. $f$ esnek örten değil ise, $F(H/I)$, $F(S)/f(F(I))$ nın bir esnek normlu alt halkasına izomorf olur.

**İspat:**

$\phi : F(S) \to F(S)/f(F(I))$ esnek normlu halka homomorfizma olmak üzere $g : F(H) \to F(S)/f(F(I))$, $g = \phi f$ esnek normlu halka homomorfizmasını alalım. O halde, her $\bar{r} \in F(H)$ için

$$g(\bar{r}) = \phi\big(f(\bar{r})\big) = \left\| \bar{f}(\bar{r}) \right\|_{F(H/I)}.$$

$g$ esnek örten iki normlu halka homomorfizmanın bileşkesi olduğundan bir esnek örten normlu halka homomorfizmadır.

$$\begin{aligned} Çekg &= \left\{ \bar{r} \in F(H) : \bar{f}(\bar{r}) = f\big(F(I)\big) \right\} \\ &= \left\{ \bar{r} \in F(H) : f(\bar{r}) \in f(F(I)) \right\} \\ &= f^{-1}(f(F(I))). \end{aligned}$$

dır. $F(I) \subseteq f^{-1}(f(F(I)))$ olduğu açıktır. Diğer taraftan, $Çekf \subseteq F(I)$ kabul ettiğimizden,

$$\begin{aligned} \bar{x} \in f^{-1}(f(F(I))) &\Rightarrow f(\bar{x}) \in f(F(I)) \\ &\Rightarrow \left\| \bar{x} \right\|_{F(H)} = \left\| \bar{a} \right\|_{F(H)}, \text{ bir } \bar{a} \in F(I) \text{ var} \\ &\Rightarrow \left\| \bar{x} - \bar{a} \right\|_{F(H)} \\ &\Rightarrow \bar{x} - \bar{a} \in Çekf \subseteq F(I) \\ &\Rightarrow \bar{x} \in F(I). \end{aligned}$$

Yani, $f^{-1}(f(F(I))) \subseteq F(I)$ olur, her iki kapsamadan, $Çekg = f^{-1}(f(F(I))) = F(I)$ bulunur. Teorem 4.3.6’ dan,

$$F(H/I) \cong F(S)/f(F(I))$$

elde edilir. $f$ esnek örten değil ise $F(H/I)$ nın $F(S)/f(F(I))$ nın bir esnek normlu alt halkasına izomorf olduğu açıktır.

**Teorem 4.3.9:**

$F(H)$ değişmeli ve birim elemanlı bir esnek normlu halka ve $F(I) \subseteq F(H)$ bir esnek ideali olsun. $F(I)$ esnek normlu asal idealdir $\Leftrightarrow$ $F(H/I)$ esnek tamlık bölgesidir.

**İspat:**

$(\Rightarrow)$ $F(I)$ esnek asal ideal olsun. $F(I) \neq F(H)$ olup $F(H/I)$ en az iki elemanlıdır. $\tilde{x}, \tilde{y} \in F(H/I)$ alalım ve $F(H/I)$ nın sıfırının $F(I)$ olduğunu hatırlayalım.

$$\bar{x}.\bar{y} = F(I) \Rightarrow \overline{xy} + F(I) = F(I)$$

$$\Rightarrow \left(\bar{x} + F(I)\right).\left(\bar{y} + F(I)\right) = F(I)$$

$$\Rightarrow \bar{x}.\bar{y} \in F(I)$$

$$\Rightarrow \bar{x} \in F(I) \text{ veya } \bar{y} \in F(I)$$

$$\Rightarrow \bar{x} = F(I) \text{ veya } \bar{y} = F(I)$$

$\left(\bar{x} + F(I) = F(I)\right)$ veya $\left(\bar{y} + F(I) = F(I)\right)$ olup, $F(H/I)$ sıfır bölensizdir. $F(H)$ birim elemanlı ve değişmeli olup $F(H/I)$ da birim elemanlı ve değişmelidir, yani $F(H/I)$ esnek tamlık bölgesidir.

$(\Leftarrow)$ $F(H/I)$ bir esnek tamlık bölgesi olsun. $F(H/I)$ en az iki elemanlı olup $F(I) \neq F(H)$ dır. $\bar{x}, \bar{y} \in F(H)$ olsun.

$$\bar{x}.\bar{y} \in F(I) \Rightarrow \left\|\tilde{x} \otimes \tilde{y}\right\|_{F(H/I)}$$

$$\Rightarrow \left\|\tilde{x}\right\|_{F(H/I)} . \left\|\tilde{y}\right\|_{F(H/I)}$$

$$\Rightarrow \bar{x}.\bar{y} \in F(I)$$

$$\Rightarrow \bar{x} = F(I) \text{veya } \bar{y} = F(I)$$

$$\Rightarrow \bar{x} \in F(I) \text{ veya } \bar{y} \in F(I),$$

olup $F(I)$ nın esnek asal ideal olduğu gösterilmiş olur.

### 4.4 Esnek Normlu $\mathbb{Z}(A)$- Modül

**Tanım 4.4.1:**

$(G,A)$(ya da $G(A)$), $(G,\circ)$ değişmeli grup üzerinde esnek grup olsun. Eğer $G(A)$ üzerinde bir esnek norm $\|\cdot\|_{sz}$ yani $\|\cdot\|_{sz} : G(A) \to R(A)$ negatif olmayan esnek reel değerli ve her $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in G(A)$ için aşağıdaki şartları sağlayan bir esnek dönüşüm tanımlanmış ise $G(A)$ ye esnek normlu $\mathbb{Z}(A)$- modül denir.

