NİSAN 2018 Yüksek Lisans – Matematik Bölümü FATİH SÜLEYMAN YILMAZ

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YAMUKSAL BULANIK ÇOKLU SAYILAR ÜZERİNDE BENZERLİK ÖLÇÜMLERİ VE ONLARIN ÇOKLU-KRİTERLİ KARAR VERME METOTLARINA UYGULAMALARI

MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATİH SÜLEYMAN YILMAZ

NİSAN 2018

Yamuksal Bulanık Çoklu Sayılar Üzerinde Benzerlik Ölçümleri Ve Onların Çoklu-Kriterli Karar Verme Metotlarına Uygulamaları

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Memet ŞAHİN

Fatih Süleyman YILMAZ

Nisan 2018

T.C.

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tezin Adı: Yamuksal Bulanık Çoklu Sayılar Üzerinde Benzerlik Ölçümleri Ve Onların Çoklu-Kriterli Karar Verme Metotlarına Uygulamaları

Öğrencinin, Adı Soyadı: Fatih Süleyman YILMAZ

Tez Savunma Tarihi: 16.04.2018

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ahmet Necmeddin YAZICI

FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Memet ŞAHİN

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:	İmzası
Doç. Dr. Memet KULE	....
Doç. Dr. Memet ŞAHİN	....
Doç. Dr. Necati OLGUN	....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Fatih Süleyman YILMAZ

ABSTRACT

SIMILARITY MEASURES ON TRAPEZOIDAL FUZZY MULTI-NUMBERS AND THEIR APPLICATION TO MULTIPLE CRITERIA DECISION MAKING PROBLEMS

YILMAZ, Fatih Süleyman

M.Sc. in Department of Mathematics

Supervisor:Assoc. Prof. Dr.Memet ŞAHİN

April 2018

41 pages

In this thesis, concepts of fuzzy set, fuzzy numbers, multi-fuzzy set and similarity measures for TFMN's including Dice similarity measure, Jaccard similarity measure, Cosine similarity measure and Hybrid similarity measure which will be used in the next sections are given. Dice, Jaccard, Cosine and Hybrid similarity measures are defined to improve on the trapezoidal fuzzy multi-numbers and decision making methods for multi-criteria decision making problems have been studied with this similarity measures.Besides these; Weighted Dice, Weighted Jaccard, Weighted Cosine and Weighted Hybrid similarity measures are defined to develope the Trapezoidal Fuzzy Multi-Numbers.Also we investigate the propositions of the similarity measures. Additionally, multi-criteria decision making methods for TFMN are studied based on these given similarity measures. Practical examples are shown to approve the feasibility of the new methods. As a result, we compare the proposed methods with the existing methods in order to show the effectiveness and efficiency of the developed method in this thesis.

KeyWords: Trapezoidal Fuzzy Multi Numbers, Dice similarity measure, Jaccard similarity measure, Cosine similarity measure, Hybrid similarity measure, multi-criteria decision making.

ÖZET

YAMUKSAL BULANIK ÇOKLU SAYILAR ÜZERİNDE BENZERLİK ÖLÇÜMLERİ VE ONLARIN ÇOKLU-KRİTERLİ KARAR VERME METOTLARINA UYGULAMALARI

YILMAZ, Fatih Süleyman

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Danışman:Doç. Dr. Memet ŞAHİN

Nisan 2018

41 sayfa

Bu tezde, bulanık küme, bulanık sayılar, çoklu bulanık küme kavramlarının yanı sıra yamuksal bulanık çoklu sayılar için Dice benzerlik ölçüsü, Jaccard benzerlik ölçüsü, Cosine benzerlik ölçüsü ve Hybrid benzerlik ölçüsü kavramları verilmiştir. Dice, Jaccard, Cosine ve Hybrid benzerlik ölçümleri yamuksal bulanık çoklu sayılar için geliştirilip tanımlanarak, bu benzerlik ölçümlerini kullanarak çok kriterli karar verme problemleri için karar verme metodları üzerinde çalışılmıştır. Bunların yanı sıra; yamuksal bulanık çoklu sayılar için, ağırlıklı Dice, ağırlıklı Jaccard, ağırlıklı Cosine ve ağırlıklı Hybrid benzerlik ölçümleri üzerinde çalışılmıştır. Ayrıca, çalışılan bu yeni benzerlik ölçümleri için önermeler üzerinde durulmuştur. Yamuksal bulanık çoklu sayılar için çok kriterli karar verme metodları, verilen bu benzerlik ölçümlerine dayalı olarak çalışılmıştır. Uygulama kısmında yeni metodların uygulanabilirliği gösterilerek kanıtlanmıştır. Sonuç olarak, bu tezde geliştirilen metodun etkinliği ve verimliliğini göstermek için, var olan metodlar ile geliştirerek öne sürülen metodların karşılaştırması yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Yamuksal bulanık çoklu sayılar, Dice benzerlik ölçüsü, Jaccard benzerlik ölçüsü, Cosine benzerlik ölçüsü, Hybrid benzerlik ölçüsü, çok kriterli karar verme.

Çok kıymetli aileme...

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim süresince, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, bana her türlü konuda destek veren ve tezimin hazırlanmasında büyük emeği geçen, kendilerine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanlarını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan, her sorun yaşadığımda yanlarına çekinmeden gidebildiğim, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen ve gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerinden faydalanacağımı düşündüğüm Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Memet ŞAHİN'e ve Dr. Vakkas ULUÇAY'a teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum.

Son olarak da; yüksek lisans öğrenimim boyunca gösterdiği sabır ve verdiği her türlü destek için sevgili eşim Sümeyye YILMAZ ve canım oğlum Muhammed Ali YILMAZ'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

SEMBOLLER / KISALTMALAR LİSTESİ

r^+	Yamuksal sezgisel bulanık sayılar için karar verme matrisinin pozitif ideal çözümü
r^-	Yamuksal sezgisel bulanık sayılar için karar verme matrisinin negatif ideal çözümü
YBS	Yamuksal bulanık sayı
YBÇS	Yamuksal bulanık çoklu sayı
$D(A,B)$	Yamuksal bulanık çoklu sayılar için Dice benzerlik ölçüsü
$J(A,B)$	Yamuksal bulanık çoklu sayılar için Jaccard benzerlik ölçüsü
$C(A,B)$	Yamuksal bulanık çoklu sayılar için Cosine benzerlik ölçüsü
$HybV(A,B)$	Yamuksal bulanık çoklu sayılar için Hybrid vektör benzerlik ölçüsü
$D_w(A,B)$	Yamuksal bulanık çoklu sayılar için Ağırlıklı Dice benzerlik ölçüsü
$J_w(A,B)$	Yamuksal bulanık çoklu sayılar için Ağırlıklı Jaccard benzerlik ölçüsü
$C_w(A,B)$	Yamuksal bulanık çoklu sayılar için Ağırlıklı Cosine benzerlik ölçüsü
$HybV_w(A,B)$	Yamuksal bulanık çoklu sayılar için Ağırlıklı Hybrid vektör benzerlik ölçüsü.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Zadeh [30], kesin (net) olmayan bilgi üzerinde çalışmak amacıyla, 1965'te bulanık kümeler kavramını öne sürdü. Bulanık kümenin tanımı yapıldıktan sonra, bilim ve teknoloji, oyun teorisi, çok değişkenli sistemler, kontrol sistemleri, karar verme ve benzeri alanlarda başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Bulanık kümelerde, evrensel küme içerisinde [0,1] kapalı aralığında bir üyelik değeri bulunmaktadır; fakat, bazı problemlerde tam olarak sonucu elde etmede üyelik değeri yeterli olmayabilir. Çünkü her elemanın farklı bir üyelik değerine sahip olduğu durumlarla karşılaşılabilir. Bu yüzden, bulanık kümelerin farklı bir kombinasyonu, yani, çoklu bulanık kümeler kavramı öne sürüldü. Yager [29], bulanık kümelerin ve çoklu kümelerin bir kombinasyonu olarak çoklu bulanık kümeleri öne sürdü. Çoklu bulanık bir kümenin bir elemanı, [0,1] kapalı aralığında birden fazla üyelik değerine sahip olabilir. (yani, orada bir elemanın farklı üyelik değerleri ile tekrar eden durumları olabilir.) Miyamoto [6,7], Maturo [8], Syropoulos [20, 21], Sebastian ve Ramakrishnan [19] ve diğerleri çoklu kümeler üzerinde çeşitli çalışmalar yapmışlardır. Son zamanlarda, bulanık sayılar üzerinde yoğun bir şekilde araştırmalar yapılmıştır. Örneğin, Thouhida ve Ahmad [25] tarafından bulanık sayılar üzerinde lineer üyelik fonksiyonları ile ilgili çeşitli aritmetik çalışmalar yapılmıştır. Chakrabort and Guha [4] genişletme ilkesini kullanarak genelleştirilmiş bulanık sayılar üzerinde çeşitli aritmetik işlemleri geliştirdiler. Alim et al. [1], L-R bulanık sayısı üzerinde temel işlemler için yeni bir metod geliştirmiştir. Roseline and Amirtharaj [15], genelleştirilmiş yamuksal bulanık sayı problemlerine bir çözüm bulmak amacıyla, genelleştirilmiş bulanık Macar metodunu daha ileri aşamalara kadar getirdiler ve genelleştirilmiş yamuksal bulanık sayıların sıralaması için bir formül üzerinde çalıştılar. Buna ek olarak, Roseline and Amirtharaj [16] sıralama, çevre uzunluğu, mod, ıraksaklık ve yayılmaya dayalı genelleştirilmiş yamuksal bulanık sayıların sıralama tekniğini üzerinde çalıştılar. Meng et al [9] ortalama alan ölçümü metoduna bağlı olarak, yamuksal bulanık sayıların çok kriterli karar verme metodu üzerinde çalıştı. Surapati and Biswas [18], bulanık sayılarda maliyet ve zaman kavramlarını kullanarak çok kriterli karar verme problemleri üzerinde çalışmışlardır. Wang [10], iki bulanık sayının karşılaştırılması yapılırken üyelik fonksiyonları ve elemanlarının sıralaması üzerine çalışmalar yapmıştır. Sinova et al. [23], bulanık sayılarda moment üreten fonksiyonu genişleterek, çeşitli faktörlerin dağılım kuralını öne sürdü. Riera and Torrens [14], bütün ve bütün olmayan niteliksel bilgiyi örnek alarak ayrık bulanık sayılar üzerinde çalışmalar yapmışlardır.

Son zamanlarda bulanık sayılarla ilgili farklı çalışmalar yapılmıştır. Örneğin; bulanık sayıların üçgensel yaklaşımlarının varlığı, tekliği, hesabı ve özellikleri üzerine [2], üçgensel bulanık sayıların çarpımı ile matris oyunları üzerine [3], acil durum reaksiyonunda, acil karar alıcılar üzerinde [17], genel bulanık sayıların durulaştırılması üzerine [11], ayrık bulanık sayılara dayalı bulanık dilsel model üzerine [13], bulanık sayısının olasılıksal karakterizasyon işlevi üzerine [22], bulanık sayıların aritmetiğine olasılık yaklaşımı üzerine [24] vb. gibi örnekler verilebilir.

