GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEUTROSOPHİC KÜMELER ÜZERİNDEKİ KESİM KÜMELERİ VE ÖZELLİKLERİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERVE MENEKŞE

AĞUSTOS 2017

AĞUSTOS 2017 Yüksek Lisans Tezi – Matematik Bölümü MERVE MENEKŞE

Neutrosophic Kümeler Üzerindeki Kesim Kümeleri ve Özellikleri

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Memet ŞAHİN

Merve MENEKŞE

Ağustos 2017

T.C.

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tezin Adı: Neutrosophic Kümeler Üzerindeki Kesim Kümeleri ve Özellikleri

Öğrencinin, Adı Soyadı: Merve MENEKŞE

Tez Savunma Tarihi: 02.08.2017

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. A. Necmeddin YAZICI

FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Memet ŞAHİN

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:	İmzası
Prof. Dr. İsmet Yıldız	....
Doç. Dr. Memet ŞAHİN	....
Doç. Dr. Necati Olgun	....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Merve MENEKŞE

ABSTRACT

INTERVAL VALUED NEUTROSOPHIC SETS

MENEKŞE, MERVE

M.Sc. in Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Memet ŞAHİN

August 2017

48 pages

This thesis consists of disjunctive sum, difference and Cartesian product of two interval valued neutrosophic sets and their basic properties. Also, we have put forward in the notions of (ζ,η,θ)- cut interval valued neutrosophic set and (ζ,η,θ)- cut strong interval valued neutrosophic set. These concepts play an important role in interval valued neutrosophic set theory. Moreover, the representation theorem of interval valued neutrosophic sets is proposed by using the concept of level sets. Then, the extension principles of interval valued neutrosophic sets are developed based on the representation theorem. We have established the properties with proof and examples. Finally, some algebraic operations such as addition, substraction, multiplication and division operations over interval valued neutrosophic sets are defined.

Keywords: Neutrosophic Set, Interval Valued Neutrosophic Set, (ζ,η,θ)- Cut Set of Interval Valued Neutrosophic Set.

ÖZET

ARALIK DEĞERLİ NEUTROSOPHIC KÜME

MENEKŞE, MERVE

Yüksek Lisans, Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Memet ŞAHİN

Ağustos 2017

48 sayfa

Bu tezde, aralık değerli neutrosophic küme ile ilgili bilgilere yer verilmiştir. Aralık değerli neutrosophic kümenin (ζ,η,θ) - kesim kümesi ve (ζ,η,θ)- güçlü kesim kümeleri tanımlanmıştır. Bu kavramlar, aralık değerli neutrosophic küme teorisinde önemli rol oynayan kavramlardır. Ayrıca, aralık değerli neutrosophic kümelerin seviye kümelerinin temsil ve genişleme ilkeleri tanımlanmış ve bu kavramlarla ilgili teoremler ispatlanmıştır. Bunların yanı sıra, iki tane aralık değerli neutrosophic kümenin ayrıştırıcı toplamları, farkları ve kartezyen çarpımları tanımlanarak temel özellikleri hakkında bilgiler verilmiştir. Son olarak, toplama, çıkarma, çarpma ve bölme gibi cebirsel işlemler aralık değerli neutrosophic kümeler üzerinde yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Neutrosophic Küme, Aralık Değerli Neutrosophic Küme, Aralık Değerli Neutrosophic Kümenin (ζ,η,θ)- Kesim Kümeleri.

Annem'e…

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim süresince kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösteren, desteğini esirgemeyerek en iyi şekilde rehberlik yapan ve tezimde büyük emeği olan Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden hocam, tez danışmanım Doç. Dr. Memet ŞAHİN' e sonsuz şükranlarımı ve saygılarımı sunarım.

Tez çalışmam sırasında ayırdığı değerli zaman ve sağladığı destek için araştırmalarıma büyük katkıda bulunan sayın hocam Dr. Vakkas ULUÇAY' a sonsuz minnet ve saygılarımı sunarım.

Yüksek lisansa başlamamı ve bu tezi yazmamı sağlayan, maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen ve hayatım boyunca görebileceğim en güçlü kadın, annem Elif MENEKŞE' ye, canım ablalarım Buket MENEKŞE ve Dilek MENEKŞE' ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

NS	: Neutrosophic küme
IVNS	: Aralık değerli neutrosophic küme
$D_A(t)$	: Doğruluk üyelik fonksiyonu
$K_A(t)$	: Belirsizlik üyelik fonksiyonu
$Y_A(t)$	: Yanlışlık üyelik fonksiyonu
inf	: En düşük değer
sup	: En büyük değer
A^C	: A'nın tümleyeni
$A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}$	: A'nın (ζ,η,θ)-kesim kümesi
$\wedge$	: Mantıksal ve
$\vee$	: Mantıksal veya
$\oplus$	: Neutrosophic ayrıştırıcı toplama
$\ominus$	: Neutrosophic fark
$*$	: İkili işlem
A^m	: A'nın m kartezyen çarpımı

1.BÖLÜM

GİRİŞ

Günlük hayatta birçok problemde çözümlenmesi gereken belirsiz durumlar ortaya çıkabilir. Olasılık teorisi, bulanık kümeler teorisi, sezgisel bulanık küme teorisi ve benzeri teoriler bu belirsiz durumlarla baş edebilmek için geliştirilmiştir. Bu teorilerin sonucu olarak birçok yeni teknikler geliştirilmesine rağmen, hala birtakım zorluklar mevcut durumdadır. Özellikle, parametrelerin yetersizliği yüzünden başlıca zorluklar artmaktadır. 1999 yılında, Smarandache [6] klasik küme, bulanık küme [20], sezgisel bulanık küme [7] ve benzeri kümelerin genelleştirilmiş hali olan bağımsız belirsizlik–üyelik fonksiyonunu ekleyerek neutrosophic küme (kısaca NS) kavramını geliştirmiştir. Doğruluk-üyelik, belirsizlik-üyelik ve yanlışlık-üyelik bilim ve mühendisliğin bakış açısından bağımsız olarak ele alınmıştır. Ancak, NS operatörlerinin belirlenmesi gerektiğinin farkına varılmıştır. Bu yüzden, Wang [2] tek değerli neutrosophic küme (SVNS) tanımlamış ve sonra küme işlemlerini ve tek değerli neutrosophic kümenin çeşitli özelliklerini sağlamıştır. Wang [8], NS' den daha esnek ve pratik olan ve neutrosophic küme örneği üzerinde küme teorik işlemlerini geliştirerek aralık değerli neutrosophic kümeyi tanımlamıştır. Tek değerli neutrosophic küme (SVNS) ve aralık değerli neutrosophic küme (IVNS) üzerindeki çalışmalar, teoriler ve uygulamalar içinde bu kümelerin karma yapısı git gide gelişim göstermeye devam etmektedir. [9-13] Ayrıca, neutrosophic kümeler teorisinde ve uygulamalarında bazı yöntemler [16-19] kullanılarak neutrosophic modeller geliştirilmiştir [14,15].

Bu tezde ilk olarak, neutrosophic küme ve aralık değerli neutrosophic küme tanımlanmış, aralık değerli neutrosophic küme ile ilgili bazı temel bilgilere yer verilmiştir. Sonra, aralık değerli neutrosophic kümelerin (ζ, η, θ)- kesim kümesi ve (ζ, η, θ) - güçlü kesim kümeleri tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Konunun daha iyi kavranması için gerekli sayısal örnekler verilmiştir. Bunlara ek olarak, aralık değerli neutrosophic kümelerin seviye kümelerinin temsili ve genişleme ilkeleri tanımlanmıştır ve bu kavramlarla ilgili teoremler ispatlanmıştır. Daha sonra, aralık değerli neutrosophic kümeler üzerinde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme gibi cebirsel işlemler yapılmıştır. Ayrıca, bir nümerik örnekle işlemlerin pekiştirilmesi sağlanmıştır. Tezin son bölümü olan beşinci bölümde, bu tezde elde edilen sonuçlara ayrılmıştır.

2. BÖLÜM

ARALIK DEĞERLİ NEUTROSOPHIC KÜME

Bu bölümde, aralık değerli neutrosophic kümelerle ilgili gerekli temel bilgiler, kavramlar ve sonuçlar verilmiştir.

Tanım 2.1:

[1] T evrensel bir küme ve $\forall t \in T$ olsun. T evrensel kümesinde A kümesi için,

$D_A(t)$: Doğruluk üyelik fonksiyonu,

$K_A(t)$: Belirsizlik üyelik fonksiyonu,

$Y_A(t)$: Yanlışlık üyelik fonksiyonu

olsun. $D_A(t)$, $K_A(t)$ ve $Y_A(t)$ fonksiyonları $]\,0^-, 1^+[$ aralığının gerçel standart ya da standart olmayan alt kümeleridir.

$$D_A(t) = T \rightarrow]\,0^-, 1^+[,$$

$$K_A(t) = T \rightarrow]\,0^-, 1^+[,$$

$$Y_A(t) = T \rightarrow]\,0^-, 1^+[.$$

$D_A(t)$, $K_A(t)$ ve $Y_A(t)$ fonksiyonlarının toplamı için bir sınırlama yoktur ve

$$0^- \leq\ sup\ D_A(t) + sup\ K_A(t) +\ supY_A(t) \leq\ 3^+$$

durumu geçerlidir.

Evrensel T kümesi üzerinde A neutrosophic kümesi (Neutrosophic Set = NS),

$$A\ =\ \{\langle t{:}\, D_A(t), K_A(t), Y_A(t)\rangle, t\ \in\ T\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Tanım 2.2 :

[1] $\forall t \in T$ için, evrensel T kümesi üzerinde,

$$A = \{\langle t: D_A(t), K_A(t), Y_A(t)\rangle, t \in T\}$$

ve

$$B = \{\langle t: D_B(t), K_B(t), Y_B(t)\rangle, t \in T\}$$

iki neutrosophic küme olsun. Bu neutrosophic kümeler üzerine aşağıdaki işlemler tanımlanmıştır:

(1) $A \subseteq B \Leftrightarrow D_A(t) \leq D_B(t), K_A(t) \geq K_B(t), Y_A(t) \geq Y_B(t)$

(2) $A = B \Leftrightarrow D_A(t) = D_B(t), K_A(t) = K_B(t), Y_A(t) = Y_B(t)$.

Tanım 2.3:

[2] T evrensel bir küme ve $\forall t \in T$ olsun. T evrensel kümesinde aralık değerli neutrosophic A kümesi (Interval Valued Neutrosophic Set = IVNS) için,

$D_A(t)$: Doğruluk üyelik fonksiyonu,

$K_A(t)$: Belirsizlik üyelik fonksiyonu,

$Y_A(t)$: Yanlışlık üyelik fonksiyonu

olmak üzere $D_A(t), K_A(t), Y_A(t) \subseteq [0,1]$

koşulu geçerlidir.

$\forall t \in T$ için, aralık değerli neutrosophic A_{IVNS} kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$A_{\mathrm{IVNS}} =$
$\{\langle t, [inf\ D_A(t), sup\ D_A(t)], [inf\ K_A(t), sup\ K_A(t)], [inf\ Y_A(t), sup\ Y_A(t)]\rangle : t \in T\}$.

Tanım 2.4 :

[2] $\forall t \in T$ için, evrensel T kümesi üzerinde

$A_{\mathrm{IVNS}} = \{\langle t, [inf\ D_A(t)\,, sup\ D_A(t)], [inf\ K_A(t)\,, sup\ K_A(t)], [inf\ Y_A(t)\,, sup\ Y_A(t)]\rangle : t \in T\}$

ve

$B_{\mathrm{IVNS}} = \{\langle t, [inf\ D_B(t)\,, sup\ D_B(t)], [inf\ K_B(t)\,, sup\ K_B(t)], [inf\ Y_B(t)\,, sup\ Y_B(t)]\rangle : t \in T\}$

aralık değerli neutrosophic kümeler olsun.

Daha sonra bu aralık değerli neutrosophic kümeler üzerine işlemler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

1. B_{IVNS} kümesinin A_{IVNS} kümesini kapsaması $A_{\mathrm{IVNS}} \subseteq B_{\mathrm{IVNS}}$ ile gösterilir ve $\forall t \in T$ için $A_{\mathrm{IVNS}} \subseteq B_{\mathrm{IVNS}}$ ise,

$$inf\ D_A(t) \leq inf\ D_B(t)\,, sup\ D_A(t) \leq sup\ D_B(t),$$

$$inf\ K_A(t) \geq inf\ K_B(t)\,, sup\ K_A(t) \geq sup\ K_B(t),$$

$$inf\ Y_A(t) \geq inf\ Y_B(t), sup\ Y_A(t) \geq sup\ Y_B(t)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

2. A_{IVNS} ve $B_{\mathrm{IVNS}}{}'$nin eşitliği $A_{\mathrm{IVNS}} = B_{\mathrm{IVNS}}$ ile gösterilir ve

$\forall t \in T$ için $A_{\mathrm{IVNS}} = B_{\mathrm{IVNS}}$ ise, $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ yani,

$$inf\ D_A(t) = inf\ D_B(t)\,, sup\ D_A(t) = sup\ D_B(t),$$

$$inf\ K_A(t) = inf\ K_B(t)\,, sup\ K_A(t) = sup\ K_B(t),$$

$$inf\ Y_A(t) = inf\ Y_B(t)\,, sup\ Y_A(t) = sup\ Y_B(t)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

3. Boş bir A_{IVNS} kümesi,

$$\forall t \in T \text{ için, } inf\ D_A(t) = sup\ D_A(t) = 0,$$

$$inf\ K_A(t) = supK_A(t) = 1$$

$$inf\, Y_A(t) = sup\, Y_A(t) = 0$$

şeklinde tanımlanmıştır.