**i**. $\tilde{g} = \bar{0} \Leftrightarrow \|\tilde{g}\|_{sz} = \bar{0}$

**ii**. $\|k\tilde{g}\|_{sz} = |k| \|\tilde{g}\|_{sz}$

**iii**. $\|\tilde{g}_1 \circ \tilde{g}_2\|_{sz} \tilde{\leq} \|\tilde{g}_1\|_{sz} + \|\tilde{g}_2\|_{sz}$

**iv**. $\|\tilde{g}_1 \circ \tilde{g}_2\|_{sz} \tilde{\leq} \|\tilde{g}_1\|_{sz} . \|\tilde{g}_2\|_{sz}$

Üzerinde bir $\|\cdot\|_{sz}$ esnek normu tanımlanmış olan bir $\mathbb{Z}(A)$- modülüne esnek normlu $\mathbb{Z}(A)$- modül denir ve $\left(G(A), \| \ \|_{sz}\right)$ ile gösterilir.

**Önerme 4.4.3:**

$\left(G(A), \| \ \|_{sz}\right)$ esnek normlu $\mathbb{Z}(A)$- modül olsun. $d\left(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2\right) = \left\|\tilde{g}_1 \circ \tilde{g}_2^{-1}\right\|_{sz}$ ile tanımlı $d : G(A) \times G(A) \to R(A)^{+} \cup \left\{\bar{0}\right\}$ fonksiyonu $G(A)$ üzerinde bir esnek metriktir.

**İspat:**

$\forall\, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3 \in G(A)$ olsun. Esnek normlu $\mathbb{Z}(A)$- modül özelliklerini kullanarak,

**i**. $d\left(\bar{g}_1, \bar{g}_2\right) = \left\|\bar{g}_1 \circ \bar{g}_2^{-1}\right\|_{sz} \tilde{>} \bar{0}_{sz}$

**ii**. $d(\tilde{g}_1,\tilde{g}_3)=\left\|\tilde{g}_1\circ\tilde{g}_3^{-1}\right\|_{sz}$

$$=\left\|\tilde{g}_1\circ\tilde{g}_2^{-1}\circ\tilde{g}_2\circ\tilde{g}_3^{-1}\right\|_{sz}$$

$$\tilde{\leq}\left\|\tilde{g}_1\circ\tilde{g}_2^{-1}\right\|_{sz}+\left\|\tilde{g}_2\circ\tilde{g}_3^{-1}\right\|_{sz}$$

$$=d(\tilde{g}_1,\tilde{g}_2)+d(\tilde{g}_2,\tilde{g}_3)$$

**iii**. $d(\tilde{g}_1,\tilde{g}_2)=\left\|\tilde{g}_1\circ\tilde{g}_2^{-1}\right\|_{sz}$

$$=\left\|\left\|-\bar{1}\right\|_{sz}\left(\tilde{g}_2\circ\tilde{g}_1^{-1}\right)\right\|_{sz}$$

$$=\left\|\tilde{g}_2\circ\tilde{g}_1^{-1}\right\|_{sz}$$

$$=d(\tilde{g}_2,\tilde{g}_1)$$

**iv**. $d(\tilde{g}_1,\tilde{g}_2)=\bar{0}_{sz}\Leftrightarrow\left\|\tilde{g}_1\circ\tilde{g}_2^{-1}\right\|_{sz}=\bar{0}_{sz}$

$$\Leftrightarrow\tilde{g}_1-\tilde{g}_2=\bar{0}_{sz}$$

$$\Leftrightarrow\tilde{g}_1=\tilde{g}_2.$$

O halde $d$ esnek metrik uzay şartlarını sağlar.

**Sonuç:** $X$ normlu vektör uzay olsun. $X$ aynı zamanda esnek normlu $\mathbb{Z}(A)$-modüldür.

**Örnek 4.4.4:**

$\mathbb{Z}(A)^{n\times m}$,esnek normlu $\mathbb{Z}(A)$- modülünde $G(A)=(\tilde{g}_{ij})\in\mathbb{Z}(A)^{n\times m}$ için (elemanları esnek tamsayı olan matris)

$$\left\|G(A)\right\|_z=\max_j\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\tilde{g}_{ij}\right|\right)$$

olarak tanımlı esnek fonksiyonu esnek normlu $\mathbb{Z}(A)$- modüldür.

**i.** $G(A)=\bar{0}=\begin{pmatrix}\bar{0} & \dots & \bar{0}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \bar{0} & \dots & \bar{0}\end{pmatrix}\Rightarrow\left\|G(A)\right\|_{sz}=\left|\bar{0}\right|+\left|\bar{0}\right|+\ldots+\left|\bar{0}\right|=\bar{0}$ ,

**ii**. $\|k.G(A)\|_z = \left\| \begin{pmatrix} k.\tilde{g}_{11} & k.\tilde{g}_{12} \cdots & k.\tilde{g}_{1n} \\ k.\tilde{g}_{21} & k.\tilde{g}_{22} \cdots & k.\tilde{g}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k.\tilde{g}_{m1} & k.\tilde{g}_{m2} \cdots & k.\tilde{g}_{mn} \end{pmatrix} \right\|_{sz} = \max_j \left( \sum_{i=1}^{n} |\tilde{g}_{ij}| \right)$

$$= |k.\tilde{g}_{1m}| + |k.\tilde{g}_{2m}| + \ldots + |k.\tilde{g}_{nm}|$$

$$= |k|.|\tilde{g}_{1m}| + |k|.|\tilde{g}_{2m}| + \ldots + |k|.|\tilde{g}_{nm}|$$