Çok kriterli karar verme problemleri araştırmacılar tarafından çok büyük ilgi görmektedir. Çünkü operasyon araştırması, mühendislik, yönetim ve sinyal işleme gibi pek çok alanda büyük oranda kabul görmektedir. Çok kriterli karar verme problemleri ile birçok durumda karşılaşılabilmektedir. Bunlar olası durumda olan alternatifler ve kriterlerin sayısının önceden tanımlanmış özelliklere dayalı olarak seçilmesi gereken durumlardır. Yapılan araştırma çalışmalarının çoğu, çok kriterli karar verme problemleri üzerine yapılmaktadır. Burada alternatif ve tercihlerin değerleri net sayılar ile ifade edilememektedir. Örnek verilecek olursa, daha esnek ve belirsizliği ifade etmekte olan; aralık sayıları, bulanık sayılar, aralık değerli bulanık sayılar, sezgisel bulanık sayılar, aralık değerli sezgisel bulanık sayılar vb. dir. Fakat bazı durumlarda; zaman baskısı, problemin karmaşıklığı, bilgi işleme kapasitesinin yetersizliği, kamusal alan hakkında yetersiz bilgi vb nedenlerden dolayı, karar vericiler çok kriterli karar vermede yer alan karar parametrelerinin tam olarak değerini sağlayamaz. Böyle durumlarda, karar vericiler tarafından temin edilen kriterlere göre alternatiflerin tercih bilgisi tamamlanmamış veya eksik olabilmektedir.

Tezde bulanık küme, bulanık sayılar, çoklu bulanık küme kavramları ile Dice, Jaccard, Cosine ve Hybrid 'i içeren benzerlik ölçümü kavramları bazı işlemleri ile birlikte ele alındı. Yamuksal bulanık çoklu sayılar için Dice, Jaccard, Cosine ve Hybrid vektör benzerlik ölçümleri tanımlandı. Bu benzerlik ölçümleri ispatları ile birlikte açıklandı. Yamuksal bulanık sayılar üzerine tanımlanan benzerlik ölçüleri ile çok kriterli karar verme problemleri için karar verme metodu üzerinde çalışıldı. Geliştirilen bu yöntem ile alternatiflerin sıralamasını gösteren bir uygulama verildi. Son olarak, benzerlik ile ilgili geliştirmiş olduğumuz yaklaşımların etkinliliği ve verimliliği ile ilgili sonuç ve tartışma kısmına yer verildi.

BÖLÜM 2

GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, bulanık kümeler ile ilgili gerekli temel bilgiler, kavramlar ve sonuçlar üzerinde çalışılmıştır.

Tanım 2.1:

[30] $X = \{x : x \in X\}$ kümesi verilmiş olsun. $\forall\, x \in X$ için $\mu_F(x) \in [0,1]$ olmak üzere

$$\mu_F : X \rightarrow [0,1]$$

kümesine X ' in F *bulanık kümesi* denir. μ_F fonksiyonuna F bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu, $\mu_F(x)$ değerine x' in üyelik derecesi (ya da değeri) ve $\mu_F(X)$ kümesine de F bulanık kümesine ait elemanların üyelik derecelerinin kümesi denir.

Tanım 2.2:

[31] t-normu $[0,1]\times[0,1]$'den $[0,1]$'e birleşmeli, monoton ve değişmeli iki değerli bir fonksiyon olup, şu özellikleri sağlar;

1. $t(0,0) = 0$ ve $t(\mu_{x_1}(\mathrm{x}),1) = t(1,\mu_{x_1}(\mathrm{x})) = \mu_{x_1}(\mathrm{x})$,

2. Eğer $\mu_{x_1}(\mathrm{x}) \leq \mu_{x_3}(\mathrm{x})$ ve $\mu_{x_2}(\mathrm{x}) \leq \mu_{x_4}(\mathrm{x})$ ise, o zaman $t(\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x})) \leq t(\mu_{x_3}(\mathrm{x}),\mu_{x_4}(\mathrm{x}))$ olur.

3. $t(\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x})) = t(\mu_{x_2}(\mathrm{x}),\mu_{x_1}(\mathrm{x}))$,

4. $t(\mu_{x_1}(\mathrm{x}),t(\mu_{x_2}(\mathrm{x}),\mu_{x_3}(\mathrm{x}))) = t(t(\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x})),\mu_{x_3}(\mathrm{x}))$,

Tanım 2.3:

[31] s-normu $[0,1]\times[0,1]$' den $[0,1]$' e birleşmeli, monoton ve değişmeli iki değerli bir fonksiyon olup, şu özellikleri sağlar;

1. $s(1,1)=1$ ve $s(\mu_{x_1}(\mathrm{x}),0)=s\left(0,\mu_{x_1}(\mathrm{x})\right)=\mu_{x_1}(\mathrm{x})$,

2. Eğer $\mu_{x_1}(\mathrm{x})\leq\mu_{x_3}(\mathrm{x})$ ve $\mu_{x_2}(\mathrm{x})\leq\mu_{x_4}(\mathrm{x})$ ise, o zaman $s(\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x}))\leq s(\mu_{x_3}(\mathrm{x}),\mu_{x_4}(\mathrm{x}))$ olur.

3. $s(\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x}))=s(\mu_{x_2}(\mathrm{x}),\mu_{x_1}(\mathrm{x}))$,

4. $s(\mu_{x_1}(\mathrm{x}),s(\mu_{x_2}(\mathrm{x}),\mu_{x_3}(\mathrm{x})))=s(s(\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x})),\mu_{x_3}(\mathrm{x}))$.

t-norm ve t-conorm mantıksal ilişki açısından birbiriyle bağlantılıdır. Parametreli olmayan t-norm ve t-conorm tipik ikili çiftlerinin özellikleri aşağıda verilmiştir:

1. Sert çarpım:

$$t_w(\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x}))=\begin{cases}\min\left\{\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x})\right\}, & \max\left\{\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x})\right\}=1\\ 0 & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

2. Sert toplam:

$$s_w(\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x}))=\begin{cases}\max\left\{\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x})\right\}, & \min\left\{\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x})\right\}=0\\ 1 & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

3. Sınırlı çarpım:

$$t_1(\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x}))=\text{maks}\left\{0,\mu_{x_1}(\mathrm{x})+\mu_{x_2}(\mathrm{x})-1\right\}$$

4. Sınırlı toplam:

$$s_1(\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x}))=\min\left\{1,\mu_{x_1}(\mathrm{x})+\mu_{x_2}(\mathrm{x})\right\}$$

5. Einstein çarpımı:

$$t_{1.5}(\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x}))=\frac{\mu_{x_1}(\mathrm{x}).\mu_{x_2}(\mathrm{x})}{2-[\mu_{x_1}(\mathrm{x})+\mu_{x_2}(\mathrm{x})-\mu_{x_1}(\mathrm{x}).\mu_{x_2}(\mathrm{x})]}$$

6. Einstein toplamı:

$$s_{1.5}(\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x}))=\frac{\mu_{x_1}(\mathrm{x})+\mu_{x_2}(\mathrm{x})}{1+\mu_{x_1}(\mathrm{x}).\mu_{x_2}(\mathrm{x})}$$

7. Cebirsel çarpım:

$$t_2(\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x}))=\mu_{x_1}(\mathrm{x}).\mu_{x_2}(\mathrm{x})$$

8. Cebirsel toplam:

$$s_2(\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x}))=\mu_{x_1}(\mathrm{x})+\mu_{x_2}(\mathrm{x})-\mu_{x_1}(\mathrm{x}).\mu_{x_2}(\mathrm{x})$$

9. Hamacher çarpımı:

$$t_{2.5}(\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x}))=\frac{\mu_{x_1}(\mathrm{x}).\mu_{x_2}(\mathrm{x})}{\mu_{x_1}(\mathrm{x})+\mu_{x_2}(\mathrm{x})-\mu_{x_1}(\mathrm{x}).\mu_{x_2}(\mathrm{x})}$$

10. Hamacher toplamı:

$$s_{2.5}(\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x}))=\frac{\mu_{x_1}(\mathrm{x})+\mu_{x_2}(\mathrm{x})-2.\mu_{x_1}(\mathrm{x}).\mu_{x_2}(\mathrm{x})}{1-\mu_{x_1}(\mathrm{x}).\mu_{x_2}(\mathrm{x})}$$

11. Minimum:

$$t_3(\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x}))=\min\left\{\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x})\right\}$$

12. Maksimum:

$$s_3(\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x}))=\mathrm{maks}\left\{\mu_{x_1}(\mathrm{x}),\mu_{x_2}(\mathrm{x})\right\}$$

Tanım 2.4:

[19] X boş olmayan bir küme olsun. X üzerinde her $x\in X$ için $\mu_G^i : X\to[0,1]$ (i $\in$ $\{1,2,...,p\}$) fonksiyonuna G çoklu-bulanık kümesi denir ve $G=\left\{\left\langle x,\mu_G^1(\mathrm{x}),\mu_G^2(\mathrm{x}),...,\mu_G^i(\mathrm{x}),...\right\rangle : x\in X\right\}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.5:

[37] $\eta_A^i \in [0,1]$ $(i \in \{1,2,...,p\})$ ve $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ olsun öyle ki $a \le b \le c \le d$. O zaman, $\tilde{a} = \langle (a,b,c,d); \eta_A^1, \eta_A^2, ..., \eta_A^p \rangle$ yamuksal bulanık çoklu sayısı (YBÇ sayısı) üyelik fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlı olan $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde özel bir bulanık çoklu kümedir.

$$\mu_A^i(x) = \begin{cases} (x - a_1)\eta_A^i / (b_1 - a_1) & a_1 \le x \le b_1 \\ \eta_A^i & b_1 \le x \le c_1 \\ (d_1 - x)\eta_A^i / (d_1 - c_1) & c_1 \le x \le d_1 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Not: $\mathbb{R}$ üzerindeki bütün YBÇ sayılarının kümesi Λ ile gösterilir.

Tanım 2.6:

[37] $A = \langle (a_1,b_1,c_1,d_1); \eta_A^1, \eta_A^2, ..., \eta_A^p \rangle$, $B = \langle (a_2,b_2,c_2,d_2); \eta_B^1, \eta_B^2, ..., \eta_B^p \rangle \in \Lambda$ ve $\gamma \ne 0$ herhangi bir reel sayı olsun. O zaman,

1. $A + B = \langle (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2); s(\eta_A^1, \eta_B^1), s(\eta_A^2, \eta_B^2), ..., s(\eta_A^p, \eta_B^p) \rangle$,

2. $A - B = \langle (a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2); s(\eta_A^1, \eta_B^1), s(\eta_A^2, \eta_B^2), ..., s(\eta_A^p, \eta_B^p) \rangle$,

3. $$A.B = \begin{cases} \langle (a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, d_1d_2); \\ t(\eta_A^1, \eta_B^1), t(\eta_A^2, \eta_B^2), ..., t(\eta_A^p, \eta_B^p) \rangle & (d_1 > 0, d_2 > 0) \\ \langle (a_1d_2, b_1c_2, c_1b_2, d_1a_2); \\ t(\eta_A^1, \eta_B^1), t(\eta_A^2, \eta_B^2), ..., t(\eta_A^p, \eta_B^p) \rangle & (d_1 < 0, d_2 > 0) \\ \langle (d_1d_2, c_1c_2, b_1b_2, a_1a_2); \\ t(\eta_A^1, \eta_B^1), t(\eta_A^2, \eta_B^2), ..., t(\eta_A^p, \eta_B^p) \rangle & (d_1 < 0, d_2 < 0) \end{cases}$$

$$4.\ A/B=\begin{cases}\langle (a_1/d_2, b_1/c_2, c_1/b_2, d_1/a_2); & (d_1>0, d_2>0)\\ t(\eta_A^1,\eta_B^1), t(\eta_A^2,\eta_B^2),\dots,t(\eta_A^p,\eta_B^p)\rangle & \\ \langle (d_1/d_2, c_1/c_2, b_1/b_2, a_1/a_2); & (d_1<0, d_2>0)\\ t(\eta_A^1,\eta_B^1), t(\eta_A^2,\eta_B^2),\dots,t(\eta_A^p,\eta_B^p)\rangle & \\ \langle (d_1/a_2, c_1/b_2, b_1/c_2, a_1/d_2); & (d_1<0, d_2<0)\\ t(\eta_A^1,\eta_B^1), t(\eta_A^2,\eta_B^2),\dots,t(\eta_A^p,\eta_B^p)\rangle & \end{cases}$$

$$5.\ \gamma A=\langle (\gamma a_1,\gamma b_1,\gamma c_1,\gamma d_1); 1-(1-\eta_A^1)^\gamma, 1-(1-\eta_A^2)^\gamma,\dots,1-(1-\eta_A^p)^\gamma\rangle (\gamma\geq 0),$$

$$6.\ A^\gamma=\langle (a_1^\gamma, b_1^\gamma, c_1^\gamma, d_1^\gamma); (\eta_A^1)^\gamma, (\eta_A^2)^\gamma,\dots,(\eta_A^p)^\gamma\rangle (\gamma\geq 0).$$

Tanım 2.7:

[37] $A=\langle (a_1,b_1,c_1,d_1):\eta_A^1,\eta_A^2,\dots,\eta_A^p\rangle\in\Lambda$ olsun. O zaman, A' nın normalleştirilmiş YBÇ- sayısı,

$$\overline{A}=\left\langle\left(\frac{a_1}{a_1+b_1+c_1+d_1},\frac{b_1}{a_1+b_1+c_1+d_1},\frac{c_1}{a_1+b_1+c_1+d_1},\frac{d_1}{a_1+b_1+c_1+d_1}\right);\eta_A^1,\eta_A^2,\dots,\eta_A^p\right\rangle.$$

olur.