4. A_{IVNS} kümesinin tümleyeni $A_{IVNS}{}^C$ ile gösterilir ve $\forall t \in T$ için

$A_{IVNS}{}^C = \{t, [inf\, Y_A(t), sup\, Y_A(t)], [1 - sup\, K_A(t), 1 - inf\, K_A(t)], [inf\, D_A(t), sup\, D_A(t)]: t \in T\}$

şeklinde tanımlanmıştır.

5. A_{IVNS} ve B_{IVNS}' nin kesişimi $A_{IVNS} \cap B_{IVNS}$ ile gösterilir ve

$\forall t \in T$ için $A_{IVNS} \cap B_{IVNS} = \{\langle t, [inf\, D_A(t) \wedge inf\, D_B(t), sup\, D_A(t) \wedge sup\, D_B(t)],$

$[inf\, K_A(t) \vee inf\, K_B(t), sup\, K_A(t) \vee sup\, K_B(t)],$

$[inf\, Y_A(t) \vee inf\, Y_B(t), sup\, Y_A(t) \vee sup\, Y_B(t)]\rangle: t \in T\}$

şeklinde tanımlanmıştır.

6. A_{IVNS} ve B_{IVNS}' nin birleşimi $A_{IVNS} \cup B_{IVNS}$ ile gösterilir ve

$\forall t \in T$ için $A_{IVNS} \cup B_{IVNS} = \{\langle t, [inf\, D_A(t) \vee inf\, D_B(t), sup\, D_A(t) \vee sup\, D_B(t)],$

$[inf\, K_A(t) \wedge inf\, K_B(t), sup\, K_A(t) \wedge sup\, K_B(t)],$

$[inf\, Y_A(t) \wedge inf\, Y_B(t), sup\, Y_A(t) \wedge sup\, Y_B(t)]\rangle: t \in T\}$

şeklinde tanımlanmıştır.

7. A_{IVNS} ve B_{IVNS}' nin toplamı $A_{IVNS} + B_{IVNS}$ ile gösterilir ve $\forall t \in T$ için

$$A_{IVNS} + B_{IVNS} = \{\langle t, [min(inf\, D_A(t) + inf\, D_B(t), 1), min(sup\, D_A(t) + sup\, D_B(t), 1)],$$

$$[min(inf\, K_A(t) + inf\, K_B(t), 1), min(sup\, K_A(t) + sup\, K_B(t), 1)],$$

$$[min(inf\, Y_A(t) + inf\, Y_B(t), 1), min(sup\, Y_A(t) + sup\, Y_B(t), 1)]\rangle: t \in T\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

8. A_{IVNS} ve B_{IVNS}' nin farkı $A_{IVNS} \setminus B_{IVNS}$ ile gösterilir ve $\forall t \in T$ için

$A_{IVNS} \setminus B_{IVNS} = \{\langle t, [min(inf\, D_A(t), inf\, Y_B(t)), min(sup\, D_A(t), sup\, Y_B(t))],$

$[max(inf K_A(t), 1 - sup K_B(t)), max(sup K_A(t), 1 - inf K_B(t))],$

$[max(inf Y_A(t), inf\ D_B(t)), max(sup\ Y_A(t), sup\ D_B(t))]: t \in T\}$

şeklinde tanımlanmıştır.

9. A_{IVNS} ile a gibi bir skalerin çarpımı $A_{IVNS}.a$ ile gösterilir ve

$\forall t \in T$ ve $a \in R^+$ için,

$$A_{IVNS}.a = \{\langle t, [min(inf\ D_A(t).a, 1), min(sup\ D_A(t).a, 1)],$$

$$[min(inf\ K_A(t).a, 1), min(sup\ K_A(t).a, 1)],$$

$$[min(inf\ Y_A(t).a, 1), min(sup\ Y_A(t).a, 1)]\rangle: t \in T\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

10. A_{IVNS}' nin a gibi skalere bölümü A_{IVNS}/a ile gösterilir ve

$\forall t \in T$ ve $a \in R^+$ için,

$$A_{IVNS}/a = \{\langle t, [min(inf\ D_A(t)/a, 1), min(sup\ D_A(t)/a, 1)],$$

$$[min(inf\ K_A(t)/a, 1), min(sup\ K_A(t)/a, 1)],$$

$$[min(inf\ Y_A(t)/a, 1), min(sup\ Y_A(t).a, 1)]\rangle: t \in T\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

3. BÖLÜM

ARALIK DEĞERLİ NEUTROSOPHIC KÜMENİN KESİM KÜMESİ

Bu bölümde aralık değerli neutrosophic bir kümenin *(ζ, η, θ)*- kesim kümesi ve *(ζ, η, θ)*- güçlü kesim kümesi tanımlanmıştır. Ayrıca, aralık değerli neutrosophic kümelerin seviye kümelerinin temsili ve genişleme ilkeleri verilmiştir.

3.1. Aralık Değerli Neutrosophic Bir Kümenin *(ζ, η, θ)* Kesim Kümesi:

Tanım 3.1.1:

$$A = \{\langle t, [inf\ D_A(t), sup\ D_A(t)], [inf\ K_A(t), sup\ K_A(t)], [inf\ Y_A(t), sup\ Y_A(t)]\rangle : t \in T\},$$

$\forall t \in T$ için, evrensel T kümesi üzerinde aralık değerli neutrosophic bir küme olsun. Herhangi

$[\zeta, \eta, \theta] \in [0,1]$ öyle ki,

$$\zeta = [\zeta_1, \zeta_2], \eta = [\eta_1, \eta_2] \text{ ve } \theta = [\theta_1, \theta_2] \in [0,1]$$

sıralı ikilileri için,

$$0 \leq \zeta + \eta + \theta \leq 3$$

durumu geçerlidir.

Aralık değerli neutrosophic A kümesinin (ζ, η, θ)-kesim kümesi $A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}$ ile gösterilir ve $\forall t \in T$ için,

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])} = \{t: inf\ D_A(t) \geq \zeta_1, sup\ D_A(t) \geq \zeta_2,$$

$$inf\ K_A(t) \leq \eta_1, sup\ K_A(t) \leq \eta_2,$$

$$inf\ Y_A(t) \leq \theta_1, sup\ Y_A(t) \leq \theta_2; t \in T\}$$

şeklinde tanımlanır.

O zaman, $\forall t \in T$ için,

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])} = \{\langle t\colon\ inf\, D_A(t) \wedge \zeta_1 = \zeta_1, sup\, D_A(t) \wedge \zeta_2 = \zeta_2,$$

$$inf\, K_A(t) \vee \eta_1 = \eta_1,\ sup\, K_A(t) \vee \eta_2 = \eta_2,$$

$$inf\, Y_A(t) \vee \theta_1 = \theta_1, sup\, Y_A(t) \vee \theta_2 = \theta_2\rangle; t \in T\}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 3.1.2:

$$A = \{\langle t, [inf\, D_A(t)\,, sup\, D_A(t)], [inf\, K_A(t)\,, sup\, K_A(t)], [inf\, Y_A(t)\,, sup\, Y_A(t)]\rangle : t \in T\},$$

$\forall t \in T$ için, evrensel T kümesi üzerinde aralık değerli neutrosophic bir küme olsun. Herhangi

$[\zeta, \eta, \theta] \in [0,1]$ öyle ki,

$$\zeta = [\zeta_1, \zeta_2], \eta = [\eta_1, \eta_2] \text{ ve } \theta = [\theta_1, \theta_2] \in [0,1]$$

sıralı ikilileri için,

$$0 \leq \zeta + \eta + \theta \leq 3$$

durumu geçerlidir.

1. $\forall t \in T$ için, A' nın doğruluk üyelik fonksiyonun ζ - kesimi,

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2])} = \{t\colon inf\, D(t) \geq \zeta_1, sup\, D_A(t) \geq \zeta_2; t \in T\},$$

2. $\forall t \in T$için, A' nın belirsizlik üyelik fonksiyonun η - kesimi,

$$A_{([\eta_1,\eta_2])} = \{t\colon\ inf\, K_A(t) \leq \eta_1,\ sup\, K_A(t) \leq\ \eta_2\ ; t \in T\},$$

3. $\forall t \in T$için, A' nın yanlışlık üyelik fonksiyonun θ - kesimi,

$$A_{([\theta_1,\theta_2])} = \{t\colon\ inf\, Y_A(t) \leq \theta_1, sup\, Y_A(t) \leq \theta_2; t \in T\},$$

olarak tanımlanır.

Örnek 3.1.3:

$T\ = \{t_1, t_2, t_3\}$ olsun ve T üzerindeki

$$A = \{t_1: ([0.5, 0.6];\ [0.3, 0.4];\ [0.2,0.3]);$$
$$t_2 :\ ([0.5, 0.8];\ [0.4, 0.6];\ [\ 0.4, 0.5]);$$
$$t_3: ([0.1, 0.2];\ [0.4, 0.5];\ [0.7, 0.8])\}$$

aralık değerli neutrosophic kümeyi ele alalım.

$$\zeta_1 = 0.3; \eta_1 = 0.4; \theta_1 = 0.5 \in [0,1]$$
$$\zeta_2 = 0.5; \eta_2 = 0.6; \theta_2 = 0.7 \in [0,1]$$

olsun. O zaman,

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])} = \{t_1, t_2\}$$

olur ve t_3 bu kesim kümesinin elemanı değildir. Öyleyse,

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2])} = \{t_1, t_2\},$$

$$A_{([\eta_1,\eta_2])} = \{t_1, t_2, t_3\},$$

$$A_{([\theta_1,\theta_2])} = \{t_1, t_2\}.$$

Tanım 3.1.4:

A_{IVNS}, $\forall t \in T$ için, evrensel T kümesi üzerinde bir aralık değerli neutrosophic kümesi olsun. Herhangi $[\zeta, \eta, \theta] \in [0,1]$ öyle ki,

$$\zeta = [\zeta_1, \zeta_2], \eta = [\eta_1, \eta_2] \text{ ve } \theta = [\theta_1, \theta_2] \in [0,1]$$

sıralı ikilileri için,

$$0 \leq \zeta + \eta + \theta \leq 3$$

durumu geçerlidir.

A_{IVNS} kümesinin (ζ, η, θ)-güçlü kesim kümesi $A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])+}$ ile gösterilir ve $\forall t \in T$ için,

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])+} = \{\langle t\!: inf\, D_A(t) > \zeta_1 = \zeta_1, sup\, D_A(t) > \zeta_2 = \zeta_2,$$

$$inf\, K_A(t) < \eta_1 = \eta_1, sup\, K_A(t) < \eta_2 = \eta_2$$

$$inf\, Y_A(t) < \theta_1 = \theta_1, sup\, Y_A(t) < \theta_2 = \theta_2\rangle; t \in T\}$$

şeklinde tanımlanır. O halde,

1. $\forall t \in T$ için, A' nın doğruluk üyelik fonksiyonun güçlü ζ - kesimi,

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2])+} = \{t: inf\, D_A(t) > \zeta_1, sup\, D_A(t) > \zeta_2; t \in T\},$$

2. $\forall t \in T$ için, A' nın belirsizlik üyelik fonksiyonun güçlü η - kesimi,

$$A_{([\eta_1,\eta_2])+} = \{t:\ inf\, K_A(t) < \eta_1,\ sup\, K_A(t) <\ \eta_2\ ; t \in T\},$$

3. $\forall t \in T$ için, A' nın yanlışlık üyelik fonksiyonun güçlü θ - kesimi,

$$A_{([\theta_1,\theta_2])+} = \{x:\ inf\, Y_A(t) < \theta_1, sup\, Y_A(t) < \theta_2; t \in T\},$$

olarak tanımlanır.

Örnek 3.1.5:

$T\ =\ \{t_1, t_2, t_3\}$ olsun.

$$\begin{aligned} A = \{&t_1: ([0.1, 0.2];\ [0.3, 0.4];\ [0.5,0.6]); \\ &t_2: ([0.2, 0.4];\ [0.4, 0.6];\ [\ 0.5, 0.7]); \\ &t_3: ([0.3, 0.5];\ [0.2, 0.4];\ [0.3, 0.5])\} \end{aligned}$$

aralık değerli neutrosophic kümeyi ele alalım.

$$\zeta_1 = 0.2,\ \eta_1 = 0.4,\ \theta_1\ = 0.6 \in [0,1]$$

$$\zeta_2 =\ 0.3,\ \eta_2 = 0.5,\ \theta_2 =\ 0.7\ \in\ [0,1]$$

olsun. O zaman , A' nın güçlü kesim kümeleri,

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])+} = \{t_3\}$$

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2])+} = \{t_3\},$$

$$A_{([\eta_1,\eta_2])+} = \{t_1, t_3\},$$

$$A_{([\theta_1,\theta_2])+} = \{t_1, t_3\}$$

olur.

Tanım 3.1.6:

A, $\forall t \in T$ için, evrensel T kümesi üzerinde bir aralık değerli neutrosophic kümesi olsun. Herhangi $[\zeta, \eta, \theta] \in [0,1]$ öyle ki,

$$\zeta = [\zeta_1, \zeta_2], \eta = [\eta_1, \eta_2] \text{ ve } \theta = [\theta_1, \theta_2] \in [0,1]$$

sıralı ikilileri için,

$$0 \leq \zeta + \eta + \theta \leq 3$$

durumu geçerlidir.