$$= |k|.\left( |\tilde{g}_{1m}| + |\tilde{g}_{2m}| + \ldots + |\tilde{g}_{nm}| \right)$$

$$= |k|.\left( \max_j \left( \sum_{i=1}^{n} |\tilde{g}_{ij}| \right) \right)$$

$$= |k|.\|G(A)\|_{sz}$$

**iii**. $\|G(A) \circ H(A)\|_{sz} \tilde{\leq} \|G(A)\|_{sz} + \|H(A)\|_{sz}$.

**iv**. $\|G(A) \circ H(A)\|_{sz} \tilde{\leq} \|G(A)\|_{sz} . \|H(A)\|_{sz}$.

**Önerme 4.4.5:**

$\left( G(A), \|.\|_{sz} \right)$ esnek normlu $\mathbb{Z}(A)$- modül olsun. Bu durumda her $\tilde{g}, \tilde{h} \in G(A)$ ve $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \ldots, \tilde{g}_n \in G(A)$ için

$$\left| \|\tilde{g}\|_{sz} - \|\tilde{h}\|_{sz} \right| \tilde{\leq} \|\tilde{g} \circ \tilde{h}\|_{sz}$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat:**

$$\|\tilde{g}\|_{sz} = \|\tilde{g} \circ \tilde{h}^{-1} \circ \tilde{h}\|_{sz} \tilde{\leq} \|\tilde{g} \circ \tilde{h}^{-1}\|_{sz} + \|\tilde{h}\|_{sz} \Rightarrow \|\tilde{g}\|_z - \|\tilde{h}\|_z \tilde{\leq} \|\tilde{g} \circ \tilde{h}^{-1}\|_z \quad (1)$$

ve

$$\|\tilde{h}\|_{sz} = \|\tilde{h} \circ \tilde{g}^{-1} \circ \tilde{g}\|_{sz} \tilde{\leq} \|\tilde{h} \circ \tilde{g}^{-1}\|_{sz} + \|\tilde{g}\|_{sz} \Rightarrow \|\bar{h}\|_{sz} - \|\bar{g}\|_{sz} \tilde{\leq} \|\bar{h} \circ \bar{g}^{-1}\|_{sz} = \|\bar{g} \circ \bar{h}^{-1}\|_{sz} \quad (2)$$

dir. (1) ve (2) den

$$\left| \|\tilde{g}\|_z - \|\tilde{h}\|_{sz} \right| \tilde{\leq} \|\tilde{g} \circ \tilde{h}\|_{sz}$$

elde edilir.

**Tanım 4.4.6:**

$\left(G(A), \| \ \|_{sz}\right)$ esnek normlu $\mathbb{Z}(A)$- modül de bir dizi $\{\tilde{g}_n\}$ olsun.

**a)** $\tilde{g} \in G(A)$ olmak üzere her $\varepsilon \tilde{>} \bar{0}$ sayısına karşılık gelen her $n \geq N$ için

$$\|\tilde{g} \circ \tilde{g}_n^{-1}\|_{sz} \tilde{<} \varepsilon,$$

olacak biçimde en az bir $N \in \mathbb{N}$ varsa $\{g_n\}$ dizisi $\tilde{g} \in G(A)$ ye yakınsar (ya da $\{\tilde{g}_n\}$ esnek dizisi yakınsaktır) denir. Bu durumda

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{g}_n = \tilde{g}$$

veya

$$\tilde{g}_n \to \tilde{g}$$

yazarız.

**b)** Her $\varepsilon \tilde{>} \bar{0}$ sayısına karşılık gelen her $m, n \in \mathbb{N}$ olacak şekilde her $m, n \geq N$ için

$$\|\tilde{g}_m \circ \tilde{g}_n^{-1}\|_{sz} \tilde{<} \varepsilon,$$

olacak biçimde en az bir $N \in \mathbb{N}$ varsa $\{\tilde{g}_n\}$ dizisine bir esnek Cauchy dizisi denir.

**Örnek 4.4.7:**

$G(A)$ ve $H(A)$, $\mathbb{Z}$ halkası üzerinde esnek normlu $\mathbb{Z}(A)$- modülleri olsun ve $G(A)$ ve $H(A)$in kartezyen çarpımı $G(A) \times H(A) = \left\{ \left(\tilde{g}, \tilde{h}\right) : \tilde{g} \in G(A), \tilde{h} \in H(A) \right\}$ olsun. $\|.\|_{sz_1}$, $G(A)$ üzerinde esnek normlu $\mathbb{Z}$- modül ve $\|.\|_{sz_2}$, $H(A)$ üzerinde esnek normlu $\mathbb{Z}(A)$- modül olsun. O zaman $\left\{ \left(\tilde{g}_n, \tilde{h}_n\right) \right\}$, $G(A) \times H(A)$ içinde bir esnek

Cauchy dizisidir ancak ve ancak $\{\tilde{g}_n\}$, $G(A)$ içinde bir esnek Cauchy dizisidir ve $\{\tilde{h}_n\}$, $H(A)$ içinde bir esnek Cauchy dizisidir.