Tanım 2.8:

$X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ve $Y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ bütün koordinatları pozitif olan n uzunluklu iki vektör olsun. O zaman, $X.Y=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$, X ve Y vektörlerinin iç çarpımı ve $[\![X]\!]_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x^2}$ ve $[\![Y]\!]_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y^2}$, X ve Y'nin Öklid normları (aynı zamanda L_2 normları) olmak üzere, bu iki vektörün Jaccard indeksi (diğer bir ifadeyle Jaccard benzerlik ölçüsü) (Jaccard 1901) şu şekilde hesaplanır;

$$J=\frac{X.Y}{[\![X]\!]_2^2+[\![Y]\!]_2^2-X.Y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i} \qquad [39]$$

O zaman, Dice benzerlik ölçüsü (Dice 1945) şu şekilde hesaplanır;

$$D(X,Y) = \frac{2X.Y}{[\![X]\!]_2^2 + [\![Y]\!]_2^2} = \frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2} \qquad [26]$$

Cosine formülü (Salton ve McGill 1987) ise, o zaman bu iki vcktörün iç çarpımının uzunlukları çarpımına bölünmesi şeklinde tanımlanır. Bu değer bu iki vektör arasındaki açının cosine değeridir. O zaman, bu Cosine ölçümü şu şekilde hesaplanır:

$$\mathrm{Cos} = \frac{X.Y}{[\![X]\!]_2 . [\![Y]\!]_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}} \qquad [38]$$

Bu üç formül $[0,1]$ aralığında almış oldukları değerler anlamında benzerdir. Eğer bütün *i*, $(i = 1,2,...,n)$ değerleri için $x_i = y_i = 0$ ise, verilen Jaccard ve Dice formülleri tanımsız olur ve *i*, $(i = 1,2,...,n)$ değerleri için $x_i = y_i = 0$ olduğunda, bu ölçüm değerleri sıfır olarak kabul edilir. Fakat, bütün *i*, $(i = 1,2,...,n)$ değerleri için $x_i = 0$ ve/veya $y_i = 0$ ise, yukarıda verilen Cosine formülü tanımsız olur ve *i*, $(i = 1,2,...,n)$ değerleri için $x_i = 0$ ve/veya $y_i = 0$ olduğunda, Cosine ölçüm değeri sıfır olarak kabul edilir.

BÖLÜM 3

YAMUKSAL BULANIK ÇOKLU SAYILAR ÜZERİNE BAZI ÇOK KRİTERLİ KARAR VERME METOTLARI

3.1 Yamuksal Bulanık Çoklu Sayılar (YBÇS) ile Çok-Kriterli Karar Vermeye Dayalı Dice Vektör Benzerlik Ölçüsü

Bu bölümde yamuksal bulanık çoklu sayılar için Dice benzerlik ölçüsü üzerinde çalışılmıştır.

Tanım 3.1.1:

$A=\left\langle (a_1,a_2,a_3,a_4);\eta_A^1,\eta_A^2,\dots,\eta_A^p\right\rangle$, $B=\left\langle (b_1,b_2,b_3,b_4);\eta_B^1,\eta_B^2,\dots,\eta_B^p\right\rangle$ $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde iki adet YBÇS olsun. O zaman; A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasındaki $D(A,B)$ ile gösterilen Dice benzerlik ölçüsü;

$$D(A,B)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1+d(A,B)}\cdot\frac{2(\eta_A^1(x_j).\eta_B^1(x_j)+\dots+\eta_A^p(x_j).\eta_B^p(x_j))}{(\eta_A^1)^2(x_j)+(\eta_B^1)^2(x_j)+\dots+(\eta_A^p)^2(x_j)+(\eta_B^p)^2(x_j)}\right)$$

dir.

$$d(A,B) = |K(A)-K(B)|$$

$$K(A)=\frac{a_1+2a_2+2\,a_3+a_4}{6},\qquad K(B)=\frac{b_1+2b_2+2\,b_3+b_4}{6}$$

Önerme 3.1.2:

A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasındaki Dice benzerlik ölçüsü $D(A,B)$ için;

i. $0 \le D(A,B) \le 1$

ii. $D(A,B)=D(B,A)$

iii. $A=B$ ise $D(A,B)=1$ dir.

İspat 3.1.3

i. Tanım 3.1.1'ten açıktır.

ii. $$D(A,B)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1+d(A,B)}\cdot\frac{2(\eta_A^1(x_j).\eta_B^1(x_j)+...+\eta_A^p(x_j).\eta_B^p(x_j))}{(\eta_A^1)^2(x_j)+(\eta_B^1)^2(x_j)+...+(\eta_A^p)^2(x_j)+(\eta_B^p)^2(x_j)}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1+d(B,A)}\cdot\frac{2(\eta_B^1(x_j).\eta_A^1(x_j)+...+\eta_B^p(x_j).\eta_A^p(x_j))}{(\eta_B^1)^2(x_j)+(\eta_A^1)^2(x_j)+...+(\eta_B^p)^2(x_j)+(\eta_A^p)^2(x_j)}\right)$$

$$=D(B,A).$$

iii. $$D(A,B)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1+d(A,B)}\cdot\frac{2(\eta_A^1(x_j).\eta_B^1(x_j)+...+\eta_A^p(x_j).\eta_B^p(x_j))}{(\eta_A^1)^2(x_j)+(\eta_B^1)^2(x_j)+...+(\eta_A^p)^2(x_j)+(\eta_B^p)^2(x_j)}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1+d(A,A)}\cdot\frac{2(\eta_A^1(x_j).\eta_A^1(x_j)+...+\eta_A^p(x_j).\eta_A^p(x_j))}{(\eta_A^1)^2(x_j)+(\eta_A^1)^2(x_j)+...+(\eta_A^p)^2(x_j)+(\eta_A^p)^2(x_j)}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1+0}\cdot\frac{2\left[(\eta_A^1)^2(x_j)+(\eta_A^2)^2(x_j)+...+(\eta_A^p)^2(x_j)\right]}{2\left[(\eta_A^1)^2(x_j)+(\eta_A^2)^2(x_j)+...+(\eta_A^p)^2(x_j)\right]}\right)$$

$$=\frac{1}{1+0}\cdot\frac{2.1}{2.1}$$

$$=1.$$

Örnek 3.1.4:

$A=\langle(1,2,3,4);0.3,0.2,0.4,0.6\rangle$, $B=\langle(3,5,7,9);0.2,0.3,0.4,0.5\rangle$ $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde iki adet YBÇS olsun. O zaman; A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasındaki Dice benzerlik ölçüsü;

$$K(A)=\frac{1+4+6+4}{6}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}=2{,}5$$

$$K(B)=\frac{3+10+14+9}{6}=\frac{36}{6}=6$$

$$d(A,B)=|K(A)-K(B)|=|2{,}5-6|=3{,}5$$

$$D(A,B)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1+d(A,B)}\cdot\frac{2(\eta_A^1(x_j).\eta_B^1(x_j)+...+\eta_A^p(x_j).\eta_B^p(x_j))}{(\eta_A^1)^2(x_j)+(\eta_B^1)^2(x_j)+...+(\eta_A^p)^2(x_j)+(\eta_B^p)^2(x_j)}\right).$$

$$D(A,B)=\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1+3,5}\cdot\frac{2(0,3.0,2+0,2.0,3+0,4.0,4+0,6.0,5)}{(0,3)^2+(0,2)^2+(0,2)^2+(0,3)^2+(0,4)^2+(0,4)^2+(0,6)^2+(0,5)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+3,5}\cdot\frac{2.0,58}{1,19}$$

$$=\frac{1,16}{21,42}$$

$$\cong 0.054.$$

bulunur.

Tanım 3.1.5:

$A=\left\langle(a_1,a_2,a_3,a_4);\eta_A^1,\eta_A^2,...,\eta_A^p\right\rangle$, $B=\left\langle(b_1,b_2,b_3,b_4);\eta_B^1,\eta_B^2,...,\eta_B^p\right\rangle$ $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde iki adet yamuksal bulanık çoklu sayı ve $w_i\in[0,1]$, $i=(1,2,...,n)$, her bir x_i elemanının ağırlığı olsun. Öyle ki $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$. O zaman; $D_w(A,B)$ ile gösterilen A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasındaki Dice benzerlik ölçüsü;

$$D_w(A,B)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+d(A,B)}\cdot\frac{2w_i(\eta_A^1(x_j).\eta_B^1(x_j)+...+\eta_A^p(x_j)\eta_B^p(x_j))}{(\eta_A^1(x_j))^2+(\eta_B^1(x_j))^2+...+(\eta_A^p(x_j))^2+(\eta_B^p(x_j))^2}\right)$$

dir.

$$d(A,B)=|K(A)\text{ - }K(B)|$$

$$K(A)=\frac{a_1+2a_2+2a_3+a_4}{6},\quad K(B)=\frac{b_1+2b_2+2b_3+b_4}{6}$$

Önerme 3.1.6:

$D_w(\bar{A},\bar{B})$, A ve B normalleştirilmiş yamuksal bulanık çoklu sayıları arasındaki ağırlıklı Dice benzerlik ölçüsü olsun. $w_j \in [0,1]$ herbir x_j elemanının ağırlığı olsun. Öyle ki $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$. O zaman, A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasındaki ağırlıklı Dice benzerlik ölçüsü için;

i. $0 \le D_w(\bar{A},\bar{B}) \le 1$

ii. $D_w(\bar{A},\bar{B}) = D_w(\bar{B},\bar{A})$

iii. $\bar{A} = \bar{B}$, $(a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, a_4 = b_4)$ ve $(\eta_A^1 = \eta_B^1, \eta_A^2 = \eta_B^2, \ldots, \eta_A^p = \eta_B^p)$ ise $D_w(\bar{A},\bar{B}) = 1$ dir.