A' nın diğer kesim kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

1. $\forall t \in T$ için, A' nın $(\zeta+, \eta, \theta)$ kesim kümesi

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2]+,[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])} = \{t: inf\ D_A(t) > \zeta_1, sup\ D_A(t) > \zeta_2$$
$$inf\ K_A(t) \leq \eta_1, sup\ K_A(t) \leq \eta_2,$$
$$inf\ Y_A(t) \leq \theta_1, sup\ Y_A(t) \leq \theta_2; t \in T\},$$

2. $\forall t \in T$ için, A' nın $(\zeta, \eta+, \theta)$ kesim kümesi

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2]+,[\theta_1,\theta_2])} = \{t: inf\ D_A(t) \geq \zeta_1, sup\ D_A(t) \geq \zeta_2,$$
$$inf\ K_A(t) < \eta_1, sup\ K_A(t) < \eta_2,$$
$$inf\ Y_A(t) \leq \theta_1, sup\ Y_A(t) \leq \theta_2; t \in T\},$$

3. $\forall t \in T$ için, A' nın $(\zeta, \eta, \theta+)$ kesim kümesi

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2]+,[\theta_1,\theta_2])} = \{t: inf\ D_A(t) \geq \zeta_1, sup\ D_A(t) \geq \zeta_2,$$
$$inf\ K_A(t) \leq \eta_1, sup\ K_A(t) \leq \eta_2,$$
$$inf\ Y_A(t) \leq \theta_1, sup\ Y_A(t) \leq \theta_2; t \in T\}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 3.1.7:

Herhangi $[\zeta, \eta, \theta] \in [0,1]$ öyle ki,

$$\zeta = [\zeta_1, \zeta_2], \eta = [\eta_1, \eta_2] \text{ ve } \theta = [\theta_1, \theta_2] \in [0,1]$$

ve

$$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2], \mu = [\mu_1, \mu_2] \text{ ve } \delta = [\delta_1, \delta_2] \in [0,1]$$

sıralı ikilileri için,

$$0 \leq \zeta + \eta + \theta \leq 3 \text{ ve } 0 \leq \lambda + \mu + \delta \leq 3$$

durumu geçerlidir. Evrensel T kümesi üzerinde bir A kümesinin kesim kümeleri için aşağıdaki koşullar sağlanır:

(1) $A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])} = A_{(\zeta_1,\zeta_2)} \cap A_{([\eta_1,\eta_2])} \cap A_{([\theta_1,\theta_2])}$.

(2) Eğer $[\zeta_1, \zeta_2] = [\theta_1, \theta_2]$ ise,

$$A^C{}_{([\zeta_1,\zeta_2])} = A^C{}_{([\theta_1,\theta_2]+)},$$

$$A^C{}_{([\eta_1,\eta_2])} = 1 - A^C{}_{([\eta_1,\eta_2]+)},$$

$$A^C{}_{([\theta_1,\theta_2]+)} = A^C{}_{([\zeta_1,\zeta_2])}.$$

(3) $A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])+} \subseteq A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}$.

(4) $\zeta_1 \geq \lambda_1$ ve $\zeta_2 \geq \lambda_2$,

$\eta_1 \leq \mu_1$ ve $\eta_2 \leq \mu_2$,

$\theta_1 \leq \delta_1$ ve $\theta_2 \leq \delta_2$ için,

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2])} \subseteq A_{([\lambda_1,\lambda_2])},$$

$$A_{([\eta_1,\eta_2])} \subseteq A_{([\mu_1,\mu_2])},$$

$$A_{([\theta_1,\theta_2])} \subseteq A_{([\delta_1,\delta_2])}$$

ve

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])} \subseteq A_{([\lambda_1,\lambda_2],[\mu_1,\mu_2],[\delta_1,\delta_2])}$$

İspat . T üzerindeki A kümesi ve $\forall t \in T$ için, herhangi $[\zeta, \eta, \theta] \in [0,1]$ ve $[\lambda, \mu, \delta] \in [0,1]$ öyle ki,

$$\zeta = [\zeta_1, \zeta_2], \eta = [\eta_1, \eta_2] \text{ ve } \theta = [\theta_1, \theta_2] \in [0,1]$$

ve

$$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2], \mu = [\mu_1, \mu_2] \text{ ve } \delta = [\delta_1, \delta_2] \in [0,1]$$

sıralı ikilileri için,

$$0 \leq \zeta + \eta + \theta \leq 3 \text{ ve } 0 \leq \lambda + \mu + \delta \leq 3$$

durumu geçerlidir.

(1) Tanım 3.1. den açıkça görülür.

(2) A' nın tümleyeni $\forall t \in T$ için,

$$A^C = \{t, [inf\, Y_A(t), sup\, Y_A(t)], [1 - sup\, K_A(t), 1 - inf\, K_A(t)], [inf\, D_A(t), sup\, D_A(t)]: t \in T\}$$

şeklinde tanımlanmıştı. O zaman,

$$A^C{}_{([\zeta_1, \zeta_2])} = \{\langle t\colon inf\, Y_A(t) \geq \zeta_1, sup\, Y_A(t) \geq \zeta_2 \rangle; t \in T\}$$

olur.

Tanım 3.1.4.'e göre,

$$A_{([\theta_1, \theta_2])+} = \{\langle t\colon inf\, Y_A(t) < \theta_1, sup\, Y_A(t) < \theta_2 \rangle; t \in T\}$$

$$A^C{}_{([\theta_1, \theta_2]+)} = \{\langle t\colon inf\, Y_A(t) \geq \theta_1, sup\, Y_A(t) \geq \theta_2 \rangle; t \in T\}$$

olur. Öyleyse,

$$A^C{}_{([\zeta_1, \zeta_2])} = A^C{}_{([\theta_1, \theta_2]+)}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde, $\forall t \in T$ için,

$$A^C{}_{([\eta_1, \eta_2])} = \{\langle t\colon 1 - inf\, K_A(t) \leq \eta_1, 1 - sup\, K_A(t) \leq \eta_2 \rangle; t \in T\},$$

$$1 - A_{([\eta_1, \eta_2]+)} = \{\langle t\colon 1 - inf\, K_A(t) < \eta_1, 1 - sup\, K_A(t) < \eta_2 \rangle; t \in T\},$$

$$1 - A^C{}_{([\eta_1,\eta_2]+)} = \{\langle t\colon\ 1 - inf\ K_A(t) \leq \eta_1, 1 - sup\ K_A(t) \leq \eta_2\rangle; t \in T\}$$

eşitlikleri elde edilir. O halde,

$$A^C{}_{([\eta_1,\eta_2])} = 1 - A^C{}_{([\eta_1,\eta_2]+)}.$$

Ayrıca, $\forall t \in T$ ve $[\zeta_1, \zeta_2] = [\theta_1, \theta_2]$ için,

$$A^C{}_{([\theta_1,\theta_2]+)} = \{\langle t\colon\ inf\ D_A(t) > \zeta_1, sup\ D_A(t) > \zeta_2\rangle; t \in T\},$$

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2])} = \{\langle t\colon inf\ D_A(t) \leq \zeta_1, sup\ D_A(t) \leq \zeta_2\rangle; t \in T\},$$

$$A^C{}_{([\zeta_1,\zeta_2])} = \{\langle t\colon\ inf\ D_A(t) > \zeta_1, sup\ D_A(t) > \zeta_2\rangle; t \in T\}$$

olur. O zaman,

$$A^C{}_{([\theta_1,\theta_2]+)} = A^C{}_{([\zeta_1,\zeta_2])}$$

eşitliği elde edilir.

(3) $\forall t \in T$ için,

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])+} =$$
$$\{\langle t\colon\ inf\ D_A(t) > \zeta_1, sup\ D_A(t) > \zeta_2, inf\ K_A(t) < \eta_1, sup\ K_A(t) < \eta_2,$$
$$inf\ Y_A(t) < \theta_1, sup\ Y_A(t) < \theta_2; t \in T\}$$
$$\subseteq \{t\colon inf\ D_A(t) \geq \zeta_1, sup\ D_A(t) \geq \zeta_2, inf\ K_A(t) \leq \eta_1, sup\ K_A(t) \leq \eta_2,$$
$$inf\ Y_A(t) \leq \theta_1, sup\ Y_A(t) \leq \theta_2; t \in T\}$$
$$= A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}$$

Öyleyse,

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])+} \subseteq A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}$$

olur.

(4) Tanım 3.1 den, $\forall t \in T$ için,

$$\zeta_1 \geq \lambda_1 \text{ ve } \zeta_2 \geq \lambda_2$$

$$\inf D_A(t) \geq \zeta_1 \geq \lambda_1,$$

$$\sup D_A(t) \geq \zeta_2 \geq \lambda_2$$

eşitsizlikleri

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2])} \subseteq A_{([\lambda_1,\lambda_2])}$$

olduğunu gösterir.

$\forall t \in T$ için,

$$\eta_1 \leq \mu_1 \text{ ve } \eta_2 \leq \mu_2,$$

$$\inf K_A(t) \leq \eta_1 \leq \mu_1,$$

$$\sup K_A(t) \leq \eta_2 \leq \mu_2$$

eşitsizliklerinden de

$$A_{([\eta_1,\eta_2])} \subseteq A_{([\mu_1,\mu_2])}$$

elde edilir. Aynı şekilde,

$$\theta_1 \leq \delta_1 \text{ ve } \theta_2 \leq \delta_2$$

için,

$$A_{([\theta_1,\theta_2])} \subseteq A_{([\delta_1,\delta_2])}$$

olur. O zaman,

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])} \subseteq A_{([\lambda_1,\lambda_2],[\mu_1,\mu_2],[\delta_1,\delta_2])}.$$

Örnek 3.1.8:

Örnek 3.1.2 yi tekrar inceleyelim.

$T = \{t_1, t_2, t_3\}$ ve

$$A = \{t_1: ([0.5,0.6], [0.3,0.4], [0.2,0.3]), t_2: ([0.5,0.8], [0.4,0.6], [0.4,0.5])$$
$$t_3: ([0.1,0.2], [0.4,0.5], [0.7,0.8])\}$$

aralık değerli neutrosophic küme ve

$$\zeta_1 = 0.3;\ \eta_1 = 0.4;\ \theta_1 = 0.5 \in [0,1]$$
$$\zeta_2 = 0.5;\ \eta_2 = 0.6;\ \theta_2 = 0.7 \in [0,1]$$

olsun. Öyleyse,

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])} = \{ t_1, t_2\},$$

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2])} = \{ t_1, t_2\},$$

$$A_{([\eta_1,\eta_2])} = \{ t_1, t_2, t_3\},$$

$$A_{([\theta_1,\theta_2])} = \{ t_1, t_2\}$$

olur. Bu eşitliklerden,

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])} = \{ t_1, t_2\}$$

kümesinin aslında

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2])},\ A_{([\eta_1,\eta_2])} \text{ ve } A_{([\theta_1,\theta_2])}$$

kümelerinin kesişimi olduğu açıkça görülür. O zaman,

$A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])} = A_{([\zeta_1,\zeta_2])} \cap A_{([\eta_1,\eta_2])} \cap A_{(\theta_1,\theta_2)}$.

3.2 Aralık Değerli Neutrosophic Kümelerin Seviye Kümelerinin Temsili

T evrensel bir küme ve $\forall t \in T$ olsun. T evrensel kümesindeki A için,

$D_A(t)$: Doğruluk üyelik fonksiyonu,

$K_A(t)$: Belirsizlik üyelik fonksiyonu,

$Y_A(t)$: Yanlışlık üyelik fonksiyonu,

$D_A(t), K(t), Y_A(t) \subseteq [0,1]$ geçerlidir. $\forall t \in T$ için, A kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$A = \{t, [inf\ D_A(t), sup\ D_A(t)], [inf\ K_A(t), sup\ K_A(t)], [inf\ Y_A(t), sup\ Y_A(t)]: t \in T\}.$$

A' nın elemanlarının doğruluk üyelik, belirsizlik üyelik ve yanlışlık üyelik derecelerinin n farklı üçlüsü olduğunu kabul edilsin. Bu üçlülerin hepsinin kümesi M ile gösterilsin. O zaman,

$$M = \{\langle [infD_i, supD_i], [infK_i, supK_i], [infY_i, supY_i]\rangle, i = 1,2, \dots, n\}$$

S , M'nin herhangi bir altkümesi olsun. Öyleyse, S için minimum doğruluk üyelik, maksimum belirsizlik üyelik ve maksimum yanlışlık üyelik derecelerinin üçlüsü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$\{[infD_S, supD_S], [infK_S, supK_S], [infY_S, supY_S]\} =$

$\{\wedge \{infD_i, supD_i\}, \vee \{infK_i, supK_i\}, \vee \{infY_i, supY_i\}, i: \langle D_i(t), K_i(t), Y_i(t)\rangle \in S\}$(1)

yukarıdaki denklemde

$\{[infD_S, supD_S], [infK_S, supK_S], [infY_S, supY_S]\}$

doğruluk üyelik, belirsizlik üyelik ve yanlışlık üyelik derecelerini göstermektedir. Aslında genelliği bozmadan,

$$[infD_S, supD_S] = \wedge [infD_i, supD_i] = [infD_i', supD'_i], \qquad (2)$$

$$[infK_S, supK_S] = \vee [infK_i, supK_i] = [infK_i'', supK_i''], \qquad (3)$$

$$[infY_S, supY_S] = \vee [infY_i, supY_i] = [infY_i'', supY_i''] \qquad (4)$$

olur

Öyleyse, $(1) - (4)$ eşitliklerinden direkt olarak aşağıdakiler elde edilir:

$$0 \le [infD_S, supD_S] = [infD_i', supD'_i] \le [infD_i'', supD''_i] \le 1$$

$$0 \le [infK_S, supK_S] = [infK_i'' upK_i''] \le 1$$

ve

$$0 \le [infY_S, supY_S] = [infY_i'', supY_i''] \le 1.$$

O zaman,

$$0 \le [infD_S, supD_S] + [infK_S, supK_S] + [infY_S, supY_S]$$

$$=[infD_i', supD'_i] + [infK_i''upK_i''] + [infY_i'',supY_i'']$$

$$\leq [infD_i'', supD''_i] + [infK_i'', supK_i''] + [infY_i'', supY_i''] \leq 1$$

olur.