$(\Rightarrow)$ $\{(\tilde{g}_n,\tilde{h}_n)\}$, $G(A)\times H(A)$ içinde bir esnek Cauchy dizisi olsun. O zaman her $m,n\geq N$ için

$$\left\|\left(\tilde{g}_n\circ\tilde{g}_m^{-1},\tilde{h}_n\circ\tilde{h}_m^{-1}\right)\right\|_{sz}=\left\|\left(\tilde{g}_n,\tilde{h}_n\right)\circ\left(\tilde{g}_m,\tilde{h}_m\right)^{-1}\right\|_{sz}\tilde{\leq}\varepsilon$$

olacak şekilde en az bir $N\in\mathbb{N}$ vardır. Böylece her $m,n\geq N$ için

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{g}_n\circ\tilde{g}_m^{-1}\right\|_{sz_1}&\tilde{\leq}\left\|\tilde{g}_n\circ\tilde{g}_m^{-1}\right\|_{sz_1}+\left\|\tilde{h}_n\circ\tilde{h}_m^{-1}\right\|_{sz_2}\\&=\left\|\left(\tilde{g}_n\circ\tilde{g}_m^{-1}\right)\circ\left(\tilde{h}_n\circ\tilde{h}_m^{-1}\right)\right\|_{sz}\\&\tilde{\leq}\varepsilon\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{h}_n\circ\tilde{h}_m^{-1}\right\|_{z_2}&\tilde{\leq}\left\|\tilde{g}_n\circ\tilde{g}_m^{-1}\right\|_{z_1}+\left\|\tilde{h}_n\circ\tilde{h}_m^{-1}\right\|_{z_2}\\&=\left\|\left(\tilde{g}_n\circ\tilde{g}_m^{-1}\right)\circ\left(\tilde{h}_n\circ\tilde{h}_m^{-1}\right)\right\|_{z}\\&\tilde{\leq}\varepsilon\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak, $\{\tilde{g}_n\}$, $G(A)$ içinde bir esnek Cauchy dizisidir ve $\{\tilde{h}_n\}$, $H(A)$ içinde bir Cauchy dizisidir.

$(\Leftarrow)$ $\{\tilde{g}_n\}$, $G(A)$ içinde bir esnek Cauchy dizisidir ve $\{\tilde{h}_n\}$, $H(A)$ içinde bir esnek Cauchy dizisi olsun. O zaman her $m,n\geq N_1$ için

$$\left\|\tilde{g}_m\circ\tilde{g}_n^{-1}\right\|_{sz_1}\tilde{\leq}\frac{\varepsilon}{2}$$

ve her $m,n\geq N_2$ için

$$\left\|\tilde{h}_m \circ \tilde{h}_n^{-1}\right\|_{sz_2} \,\tilde{\leq}\, \frac{\varepsilon}{2}.$$

olacak şekilde $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. O zaman $m,n \geq N_0$ için

$$\left\|\left(\tilde{g}_n, \tilde{h}_n\right) \circ \left(\tilde{g}_m, \tilde{h}_m\right)^{-1}\right\|_{sz} = \left\|\tilde{g}_n \circ \tilde{g}_m^{\;-1}, \tilde{h}_n \circ \tilde{h}_m^{\;-1}\right\|_{sz}$$

$$\tilde{\leq} \left\|\overline{g}_n \circ \overline{g}_m^{\;-1}\right\|_{sz_1} + \left\|\overline{h}_n \circ \overline{h}_m^{\;-1}\right\|_{sz_2}$$

$$\tilde{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon$$

olduğundan $\left\{\left(\tilde{g}_n, \tilde{h}_n\right)\right\}$, $G(A)$ içinde bir esnek Cauchy dizisidir.

**Tanım 4.4.8:**

Bir esnek normlu $\mathbb{Z}(A)$- modül $\left(G(A), \|.\|_{sz}\right)$, bir $\tilde{g}_0 \in G(A)$ esnek noktası ve $r \,\tilde{>}\, \overline{0}$ verilsin. O zaman

$$S_r\left(\tilde{g}_0\right) = \left\{\tilde{g} \in G(A) : \left\|\tilde{g} \circ \tilde{g}_0^{\;-1}\right\|_{sz} \,\tilde{<}\, r\right\}$$

esnek kümesine $\tilde{g}_0$-merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar,

$$\overline{S_r}\left(\tilde{g}_0\right) = \left\{\tilde{g} \in G(A) : \left\|g \circ g_0^{\;-1}\right\|_{sz} \,\tilde{\leq}\, r\right\}$$

esnek kümesine $\tilde{g}_0$-merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar ve

$$\overline{\sigma_r}\left(\tilde{g}_0\right) = \left\{\tilde{g} \in G(A) : \left\|\tilde{g} \circ \tilde{g}_0^{\;-1}\right\|_{sz} = r\right\}$$

esnek kümesine $\tilde{g}_0$-merkezli ve r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

**Teorem 4.4.9:**

$\left(G(A), \|.\|_{sz}\right)$ esnek normlu $\mathbb{Z}(A)$- modülünde bir esnek dizi $\left(\tilde{g}_n\right)$ ve $\tilde{g}_0 \in G(A)$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{g}_n=\tilde{g}_0,$$

ise aşağıdaki önermeler doğrudur.

**i.** $\tilde{g}_0$ limiti tektir.

**ii.** $\left(\tilde{g}_n\right)$ esnek dizisi sınırlıdır.

**iii.** $\left(\tilde{g}_n\right)$esnek dizisinin her $\left(\tilde{g}_{n_k}\right)$esnek alt dizisinin de limiti $\tilde{g}_0$ dır.

**iv**. Eğer ilave olarak $\tilde{h}_n\to\tilde{h}_0$ $\left(\tilde{h},\tilde{h}_n\in G(A)\right)$ ise $\tilde{g}_n+\tilde{h}_n\to\tilde{g}_0+\tilde{h}_0$ dır.