İspat 3.1.7:

i. Tanım 3.1.5'ten açıktır.

ii. $D_w(\bar{A},\bar{B}) =$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\left|\frac{a_1+2b_1+2c_1+d_1}{6}-\frac{a_2+2b_2+2c_2+d_2}{6}\right|}\cdot\frac{2w_j(\eta_{\bar{A}}^1(x_j).\eta_{\bar{B}}^1(x_j)+\eta_{\bar{A}}^2(x_j).\eta_{\bar{B}}^2(x_j)+....+\eta_{\bar{A}}^p(x_j)\eta_{\bar{B}}^p(x_j))}{(\eta_{\bar{A}}^1)^2(x_j)+(\eta_{\bar{B}}^1)^2(x_j)+(\eta_{\bar{A}}^2)^2(x_j)+(\eta_{\bar{B}}^2)^2(x_j)+...+(\eta_{\bar{A}}^p)^2(x_j)+(\eta_{\bar{A}}^p)^2(x_j)}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\left|\frac{a_2+2b_2+2c_2+d_2}{6}-\frac{a_1+2b_1+2c_1+d_1}{6}\right|}\cdot\frac{2w_j(\eta_{\bar{B}}^1(x_j).\eta_{\bar{A}}^1(x_j)+\eta_{\bar{B}}^2(x_j).\eta_{\bar{A}}^2(x_j)+....+\eta_{\bar{B}}^p(x_j).\eta_{\bar{A}}^p(x_j))}{(\eta_{\bar{B}}^1)^2(x_j)+(\eta_{\bar{A}}^1)^2(x_j)+(\eta_{\bar{B}}^2)^2(x_j)+(\eta_{\bar{A}}^2)^2(x_j)+...+(\eta_{\bar{B}}^p)^2(x_j)+(\eta_{\bar{A}}^p)^2(x_j)}\right)$$

$= D_w(\bar{B},\bar{A})$.

iii.

$$D_w(\overline{A},\overline{B})=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\left|\frac{a_1+2b_1+2c_1+d_1}{6}-\frac{a_2+2b_2+2c_2+d_2}{6}\right|}.\frac{2w_j(\eta_{\overline{A}}^1(x_j).\eta_{\overline{B}}^1(x_j)+\eta_{\overline{A}}^2(x_j).\eta_{\overline{B}}^2(x_j)+....+\eta_{\overline{A}}^p(x_j)\eta_{\overline{B}}^p(x_j))}{(\eta_{\overline{A}}^1)^2(x_j)+(\eta_{\overline{B}}^1)^2(x_j)+(\eta_{\overline{A}}^2)^2(x_j)+(\eta_{\overline{B}}^2)^2(x_j)+...+(\eta_{\overline{A}}^p)^2(x_j)+(\eta_{\overline{B}}^p)^2(x_j)}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\left|\frac{a_1+2b_1+2c_1+d_1}{6}-\frac{a_1+2b_1+2c_1+d_1}{6}\right|}.\frac{2w_j(\eta_{\overline{A}}^1(x_j).\eta_{\overline{A}}^1(x_j)+\eta_{\overline{A}}^2(x_j).\eta_{\overline{A}}^2(x_j)+....+\eta_{\overline{A}}^p(x_j)\eta_{\overline{A}}^p(x_j))}{(\eta_{\overline{A}}^1)^2(x_j)+(\eta_{\overline{A}}^1)^2(x_j)+(\eta_{\overline{A}}^2)^2(x_j)+(\eta_{\overline{A}}^2)^2(x_j)+...+(\eta_{\overline{A}}^p)^2(x_j)+(\eta_{\overline{A}}^p)^2(x_j)}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1+0}.\frac{2w_j\left((\eta_{\overline{A}}^1)^2(x_j)+(\eta_{\overline{A}}^2)^2(x_j)+....+(\eta_{\overline{A}}^p)^2(x_j)\right)}{2\left((\eta_{\overline{A}}^1)^2(x_j)+(\eta_{\overline{A}}^2)^2(x_j)+....+(\eta_{\overline{A}}^p)^2(x_j)\right)}\right)$$

$=1$.

Örnek 3.1.8:

$A=\langle(2,3,5,6);0.2,0.5,0.6,0.9\rangle$, $B=\langle(1,2,4,5);0.3,0.4,0.5,0.7\rangle$ $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde iki adet yamuksal bulanık çoklu sayı ve w_i, $i=(1,2)$ her bir x_i elemanının ağırlığı olsun $w_1=0.6, w_2=0.4$ öyle ki $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$. O zaman; A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasındaki Dice benzerlik ölçüsü;

$$K(A)=\frac{2+6+10+6}{6}=\frac{24}{6}=4$$

$$K(B)=\frac{1+4+8+5}{6}=\frac{18}{6}=3$$

$$d(A,B)=|K(A)\text{ - }K(B)|=|4-3|=1$$

$$D_w(A,B)=\frac{1}{(1+1)}.\frac{2.(0,6).(0,2.0,3+0,5.0,4+0,6.0,5+0,9.0,7)}{(0,2)^2+(0,3)^2+(0,5)^2+(0,4)^2+(0,6)^2+(0,5)^2+(0,9)^2+(0,7)^2}$$

$$+\frac{1}{(1+1)}.\frac{2.(0,4).(0,2.0,3+0,5.0,4+0,6.0,5+0,9.0,7)}{(0,2)^2+(0,3)^2+(0,5)^2+(0,4)^2+(0,6)^2+(0,5)^2+(0,9)^2+(0,7)^2}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{2.(0,6).(1,19)}{2,45}+\frac{1}{2}.\frac{2.(0,4).(1,19)}{2,45}$$

$$=0,48.$$

3.2 Yamuksal Bulanık Çoklu Sayılar (YBÇS) İle Çok-Kriterli Karar Vermeye Dayalı Jaccard, Cosine ve Hybrid Vektör Benzerlik Ölçüleri

Bu bölümde yamuksal bulanık çoklu sayılar için Jaccard, Cosine ve Hybrid benzerlik ölçümleri üzerinde çalışılmıştır.

Tanım 3.2.1:

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, $a_1, a_2, a_3, a_4 \in R$, $A = \langle (a_1, a_2, a_3, a_4); \eta_A^1, \eta_A^2, ..., \eta_A^p \rangle$ ve $B = \langle (b_1, b_2, b_3, b_4); \eta_B^1, \eta_B^2, ..., \eta_B^p \rangle$ $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde iki yamuksal bulanık çoklu sayı olsun. O zaman; A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasındaki Jaccard benzerlik ölçüsü $J(A,B)$;

$$J(A,B)=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{4}\left|a_j^k-b_j^k\right|}{4}\right).\frac{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k^{\,2}+\sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k^{\,2}-\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}\right)$$

dir.

Not: $A = \langle (a_1, a_2, a_3, a_4); \eta_A^1, \eta_A^2, ..., \eta_A^p \rangle$ yamuksal bulanık çoklu sayı , $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ ve $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $a_2 = a_3$ ise o zaman yamuksal bulanık çoklu sayısı, üçgensel bulanık çoklu sayıya dönüşür.

Önerme 3.2.2:

$J(A,B)$, A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasında Jaccard benzerlik ölçüsü olsun. O zaman;

i. $0 \le J(A,B) \le 1$,

ii. $J(A,B) = J(B,A)$,

iii. $A = B$, $(a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, a_4 = b_4)$ ve $(\eta_A^1 = \eta_B^1, \eta_A^2 = \eta_B^2, \ldots, \eta_A^p = \eta_B^p)$ ise $J(A,B) = 1$ dir.

İspat 3.2.3:

i. Tanım 3.2.1 den açıktır.

ii.
$$J(A,B) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{4}\left|a_j^k - b_j^k\right|}{4}\right) \cdot \frac{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k \cdot (\eta_B^i)_k}{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k^{\,2} + \sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k^{\,2} - \sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k \cdot (\eta_B^i)_k}\right)$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{4}\left|a_j^k - b_j^k\right|}{4}\right) \cdot \frac{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k \cdot (\eta_B^i)_k}{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k^{\,2} + \sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k^{\,2} - \sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k \cdot (\eta_B^i)_k}\right)$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{4}\left|b_j^k - a_j^k\right|}{4}\right) \cdot \frac{\sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k \cdot (\eta_A^i)_k}{\sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k^{\,2} + \sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k^{\,2} - \sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k \cdot (\eta_A^i)_k}\right)$$

$$= J(B,A).$$

iii.
$$J(A,B) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{4}\left|a_j^k - b_j^k\right|}{4}\right) \cdot \frac{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k \cdot (\eta_B^i)_k}{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k^{\,2} + \sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k^{\,2} - \sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k \cdot (\eta_B^i)_k}\right)$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1 - \frac{\left|a_1^k - b_1^k\right| + \left|a_2^k - b_2^k\right| + \left|a_3^k - b_3^k\right| + \left|a_4^k - b_4^k\right|}{4}\right) \cdot \frac{(\eta_A^1)_k \cdot (\eta_B^1)_k + (\eta_A^2)_k \cdot (\eta_B^2)_k + \ldots + (\eta_A^p)_k \cdot (\eta_B^p)_k)}{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k^2 + \sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k^2 - \sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k^2 \cdot (\eta_B^i)_k^2}\right)\Bigg)$$

$$=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1-\frac{|a_1^k-a_1^k|+|a_2^k-a_2^k|+|a_3^k-a_3^k|+|a_4^k-a_4^k|}{4}\right).\frac{(\eta_A^1)_k.(\eta_A^1)_k+(\eta_A^2)_k.(\eta_A^2)_k+....+(\eta_A^p)_k.(\eta_A^p)_k)}{(\eta_A^1)_k^2+...+(\eta_A^p)_k^2+(\eta_A^1)_k^2+...+(\eta_A^p)_k^2-((\eta_A^1)_k^2+...(\eta_A^p)_k^2)}\right)$$

$$=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1-0.\frac{(\eta_A^1)_k.(\eta_A^1)_k+(\eta_A^2)_k.(\eta_A^2)_k+....+(\eta_A^p)_k.(\eta_A^p)_k)}{(\eta_A^1)_k^2+...+(\eta_A^p)_k^2+(\eta_A^1)_k^2+...+(\eta_A^p)_k^2-((\eta_A^1)_k^2+...(\eta_A^p)_k^2)}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{(\eta_A^1)_k^2+(\eta_A^2)_k^2+...+(\eta_A^p)_k^2}{(\eta_A^1)_k^2+(\eta_A^2)_k^2+...+(\eta_A^p)_k^2}\right)$$

$=1.$

Örnek 3.2.4:

$$J(A,B)\,;\,A=\langle(1,2,3,5);0.2,0.4,0.5,0.7\rangle \text{ ve } B=\langle(2,3,4,5);0.3,0.1,0.6,0.4\rangle$$

yamuksal bulanık çoklu sayıları arasında Jaccard benzerlik ölçüsü olsun.

$$J(A,B)=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{4}|a_j^k-b_j^k|}{4}\right).\frac{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k{}^2+\sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k{}^2-\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}\right)$$

$$=\left(1-\frac{|1-2|+|2-3|+|3-4|+|5-5|}{4}.\frac{(0,2.0,3+0,4.0,1+0,5.0,6+0,7.0,4)}{\left(0,2^2+0,4^2+0,5^2+0,7^2\right)+\left(0,3^2+0,1^2+0,6^2+0,4^2\right)-\left(0,2.0,3+0,4.0,1+0,5.0,6+0,7.0,4\right)}\right)$$

$$=\left(1-\frac{3}{4}.\frac{(0,06+0,04+0,30+0,28)}{(0,04+0,16+0,25+0,49)+(0,09+0,01+0,36+0,16)-(0,06+0,04+0,30+0,28)}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{4}.\frac{0.68}{0.94+0,62-0,68}\right)$$

$\cong 0,193.$

Tanım 3.2.5:

$A=\langle(a_1,a_2,a_3,a_4);\eta_A^1,\eta_A^2,\ldots,\eta_A^p\rangle$ ve $B=\langle(b_1,b_2,b_3,b_4);\eta_B^1,\eta_B^2,\ldots,\eta_B^p\rangle$ $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde yamuksal bulanık çoklu sayılar olsun ve her bir $r=(1,2,\ldots,n)$ için $w_r\in[0,1]$ ağırlık sayısı olsun öyle ki $\sum_{r=1}^{n} w_r=1$. O zaman A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasındaki $J_w(A,B)$ ağırlıklı Jaccard benzerlik ölçüsü;

$$J_w(A,B)=\frac{1}{p}\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{4}\left|a_j^k-b_j^k\right|}{4}\right).\frac{w_r.\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k^{\,2}+\sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k^{\,2}-\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}\right)$$

dir.