M'nin bütün S altkümeleri için, minimum doğruluk üyelik, maksimum belirsizlik üyelik ve maksimum yanlışlık üyelik derecelerinin bütün üçlülerinin kümesi D aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$D = \{[infD_S, supD_S], [infK_S, supK_S], [infY_S, supY_S], S \subseteq M\} \tag{5}$$

Tanım 3.2.1:

Herhangi $[\zeta, \eta, \theta] \in [0,1]$ öyle ki,

$$\zeta = [\zeta_1, \zeta_2], \eta = [\eta_1, \eta_2] \text{ ve } \theta = [\theta_1, \theta_2] \in [0,1]$$

sıralı ikilileri için,

$$0 \leq \zeta + \eta + \theta \leq 3 \text{ ve } < \zeta, \eta, \theta > \in D,$$

durumu geçerlidir. $\forall t \in T$ için,

$$A_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]} = \{t \in T: infD_A(t) \geq \zeta_1, supD_A(t) \geq \zeta_2$$

$$infK_A(t) \leq \eta_1, supK_A(t) \leq \eta_2,$$

$$infY_A(t) \leq \theta_1, supY_A(t) \leq \theta_2; t \in T\} \tag{6}$$

Eğer ,

$$infD_A(t) \wedge \zeta_1 = \zeta_1, supD_A(t) \wedge \zeta_2 = \zeta_2$$

$$infK_A(t) \vee \eta_1 = \eta_1, supK_A(t) \vee \eta_2 = \eta_2,$$

$$infY_A(t) \vee \theta_1 = \theta_1, supY_A(t) \vee \theta_2 = \theta_2$$

olursa,

$$infD_A(t) \geq \zeta_1, supD_A(t) \geq \zeta_2,$$

$$infK_A(t) \leq \eta_1, supK_A(t) \leq \eta_2 ,$$

$$infY_A(t) \leq \theta_1, supY_A(t) \leq \theta_2$$

koşulları sağlanır.

Aslında ,

$$A_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]} = \{t \in T: infD_A(t) \geq \zeta_1, supD_A(t) \geq \zeta_2$$

$$infK_A(t) \leq \eta_1, supK_A(t) \leq \eta_2,$$

$$infY_A(t) \leq \theta_1, supY_A(t) \leq \theta_2; t \in T\}$$

kümesi T'deki bir crisp (keskin) altkümedir, yani;

Eğer $t \in A_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]}$ olursa,

$$D_{A_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]}}(t) = 1,$$

$$K_{A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t) = 0$$

ve

$$Y_{A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t) = 0$$

olur.

Öte yandan, eğer $t \notin A_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]}$ ise,

$$D_{A_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]}}(t) = 0,$$

$$K_{A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t) = 1$$

ve

$$Y_{A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t) = 1$$

olur.

Ayrıca, eğer

$$\zeta_1 \geq \zeta_1', \zeta_2 \geq \zeta_2',$$

$$\eta_1 \leq \eta_1{}' , \eta_2 \leq \eta_2{}',$$

$$\theta_1 \leq \theta_1{}' \text{ ve } \theta_2 \leq \theta_2{}'$$

koşulları sağlanırsa,

$$([\zeta_1, \zeta_2], [\eta_1, \eta_2], [\theta_1, \theta_2]) \in D$$

ve $([\zeta_1{}', \zeta_2{}'], [\eta_1{}', \eta_2{}'], [\theta_1{}', \theta_2{}']) \in D$ için,

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])} \subseteq A_{([\zeta_1{}',\zeta_2{}'],[\eta_1{}',\eta_2{}'],[\theta_1{}',\theta_2{}'])}$$

olur, yani eğer

$$\zeta_1 \wedge \zeta_1' = \zeta_1', \qquad \zeta_2 \wedge \zeta_2' = \zeta_2',$$

$$\eta_1 \vee \eta_1' = \eta_1', \qquad \eta_2 \vee \eta_2' = \eta_2',$$

$$\theta_1 \vee \theta_1' = \theta_1', \qquad \theta_2 \vee \theta_2' = \theta_2'$$

koşulları sağlanırsa,

$$A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])} \subseteq A_{([\zeta_1{}',\zeta_2{}'],[\eta_1{}',\eta_2{}'],[\theta_1{}',\theta_2{}'])}$$

olur.

O zaman, A' nın seviye kümesi $\forall t \in T$ için aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$([\zeta_1, \zeta_2], [\eta_1, \eta_2], [\theta_1, \theta_2])A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])} =$$

$$\Big\{t, infD_{A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t) \wedge \zeta_1, supD_{A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t) \wedge \zeta_2,$$
$$infK_{A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t) \vee \eta_1, supK_{A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t) \vee \eta_2,$$
$$infY_{A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t) \vee \theta_1, supY_{A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t) \vee \theta_2, t \in T\Big\} \quad (7)$$

A' nin seviye kümelerinin temsili aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$A = \cup \langle ([\zeta_1, \zeta_2], [\eta_1, \eta_2], [\theta_1, \theta_2])A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])} \rangle, ([\zeta_1, \zeta_2], [\eta_1, \eta_2], [\theta_1, \theta_2]) \in D$(8).

$\forall t \in T$ için, A kümesinin doğruluk üyelik, belirsizlik üyelik ve yanlışlık üyelik derecelerinin üçlüsü aşağıdaki şekildedir:

$$\langle\, [infD_A(t), supD_A(t)], [infK_A(t), supK_A(t)], [infY_A(t), supY_A(t)]\,\rangle =$$

$$\Big\langle \vee\, infD_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t),$$

$$\vee\, supD_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t),$$

$$\wedge\, infK_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t),$$

$$\wedge\, supK_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t),$$

$$\wedge\, infY_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t),$$

$$\wedge\, supY_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t), ([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]) \in D\Big\rangle$$

$$= \langle \vee\{[\zeta_1,\zeta_2]\}, \vee\{[\eta_1,\eta_2]\}, \wedge\{[\theta_1,\theta_2]\}, t \in A_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}\,\rangle \quad (9)$$

3.3.Aralık Değerli Neutrosophic Kümelerin Genişleme İlkeleri

T ve Y iki evrensel küme olsun. $f: T \to Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer

$F: \Re(T) \to \Re(Y)$ bir dönüşüm ise,

$$A \in \Re(T) \mapsto F(A) = \cup\left\{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]) f\left(A_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}\right)\right\} \in \Re(Y),$$

(10)

F'ye, f tarafından oluşturulan $\Re(T)'$ ten $\Re(Y)'$ ye dönüşüm denir. $F(A)'$ya ise, aralık değerli neutrosophic küme $A \in \Re(T)'$ in *görüntüsü* denir. Burada $\Re(T)$ ve $\Re(Y)$, sırasıyla T ve Y' deki aralık değerli neutrosophic kümelerdir.

Benzer şekilde, $F^{-1} : \Re(Y) \to \Re(T)$ bir dönüşüm ise,

$$B \in \Re(Y) \mapsto F^{-1}(B) = \cup\left\{([\xi_1,\xi_2],[\pi_1,\pi_2],[\rho_1,\rho_2]) f^{-1}\left(\mathrm{B}_{[\xi_1,\xi_2],[\pi_1,\pi_2],[\rho_1,\rho_2]}\right),\right.$$

$$\left.([\xi_1,\xi_2],[\pi_1,\pi_2],[\rho_1,\rho_2]) \in \check{\mathrm{D}}\right\} \in \Re(T), \quad (11)$$

$F^{-1\prime}$ ye, f tarafından oluşturulan $\Re(Y)'$den $\Re(T)'$e dönüşüm denir. $F^{-1}(B)'$ ye, aralık değerli neutrosophic küme $B \in \Re(Y)'$ nin ters görüntüsü denir. $B_{[\xi_1,\xi_2],[\pi_1,\pi_2],[\rho_1,\rho_2]}$, B' nin seviye kümesidir. Ayrıca Ď , Ḿ'nin bütün Ŝ alt kümeleri için, minimum doğruluk üyelik, maksimum belirsizlik üyelik ve maksimum yanlışlık üyelik derecelerinin bütün üçlülerinin kümesidir. Ḿ ise, B' deki elemanların doğruluk üyelik, belirsizlik üyelik ve yanlışlık üyelik derecelerinin bütün farklı üçlülerinin kümesidir ve

$$B = \cup \left\{ ([\xi_1,\xi_2],[\pi_1,\pi_2],[\rho_1,\rho_2]) \left(B_{[\xi_1,\xi_2],[\pi_1,\pi_2],[\rho_1,\rho_2]} \right), ([\xi_1,\xi_2],[\pi_1,\pi_2],[\rho_1,\rho_2]) \in Ď \right\}$$

olur.

Teorem 3.3.1:

IVNS $F(A)$ kümesinde $\forall y \in F(A)$ ve $\forall t \in T$ için, bir y elemanının doğruluk üyelik, belirsizlik üyelik ve yanlışlık üyelik derecelerinin üçlüsü aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\langle [infD_{F(A)}(y), supD_{F(A)}(y)], [infK_{F(A)}(y), supK_{F(A)}(y)], [infY_{F(A)}(y), supY_{F(A)}(y)] \rangle$$
$$= \langle \vee\, infD_A(t), \vee\, supD_A(t), \wedge\, infK_A(t), \wedge\, supK_A(t), \wedge\, infY_A(t), \wedge\, supY_A(t), f(t) = y \rangle \quad (12)$$

Öyleyse, $\{\forall t \in T\,, f(t) = y\} = \emptyset$ ise,

$$\langle [D_{F(A)}(y), K_{F(A)}(y), Y_{F(A)}(y)] \rangle = \langle 0,1,1 \rangle$$

olur.

İspat: (9) eşitliğine göre,

$$\langle [infD_{F(A)}(y), supD_{F(A)}(y)], [infK_{F(A)}(y), supK_{F(A)}(y)], [infY_{F(A)}(y), supY_{F(A)}(y)] \rangle$$
$$= \left[\vee \left\{ infD_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]}A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y) \right\}, \vee \left\{ supD_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]}A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y) \right\} \right]$$

$$= \left[\wedge \left\{infK_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\right\},\right.$$

$$\left.\wedge \left\{supK_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\right\}\right]$$

$$= \left[\wedge \left\{infY_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\right\},\right.$$

$$\left.\wedge \left\{supY_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\right\}\right]$$

$$= \left[\vee \left\{\zeta_1 \wedge infD_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\right\},\right.$$

$$\left.\vee \left\{\zeta_2 \wedge supD_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\right\}\right]$$

$$= \left[\wedge \left\{\eta_1 \vee infK_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\right\},\right.$$

$$\left.\wedge \left\{\eta_2 \vee supK_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\right\}\right]$$

$$= \left[\wedge \left\{\theta_1 \vee infY_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\right\},\right.$$

$$\left.\wedge \left\{\theta_2 \vee supY_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\right\}\right]$$

$$= \left[\vee \left\{\vee \{\zeta_1\}\right\}, f(t) = y, t \in A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])},\right.$$

$$\left.\vee \left\{\vee \{\zeta_2\}\right\}, f(t) = y, t \in A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}\right]$$

$$= \left[\wedge \left\{\wedge \{\eta_1\}\right\}, f(t) = y, t \in A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])},\right.$$

$$\left.\wedge \left\{\wedge \{\eta_2\}\right\}, f(t) = y, t \in A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}\right]$$

$$= \left[\wedge \left\{\wedge \{\theta_1\}\right\}, f(t) = y, t \in A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])},\right.$$

$$\left.\wedge \left\{\wedge \{\theta_2\}\right\}, f(t) = y, t \in A_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}\right]$$

$$= \left[\vee \left\{\vee \{\zeta_1 \wedge infD_{A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(t)\right\}\right\}, f(t) = y,$$

$$\left.\vee \left\{\vee \{\zeta_2 \wedge supD_{A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(t)\right\}\right\}, f(t) = y\right]$$

$$= \left[\wedge \left\{\wedge \{\eta_1 \vee infK_{A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(t)\right\}\right\}, f(t) = y,$$

$$\wedge \left\{\wedge \{\eta_2 \vee supK_{A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(t)\right\}\}, f(t) = y\Big]$$

$$= \Big[\wedge \left\{\wedge \{\gamma_1 \vee infY_{A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(t)\right\}\}, f(t) = y,$$

$$\wedge \left\{\wedge \{\gamma_2 \vee supY_{A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(t)\right\}\}, f(t) = y\Big]$$

(5) ve (7) eşitlikleri birleştirerek yukarıdaki eşitlikler tekrar yazılır:

$$\langle [infD_{F(A)}(y), supD_{F(A)}(y)], [infK_{F(A)}(y), supK_{F(A)}(y)], [infY_{F(A)}(y), supY_{F(A)}(y)] \rangle$$

$$= \begin{bmatrix} \vee \left\{\vee \left\{\zeta_1 \wedge infD_{A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(t)\right\}\right\}, f(t) = y, \\ \vee \left\{\vee \left\{\zeta_2 \wedge supD_{A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(t)\right\}\right\}, f(t) = y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \wedge \left\{\wedge \left\{\eta_1 \vee infK_{A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(t)\right\}\right\}, f(t) = y, \\ \wedge \left\{\wedge \left\{\eta_2 \vee supK_{A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(t)\right\}\right\}, f(t) = y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \wedge \left\{\wedge \left\{\theta_1 \vee infY_{A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(t)\right\}\right\}, f(t) = y, \\ \wedge \left\{\wedge \left\{\theta_2 \vee supY_{A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(t)\right\}\right\}, f(t) = y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \vee \left\{\vee\, infD_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]f(A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(t)\right\}, f(t) = y, \\ \vee \left\{\vee\, supD_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]f(A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(t)\right\}, f(t) = y \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} \wedge \left\{\wedge\, infK_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]f(A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(t)\right\}, f(t) = y, \\ \wedge \left\{\wedge\, supK_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]f(A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(t)\right\}, f(t) = y \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} \wedge \left\{\wedge\, infY_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]f(A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(t)\right\}, f(t) = y, \\ \wedge \left\{\wedge\, supY_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]f(A([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(t)\right\}, f(t) = y \end{bmatrix}$$

$$= \langle [\vee\, infD_A(x), \vee\, supD_A(x)], [\wedge\, infK_A(x), \wedge\, supK_A(x)], [\wedge\, infY_A(x), \wedge\, supY_A(x)], f(t) = y \rangle$$

Böylece, (12) eşitliği ispatlanmış olur.