**İspat:**

$\forall\ \tilde{g},\tilde{h}\in G(A)$ ,için $d\left(\tilde{g},\tilde{h}\right)=\left\|\tilde{g}-\tilde{h}\right\|$ tanımı ile bir $\left(G(A),d\right)$ esnek metrik, esnek normlu $\mathbb{Z}(A)$- modüldür.

**i**.

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\tilde{g}_n\circ\tilde{g}_0^{-1}\right\|_{sz}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}d\left(\tilde{g}_n,\tilde{g}_0\right)=\bar{0}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\tilde{g}_n\circ\tilde{g}_1^{-1}\right\|_{sz}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}d\left(\tilde{g}_n,\tilde{g}_1\right)=\bar{0}$$

olsun. O halde

$$\bar{0}\,\tilde{\leq}\,d\left(\tilde{g}_0,\tilde{g}_1\right)\tilde{\leq}\,d\left(\tilde{g}_0,\tilde{g}_n\right)+d\left(\tilde{g}_n,\tilde{g}_1\right)$$

$$=\bar{0}+\bar{0}$$

$$=\bar{0}$$

ve Önerme 4.4.3 ün i. aksiyomundan dolayı $\tilde{g}_0=\tilde{g}_1$ elde edilir.

**ii**. Herhangi sabit bir $\tilde{a}\in G(A)$ esnek noktası için Önerme 4.4.3 ün iii. aksiyomu gereğince $\forall\ n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\tilde{g}_n\circ\tilde{a}^{-1}\right\|_{sz}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}d\left(\tilde{g}_n,\tilde{a}\right)=\bar{0}$$

için

$$d\left(\tilde{g}_n,\tilde{a}\right)\tilde{\leq}\,d\left(\tilde{g}_n,\tilde{g}_0\right)+d\left(\tilde{g}_0,\tilde{a}\right)$$

dır.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\tilde{g}_n \circ \tilde{g}_0^{-1}\right\|_{sz} = \bar{0} \Rightarrow \quad \varepsilon \tilde{>} \bar{0}$ için en az bir $n_1 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall\, n \tilde{\geq} n_1$ için $d\left(\tilde{g}_n, \tilde{g}_0\right) \tilde{<} \bar{1}$ dir. O halde

$$M = \max\left\{d(\tilde{g}_1, \tilde{g}_0), d\left(\tilde{g}_2, \tilde{g}_0\right), \ldots, d\left(\tilde{g}_{n_1}, \tilde{g}_0\right), \bar{1} + d\left(\tilde{g}_0, \tilde{a}\right)\right\}$$

olmak üzere $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $d\left(\tilde{g}_n, \tilde{a}\right) \tilde{\leq} \bar{M}$ olduğu ve dolayısıyla $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{g}_n \in \overline{S_M}\left(\tilde{a}\right)$ elde edilir. Bu da $\left\{\tilde{g}_n\right\}$ nin $G(A)$ içinde esnek sınırlı dizi olması demektir.

**iii**. $\left(\tilde{g}_{n_k}\right), \left(\tilde{g}_n\right)$ esnek dizisinin herhangi bir esnek alt dizisi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{g}_n = \tilde{g}_0,$$

iken $\forall \varepsilon \tilde{>} \bar{0}$ için $\exists\, n_\varepsilon \in \mathrm{N}$ öyle ki $\forall\, n \tilde{>} n_\varepsilon$ için $\left\|\tilde{g}_{n_k} \circ \tilde{g}_0^{-1}\right\|_{sz} \tilde{<} \varepsilon.$ Böylece, $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty,$

$\exists\, k_\varepsilon \in \mathrm{N}$ öyle ki $\forall\, k \tilde{>} k_\varepsilon$ için

$$\left\|\tilde{g}_{n_k} \circ \tilde{g}_0\right\|_{sz} \tilde{<} \varepsilon \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \tilde{g}_{n_k} = \tilde{g}_0$$

elde ederiz.

**iv**. Herhangi bir $\varepsilon \tilde{>} \bar{0}$ sayısı verilsin. $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{g}_n = \tilde{g}_0 \Rightarrow \exists\, n'_\varepsilon \in \mathrm{N}$ öyle ki $\forall\, n \tilde{\geq} n'_\varepsilon$ için

$$\left\|\tilde{g}_n \circ \tilde{g}_0^{-1}\right\|_{sz} \tilde{<} \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{h}_n = \tilde{h}_0 \Rightarrow \exists\, n''_\varepsilon \in \mathrm{N}$ öyle ki $\forall\, n \tilde{>} n'_\varepsilon$ için

$$\left\|\tilde{h}_n \circ \tilde{h}_0^{-1}\right\|_{sz} \tilde{<} \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Buradan da $\forall\, n \tilde{>} n_\varepsilon = \max\left\{n', n''\right\}$ için

$$\left\| \tilde{g}_n \circ \tilde{h}_n \circ \left( \tilde{g}_0 \circ \tilde{h}_0 \right)^{-1} \right\|_{sz} = \left\| \tilde{g}_n \circ \tilde{g}_0^{-1} \circ \tilde{h}_n \circ \tilde{h}_0^{-1} \right\|_{sz}$$

$$\tilde{\leqq} \left\| \tilde{g}_n \circ \tilde{g}_0^{-1} \right\|_{sz} + \left\| \tilde{h}_n \circ \tilde{h}_0^{-1} \right\|_{sz}$$

$$\tilde{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon$$

bulunur. Bu ise $n \to \infty$ iken $\tilde{g}_n \circ \tilde{h}_n \to \tilde{g}_0 \circ \tilde{h}_0$ olması demektir.