Önerme 3.2.6:

$J_w(A,B)$; A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasındaki ağırlıklı Jaccard benzerlik ölçüsü olsun, $w_r\in[0,1]$ ve her bir $r=(1,2,\ldots,n)$ için $w_r\in[0,1]$ ağırlık sayısı olsun öyle ki $\sum_{r=1}^{n} w_r=1$. O zaman A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasındaki $J_w(A,B)$ ağırlıklı Jaccard benzerlik ölçüsü için;

i. $0\le J_w(A,B)\le 1$.

ii. $J_w(A,B)=J_w(B,A)$.

iii. $A=B$, $(a_1=b_1,a_2=b_2,a_3=b_3,a_4=b_4)$ ve $(\eta_A^1=\eta_B^1,\eta_A^2=\eta_B^2,\ldots,\eta_A^p=\eta_B^p)$ ise $J_w(A,B)=1$ dir.

İspat 3.2.7:

i. Tanım 3.2.5 ten açıktır.

ii.

$$J_w(A,B)=\frac{1}{p}\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{4}\left|a_j^k-b_j^k\right|}{4}\right).\frac{w_r.\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k{}^2+\sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k{}^2-\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}\right)$$

$$=\frac{1}{p}\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{4}\left|a_j^k-b_j^k\right|}{4}\right).\frac{w_r.\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k{}^2+\sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k{}^2-\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}\right)$$

$$=\frac{1}{p}\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{4}\left|b_j^k-a_j^k\right|}{4}\right).\frac{w_r.\sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k.(\eta_A^i)_k}{\sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k{}^2+\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k{}^2-\sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k.(\eta_A^i)_k}\right)$$

$$=J_w(B,A).$$

iii.

$$J_w(A,B)=\frac{1}{p}\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{4}\left|a_j^k-b_j^k\right|}{4}\right).\frac{w_r.\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k{}^2+\sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k{}^2-\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}\right).$$

$$=\frac{1}{p}\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1-\frac{\left|a_1^k-b_1^k\right|+\left|a_2^k-b_2^k\right|+\left|a_3^k-b_3^k\right|+\left|a_4^k-b_4^k\right|}{4}\right).\frac{w_r.[(\eta_A^1)_k.(\eta_B^1)_k+(\eta_A^2)_k.(\eta_B^2)_k+....+(\eta_A^p)_k.(\eta_B^p)_k]}{(\eta_A^1)_k^2+...+(\eta_A^p)_k^2+(\eta_B^1)_k^2+...+(\eta_B^p)_k^2-((\eta_A^1)_k.(\eta_B^1)_k+...(\eta_A^p)_k.(\eta_B^p)_k)}\right)$$

$$=\frac{1}{p}\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1-\frac{\left|a_1^k-a_1^k\right|+\left|a_2^k-a_2^k\right|+\left|a_3^k-a_3^k\right|+\left|a_4^k-a_4^k\right|}{4}\right).\frac{w_r.[(\eta_A^1)_k.(\eta_A^1)_k+(\eta_A^2)_k.(\eta_A^2)_k+....+(\eta_A^p)_k.(\eta_A^p)_k]}{(\eta_A^1)_k^2+...+(\eta_A^p)_k^2+(\eta_A^1)_k^2+...+(\eta_A^p)_k^2-((\eta_A^1)_k^2+...(\eta_A^p)_k^2)}\right)$$

$$=\frac{1}{p}\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\left((1-0).\frac{w_r.[(\eta_A^1)_k^2+...+(\eta_A^p)_k^2]}{(\eta_A^1)_k^2+...+(\eta_A^p)_k^2+(\eta_A^1)_k^2+...+(\eta_A^p)_k^2-((\eta_A^1)_k^2+...(\eta_A^p)_k^2)}\right)$$

$$=\frac{1}{p}\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{w_r.[(\eta_A^1)_k^2+...+(\eta_A^p)_k^2]}{(\eta_A^1)_k^2+...+(\eta_A^p)_k^2}\right)$$

$$=\sum_{r=1}^{n}w_r$$

$$=1.$$

Örnek 3.2.8:

$A=\langle(1.2.3.4);0.1,0.3,0.4,0.5\rangle$ ve $B=\langle(1,2,3,5);0.2,0.3,0.5,0.6\rangle$ $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde yamuksal bulanık çoklu sayılar olsun ve w_r; her bir $r=(1,2)$ için ağırlık sayısı olsun öyle ki $w_1=0.3, w_2=0.7$ ve $\sum_{r=1}^{n} w_r = 1$. O zaman A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasındaki $J_w(A,B)$ ağırlıklı Jaccard benzerlik ölçüsü;

$J_w(A,B)=$

$$\left(\begin{array}{c} 1-\dfrac{|1-1|+|2-2|+|3-3|+|4-5|}{4}. \\ \dfrac{0,3.[(0,1.0,2+0,3.0,3+0,4.0,5+0,5.0,6]}{(0,1^2+0,3^2+0,4^2+0,5^2)+(0,2^2+0,3^2+0,5^2+0,6^2)-(0,1.0,2+0,3.0,3+0,4.0,5+0,5.0,6)} \end{array}\right)$$

$$+\left(\begin{array}{c} 1-\dfrac{|1-1|+|2-2|+|3-3|+|4-5|}{4}. \\ \dfrac{0,7.[(0,1.0,2+0,3.0,3+0,4.0,5+0,5.0,6]}{(0,1^2+0,3^2+0,4^2+0,5^2)+(0,2^2+0,3^2+0,5^2+0,6^2)-(0,1.0,2+0,3.0,3+0,4.0,5+0,5.0,6)} \end{array}\right)$$

$$=\frac{3}{4}\frac{0,3.0,61}{0,51+0,74-0,61}+\frac{3}{4}\frac{0,7.0,61}{0,51+0,74-0,61}$$

$$=\frac{0,549}{2,56}+\frac{1,281}{2,56}$$

$$\cong 0,714.$$

Tanım 3.2.9:

$A=\langle(a_1,a_2,a_3,a_4);\eta_A^1,\eta_A^2,...,\eta_A^p\rangle$ ve $B=\langle(b_1,b_2,b_3,b_4);\eta_B^1,\eta_B^2,...,\eta_B^p\rangle$ $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde iki yamuksal bulanık çoklu sayı olsun. O zaman; A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasındaki Cosine benzerlik ölçüsü $C(A,B)$;

$$C(A,B)=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}a_i^k.b_i^k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(a_i^k)^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(b_i^k)^2}}.\frac{\min\left((\eta_A^1)_k,(\eta_B^1)_k\right)+\min\left((\eta_A^2)_k,(\eta_B^2)_k\right)+\min\left((\eta_A^3)_k,(\eta_B^3)_k\right)+...}{\max\left((\eta_A^1)_k,(\eta_B^1)_k\right)+\max\left((\eta_A^2)_k,(\eta_B^2)_k\right)+\max\left((\eta_A^3)_k,(\eta_B^3)_k\right)+...}\right)$$

dir.

Önerme 3.2.10:

$C(A,B)$, A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasında Cosine benzerlik ölçüsü olsun. O zaman;

i. $0\leq C(A,B)\leq 1$

ii. $C(A,B)=C(B,A)$

iii. $A=B$, $(a_1=b_1,a_2=b_2,a_3=b_3,a_4=b_4)$ ve $(\eta_A^1=\eta_B^1,\eta_A^2=\eta_B^2,...,\eta_A^p=\eta_B^p)$ ise $C(A,B)=1$ dir.

İspat 3.2.11:

i. Tanım 3.2.9 den açıktır.

ii. $C(A,B)=$

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}a_i^k.b_i^k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(a_i^k)^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(b_i^k)^2}}.\frac{\min\left((\eta_A^1)_k,(\eta_B^1)_k\right)+\min\left((\eta_A^2)_k,(\eta_B^2)_k\right)+\min\left((\eta_A^3)_k,(\eta_B^3)_k\right)+...}{\max\left((\eta_A^1)_k,(\eta_B^1)_k\right)+\max\left((\eta_A^2)_k,(\eta_B^2)_k\right)+\max\left((\eta_A^3)_k,(\eta_B^3)_k\right)+...}\right)$$

$$=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}b_i^k.a_i^k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(b_i^k)^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(a_i^k)^2}}.\frac{\min\left((\eta_B^1)_k,(\eta_A^1)_k\right)+\min\left((\eta_B^2)_k,(\eta_A^2)_k\right)+\min\left((\eta_B^3)_k,(\eta_A^3)_k\right)+...}{\max\left((\eta_B^1)_k,(\eta_A^1)_k\right)+\max\left((\eta_B^2)_k,(\eta_A^2)_k\right)+\max\left((\eta_B^3)_k,(\eta_A^3)_k\right)+...}\right)$$

$$= C(B, A).$$

iii.

$$C(A, B) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\sum_{i=1}^{4} a_i^k . b_i^k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(a_i^k)^2} . \sqrt{\sum_{i=1}^{4}(b_i^k)^2}} . \frac{\min\left(\left(\eta_A^1\right)_k, \left(\eta_B^1\right)_k\right) + \min\left(\left(\eta_A^2\right)_k, \left(\eta_B^2\right)_k\right) + \min\left(\left(\eta_A^3\right)_k, \left(\eta_B^3\right)_k\right) + \dots}{\max\left(\left(\eta_A^1\right)_k, \left(\eta_B^1\right)_k\right) + \max\left(\left(\eta_A^2\right)_k, \left(\eta_B^2\right)_k\right) + \max\left(\left(\eta_A^3\right)_k, \left(\eta_B^3\right)_k\right) + \dots}\right)$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\begin{array}{c} \dfrac{a_1^k . b_1^k + a_2^k . b_2^k + a_3^k . b_3^k + a_4^k . b_4^k}{\sqrt{(a_1^k)^2 + (a_2^k)^2 + (a_3^k)^2 + (a_4^k)^2} . \sqrt{(b_1^k)^2 + (b_2^k)^2 + (b_3^k)^2 + (b_4^k)^2}} . \\ \dfrac{\min\left(\left(\eta_A^1\right)_k, \left(\eta_B^1\right)_k\right) + \min\left(\left(\eta_A^2\right)_k, \left(\eta_B^2\right)_k\right) + \min\left(\left(\eta_A^3\right)_k, \left(\eta_B^3\right)_k\right) + \dots}{\max\left(\left(\eta_A^1\right)_k, \left(\eta_B^1\right)_k\right) + \max\left(\left(\eta_A^2\right)_k, \left(\eta_B^2\right)_k\right) + \max\left(\left(\eta_A^3\right)_k, \left(\eta_B^3\right)_k\right) + \dots} \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\begin{array}{c} \dfrac{a_1^k . a_1^k + a_2^k . a_2^k + a_3^k . a_3^k + a_4^k . a_4^k}{\sqrt{(a_1^k)^2 + (a_2^k)^2 + (a_3^k)^2 + (a_4^k)^2} . \sqrt{(a_1^k)^2 + (a_2^k)^2 + (a_3^k)^2 + (a_4^k)^2}} . \\ \dfrac{\min\left(\left(\eta_A^1\right)_k, \left(\eta_A^1\right)_k\right) + \min\left(\left(\eta_A^2\right)_k, \left(\eta_A^2\right)_k\right) + \min\left(\left(\eta_A^3\right)_k, \left(\eta_A^3\right)_k\right) + \dots}{\max\left(\left(\eta_A^1\right)_k, \left(\eta_A^1\right)_k\right) + \max\left(\left(\eta_A^2\right)_k, \left(\eta_A^2\right)_k\right) + \max\left(\left(\eta_A^3\right)_k, \left(\eta_A^3\right)_k\right) + \dots} \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\begin{array}{c} \dfrac{(a_1^k)^2 + (a_2^k)^2 + (a_3^k)^2 + (a_4^k)^2}{\sqrt{((a_1^k)^2 + (a_2^k)^2 + (a_3^k)^2 + (a_4^k)^2)^2}} . \\ \dfrac{\min\left(\left(\eta_A^1\right)_k, \left(\eta_A^1\right)_k\right) + \min\left(\left(\eta_A^2\right)_k, \left(\eta_A^2\right)_k\right) + \min\left(\left(\eta_A^3\right)_k, \left(\eta_A^3\right)_k\right) + \dots}{\max\left(\left(\eta_A^1\right)_k, \left(\eta_A^1\right)_k\right) + \max\left(\left(\eta_A^2\right)_k, \left(\eta_A^2\right)_k\right) + \max\left(\left(\eta_A^3\right)_k, \left(\eta_A^3\right)_k\right) + \dots} \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\begin{array}{c} \dfrac{(a_1^k)^2 + (a_2^k)^2 + (a_3^k)^2 + (a_4^k)^2}{(a_1^k)^2 + (a_2^k)^2 + (a_3^k)^2 + (a_4^k)^2} . \\ \dfrac{\min\left(\left(\eta_A^1\right)_k, \left(\eta_A^1\right)_k\right) + \min\left(\left(\eta_A^2\right)_k, \left(\eta_A^2\right)_k\right) + \min\left(\left(\eta_A^3\right)_k, \left(\eta_A^3\right)_k\right) + \dots}{\max\left(\left(\eta_A^1\right)_k, \left(\eta_A^1\right)_k\right) + \max\left(\left(\eta_A^2\right)_k, \left(\eta_A^2\right)_k\right) + \max\left(\left(\eta_A^3\right)_k, \left(\eta_A^3\right)_k\right) + \dots} \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(1 . \frac{\left(\eta_A^1\right)_k + \left(\eta_A^2\right)_k + \left(\eta_A^3\right)_k + \dots}{\left(\eta_A^1\right)_k + \left(\eta_A^1\right)_k + \left(\eta_A^3\right)_k + \dots}\right)$$