Teorem 3.3.2:

IVNS $F^{-1}(B)$ kümesinde $\forall y \in F^{-1}(B)$ ve $\forall t \in T$ için, bir t elemanın doğruluk üyelik, belirsizlik üyelik ve yanlışlık üyelik derecelerinin üçlüsü aşağıdaki gibi elde edilir:

$\langle [infD_{F^{-1}(B)}(t), supD_{F^{-1}(B)}(t)], [infK_{F^{-1}(B)}(t), supK_{F^{-1}(B)}(t)], [infY_{F^{-1}(B)}(t), infY_{F^{-1}(B)}(t)] \rangle$

$=$

$\langle [infD_B f(y), supD_B f(y)], [infK_B f(y), supK_B f(y)], [infY_B f(y), infY_B f(y)] \rangle$ (13)

İspat:

$\langle [infD_{F^{-1}(B)}(t), supD_{F^{-1}(B)}(t)], [infK_{F^{-1}(B)}(t), supK_{F^{-1}(B)}(t)], [infY_{F^{-1}(B)}(t), infY_{F^{-1}(B)}(t)] \rangle$

$$= \left[\vee \left\{ infD_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]B_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t) \right\}, \right.$$

$$\left. \vee \left\{ supD_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]B_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t) \right\} \right]$$

$$= \left[\wedge \left\{ infK_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]B_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t) \right\}, \right.$$

$$\left. \wedge \left\{ supK_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]B_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t) \right\} \right]$$

$$= \left[\wedge \left\{ infY_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]B_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t) \right\}, \right.$$

$$\left. \wedge \left\{ supY_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]B_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t) \right\} \right]$$

$$= \left[\vee \left\{ \zeta_1 \wedge infD_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]B_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t) \right\}, f^{-1}(y) = t, \right.$$

$$\left. \vee \left\{ \zeta_2 \wedge infD_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]B_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t) \right\}, f^{-1}(y) = t \right]$$

$$= \left[\wedge \left\{ \eta_1 \wedge infK_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]B_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t) \right\}, f^{-1}(y) = t, \right.$$

$$\left. \wedge \left\{ \eta_2 \wedge infK_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]B_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t) \right\}, f^{-1}(y) = t \right]$$

$$= \left[\wedge \left\{ \theta_1 \vee infY_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]B_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t) \right\}, f^{-1}(y) = t \right.$$

$$\left. \wedge \left\{ \theta_2 \vee supY_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]B_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}}(t) \right\}, f^{-1}(y) = t \right]$$

$$= \left[\vee \left\{ \vee \{\zeta_1\} \right\}, f^{-1}(y) = t, y \in B_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}, \right.$$

$$\left. \vee \left\{ \vee \{\zeta_2\} \right\}, f^{-1}(y) = t, y \in B_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])} \right]$$

$$= \left[\wedge \left\{\wedge \{\eta_1\}\right\}, f^{-1}(y) = t, y \in B_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])},\right.$$

$$\left.\wedge \left\{\wedge \{\eta_2\}\right\}, f^{-1}(y) = t, y \in B_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}\right]$$

$$= \left[\wedge \left\{\wedge \{\theta_1\}\right\}, f^{-1}(y) = t, y \in B_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])},\right.$$

$$\left.\wedge \left\{\wedge \{\theta_2\}\right\}, f^{-1}(y) = t, y \in B_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}\right]$$

$$= \left[\vee \left\{\vee \{\zeta_1 \wedge infD_{B(([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]))}(y)\right\}\right\}, f^{-1}(y) = t,$$

$$\left.\vee \left\{\vee \{\zeta_2 \wedge supD_{B(([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]))}(y)\right\}\right\}, f^{-1}(y) = t\ \right]$$

$$= \left[\wedge \left\{\wedge \{\eta_1 \vee infK_{B(([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]))}(y)\right\}\right\}, f^{-1}(y) = t$$

$$\left.\wedge \left\{\wedge \{\eta_2 \vee supK_{B(([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]))}(y)\right\}\right\}, f^{-1}(y) = t\right]$$

$$= \left[\wedge \left\{\wedge \{\theta_1 \vee infY_{B(([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]))}(y)\right\}\right\}, f^{-1}(y) = t$$

$$\left.\wedge \left\{\wedge \{\theta_2 \vee supY_{B(([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]))}(y)\right\}\right\}, f^{-1}(y) = t\right]$$

(5) ve (7) eşitliklerini birleştirerek yukarıdaki eşitlikleri tekrar yazılır:

$\langle [infD_{F^{-1}(B)}(t), supD_{F^{-1}(B)}(t)], [infK_{F^{-1}(B)}(t), supK_{F^{-1}(B)}(t)], [infY_{F^{-1}(B)}(t), infY_{F^{-1}(B)}(t)]\ \rangle$

$$= \begin{bmatrix} \vee \left\{\vee \left\{\zeta_1 \wedge infD_{B(([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]))}(y)\right\}\right\}, f^{-1}(y) = t \\ \vee \left\{\vee \left\{\zeta_2 \wedge supD_{B(([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]))}(y)\right\}\right\}, f^{-1}(y) = t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \wedge \left\{\wedge \left\{\eta_1 \vee infK_{B(([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]))}(y)\right\}\right\}, f^{-1}(y) = t \\ \wedge \left\{\wedge \left\{\eta_2 supK_{B(([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]))}(y)\right\}\right\}, f^{-1}(y) = t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \wedge \left\{\wedge \left\{\theta_1 \vee infY_{B(([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]))}(y)\right\}\right\}, f^{-1}(y) = t \\ \wedge \left\{\wedge \left\{\theta_2 \vee supY_{B(([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]))}(y)\right\}\right\}, f^{-1}(y) = t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \vee \left\{\vee\, infD_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])f^{-1}(B([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\right\}, f^{-1}(y) = t \\ \vee \left\{\vee\, supD_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])f^{-1}(B([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\right\}, f^{-1}(y) = t \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} \wedge \left\{\wedge\, infK_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]f^{-1}(B)([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\right\}, f^{-1}(y) = t \\ \wedge \left\{\wedge\, supK_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]f^{-1}(B)([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\right\}, f^{-1}(y) = t \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} \wedge \left\{\wedge\, infY_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])f^{-1}(B)([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\right\}, f^{-1}(y) = t \\ \wedge \left\{\wedge\, supY_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])f^{-1}(B)([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\right\}, f^{-1}(y) = t \end{bmatrix}$$

$$= \langle [infD_B f(y), supD_B f(y)], [infK_B f(y), supK_B f(y)], [infY_B f(y), infY_B f(y)] \rangle$$

Böylece, (13) eşitliği ispatlanmış olur.

Tanım 3.3.3:

T_j sınırlı evrensel küme ve $\Re(T_j)$, T_j (j=1,2,…,m) de bir IVNS olsun. m tane aralık değerli neutrosophic $A_j \in \Re(T_j)$ (j=1,2,…,m) kümelerinin kartezyen çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\prod_{j=1}^{m} A_j =$$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$$

$$= \Big\{(t_1, t_2, \ldots, t_m), \vee \left\{\wedge\, infD_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])A_j([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(t_j)\right\}$$

$$\vee \left\{\wedge\, supD_{[\alpha 1,\alpha 2],[\beta 1,\beta 2],[\Upsilon 1,\Upsilon 2])A_j([\alpha 1,\alpha 2],[\beta 1,\beta 2],[\Upsilon 1,\Upsilon 2])}(t_j)\right\},$$

$$\wedge \left\{\vee\, infK_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])A_j([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(t_j)\right\},$$

$$\wedge \left\{\vee\, supK_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])A_j[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]}(t_j)\right\},$$

$$\wedge \left\{\vee\, infY_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])\mathrm{A_j}([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(t_j)\right\},$$

$$\wedge \left\{\vee\, supY_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])\mathrm{A_j}([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(t_j)\right\}, (t_1, t_2, \ldots, t_m) \in \prod_{j=1}^{m} T_j \Big\}.$$

Burada

$A_j =$

$\bigcup_{[\zeta 1j,\zeta 2j],[\eta 1j,\eta 2j],[\theta 1j,\theta 2j]\in D_j} \left\{ \langle \left[\zeta_{1_j}, \zeta_{2_j}\right], \left[\eta_{1_j}, \eta_{2_j}\right], \left[\theta_{1_j}, \theta_{2_j}\right] \rangle \, (A_j)_{[\zeta 1j,\zeta 2j],[\eta 1j,\eta 2j],[\theta 1j,\theta 2j]} \right\}$

ve $D = \bigcup_{1\leq j\leq m} D_j$.

$$g\colon \prod_{j=1}^{m} T_j \to Y$$

bir dönüşüm olsun. Eğer

$$G\colon \prod_{j=1}^{m} \Re(T_j) \to \Re(Y)$$

bir dönüşüm ise, öyle ki,

$$(A_1, A_2, \dots, A_m) \in \prod_{j=1}^{m} \Re(T_j) \to C = G(A_1, A_2, \dots, A_m)$$

$$= \bigcup_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]\in D} \left\{ \begin{array}{c} \langle [\zeta_1, \zeta_2], [\eta_1, \eta_2], [\theta_1, \theta_2] \rangle g((A_1)_{\langle [\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]\rangle}, \\ (A_2)_{\langle [\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]\rangle}, \dots \\ \left(A_m\right)_{\langle [\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2]\rangle}\right) \end{array} \right\}$$

$$\in \Re(Y) \qquad (14)$$

G 'ye $\prod_{j=1}^{m} \Re(T_j)'$ den $\Re(Y)'$ ye g tarafından oluşturulan bir dönüşüm denir.

$C = G(A_1, A_2, \dots, A_m)'$ ye

$(A_1, A_2, \dots, A_m) \in \prod_{j=1}^{m} \Re(T_j)$ kümesinin görüntüsü denir.

Teorem 3.3.4:

IVNS $C = G(A_1, A_2, \dots, A_m)$ kümesinde $\forall y \in C$ ve $(t_1, t_2, \dots, t_m) \in \prod_{j=1}^{m} T_j$ için, bir y elemanının doğruluk üyelik, belirsizlik üyelik ve yanlışlık üyelik derecelerinin üçlüsü aşağıdaki şekilde yazılır:

$\langle [infD_C(y), supD_C(y)], [infK_C(y), supK_C(y)], [infY_C(y), infY_C(y)] \rangle$

$$= \left\langle \begin{matrix} \vee \left\{\wedge\, infD_{A_j}\big(t_j\big)\right\}, g(t_1, t_2, \dots, t_m) = y, 1 \le j \le m, \\ \vee \left\{\wedge\, supD_{A_j}\big(t_j\big)\right\}, g(t_1, t_2, \dots, t_m) = y, 1 \le j \le m \end{matrix}\right.$$

$$\begin{bmatrix} \wedge \{\vee\, infK\big(t_j\big)\}, g(t_1, t_2, \dots, t_m) = y, 1 \le j \le m, \\ \wedge \{\vee\, supK\big(t_j\big)\}, g(t_1, t_2, \dots, t_m) = y, 1 \le j \le m \end{bmatrix},$$

$$\left.\begin{bmatrix} \wedge \{\vee\, infY\big(t_j\big)\}, g(t_1, t_2, \dots, t_m) = y, 1 \le j \le m, \\ \wedge \{\vee\, supY\big(t_j\big)\}, g(t_1, t_2, \dots, t_m) = y, 1 \le j \le m \end{bmatrix}\right\rangle \tag{15}$$

Eğer

$\left\{(t_1, t_2, \dots, t_m) \in \prod_{j=1}^{m} T_j \ \middle| g(t_1, t_2, \dots, t_m) = y\right\} = \emptyset$ ise,

$$\langle [infD_C(y), supD_C(y)], [infK_C(y), supK_C(y)], [infY_C(y), infY_C(y)]\ \rangle = \langle 0{,}0{,}1\rangle$$

olur.