# BÖLÜM 5

## TARTIŞMA SONUÇ

Bu çalışmada, ilk olarak normlu halkalar diye bilinen bir cebirsel yapı esnek kümeler teorisi üzerinde tanımlanmıştır. Böylece zengin bir teorinin başlangıcı olarak kabul edilebilecek esnek normlu halkalar elde edilmiştir. Sonra esnek normlu halkalar üzerinde Cauchy dizisi ve Banach uzayı tanımlanmıştır. Banach uzayında, her esnek normlu halkanın cebirsel ve topolojik esnek izomorfik normlu halka olduğu sonucu elde edilmiştir. Daha sonra esnek normlu halkalar üzerinde esnek ideal, esnek öz ideal ve esnek maksimal ideal tanımlanmıştır.

Bu tezin, dördüncü bölümünde normlu bölüm halkaları tanımlanmış olup bu cebirsel yapının bazı temel özellikleri normlu uzaylar üzerinde incelenmiştir. Bu tanım yardımıyla normlu bölüm halkaları üzerinde homomorfizma ve izomorfizma tanımlanmıştır. Daha sonra normlu $\mathbb{Z}$-modül tanımlanmıştır. Bu yapıyla vektör uzayı olmayan cebirsel yapılar üzerinde normlu uzay ile daha geniş bir cebirsel yapı tanımlanmıştır. Aynı zamanda bu yeni tanımlanan cebirsel yapı üzerinde normlu $\mathbb{Z}$-modüllerinin kartezyen çarpımı, normlu $\mathbb{Z}$-modüllerinin Cauchy dizisi, normlu $\mathbb{Z}$-modüllerinin metriği tanımlanarak, bu cebirsel yapılarla ilgili örnekler verilmiştir.

Tezimizin giriş kısmından hatırlarsak esnek kümeler teorisi de matematik, mühendislik ve belirsizliğin bulunduğu birçok alana uygulanabilir. Biz burada, "Matematikteki hem cebirsel hem de topolojik yapıya sahip olan normlu halkalar esnek kümeler teorisinde [13] belirtilen amaçlara uygun mudur?" başka bir ifadeyle, "Normlu halkaların esnek kümeler üzerinde tanımlanmasına ihtiyaç var mıdır?" gibi bir soru sormak mümkündür. Klasik kümelerin sahip olduğu bazı zorlukları kendinde barındırmayan yeni bir matematiksel araç olarak ortaya atılan esnek kümeler üzerinden, esnek normlu halkalar yardımıyla faydalı ve kullanılabilir bir teorinin ortaya çıkması kaçınılmazdır. Çünkü esnek kümelerin uygulama alanı arttıkça bu tür soruların herkesi tatmin edecek bir cevabı bulunacaktır. Tüm bu tartışmalar bir tarafa yakın gelecekte, bilim insanları birçok alanda esnek kümelerle ilgili çalışmalara daha çok yer vereceklerdir.

Bu tezde elde edilen sonuçlar bazı yeni çalışmalara ışık tutar niteliktedir. Örneğin üçüncü bölümdeki esnek normlu halkalar yardımıyla normlu halkaların radikalleri, maksimal ideallerin uzayı, maksimal ideallerin analitik fonksiyonları ve bazı cebirsel yapılar esnek normlu halkalar üzerinde araştırılabilir. Dördüncü bölümde de elde edilen sonuçların devamı olarak ise normlu bölüm halkaları ve normlu $\mathbb{Z}$- modül üzerinde Minkowski eşitsizliği, Hölder eşitsizliği ve analizde tanımlanan bazı eşitsizlikler incelenebilir. Buna bağlı olarak elde edilen sonuçlar bahsedilen şekilde matematik, mühendislik ve bunlarla ilgili alanlara daha fazla katkıda bulunabilir ve yeni çalışmalara yön verebilir.

## KAYNAKLAR

**[1]** Aktaş, H. and Çağman, N., (2007). Soft sets and soft groups. *Information Sciences*, **177**(1), 2726-2735.

**[2]** Bayraktar, M. Ekim 2000. Fonksiyonel Analiz, Ankara, Gazi Kitabevi.

**[3]** Çağman, N., & Enginoğlu, S. (2010). Soft set theory and uni–int decision making. *European Journal of Operational Research*, **207**(2), 848-855.

**[4]** Chen, D., Tsang, E.C.C., Yeung, D.S. andWang, X., (2005). The parameterization reduction of soft sets and its applications. *Computers and Mathematics with Applications*, **49**(1), 757-763.

**[5]** Çallıalp, F., 1981. Soyut Cebir I, Hacettepe Üniv. Yayınları No: 15, Ankara.

**[6]** Dummit, David S. and Foote, Richard M. 2004. Abstract Algebra. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc. ISBN 978-0-471-43334-7.

**[7]** Feng, F., Jun, Y. B. and Zhao, X., (2008). Soft semirings. *Computers and Mathematics with Applications*, **56**(10), 2621-2628.

**[8]** Freundlich, M. (1949). Completely continuous elements of a normed ring. *Duke Math. J* **16**.1, 949-958.

**[9]** Gel′fand, I.M., D.A. Raĭkov, and G. E. Silov. 1957. Commutative normed rings. American Mathematical Society.

**[10]** Gilbert, W.J., 1976. Modern Algebra with Applications. A Wiley Interscience Pubc. Inc. John Wiley and Sons. Inc.

**[11]** Jarden, M. 2011. Normed Rings. Algebraic Patching. Springer Berlin Heidelberg. 10-30.

**[12]** Jun, Y. B., (2008). Soft BCK/BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, **56**(1), 1408-1413.

**[13]** Jun, Y. B. and Park, C. H., (2008). Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-algebras. *Information Sciences*, **178**(1) 2466-2475.