$$= 1.$$

Örnek 3.2.12:

$A=\langle(0.3,0.2,0.4,0.5);0.1,0.2,0.3,0.4\rangle$ ve $B=\langle(0.1,0.3,0.5,0.6);0.2,0.4,0.6,0.8\rangle$ iki tane yamuksal bulanık çoklu sayı olsun. O zaman, $C(A,B)$ cosine benzerlik ölçüsü;

$$C(A,B)=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}a_i^k.b_i^k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(a_i^k)^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(b_i^k)^2}}.\frac{\min\left((\eta_A^1)_k,(\eta_B^1)_k\right)+\min\left((\eta_A^2)_k,(\eta_B^2)_k\right)+\min\left((\eta_A^3)_k,(\eta_B^3)_k\right)+\ldots}{\max\left((\eta_A^1)_k,(\eta_B^1)_k\right)+\max\left((\eta_A^2)_k,(\eta_B^2)_k\right)+\max\left((\eta_A^3)_k,(\eta_B^3)_k\right)+\ldots}\right)$$

$$=\frac{(0,3.0,1+0,2.0,3+0,4.0,5+0,5.0,6)}{\sqrt{(0,3)^2+(0,2)^2+(0,4)^2+(0,5)^2}.\sqrt{(0,1)^2+(0,3)^2+(0,5)^2+(0,6)^2}}.\frac{(0,1+0,2+0,3+0,4)}{(0,2+0,4+0,6+0,8)}$$

$\cong 0,47642.$

Tanım 3.2.13:

$A=\langle(a_1,a_2,a_3,a_4);\eta_A^1,\eta_A^2,\ldots,\eta_A^p\rangle$ ve $B=\langle(b_1,b_2,b_3,b_4);\eta_B^1,\eta_B^2,\ldots,\eta_B^p\rangle$ $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde yamuksal bulanık çoklu sayılar olsun ve her bir $i=(1,2,\ldots,n)$ için $w_i\in[0,1]$ ağırlık sayısı olsun öyle ki $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$. O zaman A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasındaki $C_w(A,B)$ ağırlıklı Cosine benzerlik ölçüsü;

$$C_w(A,B)=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}a_i^k.b_i^k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(a_i^k)^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(b_i^k)^2}}.\frac{w_i.\left[\min\left((\eta_A^1)_k,(\eta_B^1)_k\right)+\min\left((\eta_A^2)_k,(\eta_B^2)_k\right)+\min\left((\eta_A^3)_k,(\eta_B^3)_k\right)+\ldots\right]}{\max\left((\eta_A^1)_k,(\eta_B^1)_k\right)+\max\left((\eta_A^2)_k,(\eta_B^2)_k\right)+\max\left((\eta_A^3)_k,(\eta_B^3)_k\right)+\ldots}\right).$$

dir.

Önerme 3.2.14:

$C_w(A,B)$, A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasındaki ağırlıklı Cosine benzerlik ölçüsü olsun, $w_i \in [0,1]$ ve her bir $i=(1,2,...,n)$ için $w_i \in [0,1]$ ağırlık sayısı olsun öyle ki $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. O zaman, A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasındaki $C_w(A,B)$ ağırlıklı Cosine benzerlik ölçüsü için;

i. $0 \le C_w(A,B) \le 1$

ii. $C_w(A,B) = C_w(B,A)$

iii. $A=B$, $(a_1=b_1, a_2=b_2, a_3=b_3, a_4=b_4)$ ve $(\eta_A^1=\eta_B^1, \eta_A^2=\eta_B^2, \ldots, \eta_A^p=\eta_B^p)$ ise $C_w(A,B)=1$ dir.

Örnek 3.2.15:

$A=\langle(0.1,0.2,0.3,0.4);0.2,0.3,0.5,0.6\rangle$ ve $B=\langle(0.1,0.2,0.4,0.5);0.1,0.4,0.5,0.7\rangle$ $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde yamuksal bulanık çoklu sayılar olsun ve w_i; her bir $i=(1,2)$ için ağırlık sayısı olsun öyle ki $w_1=0.2, w_2=0.8$ ve $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. O zaman A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasındaki $C_w(A,B)$ ağırlıklı Cosine benzerlik ölçüsü;

$$C_w(A,B)=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\sum_{k=1}^{4} a_i^k . b_i^k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{4}(a_i^k)^2}.\sqrt{\sum_{k=1}^{4}(b_i^k)^2}}.\frac{w_i.\left[\min\left((\eta_A^1)_i,(\eta_B^1)_i\right)+\min\left((\eta_A^2)_i,(\eta_B^2)_i\right)+\min\left((\eta_A^3)_i,(\eta_B^3)_i\right)+\ldots\right]}{\max\left((\eta_A^1)_i,(\eta_B^1)_i\right)+\max\left((\eta_A^2)_i,(\eta_B^2)_i\right)+\max\left((\eta_A^3)_i,(\eta_B^3)_i\right)+\ldots}\right)$$

$$=\frac{0,2.(0,1.0,1+0,2.0,2+0,3.0,4+0,4.0,5)}{\sqrt{(0,1)^2+(0,2)^2+(0,3)^2+(0,4)^2}.\sqrt{(0,1)^2+(0,2)^2+(0,4)^2+(0,5)^2}}.\frac{(0,1+0,3+0,5+0,6)}{(0,2+0,4+0,5+0,7)}$$

$$+\frac{0,8.(0,1.0,1+0,2.0,2+0,3.0,4+0,4.0,5)}{\sqrt{(0,1)^2+(0,2)^2+(0,3)^2+(0,4)^2}.\sqrt{(0,1)^2+(0,2)^2+(0,4)^2+(0,5)^2}}.\frac{(0,1+0,3+0,5+0,6)}{(0,2+0,4+0,5+0,7)}$$

$\cong 0,830.$

Tanım 3.2.16:

$A=\langle(a_1,a_2,a_3,a_4);\eta_A^1,\eta_A^2,...,\eta_A^p\rangle$ ve $B=\langle(b_1,b_2,b_3,b_4);\eta_B^1,\eta_B^2,...,\eta_B^p\rangle$ $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde iki yamuksal bulanık çoklu sayı olsun. O zaman; A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasındaki Hybrid vektör benzerlik ölçüsü $HybV(A,\ B)$;

$$HybV(A,\ B)=\lambda.\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{4}\left|a_j^k-b_j^k\right|}{4}\right).\frac{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k^{\ 2}+\sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k^{\ 2}-\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}\right)\right)+$$

$$(1-\lambda).\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}a_i^k.b_i^k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(a_i^k)^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(b_i^k)^2}}.\frac{\min\left((\eta_A^1)_k,(\eta_B^1)_k\right)+\min\left((\eta_A^2)_k,(\eta_B^2)_k\right)+\min\left((\eta_A^3)_k,(\eta_B^3)_k\right)+...}{\max\left((\eta_A^1)_k,(\eta_B^1)_k\right)+\max\left((\eta_A^2)_k,(\eta_B^2)_k\right)+\max\left((\eta_A^3)_k,(\eta_B^3)_k\right)+...}\right)\right).$$

Örnek 3.2.17:

$A=\langle(2,4,5,7);0.2,0.4,0.6,0.8\rangle$ ve $B=\langle(1,4,5,9);0.5,0.6,0.7,0.8\rangle$ iki tane yamuksal bulanık çoklu sayı olsun. O zaman, $HybV(A,\ B)$ hybrid vector benzerlik ölçüsü;

$$HybV(A,\ B)=\lambda.\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{4}\left|a_j^k-b_j^k\right|}{4}\right).\frac{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k^{\ 2}+\sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k^{\ 2}-\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}\right)\right)+$$

$$(1-\lambda).\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}a_i^k.b_i^k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(a_i^k)^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(b_i^k)^2}}.\frac{\min\left((\eta_A^1)_k,(\eta_B^1)_k\right)+\min\left((\eta_A^2)_k,(\eta_B^2)_k\right)+\min\left((\eta_A^3)_k,(\eta_B^3)_k\right)+...}{\max\left((\eta_A^1)_k,(\eta_B^1)_k\right)+\max\left((\eta_A^2)_k,(\eta_B^2)_k\right)+\max\left((\eta_A^3)_k,(\eta_B^3)_k\right)+...}\right)\right).$$

$$= 0,4.\left(1-\frac{|2-1|+|4-4|+|5-5|+|7-9|}{4}.\frac{(0,2.0,5+0,4.0,6+0,6.0,7+0,8.0,8)}{[(0,2)^2+(0,4)^2+(0,6)^2+(0,8)^2]+[(0,5)^2+(0,6)^2+(0,7)^2+(0,8)^2]-[(0,2.0,5+0,4.0,6+0,6.0,7+0,8.0,8)]}\right)$$

$$+(1-0,4).\left(\frac{2.1+4.4+5.5+7.9}{\sqrt{(2^2+4^2+5^2+7^2)}\sqrt{(1^2+4^2+5^2+9^2)}}.\frac{0,2+0,4+0,6+0,8}{0,5+0,6+0,7+0,8}\right)$$

$$= 0,4.\left(\frac{1}{4}.\frac{(1,4)}{1,54}\right)+(0,6).\left(\frac{106}{\sqrt{94}\sqrt{123}}.\frac{2}{2,6}\right)$$

$$\cong 0,3639.$$

Önerme 3.2.18:

$HybV(A,\ B)$, A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasında Hybrid benzerlik ölçüsü olsun. O zaman;

i. $0 \leq HybV(A,\ B) \leq 1$

ii. $HybV(A,B) = HybV(B,A)$

iii. $A = B,\ (a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, a_4 = b_4)$ ve $(\eta_A^1 = \eta_B^1, \eta_A^2 = \eta_B^2, \ldots, \eta_A^p = \eta_B^p)$ ise $HybV(A,\ B) = 1$ dir.