İspat. (9) eşitliğine göre,

$\langle [infD_C(y), supD_C(y)], [infK_C(y), supK_C(y)], [infY_C(y), infY_C(y)]\ \rangle$

$$= \Big[\vee \Big\{infD_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])A_j([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\Big\},$$

$$\vee \Big\{supD_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])A_j([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\Big\}\Big]$$

$$\Big[\wedge \Big\{infK_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])A_j([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\Big\},$$

$$\wedge \Big\{supK_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])A_j([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\Big\}\Big]$$

$$\Big[\wedge \Big\{infY_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])A_j([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\Big\},$$

$$\wedge \Big\{supY_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])A_j([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\Big\}\Big]$$

$$= \Big[\vee \Big\{\zeta_1 \wedge infD_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])A_j([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\Big\},$$

$$\vee \Big\{\zeta_2\ \wedge supD_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])A_j([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\Big\}\Big]$$

$$= \Big[\wedge \Big\{\eta_1 \vee infK_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])A_j([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\Big\},$$

$$\wedge\left\{\eta_2 \vee supK_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])A_j([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\right\}\Big]$$

$$\Big[\wedge\left\{\theta_1 \vee infY_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])A_j([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\right\},$$

$$\wedge\left\{\theta_2 \vee supY_{[\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])A_j([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}(y)\right\}\Big]$$

$$= \big[\vee\{\vee\{\zeta_1\}\}, g(t_1, t_2, \dots, t_m) = y, 1 \le j \le m, y \in C_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])},$$

$$\vee\{\vee\{\zeta_2\}\}, g(t_1, t_2, \dots, t_m) = y, 1 \le j \le m, y \in C_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}\big]$$

$$\big[\wedge\{\wedge\{\eta_1\}\}, g(t_1, t_2, \dots, t_m) = y, 1 \le j \le m, y \in C_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])},$$

$$\wedge\{\wedge\{\eta_2\}\}, g(t_1, t_2, \dots, t_m) = y, 1 \le j \le m, y \in C_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}\big]$$

$$= \big[\wedge\{\wedge\{\theta_1\}\}, g(t_1, t_2, \dots, t_m) = y, 1 \le j \le m, y \in C_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])},$$

$$\wedge\{\wedge\{\theta_2\}\}, g(t_1, t_2, \dots, t_m) = y, 1 \le j \le m, y \in C_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}\big]$$

$$= \Big[\vee\Big\{\vee\{\zeta_1 \wedge infD_{A_j}(t_j)\Big\}\Big\}, g(t_1, t_2, \dots, t_m) = y, 1 \le j \le m, y \in C_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])},$$

$$\vee\Big\{\vee\{\zeta_2 \wedge supD_{A_j}(t_j)\Big\}\Big\}, g(t_1, t_2, \dots, t_m) = y, 1 \le j \le m, y \in C_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}\Big]$$

$$= \Big[\wedge\Big\{\wedge\{\eta_1 \vee infK_{A_j}(t_j)\Big\}\Big\}, g(t_1, t_2, \dots, t_m) = y, 1 \le j \le m, y \in C_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])},$$

$$\wedge\Big\{\wedge\{\eta_2 \vee supK_{A_j}(t_j)\Big\}\Big\}, g(t_1, t_2, \dots, t_m) = y, 1 \le j \le m, y \in C_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}\Big]$$

$$= \Big[\wedge\Big\{\wedge\{\theta_1 \vee infY_{A_j}(t_j)\Big\}\Big\}, g(t_1, t_2, \dots, t_m) = y, 1 \le j \le m, y \in C_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])},$$

$$\wedge\Big\{\wedge\{\theta_2 \vee supY_{A_j}(t)\Big\}\Big\}, g(t_1, t_2, \dots, t_m) = y, 1 \le j \le m, y \in C_{([\zeta_1,\zeta_2],[\eta_1,\eta_2],[\theta_1,\theta_2])}\Big]$$

(5) ve (7) eşitliklerini birleştirerek yukarıdaki eşitlikler tekrar yazılır:

$$\langle [infD_{F(A)}(y), supD_{F(A)}(y)], [infB_{F(A)}(y), supB_{F(A)}(y)], [infY_{F(A)}(y), supY_{F(A)}(y)] \rangle$$

$$= \begin{bmatrix} \vee\left\{\vee\left\{\zeta_1 \wedge infD_{A_j}(t_j)\right\}\right\}, g(t_1, t_2, \dots, t_m) = y, 1 \le j \le m, \\ \vee\left\{\vee\left\{\zeta_2 \wedge supD_{A_j}(t_j)\right\}\right\}, g(t_1, t_2, \dots, t_m) = y, 1 \le j \le m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \wedge\left\{\wedge\left\{\eta_1 \vee infK_{A_j}(t_j)\right\}\right\}, g(t_1,t_2,\dots,t_m) = y, 1 \le j \le m\,, \\ \wedge\left\{\wedge\left\{\eta_2 \vee supK_{A_j}(t_j)\right\}\right\}, g(t_1,t_2,\dots,t_m) = y, 1 \le j \le m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \wedge\left\{\wedge\left\{\theta_1 \vee infY_{A_j}(t_j)\right\}\right\}, g(t_1,t_2,\dots,t_m) = y, 1 \le j \le m, \\ \wedge\left\{\wedge\left\{\theta_2 \vee supY_{A_j}(t_j)\right\}\right\}, g(t_1,t_2,\dots,t_m) = y, 1 \le j \le m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \vee\left\{\vee\, infD_{A_j}(t_j)\right\}, g(t_1,t_2,\dots,t_m) = y, 1 \le j \le m, \\ \vee\left\{\vee\, supD_{A_j}(t_j)\right\}, g(x_1,x_2,\dots,x_m) = y, 1 \le j \le m \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \wedge\left\{\wedge\, infK_{A_j}(t_j)\right\}, g(t_1,t_2,\dots,t_m) = y, 1 \le j \le m \\ \wedge\left\{\wedge\, supK_{A_j}(t_j)\right\}, g(t_1,t_2,\dots,t_m) = y, 1 \le j \le m \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \wedge\left\{\wedge\, infY_{A_j}(t)\right\}, g(t_1,t_2,\dots,t_m) = y, 1 \le j \le m \\ \wedge\left\{\wedge\, supY_{A_j}(t_j)\right\}, g(t_1,t_2,\dots,t_m) = y, 1 \le j \le m \end{bmatrix}$$

$$= \left\langle \begin{matrix} \vee\left\{\wedge\, infD_{A_j}(t_j)\right\}, g(t_1,t_2,\dots,t_m) = y, 1 \le j \le m, \\ \vee\left\{\wedge\, supD_{A_j}(t_j)\right\}, g(t_1,t_2,\dots,t_m) = y, 1 \le j \le m \end{matrix} \right.$$

$$\begin{bmatrix} \wedge\{\vee\, infK(t_j)\}, g(t_1,t_2,\dots,t_m) = y, 1 \le j \le m, \\ \wedge\{\vee\, supK(t_j)\}, g(t_1,t_2,\dots,t_m) = y, 1 \le j \le m \end{bmatrix},$$

$$\left. \begin{bmatrix} \wedge\{\vee\, infY(t_j)\}, g(t_1,t_2,\dots,t_m) = y, 1 \le j \le m, \\ \wedge\{\vee\, supY(t_j)\}, g(t_1,t_2,\dots,t_m) = y, 1 \le j \le m \end{bmatrix} \right\rangle$$

Böylece, (15) eşitliği ispatlanmış olur.

4. BÖLÜM

Bu bölümde, aralık değerli neutrosophic kümeler üzerinde cebirsel işlemler yapılmış ve sayısal örnekler verilmiştir.

4. 1. Aralık Değerli Neutrosophic Kümeler Üzerinde Cebirsel İşlemler

4.1.1 Tanım:

A ve B, evrensel T kümesi üzerinde iki tane IVNS olsun. $\forall t \in T$ için, A ve B üzerinde toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve skalerle çarpım gibi cebirsel işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır:

1. $\forall t \in T$ için, A ve B'nin toplamı $A + B$ ile gösterilir ve

$$A + B = \{max[inf\, D_A(t) + inf\, D_B(t) - inf\, D_A(t). inf\, D_B(t)\,,$$
$$sup\, D_A(t) + sup\, D_B(t) - sup\, D_A(t). sup\, D_B(t)],$$
$$min[(inf\, K_A(t). inf\, K_B(t), (sup\, K_A(t). sup\, K_B(t)\,],$$
$$min[(inf\, Y_A(t). inf\, Y_B(t), (sup\, Y_A(t). sup\, Y_A(t)\,]\}$$

şeklinde tanımlanır.

2. $\forall t \in T$ için, A'dan B'nin çıkarımı $A - B$ ile gösterilir ve

$$A - B = \{max[inf\, D_A(t) + inf\, D_B(t) - inf\, D_A(t). inf\, D_B(t)\,,$$
$$sup\, D_A(t) + sup\, D_B(t) - sup\, D_A(t). sup\, D_B(t)],$$
$$min[(inf\, K_A(t). inf\, K_B(t), (sup\, K_A(t). sup\, K_B(t)\,],$$
$$\min[(inf\, Y_A(t). inf\, Y_B(t), (sup\, Y_A(t). sup\, Y_A(t)\,]\}$$

şeklinde tanımlanır.

3. $\forall t \in T$ için, A ve B'nin çarpımı $A.B$ ile gösterilir ve

$$A.B = \{\langle max[inf\, D_A(t).inf\, D_B(t)\, , sup\, D_A(t).sup\, D_B(t)]\, , \rangle$$

$$min[inf\, K_A(t) + inf\, K_B(t) - inf\, K_A(t).inf\, K_B(t)\, ,$$

$$sup\, K_A(t) + sup\, K_B(t) - \ sup\, K_A(t).sup\, K_B(t)]$$

$$min[inf\, Y_A(t) + inf\, Y_B(t) - inf\, Y_A(t).inf\, Y_B(t),$$

$$sup\, Y_A(t) + sup\, Y_B(t) - \ sup\, Y_A(t).sup\, Y_B(t)]\}$$

şeklinde tanımlanır.

4. $\forall t \in T$ için, A'nın B'ye bölümü A/B ile gösterilir ve

$$A/B \ = \ \{\langle max[inf\, D_A(t).inf\, D_B(t)\, , sup\, D_A(t).sup\, D_B(t)]\, , \rangle$$

$$min[inf\, K_A(t) + inf\, K_B(t) - inf\, K_A(t).inf\, K_B(t)\, ,$$

$$sup\, K_A(t) + sup\, K_B(t) - \ sup\, K_A(t).sup\, K_B(t)]$$

$$min[inf\, Y_A(t) + inf\, Y_B(t) - inf\, Y_A(t).inf\, Y_B(t),$$

$$sup\, Y_A(t) + sup\, Y_B(t) - \ sup\, Y_A(t).sup\, Y_B(t)]\}$$

şeklinde tanımlanır.

5. . $\forall t \in T$ ve $\lambda \neq 0$ için, B'nin bir λ skalerle çarpılması $\lambda.B$ ile gösterilir ve

$$\lambda.B = \{\langle max\left[1 - (1 - infD_B(t))^{\lambda}, 1 - (1 - supD_B(t))^{\lambda}\right],$$

$$min\left[infK_B(t)^{\lambda}, supK_B(t)^{\lambda}\right], min\left[infY_B(t)^{\lambda}, infY_B(t)^{\lambda}\right]\rangle\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.1.2:

$A \ = \{\, 3; ([0.2,0.3], [0.1,0.4], [0.2,0.5]), 2; ([0.3,0.5], [0.2,0.6], [0.3,0.4])\}$

ve

$B = \{1; ([0.1,0.2], [0.2,0.3], [0.3,0.5]), 5; ([0.2,0.4], [0.1,0.3], [0.2,0.5])\}$

evrensel T kümesi üzerinde iki tane aralık değerli neutrosophic küme olsun. O zaman, yukarıda tanımlanan cebirsel işlemleri sırasıyla hesaplayalım.

$$A + B = \{4; ([0.28,0.44], [0.02,0.12], [0.06,0.25]), 8; ([0.36,0.58], [0.01,0.12], [0.04,0.25]),$$
$$3; ([0.37,0.6], [0.04,0.18], [0.09,0.2]), 7; ([0.44,0.7], [0.02,0.18], [0.06,0.2])\}$$

$$A - B = \{2; ([0.28,0.44], [0.02,0.12], [0.06,0.25]), -2; ([0.36,0.58], [0.01,0.12], [0.04,0.25])$$
$$1; ([0.37,0.6], [0.04,0.18], [0.09,0.2]), -3; ([0.44,0.7], [0.02,0.18], [0.06,0.2])\}$$

$$A.B = \{3; ([0.02,0.06], [0.28,0.58], [0.44,0.7]), 15; ([0.06,0.2], [0.19,0.58], [0.36,0.75]),$$
$$2; ([0.03,0.1], [0.36,0.72], [0.51,0.58]), 10; ([0.06,0.2], [0.28,0.72], [0.51,0.7])\}.$$

$$A/B = \{3; ([0.02,0.06], [0.28,0.58], [0.44,0.7]), 3/5; ([0.06,0.2], [0.19,0.58], [0.36,0.75])$$
$$2; ([0.03,0.1], [0.36,0.72], [0.51,0.58]), 2/5; ([0.06,0.2], [0.28,0.72], [0.51,0.7])\}$$

$$3.B = \{3; ([0.001,0.027], [0.008,0.065], [0.097,0.025])$$
$$15; ([0.008,0.016], [0.001,0.027], [0.008,0.025])\}.$$

4.2. Aralık Değerli Neutrosophic Kümeler Üzerinde Yeni İşlemler

4.2.1. Ayrıştırıcı Toplama

A ve B, evrensel T kümesi üzerinde iki tane aralık değerli neutrosophic küme olsun. $\forall t \in T$ için, A ve B'nin ayrıştırıcı toplamları $A \oplus B$ ile gösterilir ve

$$A \oplus B = (A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)$$

şeklinde tanımlanır. Tanımdan A, B ve tümleyenleri aşağıdaki şekildedir:

$A = \{\langle t, [inf\ D_A(t)\ , sup\ D_A(t)], [inf\ K_A(t)\ , sup\ K_A(t)], [inf\ Y_A(t)\ , sup\ Y_A(t)]\rangle : t \in T\},$

$B = \{\langle t, [inf\ D_B(t)\ , sup\ D_B(t)], [inf\ K_B(t), sup\ K_B(t)], [inf\ Y_B(t)\ , sup\ Y_B(t)]\rangle : t \in T\}$

$A^C = \{\langle t: [infY_A(t), supY_A(t)], [1 - supK_A(t), 1 - infK_A(t)], [inf\ D_A(t)\ , sup\ D_A(t)]\rangle ; t \in T\},$

$B^C = \{\langle t: [infY_B(t), supY_B(t)], [1 - supK_B(t), 1 - infK_B(t)], [inf\ D_B(t)\ , sup\ D_B(t)]\rangle ; t \in T\}$