**[14]** Kong, Z., Gao, L., Wang, L. and Li, S., (2008). The normal Parameter Reduction of Soft Sets and Its Algoritm. *Computers and Mathematics with Applications*, **56**(1), 3029-3037.

**[15]** Kovkov, D. V., Kolbanov, V. M. and Molodtsov, D. A., (2007). Soft Sets Theory-Based Optimization. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, **46**(6), 872-880.

**[16]** Maji, P.K., Biswas, R. and Roy, A.R., (2001). Fuzzy soft sets. *Journal of Fuzzy Mathematics*, **9**(3), 589-602.

**[17]** Maji, P. K., Bismas, R. and Roy, A.R., (2003). Soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, **45**(1), 555-562.

**[18]** Maji, P.K., Roy, A.R. and Biswas, R., (2002). An application of soft sets in a decision making problem. *Computers and Mathematics with Applications*, **44**(1), 1077-1083.

**[19]** Majumdar, P. and Samanta, S. K., (2008). Similarity measure of soft sets. *New Mathematics and Natural Computation*, **4**(1), 1-12.

**[20]** Molodtsov, D., (1999). Soft set theory-first results. *Computers and Mathematics with Applications*, **37**(1), 19-31.

**[21]** Molodtsov, D., 2004. The Theory of Soft Sets (in Russian). URSS Publishers, Moscow.

**[22]** Molodtsov, D. A., Leonov V. Yu. and Kovkov D. V., (2006). Soft Sets Technique and Its Application. *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya*, **1**(1), 8-39.

**[23]** Mushrif, M.M., Sengupta, S. and Ray, A.K., (2006). Texture Classiffcation Using a Novel, Soft-Set Theory Based Classification, Algorithm. *Lecture Notes In Computer Science*, **3851**, 246-254.

**[24]** Naimark, M.A. 1964. Normed rings. P. Noordhoff.

**[25]** Naimark, M.A. 1972. Normed Algebras (Third completely revised American Edition). Groningen: Wolters-Noordhoff Publishing.

**[26]** Park, C.H., Jun, Y.B. and Öztürk, M.A., (2008). Soft WS-algebras. *Commun. Korean Math. Soc*, **23**(3), 313-324.

**[27]** Pawlak, Z., 1982. Rough sets. *International Journal of Information and Computer Sciences*, **11**(1), 341-356.

**[28]** Pei, D. and Miao, D., (2005). From Soft Sets to Information Systems. In: Proceedings of Granular Computing (Eds: X. Hu, Q. Liu, A. Skowron, T.Y. Lin, R.R. Yager, B.Zhang) IEEE, **2**, 617-621.

**[29]** Raikov, D. A. (1946). To the theory of normed rings with involution. CR (Doklady) Acad. Sci. URSS (NS). Vol.**54**.40-50.

**[30]** Roy, A.R. and Maji, P.K., (2007). A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **203**(1), 412-418.

**[31]** Richard A., (1952). A generalization of normed rings. *Pacific J. Math*, **2**, 455-471.

**[32]** Shilov, G. On decomposition of a commutative normed ring in direct sums of ideals. *Matematicheskii Sbornik* **74**.2 (1953): 353-364.

**[33]** Sun, Q-M., Zhang, Z-L. and Liu, J., (2008). Soft Sets and Soft Modules. (In Guoyin Wang, Tian-rui Li, Jerzy W. Grzymala-Busse, Duoqian Miao, Andrzej Skowron, Yiyu 55Yao Eds.): Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT, Proceedings, Springer, 403-409.

**[34]** Sujoy Das and S. K. Samanta, (2012) Soft real sets, soft real numbers and their properties, *J. Fuzzy Math*. **20** (3), 551-576.

**[35]** Von Neumann J. (1929). Zur Algebra der Funktional operationen und Theorie der normalen Operatoren, *Math. Ann*., **102**, 370-427.

**[36]** Xiao, Z., Chen, L., Zhong, B. and Ye, S., (2005). Recognition for Soft Information Based on the Theory of Soft Sets. In Proceedings of ICSSSM-05 (Ed: J. Chen), IEEE, **2**, 1104-1106.

**[37]** Xiao, Zhi, Ke Gong, and Yan Zou. (2009). A combined forecasting approach based on fuzzy soft sets. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **228**.1, 326-333.

**[38]** Yang, X., Yu, D., Yang, J. and Wu, C., (2007). Generalization of Soft Set Theory: From Crisp to Fuzzy Case. In Fuzzy Information and Engineering: Proceedings of ICFIE, (Bing-Yuan Cao Ed.), Advances in Soft Computing **40**, Springer, 345-355.

**[39]** Zadeh, L.A., (1965). Fuzzy Sets. *Inform. and Control*, **8**(1), 338-353.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

| | |
|---|---|
| Adı ve Soyadı | : Vakkas ULUÇAY |
| Uyruğu | : TC |
| Doğum yeri ve Tarihi | : Gaziantep 01.01.1985 |
| Medeni Hali | : Evli |
| Telefon | : 05376435034 |
| Email | : vulucay27@gmail.com |

### EĞİTİM BİLGİLERİ

| | **Mezun olduğu okul** | **Mezuniyet yılı** |
|---|---|---|
| Pedagojik Formasyon | Gaziantep Üniversitesi | 2013 |
| Yüksek Lisans | Gaziantep Üniversitesi | 2010 |
| Lisans | Erzurum Atatürk Üniversitesi | 2008 |
| Lise | Şahinbey 19 Mayıs Lisesi | 2002 |

### YAYINLAR

**Uluslararası Yayınlar**

- **Y.1. Vakkas Uluçay**, İrfan Deli, Memet Şahin (2016). Similarity measures of bipolar neutrosophicsets and their application to multiple criteria decision making. Neural Computing and Applications,1-10, Doi: 10.1007/s00521-016-2479-1
- **Y.2.** Memet Şahin, Hatice Acıoğlu, **Vakkas Uluçay** (2016). New Similarity Measures of Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Numbers and Their Application to Multiple Criteria Decision Making. Asian Journal of Current Research, 1(2), 76-84.
- **Y.3. Vakkas Uluçay**, Memet Şahin, Necati Olgun (2016). Soft normed rings. SpringerPlus, 5(1), 1-6., Doi: 10.1186/s40064-016-3636-9.
- **Y.4.** Necati Olgun, Memet Şahin, **Vakkas Uluçay** (2016). Tensor, symmetric and exterior algebras K\{a}hler modules. New Trends in Mathematical Science, 4(3), 290-295., Doi: 10.20852/ntmsci.2016320384.

- **Y.5. Vakkas Uluçay**, Memet Şahin, Necati Olgun, Adem Kılıçman (2016). On neutrosophic soft lattices. Afrika Matematika, Doi: DOI 10.1007/s13370-016-0447-7.
- **Y.6. Vakkas Uluçay**, Memet Şahin, Necati Olgun, Adem Kılıçman (2016). On Soft Expert Metric Spaces. Malaysian Journal of Mathematical Sciences, 10(2), 221-231.
- **Y.7. Vakkas Uluçay**, Özge Öztekin, Memet Şahin, Necati Olgun, Abdullah Kargın(2016) Soft representation of soft groups. New Trends in Mathematical Science, 4(2), 23-29., Doi: 10.20852/ntmsci.2016217001.
- **Y.8. Vakkas Uluçay**, Memet Şahin, Necati Olgun, Özge Öztekin, Aykut Emniyet (2016). Generalized Fuzzy $\sigma$ - Algebra and Generalized Fuzzy Measure on Soft Sets. Indian Journal of Science and Technology, 9(4), 1-7., Doi: 10.17485/ijst/2016/v9i4/61989.
- **Y.9.** Memet Şahin, Alkhazalleh Shawkat, **Vakkas Uluçay** (2015). Neutrosophic Soft Expert Sets. Applied Mathematics, 6(01), 116-127., Doi: 10.4236/am.2015.61012.
- **Y.10. Vakkas Uluçay**, İrfan Deli, Memet Şahin (2016). Trapezoidal fuzzy multi-number and its application to multi-criteria decision-making problems. *Neural Computing and Applications*, 1-10., doi:10.1007/s00521-016-2760-3.
- **Y.11. Vakkas Uluçay**, Memet Şahin ve Necati Olgun (2016). Normed Z-Modules. International Journal of Pure and Applied Mathematics, Accepted.

**<u>Uluslararası Bildiriler</u>**

- **P.1. Vakkas Uluçay**, Memet Şahin, Necati Olgun (2016). Normed Quotient Rings. 2ndInternational Conference on Pure & AppliedSciences(ICPAS – 2016) June 1-5 İstanbul, Turkey.
- **P.2. Vakkas Uluçay**, Memet Şahin, Necati Olgun (2016). Normed Z Modules. 2ndInternational Conference on Pure & AppliedSciences(ICPAS – 2016) June 1-5 İstanbul, Turkey.
- **P.3. Vakkas Uluçay**, İrfan Deli, Memet Şahin, (2016). A New Approach for Multi-Attribute Decision-Making Problems with Bipolar Neutrosophic Set. International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2016) Elazığ, Türkiye.

- **P.4. Vakkas Uluçay**, İrfan Deli, Memet Şahin, (2016). An Outranking Approach for Multi-CriteriaDecision-Making Problems with Neutrosophic Refined Sets. International Conference onMathematics and Mathematics Education (ICMME-2016) Elazığ, Türkiye.
- **P.5.** Memet Şahin, İrfan Deli, **Vakkas Uluçay** (2016). Jaccard Vector Similarity Measure of Bipolar Neutrosophic Set Based on Multi-Criteria Decision Making. International Conference on Natural Science and Engineering (ICNASE'16) Kilis, Türkiye.
- **P.6.** Necati Olgun, Memet Şahin, Abdullah Kargın, **Vakkas Uluçay** (2015). Fuzzy Generalized Meir-Keeler-Type Contractıon on Fuzzy Partial Metrıc Spaces. Eighth International Conference on Soft Computing, Computing with Words and Perceptions in System Analysis, Decision and Control (ICSCCW-2015) Antalya, Türkiye.
- **P.7.** Memet Şahin, Necati Olgun, Abdullah Kargın, **Vakkas Uluçay** (2015). Soft G-Modules. Eighth International Conference on Soft Computing, Computing with Words and Perceptions in System Analysis, Decision and Control, (ICSCCW-2015), Antalya, Türkiye.
- **P.8.** Memet Şahin, **Vakkas Uluçay** (2010). Bulanık ölçüm teorisi üzerinde tanımlı olan bazı bulanık integraller. Ankara Matematik Günleri (AMG'10) Ankara, Türkiye.

**Ödül**

- Tübitak 2211-A Yurtiçi Doktora Bursu (2013)

**YABANCI DİL BİLGİSİ**

| Yabacı Dil | Sınav Türü | Puan |
|---|---|---|
| İngilizce | ÜDS | 73.75 |