1.Doğruluk-üyelik fonksiyonu için ayrıştırıcı toplam aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$\forall t \in T$ için, $D_{A\cap B^C} = \{\ min[inf\ D_A(t)\ , inf\ Y_B(t)], min[sup\ D_A(t)\ , sup\ Y_B(t)]\}$

$$D_{A^C\cap B} = \{\ min[inf\ Y_A(t)\ , inf\ D_B(t)], min[sup\ Y_A(t)\ , sup\ D_B(t)]\},$$

$$D_{A\oplus B} = \{max(min[inf\ D_A(t)\ , inf\ Y_B(t)], min[inf\ Y_A(t)\ , inf\ D_B(t)],$$

$$max(min[sup\ D_A(t)\ , sup\ Y_B(t)], min[sup\ Y_A(t)\ , sup\ D_B(t)])\},$$

2.Belirsizlik-üyelik fonksiyonu için ayrıştırıcı toplam aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$\forall t \in T$ için,

$$K_{A\cap B^C} = \{\ max[inf\ K_A(t)\ , 1 - sup\ K_B(t)], max[sup\ K_A(t)\ , 1 - inf\ K_B(t)]\},$$

$$K_{A^C\cap B} = \{\ max[1 - sup\ K_A(t)\ , inf\ K_B(t)], max[1 - inf\ K_A(t)\ , sup\ K_B(t)]\},$$

$$K_{A\oplus B} = \{min(max[inf\ K_A(t)\ , 1 - sup\ K_B(t)], max[1 - sup\ K_A(t)\ , inf\ K_B(t)]),$$

$min(max[sup\ K_A(t)\ , 1 - inf\ K_B(t)], max[1 - inf\ K_A(t)\ , sup\ K_B(t)]\},$

3.Yanlışlık-üyelik fonksiyonu için ayrıştırıcı toplam aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$\forall t \in T$ için, $Y_{A\cap B^C} = \{\ max[inf\ Y_A(t)\ , inf\ D_B(t)], max[sup\ Y_A(t)\ , sup\ D_B(t)]\},$

$$Y_{A^C\cap B} = \{\ max[inf\ D_A(t)\ , inf\ Y_B(t)], max[sup\ D_A(t)\ , sup\ Y_B(t)]\},$$

$$Y_{A\oplus B} = \{min(max[inf\ Y_A(t)\ , inf\ D_B(t)], max[inf\ D_A(t)\ , inf\ Y_B(t)]),$$

$$min(max[sup\, Y_A(t)\,, sup\, D_B(t)], max[sup\, D_A(t)\,, sup\, Y_B(t)])\}.$$

O zaman, $\forall t \in T$ için A ve B'nin ayrıştırıcı toplamları

$$A \oplus B = \{t;\ [max(min[inf\, D_A(t)\,, inf\, Y_B(t)], min[inf\, Y_A(t)\,, inf\, D_B(t)]),$$

$$max(min[sup\, D_A(t)\,, sup\, Y_B(t)], min[sup\, Y_A(t)\,, sup\, D_B(t)])],$$

$$[\, min(max[inf\, K_A(t)\,, 1 - sup\, K_B(t)], max[1 - sup\, K_A(t)\,, inf\, K_B(t)]),$$

$$min(max[sup\, K_A(t)\,, 1 - inf\, K_B(t)], max[1 - inf\, K_A(t)\,, sup\, K_B(t)])],$$

$$[min(max[inf\, Y_A(t)\,, inf\, D_B(t)], max[inf\, D_A(t)\,, inf\, Y_B(t)]),$$

$$min(max[sup\, Y_A(t)\,, sup\, D_B(t)], max[sup\, D_A(t)\,, sup\, Y_B(t)])]\}.$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.2.2.:

$A\ = \{\, t_1; ([0.2,0.3], [0.1,0.4], [0.2,0.5])\}$

ve

$B\ = \{t_2; ([0.1,0.2], [0.2,0.3], [0.3,0.5])\}$

evrensel T kümesi üzerinde iki tane aralık değerli neutrosophic küme olsun. A ve B'nin ayrıştırıcı toplamlarını hesaplayalım.

$$A \oplus B = \{t;\ [max(min[0.2,0.3], min[0.2,0.1]), max(min[0.3,0.5], min[0.5,0.2])],$$

$$[min(max[0.1,0.7], max[0.6,0.2]), min(max[0.4,0.8], max[0.9,0.3])]$$

$$[min(max[0.2,0.1], max[0.2,0.3]), min(max[0.5,0.2], max[0.3,0.5])]\}$$

$$= \{x; ([0.2,0.3], [0.6,0.8], [0.2,0.5])\}$$

4.2.3. Aralık Değerli Neutrosophic Kümelerin Farkı

A ve B, evrensel T kümesi üzerinde iki tane aralık değerli neutrosophic küme olsun. $\forall x \in X$ için, A ve B'nin farkı $A \ominus B$ ile gösterilir ve

$$A \ominus B \ = \ A \cap B^C$$

şeklinde tanımlanır. Tanımdan A, B ve B'nin tümleyeni aşağıdaki şekildedir:

$A = \{t, [inf\ D_A(t)\ , sup\ D_A(t)], [inf\ K_A(t)\ , sup\ K_A(t)], [inf\ Y_A(t)\ , sup\ Y_A(t)]: t \in T\},$

$B = \ \{t, [inf\ D_B(t)\ , sup\ D_B(t)], [inf\ K_B(t), sup\ K_B(t)], [inf\ Y_B(t)\ , sup\ Y_B(t)]: t \in T\}$

$B^C = \{\langle t: [infY_B(t), supY_B(t)], [1 - supK_B(t), 1 - infK_B(t)], [inf\ D_B(t)\ , sup\ D_B(t)]\rangle; t \in T\}$

Doğruluk üyelik fonksiyonu, belirsizlik üyelik fonksiyonu ve yanlışlık üyelik

fonksiyonu için fark işlemi sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$D_{A\cap B^C} = \ \{ min[inf\ D_A(t)\ , inf\ Y_B(t)], min[sup\ D_A(t)\ , sup\ Y_B(t)]\},$

$K_{A\cap B^C} = \ \{ max[inf\ K_A(t)\ , 1 - sup\ K_B(t)], max[sup\ K_A(t)\ , 1 - inf\ K_B(t)]\}$

ve

$Y_{A\cap B^C} = \{ max[inf\ Y_A(t)\ , inf\ D_B(t)], max[sup\ Y_A(t)\ , sup\ D_B(t)]\}.$

O zaman, $\forall t \in T$ için, A ve B'nin farkı

$$A \ \ominus \ B \ = \ \{t;\ (min[inf\ D_A(t)\ , inf\ Y_B(t)], min[sup\ D_A(t)\ , sup\ Y_B(t)]),$$
$$(max[inf\ K_A(t)\ , 1 - sup\ K_B(t)], max[sup\ K_A(t)\ , 1 - inf\ K_B(t)]),$$
$$(max[inf\ Y_A(t)\ , inf\ D_B(t)], max[sup\ Y_A(t)\ , sup\ D_B(t)])\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.2.4.:

$T = \{t_1, t_2\}$ olsun.

$A \ = \{ \ t_1; ([0.2,0.3], [0.1,0.4], [0.2,0.5])\}$

ve

$B = \{t_2; ([0.1,0.2], [0.2,0.3], [0.3,0.5])\}$

evrensel T kümesi üzerinde iki tane aralık değerli neutrosophic küme olsun. O zaman, A ve B'nin farkını hesaplayalım.

$A \ominus B = \{t;\ (min[0.2{,}0.3], min[0.3{,}0.5]), (max[0.1{,}0.7],$

$max[0.4{,}0.8]), max[0.2{,}0.1], max[0.5{,}0.2])\}$

$= \{t; ([0.2{,}0.3], [0.7{,}0.8], [0.2{,}0.5])\}.$

4.2.5. Aralık Değerli Neutrosophic Kümelerin Kartezyen Çarpımı

A, evrensel küme T üzerinde aralık değerli neutrosophic bir küme olsun. $\forall t \in T$ için, IVNS A kümesinin kuvveti aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$A = \{t, [inf\, D_A(t)\, , sup\, D_A(t)], [inf\, K_A(t)\, , sup\, K_A(t)],[inf\, Y_A(t)\, , sup\, Y_A(t)]: t \in T\}$

$A^2 = \{t, [inf\, D_A^2(t)\, , sup\, D_A^2(t)], [inf\, K_A^2(t)\, , sup\, K_A^2(t)], [inf\, Y_A^2(t)\, , sup\, Y_A^2(t)]: t \in T\}$

Yukarıdaki denklemde, $\forall t \in T$ için,

$$inf\, D_A^2(t) = [inf\, D_A(t)]^2, \qquad sup\, D_A^2(t) = [sup\, D_A(t)]^2,$$

$$inf\, K_A^2(t) = [inf\, K_A(t)]^2, \qquad sup\, K_A^2(t) = [sup\, K_A(t)]^2,$$

$$inf\, Y_A^2(t) = [inf\, Y_A(t)]^2, \qquad sup\, Y_A^2(t) = [sup\, Y_A(t)]^2$$

eşitliklerini ifade etmektedir.

Benzer şekilde, aralık değerli neutrosophic A kümesinin $m.$ kuvveti A^m ile gösterilir ve

$\forall t \in T$ için, $A^m = \{t, [inf\, D_A^m(t)\, , sup\, D_A^m(t)],$

$[inf\, K_A^m(t)\, , sup\, K_A^m(t)],$

$[inf\, Y_A^m(t)\, , sup\, Y_A^m(t)]; t \in T\}$

şeklinde tanımlanır.

$$D_{A^1}(t), D_{A^2}(t), \dots, D_{A^n}(t),$$

$$K_{A^1}(t), K_{A^2}(t), \dots, K_{A^n}(t)$$

ve

$$Y_{A^1}(t), Y_{A^2}(t), \dots, Y_{A^n}(t),$$

$\forall t \in T$ için, sırasıyla doğruluk-üyelik fonksiyonu, belirsizlik-üyelik fonksiyonu ve yanlışlık-üyelik fonksiyonunu gösterir.

$\forall t \in T$ için n -tane neutrosophic kümenin kartezyen çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$
\begin{aligned}
A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{t; [&min[inf\, D_A^1(t), inf\, D_A^2(t), \dots, inf\, D_A^n(t)], \\
&min[sup\, D_A^1(t), sup\, D_A^2(t), \dots, sup\, D_A^n(t)]\ ], \\
&[max[inf\, K_A^1(t), inf\, K_A^2(t), \dots, inf\, K_A^n(t)], \\
&max[sup\, K_A^1(t), sup\, K_A^2(t), \dots, sup\, K_A^n(t)]\ ], \\
&[\ max[inf\, Y_A^1(t), inf\, Y_A^2(t), \dots, inf\, Y_A^n(t)], \\
&max[sup\, Y_A^1(t), sup\, Y_A^2(t), \dots, sup\, Y_A^n(t)]\ ]\}.
\end{aligned}
$$

Örnek 4.2.6:

$A = \{\, t;\ ([0.2,0.3], [0.1,0.4], [0.2,0.5])\}$

evrensel T kümesi üzerinde aralık değerli bir neutrosophic küme olsun. O zaman, $\forall t \in T$ için, A' nın üçlü kartezyen çarpımını hesaplayalım.

$$
\begin{aligned}
A^3 = A \times A \times A = \{t;\ &\big[min[0.2, 0.04, 0.008], min[0.3, 0.09, 0.027]\big], \\
&\big[max[0.1, 0.01, 0.001], max[0.4, 0.16, 0.064]\big], \\
&max[0.2, 0.04, 0.008], max[0.5, 0.25, 0.125]\} \\
&= \{x;\ [0.008,0.027], [0.1, 0.4], [0.2, 0.5]\}.
\end{aligned}
$$

Buradan elde çıkaracağımız sonuç şu ki kartezyen çarpım işlemlerinde belirsizlik üyelik fonksiyonu ve yanlışlık üyelik fonksiyonu A ile aynı değerlere sahip olur. Buna rağmen, doğruluk üyelik fonksiyonun değeri azalır çünkü değerler 0 ile 1 arasında olduğundan kuvvetleri kendinden daha küçük olur.

4.3. IVNS Üzerinde Diğer Cebirsel İşlemler

Tanım 4.3.1:

A ve B sırasıyla sınırlı evrensel kümeler T ve Y üzerinde iki IVNS olsun. Genişleme ilkesine göre (Teorem 3.2) IVNS A ve B üzerinde cebirsel işlemler yapılır. Öyleyse, toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

1. $\forall t \in T$ için,

$$A * B = \{\langle z, \vee_{z=t*y} \ \{infD_A(t) \wedge infD_B(y)\}, \{supD_A(x)t \wedge supD_B(y)\},$$

$$\wedge_{z=t*y} \ \{infK_A(t) \vee infK_B(y)\}, \{supK_A(t) \vee supK_B(y)\},$$

$$\wedge_{z=t*y} \ \{infY_A(t) \vee infY_B(y)\}, \{supY_A(t) \vee supY_B(y)\}: z = (t, y) \in T \times Y\}$$

Burada ‘ $*$ ’ sembolü ‘ $+$ ’, ‘ $-$ ’, ‘ $\times$ ’ ve ‘ $\div$ ’ cebirsel işlemlerinden herhangi birini göstermektedir. Ancak , ‘ $\div$ ’ bölme işlemi için aşağıdaki koşul sağlanmalıdır:

$\forall y \in Y$ için, $0 \notin supp(B) = \{y \in Y: infD_B(y) \geq 0, supD_B(y) \geq 0, infK_B(y) \leq 1,$

$$supK_B(y) \leq 1, infY_B(y) \leq 1, supY_B(y) \leq 1\}.$$

2. $\forall t \in T$ için, A ve B' nin toplamı $A + B$ ile gösterilir ve

$$A + B = \{\langle z, \vee_{z=t+y} \ \{infD_A(t) \wedge infD_B(y)\}, \{supD_A(t) \wedge supD_B(y)\},$$

$$\wedge_{z=t+y} \ \{infK_A(t) \vee infK_B(y)\}, \{supK_A(t) \vee supK_B(y)\},$$

$$\wedge_{z=t+y} \ \{infY_A(t) \vee infY_B(y)\}, \{supY_A(t) \vee supY_B(y)\}\rangle: z = (t, y) \in T \times Y\},$$

şeklinde tanımlanır.

3. $\forall t \in T$ için, A' dan B' nin çıkarımı $A - B$ ile gösterilir ve

$$A - B = \{\langle z, \vee_{z=t-y} \ \{infD_A(t) \wedge infD_B(y)\}, \{supD_A(t) \wedge supD_B(y)\},$$

$$\wedge_{z=t-y} \ \{infK_A(t) \vee infK_B(y)\}, \{supK_A(t) \vee supK_B(y)\},$$

$\wedge_{z=t-y}\ \{infY_A(t) \vee infY_B(y)\}, \{supY_A(t) \vee supY(y)\}\rangle : z = (t, y) \in T \times Y\big\}$,

şeklinde tanımlanır.

4. $\forall t \in T$ için, A ve B' nin çarpımı $A \times B$ ile gösterilir ve

$A \times B = \big\{\langle z,\ \vee_{z=t\times y}\ \{infD_A(t) \wedge infD_B(y)\}, \{supD_A(t) \wedge supD_B(y)\},$

$\wedge_{z=t\times y}\ \{infK_A(t) \vee infK_B(y)\}, \{supK_A(t) \vee supK_B(y)\},$

$\wedge_{z=t\times y}\ \{infY_A(t) \vee infY_B(y)\}, \{supY_A(t) \vee supY_B(y)\}\rangle : z = (t, y) \in T \times Y\big\}$,

şeklinde tanımlanır.

5. $\forall t \in T$ için, A' nın B' ye bölümü $A \div B$ ile gösterilir ve

$A \div B = \big\{\langle z,\ \vee_{z=t\div y}\ \{infD_A(t) \wedge infD_B(y)\}, \{supD_A(t) \wedge supD_B(y)\},$

$\wedge_{z=t\div y}\ \{infK_A(t) \vee infK_B(y)\}, \{supK_A(t) \vee supK_B(y)\},$

$\wedge_{z=t\div y}\ \{infY_A(t) \vee infY_B(y)\}, \{supY_A(t) \vee supY_B(y)\}\rangle : z = (t, y) \in T \times Y\big\}$

şeklinde tanımlanır.

6. $\forall y \in Y$ ve $\lambda \neq 0$ için, B ile bir λ skalerin çarpımı λB ile gösterilir ve

$\lambda B = \big\{\langle z,\ \vee_{z=\lambda y}\ \{infD_B(y)\}, \{supD_B(y)\},$

$\wedge_{z=\lambda y}\ \{infK_B(y)\}, \{supK_B(y)\},$

$\wedge_{z=\lambda y}\ \{infY_B(y)\}, \{supY_B(y)\}\rangle : y \in Y\big\}$

şeklinde tanımlanır.

Burada, $\lambda = -1$ ise, (6) eşitliği aşağıdaki şekilde yazılır:

7. $\forall y \in Y$ için,

$$-B = \Big\{\big\langle z,\ \vee_{z=-y}\ \{infD_B(y)\}, \{supD_B(y)\},$$

$$\wedge_{z=-y}\ \{infK_B(y)\}, \{supK_B(y)\},$$

$$\wedge_{z=-y}\ \{infY_B(y)\}, \{supY_B(y)\}\big\rangle : y \in Y\Big\}\ .$$

4.3.2. Örnek:

Yukarıdaki cebirsel işlemlerin uygulanabilirliğini ve geçerliğini bir örnek üzerinde gösterelim. A ve B , evrensel $T = \{1,2,3,4,5,6\}$ üzerinde iki tane IVNS olsun.

$$A = \{\langle 1, [0.1, 0.2], [0.3, 0.4], [0.2, 0.3]\rangle, \langle 2, [0.1, 0.2], [0.2, 0.3], [0.1, 0.3]\rangle\}$$

ve

$$B = \{\langle 1, [0.2, 0.3], [0.1, 0.2], [0.2, 0.4]\rangle, \langle 2, [0.3, 0.4], [0.2, 0.3], [0.1, 0.2]\rangle,$$

$$\langle 3, [0.1, 0.2], [0.2, 0.3], [0.2, 0.4]\rangle\}$$

olsun. IVNS A için seviye kümesinin temsilini gösterelim:

$$A = \langle [0.1, 0.2], [0.3, 0.4], [0.2, 0.3]\rangle A_{[0.1,0.2],[0.3,0.4],[0.2,0.3]}$$

$$\cup \langle [0.1, 0.2], [0.2, 0.3], [0.1, 0.3]\rangle A_{\langle [0.1,0.2],[0.2,0.3],[0.1,0.3]\rangle}$$

Yukarıdaki denklemde,

$$A_{[0.1,0.2],[0.3,0.4],[0.2,0.3]} = \{1, 2\}$$

$$A_{\langle [0.1,0.2],[0.2,0.3],[0.3,0.4]\rangle} = \{2\} \text{ dir.}$$

Benzer şekilde, , IVNS B için seviye kümesinin temsili:

$$B = \langle [0.2, 0.3], [0.1,0.2], [0.2,0.4]\rangle B_{\langle [0.2,0.3],[0.1,0.2],[0.2,0.4]\rangle}$$

$$\cup \langle [0.3,0.4], [0.2,0.3], [0.1,0.2]\rangle B_{\langle [0.3,0.4],[0.2,0.3],[0.1,0.2]\rangle}$$

$$\cup \langle [0.1,0.2], [0.2,0.3], [0.2,0.4] \rangle B_{\langle [0.1,0.2],[0.2,0.3],[0.2,0.4] \rangle}$$

Burada

$$B_{\langle [0.2,0.3],[0.1,0.2],[0.2,0.4] \rangle} = \{1\},$$

$$B_{\langle [0.3,0.4],[0.2,0.3],[0.1,0.2] \rangle} = \{2\}$$

ve

$$B_{\langle [0.1,0.2],[0.2,0.3],[0.2,0.4] \rangle} = \{1, 2, 3\}$$

olur.

(2) eşitliğini kullanarak,

$$A + B = \{\langle 2, [0.1, 0.2], [0.3,0.4], [0.2,0.4] \rangle, \langle 3, [0.1,0.2], [0.3,0.4], [0.2,0.4] \rangle,$$
$$\langle 4, [0.1,0.2], [0.3,0.4], [0.2,0.4] \rangle, \langle 5, [0.1,0.2], [0.2,0.3], [0.2,0.4] \rangle\},$$

(3) eşitliğini kullanarak,

$$A - B = \{\langle -2, [0.1, 0.2], [0.3,0.4], [0.2,0.4] \rangle, \langle -1, [0.1,0.2], [0.3,0.4], [0.2,0.4] \rangle,$$
$$\langle 0, [0.1,0.2], [0.3,0.4], [0.2,0.4] \rangle, \langle 1, [0.1,0.2], [0.2,0.3], [0.2,0.4] \rangle\},$$

(4) eşitliğini kullanarak,

$$A \times B = \{\langle 1, [0.1, 0.2], [0.3,0.4], [0.2,0.4] \rangle, \ \langle 2, [0.1,0.2], [0.3,0.4], [0.2,0.4] \rangle,$$
$$\langle 3, [0.1,0.2], [0.3,0.4], [0.2,0.4] \rangle, \ \langle 4, [0.1,0.2], [0.2,0.3], [0.1,0.3] \rangle,$$
$$\langle 6, [0.1,0.2], [0.2,0.3], [0.2,0.4] \rangle\}$$

(5) eşitliğini kullanarak,

$$A \div B = \{\langle 1 / 3, [0.1, 0.2], [0.3,0.4], [0.2,0.4] \rangle, \langle 1 / 2, [0.1,0.2], [0.3,0.4], [0.2,0.3] \rangle,$$
$$\langle 2 / 3, [0.1,0.2], [0.2,0.3], [0.2,0.4] \rangle, \ \langle 1, [0.1,0.2], [0.3,0.4], [0.2,0.4] \rangle,$$
$$\langle 2, [0.1,0.2], [0.2,0.3], [0.2,0.4] \rangle\}$$

(6) eşitliğini kullanarak, $\lambda \neq 0$ olmak üzere

$$\lambda B = \{\langle \lambda, [0.2, 0.3], [0.1,0.2], [0.2,0.4] \rangle, \ \langle 2\lambda, [0.3,0.4], [0.2,0.3], [0.1,0.2] \rangle,$$

$\langle 3\lambda, [0.1,0.2], [0.2,0.3], [0.2,0.4]\rangle\}$

(7) eşitliğini kullanarak,

$-B = \{\langle -1, [0.2, 0.3], [0.1,0.2], [0.2,0.4]\rangle,\ \langle -2, [0.3,0.4], [0.2,0.3], [0.1,0.2]\rangle,$

$\langle -3, [0.1,0.2], [0.2,0.3], [0.2,0.4]\rangle\}$

sonuçlarını elde ederiz.

5.BÖLÜM

SONUÇ

Bu tezde, aralık değerli neutrosophic kümelerin (ζ,η,θ)-kesim kümesi ve aralık değerli neutrosophic kümelerin (ζ,η,θ)- güçlü kesim kümeleri gibi yeni kavramlar tanıtılmıştır. Daha sonra, aralık değerli neutrosophic kümelerin seviye kümelerinin temsil ve genişleme ilkeleri tanımlanmış ve bu kavramlarla ilgili teoremler ispatlanmıştır. Ayrıca, iki tane aralık değerli neutrosophic kümenin ayrıştırıcı toplamları, farkları ve kartezyen çarpımları tanımlanarak temel özellikleri hakkında bilgiler verilmiştir. Son olarak, iki tane aralık değerli neutrosophic kümeler üzerinde cebirsel işlemler tanımlanmıştır. Aralık değerli neutrosophic kümeler çok daha fazla alana uygulanarak belirsizlik içeren birçok problemi çözülebilir. Bilgisayar bilimi, ekonomi problemleri, işletme problemleri ve daha birçok alan örnek gösterilebilir. Bu tezde tanımlanan yeni kavramlar aralık değerli neutrosophic kümeler üzerine yapılacak çalışmalarla genişletilebilir

KAYNAKLAR

[1] Broumi, S., Deli, I., Smarandache, F. (2015). N-valued interval neutrosophic sets and their application in medical diagnosis. *Critical Review, Center for Mathematics of Uncertainty, Creighton University, Omaha, NE, USA*, **10**, 45-69.

[2] Wang, H., Smarandache, F., Sunderraman, R., Zhang, Y. Q. (2005). *interval neutrosophic sets and logic: theory and applications in computing: Theory and applications in computing* (Vol. 5). Infinite Study.

[3] Sweety, C. A. C., Arockiarani, I. Rough sets in neutrosophic approximation space. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics.[accepted]*.

[4] Arockiarani, I., Sumathi, I. R. (2014). • On (**α**,**β**,)-Cut Fuzzy Neutrosophic Soft Sets. *International Journal of Mathematical Archive (IJMA) ISSN 2229-5046*, **5(1).**

[5] Adak, A. K., Bhowmik, M. (2011). Interval cut-set of interval-valued intuitionistic fuzzy sets. *African Journal of Mathematics and Computer Science Research*, **4(4),** 192-200.

[6] Smarandache, F., A Unifying Field in Logics. Neutrosophy*: Neutrosophic Probability, Set and Logic, Rehoboth: American Research Press,(1998).*

[7] Atanassov, K. T., Intuitionistic Fuzzy Set, Fuzzy Sets and Systems, (1986).87-86.

[8] Wang, H., Smarandache, F., Zhang, Y. Q., Sunderraman, R., Interval Neutrosophic Sets and Logic: Theory and Applications in Computing, Hexis, Phoenix, AZ, (2005).

[9] Broumi, S., Talea, M., Bakali, A., Smarandache, F. (2016). Interval valued neutrosophic graphs. *Publ Soc Math Uncertain*, **10(5).**

[10] Broumi, S., Bakali, A., Talea, M., Smarandache, F. (2016). Isolated single valued neutrosophic graphs. *Neutrosophic Sets Syst*, **11**, 74-78.

[11] Broumi, S., Bakali, A., Talea, M., Smarandache, F., Ali, M. (2017). Shortest Path Problem under Bipolar Neutrosphic Setting. *Applied Mechanics & Materials*, *859*.

[12] Zhang, C., Li, D., Mu, Y., Song, D. (2017). An interval-valued hesitant fuzzy multigranulation rough set over two universes model for steam turbine fault diagnosis. *Applied Mathematical Modelling,* **42**, 693-704.

[13] Mukherjee, A., Datta, M., Sarkar, S. (2016). Restricted Interval Valued Neutrosophic Sets and Restricted Interval Valued Neutrosophic Topological Spaces. *Neutrosophic Sets and Systems*, **45**.

[14] Smarandache, F. (2017). Neutrosophic Modal Logic.

[15] Peng, J. J., Wang, J. Q., Yang, W. E. (2017). A multi-valued neutrosophic qualitative flexible approach based on likelihood for multi-criteria decision-making problems. *International Journal of Systems Science*, **48(2),** 425-435.

[16] Şahin, R., Liu, P. (2017). Some approaches to multi criteria decision making based on exponential operations of simplified neutrosophic numbers. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **32(3),** 2083-2099.

[17] Liu, C. Interval Neutrosophic Fuzzy Stochastic Multi-Criteria Decision-making Methods Based on MYCIN Certainty Factor and Prospect Theory.

[18] Liu, P., Wang, Y. (2016). Interval neutrosophic prioritized OWA operator and its application to multiple attribute decision making. *Journal of Systems Science and Complexity*, **29(3),** 681-697.

[19] Liu, P., Tang, G. (2016). Some power generalized aggregation operators based on the interval neutrosophic sets and their application to decision making. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **30(5),** 2517-2528.

[20] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, **8(3),** 338-353.