İspat 3.2.19:

i. Tanım 3.2.16 dan açıktır.

ii.

$$HybV(A,\ B) = \lambda.\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{4}|a_j^k-b_j^k|}{4}\right).\frac{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k^{\,2}+\sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k^{\,2}-\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}\right)\right)+$$

$$(1-\lambda).\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\sum_{i=1}^{4} a_i^k.b_i^k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(a_i^k)^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(b_i^k)^2}}.\frac{\min\left(\left(\eta_A^1\right)_k,\left(\eta_B^1\right)_k\right)+\min\left(\left(\eta_A^2\right)_k,\left(\eta_B^2\right)_k\right)+\min\left(\left(\eta_A^3\right)_k,\left(\eta_B^3\right)_k\right)+\ldots}{\max\left(\left(\eta_A^1\right)_k,\left(\eta_B^1\right)_k\right)+\max\left(\left(\eta_A^2\right)_k,\left(\eta_B^2\right)_k\right)+\max\left(\left(\eta_A^3\right)_k,\left(\eta_B^3\right)_k\right)+\ldots}\right)\right)$$

$$=\lambda.\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{4}\left|b_j^k-a_j^k\right|}{4}\right).\frac{\sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k.(\eta_A^i)_k}{\sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k{}^2+\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k{}^2-\sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k.(\eta_A^i)_k}\right)\right)+$$

$$(1-\lambda).\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\sum_{i=1}^{4} b_i^k.a_i^k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(b_i^k)^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(a_i^k)^2}}.\frac{\min\left(\left(\eta_B^1\right)_k,\left(\eta_A^1\right)_k\right)+\min\left(\left(\eta_B^2\right)_k,\left(\eta_A^2\right)_k\right)+\min\left(\left(\eta_B^3\right)_k,\left(\eta_A^3\right)_k\right)+\ldots}{\max\left(\left(\eta_B^1\right)_k,\left(\eta_A^1\right)_k\right)+\max\left(\left(\eta_B^2\right)_k,\left(\eta_A^2\right)_k\right)+\max\left(\left(\eta_B^3\right)_k,\left(\eta_A^3\right)_k\right)+\ldots}\right)\right)$$

$$=HybV\left(B,A\right).$$

iii.

$$HybV\left(A,\ B\right)=\lambda.\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{4}\left|a_j^k-b_j^k\right|}{4}\right).\frac{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k{}^2+\sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k{}^2-\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}\right)\right)+$$

$$(1-\lambda).\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\sum_{i=1}^{4} a_i^k.b_i^k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(a_i^k)^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(b_i^k)^2}}.\frac{\min\left(\left(\eta_A^1\right)_k,\left(\eta_B^1\right)_k\right)+\min\left(\left(\eta_A^2\right)_k,\left(\eta_B^2\right)_k\right)+\min\left(\left(\eta_A^3\right)_k,\left(\eta_B^3\right)_k\right)+\ldots}{\max\left(\left(\eta_A^1\right)_k,\left(\eta_B^1\right)_k\right)+\max\left(\left(\eta_A^2\right)_k,\left(\eta_B^2\right)_k\right)+\max\left(\left(\eta_A^3\right)_k,\left(\eta_B^3\right)_k\right)+\ldots}\right)\right)$$

$$=\lambda.\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1-\frac{\left|a_1^k-b_1^k\right|+\left|a_2^k-b_2^k\right|+\left|a_3^k-b_3^k\right|+\left|a_4^k-b_4^k\right|}{4}\right).\frac{(\eta_A^1)_k.(\eta_B^1)_k+(\eta_A^2)_k.(\eta_B^2)_k+\ldots.+(\eta_A^p)_k.(\eta_B^p)_k)}{(\eta_A^1)_k^2+\ldots+(\eta_A^p)_k^2+(\eta_B^1)_k^2+\ldots+(\eta_B^p)_k^2-((\eta_A^1)_k.(\eta_B^1)_k+\ldots(\eta_A^p)_k.(\eta_B^p)_k)}\right)\right)+$$

$$(1-\lambda).\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{a_1^k.b_1^k+a_2^k.b_2^k+a_3^k.b_3^k+a_4^k.b_4^k}{\sqrt{(a_1^k)^2+(a_2^k)^2+(a_3^k)^2+(a_4^k)^2}.\sqrt{(b_1^k)^2+(b_2^k)^2+(b_3^k)^2+(b_4^k)^2}}\right).\frac{\min\left(\left(\eta_A^1\right)_k,\left(\eta_B^1\right)_k\right)+\min\left(\left(\eta_A^2\right)_k,\left(\eta_B^2\right)_k\right)+\min\left(\left(\eta_A^3\right)_k,\left(\eta_B^3\right)_k\right)+\ldots}{\max\left(\left(\eta_A^1\right)_k,\left(\eta_B^1\right)_k\right)+\max\left(\left(\eta_A^2\right)_k,\left(\eta_B^2\right)_k\right)+\max\left(\left(\eta_A^3\right)_k,\left(\eta_B^3\right)_k\right)+\ldots}\right)$$

$$= \lambda.\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1-\frac{\left|a_1^k-a_1^k\right|+\left|a_2^k-a_2^k\right|+\left|a_3^k-a_3^k\right|+\left|a_4^k-a_4^k\right|}{4}\right).\frac{(\eta_A^1)_k.(\eta_A^1)_k+(\eta_A^2)_k.(\eta_A^2)_k+....+(\eta_A^p)_k.(\eta_A^p)_k)}{(\eta_A^1)_k^2+...+(\eta_A^p)_k^2+(\eta_A^1)_k^2+...+(\eta_A^p)_k^2-((\eta_A^1)_k^2+...(\eta_A^p)_k^2)}\right)\right)+$$

$$(1-\lambda).\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{a_1^k.a_1^k+a_2^k.a_2^k+a_3^k.a_3^k+a_4^k.a_4^k}{\sqrt{(a_1^k)^2+(a_2^k)^2+(a_3^k)^2+(a_4^k)^2}.\sqrt{(a_1^k)^2+(a_2^k)^2+(a_3^k)^2+(a_4^k)^2}}\right).\frac{\min\left(\left(\eta_A^1\right)_k,\left(\eta_A^1\right)_k\right)+\min\left(\left(\eta_A^2\right)_k,\left(\eta_A^2\right)_k\right)+\min\left(\left(\eta_A^3\right)_k,\left(\eta_A^3\right)_k\right)+...}{\max\left(\left(\eta_A^1\right)_k,\left(\eta_A^1\right)_k\right)+\max\left(\left(\eta_A^2\right)_k,\left(\eta_A^2\right)_k\right)+\max\left(\left(\eta_A^3\right)_k,\left(\eta_A^3\right)_k\right)+...}\right)$$

$$= \lambda.\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left((1-0).\frac{(\eta_A^1)_k.(\eta_A^1)_k+(\eta_A^2)_k.(\eta_A^2)_k+....+(\eta_A^p)_k.(\eta_A^p)_k)}{(\eta_A^1)_k^2+...+(\eta_A^p)_k^2+(\eta_A^1)_k^2+...+(\eta_A^p)_k^2-((\eta_A^1)_k^2+...(\eta_A^p)_k^2)}\right)\right)+$$

$$(1-\lambda).\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{(a_1^k)^2+(a_2^k)^2+(a_3^k)^2+(a_4^k)^2}{(a_1^k)^2+(a_2^k)^2+(a_3^k)^2+(a_4^k)^2}.\frac{\min\left(\left(\eta_A^1\right)_k,\left(\eta_A^1\right)_k\right)+\min\left(\left(\eta_A^2\right)_k,\left(\eta_A^2\right)_k\right)+\min\left(\left(\eta_A^3\right)_k,\left(\eta_A^3\right)_k\right)+...}{\max\left(\left(\eta_A^1\right)_k,\left(\eta_A^1\right)_k\right)+\max\left(\left(\eta_A^2\right)_k,\left(\eta_A^2\right)_k\right)+\max\left(\left(\eta_A^3\right)_k,\left(\eta_A^3\right)_k\right)+...}\right)\right)$$

$$=\lambda\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{(\eta_A^1)_k^2+(\eta_A^2)_k^2+...+(\eta_A^p)_k^2}{(\eta_A^1)_k^2+(\eta_A^2)_k^2+...+(\eta_A^p)_k^2}\right)\right)+(1-\lambda).\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\begin{array}{c}\dfrac{(a_1^k)^2+(a_2^k)^2+(a_3^k)^2+(a_4^k)^2}{(a_1^k)^2+(a_2^k)^2+(a_3^k)^2+(a_4^k)^2}.\\ \dfrac{\min\left(\left(\eta_A^1\right)_k,\left(\eta_A^1\right)_k\right)+\min\left(\left(\eta_A^2\right)_k,\left(\eta_A^2\right)_k\right)+\min\left(\left(\eta_A^3\right)_k,\left(\eta_A^3\right)_k\right)+...}{\max\left(\left(\eta_A^1\right)_k,\left(\eta_A^1\right)_k\right)+\max\left(\left(\eta_A^2\right)_k,\left(\eta_A^2\right)_k\right)+\max\left(\left(\eta_A^3\right)_k,\left(\eta_A^3\right)_k\right)+...}\end{array}\right)\right)$$

$$= \lambda.(1)+(1-\lambda).(1)$$

$$=1.$$

Tanım 3.2.20:

$A=\langle (a_1,a_2,a_3,a_4);\eta_A^1,\eta_A^2,\ldots,\eta_A^p\rangle$ ve $B=\langle (b_1,b_2,b_3,b_4);\eta_B^1,\eta_B^2,\ldots,\eta_B^p\rangle$ $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde yamuksal bulanık çoklu sayılar olsun ve her bir $q=(1,2,\ldots,n)$ için $w_q\in[0,1]$ ağırlık sayısı olsun öyle ki $\sum_{q=1}^{n} w_q=1$. O zaman A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasındaki $HybV_w(A,\ B)$ ağırlıklı Hybrid vektör benzerlik ölçüsü;

$$HybV_w(A,\ B)=\lambda.\left(\frac{1}{p}\sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{4}\left|a_j^k-b_j^k\right|}{4}\right).\frac{w_q.\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k^{\,2}+\sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k^{\,2}-\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}\right)\right)+$$

$$(1-\lambda).\left(\frac{1}{p}\sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}a_i^k.b_i^k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(a_i^k)^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(b_i^k)^2}}.\frac{w_q.\left[\min\left((\eta_A^1)_k,(\eta_B^1)_k\right)+\min\left((\eta_A^2)_k,(\eta_B^2)_k\right)+\min\left((\eta_A^3)_k,(\eta_B^3)_k\right)+\ldots\right]}{\max\left((\eta_A^1)_k,(\eta_B^1)_k\right)+\max\left((\eta_A^2)_k,(\eta_B^2)_k\right)+\max\left((\eta_A^3)_k,(\eta_B^3)_k\right)+\ldots}\right)\right).$$

Örnek 3.2.21:

$A=\langle (0.2,0.3,0.5,0.6);0.1,0.4,0.5,0.6\rangle$ ve $B=\langle (0.1,0.3,0.4,0.6);0.2,0.4,0.6,0.8\rangle$ $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde yamuksal bulanık çoklu sayılar olsun ve w_q; her bir $q=(1,2)$ için ağırlık sayısı olsun öyle ki $w_1=0.4, w_2=0.6$ ve $\sum_{q=1}^{n} w_q=1$. O zaman A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasındaki $HybV_w(A,\ B)$ ağırlıklı hybrid benzerlik ölçüsü;

$$HybV_w(A,\ B)=\lambda.\left(\frac{1}{p}\sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\left(\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{4}\left|a_j^k-b_j^k\right|}{4}\right).\frac{w_q.\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}{\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k^{\,2}+\sum_{i=1}^{p}(\eta_B^i)_k^{\,2}-\sum_{i=1}^{p}(\eta_A^i)_k.(\eta_B^i)_k}\right)\right)+$$

$$(1-\lambda).\left(\frac{1}{p}\sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}a_i^k.b_i^k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(a_i^k)^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(b_i^k)^2}}.\frac{w_q.\left[\min\left((\eta_A^1)_k,(\eta_B^1)_k\right)+\min\left((\eta_A^2)_k,(\eta_B^2)_k\right)+\min\left((\eta_A^3)_k,(\eta_B^3)_k\right)+\ldots\right]}{\max\left((\eta_A^1)_k,(\eta_B^1)_k\right)+\max\left((\eta_A^2)_k,(\eta_B^2)_k\right)+\max\left((\eta_A^3)_k,(\eta_B^3)_k\right)+\ldots}\right)\right).$$

$$= 0,3.\left(\frac{1 - \frac{|0,2-0,1| + |0,3-0,3| + |0,5-0,4| + |0,6-0,6|}{4} \cdot 0,4.(0,1.0,2+0,4.0,4+0,5.0,6+0,6.0,8)}{[(0,1)^2+(0,4)^2+(0,5)^2+(0,6)^2]+[(0,2)^2+(0,4)^2+(0,6)^2+(0,8)^2]-[(0,1.0,2+0,4.0,4+0,5.0,6+0,6.0,8)]} \right)$$

$$+0,3.\left(\frac{1 - \frac{|0,2-0,1| + |0,3-0,3| + |0,5-0,4| + |0,6-0,6|}{4} \cdot 0,6.(0,1.0,2+0,4.0,4+0,5.0,6+0,6.0,8)}{[(0,1)^2+(0,4)^2+(0,5)^2+(0,6)^2]+[(0,2)^2+(0,4)^2+(0,6)^2+(0,8)^2]-[(0,1.0,2+0,4.0,4+0,5.0,6+0,6.0,8)]} \right)$$

$$+(0,7).\left(\frac{0,2.0,1+0,3.0,3+0,5.0,4+0,6.0,6}{\sqrt{(0,2)^2+(0,3)^2+(0,5)^2+(0,6)^2}+\sqrt{(0,1)^2+(0,3)^2+(0,4)^2+(0,6)^2}} .0,4. \frac{0,1+0,4+0,5+0,6}{0,2+0,4+0,6+0,8} \right)$$

$$+(0,7).\left(\frac{0,2.0,1+0,3.0,3+0,5.0,4+0,6.0,6}{\sqrt{(0,2)^2+(0,3)^2+(0,5)^2+(0,6)^2}+\sqrt{(0,1)^2+(0,3)^2+(0,4)^2+(0,6)^2}} .0,6. \frac{0,1+0,4+0,5+0,6}{0,2+0,4+0,6+0,8} \right)$$

$\cong 0,26823 + 0,55392$

$\cong 0,82215.$

Önerme 3.2.22:

$HybV_w(A,\ B)$; A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasındaki ağırlıklı hybrid benzerlik ölçüsü olsun, $w_q \in [0,1]$ ve her bir $q = (1,2,...,n)$ için $w_q \in [0,1]$ ağırlık sayısı olsun öyle ki $\sum_{q=1}^{n} w_q = 1$. O zaman A ve B yamuksal bulanık çoklu sayıları arasındaki $HybV_w(A,\ B)$ ağırlıklı hybrid benzerlik ölçüsü için;

i. $0 \le HybV_w(A,\ B) \le 1$

ii. $HybV_w(A,B) = HybV_w(B,A)$

iii. $A = B$, $(a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, a_4 = b_4)$ ve ($\eta_A^1 = \eta_B^1, \eta_A^2 = \eta_B^2, \dots, \eta_A^p = \eta_B^p$) ise $HybV_w(A,\ B) = 1$ dir.

BÖLÜM 4

UYGULAMALAR

4.1 Yamuksal Bulanık Çoklu Sayılar (YBÇS) İle Çok-Kriterli Karar Vermeye Dayalı Dice Vektör Benzerlik Ölçüsü

Bu bölümde, yamuksal bulanık çoklu sayılar için Dice vektör benzerlik ölçüsüne dayalı YBÇS-çok kriterli karar verme metodu üzerinde çalışılmıştır.

Tanım 4.1.1:

$U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ alternatiflerin kümesi $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ kriterlerin kümesi $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 'de $w_j \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ olacak şekilde a_j $(j = 1,2 \dots, n)$ için ağırlık vektörü ve $[b_{ij}]_{mxn} = \langle (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij,} d_{ij}); \eta_{ij}^1, \eta_{ij}^2, \dots, \eta_{ij}^p \rangle$ $(j = 1,2 \dots, n)$ olmak üzere alternatiflerin değerlendirmesi için oluşturulan $[b_{ij}]_{mxn}$ matrisine yamuksal bulanık çoklu sayılar için karar verme matrisi denir ve

$$[b_{ij}]_{m\times n} = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

şeklinde gösterilir.

r^+, $[b_{ij}]_{m\times n}$ yamuksal bulanık çoklu sayılar için (YBÇ) karar verme matrisinin pozitif ideal çözümü olur ve şu şekilde gösterilir:

$$r^+ = \langle (1, 1, 1, 1); 1, 1, \dots, 1 \rangle$$

ve r^-, $[b_{ij}]_{m\times n}$ yamuksal bulanık çoklu sayılar için (YBÇ) karar verme matrisinin negatif ideal çözümü olur ve şu şekilde gösterilir:

$$r^- = \langle (0,0,0,0); 0,0,\dots,0\rangle.$$

Algoritma 4.1.2:

Adım 1:

Karar için, $[b_{ij}]_{m\times n}$ karar verme matrisi oluşturulur.

Adım 2:

Yamuksal Bulanık Çoklu Sayıların pozitif ideal (veya negatif ideal) çözümü olan r^+ çözümü ile $u_i = \langle (a_i, b_i, c_i, d_i); \eta_A^1, \eta_A^2, \dots, \eta_A^p\rangle$, $(i = 1,2\dots,m)$ arasındaki S_i ağırlıklı Dice vektör benzerliği S_i hesaplanır.

$$D_w(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1+d(\mathrm{A},\mathrm{B})}\cdot\frac{2w_j(\eta_A^1(x_j).\eta_B^1(x_j)+\eta_A^2(x_j).\eta_B^2(x_j)+\dots+\eta_A^p(x_j)\eta_B^p(x_j))}{(\eta_A^1(x_j))^2+(\eta_B^1(x_j))^2+(\eta_A^2(x_j))^2+(\eta_B^2(x_j))^2+\dots+(\eta_A^p(x_j))^2+(\eta_B^p(x_j))^2}\right)$$

Adım 3:

$S_i = D_{w_i}(\mathrm{u}_i, r^+)$, $(i=1,2,\dots,m)$, $(j=1,2,\dots,n)$ için S_i değerleri hesaplanarak sıraya konulur.

Adım 4:

En iyi alternatif seçilir.

Şimdi, aşağıda 4.1.2 için nümerik bir örnek verilmiştir;

Örnek 4.1.3:

Xu and Cia [21] den uyarlanan karar verme problemi üzerinde düşünelim. Farz edelim Nizip Medikal firması Sedye almak istiyor. Medikal firması dört çeşit sedye (alternatif) için 4 farklı şirket ile görüşmektedir. Seçeneklerimiz $u_i(i = 1,2,3,4)$ olmak üzere; her şirket için sırasıyla u_1, u_2, u_3 ve u_4 olsun. Medikal firması seçenekleri (alternatifler) değerlendirmek için üç kriteri dikkate almaktadır;

a_1 =hafiflik; a_2 =sağlamlık; a_3 =servis ağı olmak üzere yukarıdaki üç özellik altında dört olası alternatifi $u_i(i = 1,2,3,4)$ hesaplamak için YBÇS değerlerini kullanırız. Aynı zamanda, $a_j(j = 1,2,3)$'nin ağırlık vektörü $\omega = (0.2,0.5,0.1,0.2)^T$ olur. O zaman,

Algoritma 4.1.4:

Adım 1:

Nizip Medikal tarafından sağlanan karar matrisi aşağıda verilen tablo-1' deki gibi oluşturulmuştur;

Tablo 4.1 Medikal tarafından verilen karar matrisi;

	a_1	a_2	a_3
u_1	$\langle(0.3,0.5,0.7,0.9);0.4,0.5,0.3,0.6\rangle$	$\langle(0.6,0.7,0.8,0.9);0.8,0.9,0.6,0.3\rangle$	$\langle(0.1,0.3,0.5,0.8);0.2,0.5,0.2,0.1\rangle$
u_2	$\langle(0.2,0.3,0.4,0.5);0.8,0.1,0.4,0.2\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.8,0.9);0.1,0.9,0.3,0.7\rangle$	$\langle(0.2,0.5,0.8,0.9);0.7,0.7,0.1,0.3\rangle$
u_3	$\langle(0.1,0.5,0.6,0.7);0.2,0.6,0.2,0.5\rangle$	$\langle(0.4,0.6,0.7,0.9);0.2,0.9,0.1,0.8\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8);0.8,0.8,0.5,0.1\rangle$
u_4	$\langle(0.3,0.4,0.6,0.8);0.6,0.9,0.1,0.2\rangle$	$\langle(0.2,0.3,0.7,0.8);0.8,0.3,0.2,0.4\rangle$	$\langle(0.1,0.5,0.6,0.8);0.2,0.3,0.1,0.3\rangle$

Adım 2:

Pozitif ideal YBÇ-sayılarının çözümünde r^+ kullanılarak hesaplandı;

$$r^+ = \langle(1,1,1,1);1,1,\ldots,1\rangle$$

Adım 3:

Ağırlıklı Dice vektör benzerlik ölçümleri $S_i = D_{w_i}(u_i, r^+)$ hesaplandı;

Önerilen method	Ölçüm değeri	Sıralama
	$D_{w_i}(u_1, r^+) = 0{,}1302$	
	$D_{w_i}(u_2, r^+) = 0{,}3341$	
$S_i = D_{w_i}(u_i, r^+)$	$D_{w_i}(u_3, r^+) = 0{,}0685$	$S_2 > S_1 > S_4 > S_3$
	$D_{w_i}(u_4, r^+) = 0{,}1197$	

Adım 4:

Bu yüzden Medikal firması u_2 şirketiyle sedye alımı için anlaşma yapacaktır. Bir takım nedenlerden dolayı eğer Medikal firması u_2'yi seçmek istemezse, ikinci seçimi u_1 şirketi ile yapacağı sedye anlaşması olur.

4.2 Yamuksal Bulanık Çoklu Sayılar (YBÇS) İle Çok-Kriterli Karar Vermeye Dayalı Jaccard, Cosine ve Hybrid Benzerlik Ölçüleri

Bu bölümde, yamuksal bulanık çoklu sayılar için Jaccard, Cosine ve Hybrid vektör benzerlik ölçüsüne dayalı YBÇS-çok kriterli karar verme metodu üzerinde çalışılmıştır.

Ateş, ağrı, kilo değişimi, yorgunluk, baş dönmesi, öksürük, kaşıntı vb. insan vücudununda ortaya çıkan tüm bu belirtilerin bir veya birden fazla nedeni olabilir. Vücutta beliren bu semptomların bilincinde olmak, hastalıkların genel olarak erken tanı ve tedavisinde çok önemli bir rol oynamaktadır. Yani, hastalıkların erken tanı ve tedavisinde, bireyin vücudunda meydana gelen semptomlarının farkında olduğunu bilmesi olası bir hastalığın seyrinin değişmesinde hayati bir rol oynamaktadır.

Bu yüzden, burada, hastanın vücudunda meydana gelen belirtilerin erken tanı ve tedavisinde ne kadar önemli olduğunu gösterebilmek adına bir tıbbi teşhis uygulaması verilmiştir. Hastalar $P = \{\text{Ali}, \text{Hasan}, \text{Ezgi}\}$ kümesinde yer alan şahıslar olsun. Hastalıkların kümesi $D = \{\text{Kızamık, Öksürük, Grip}\}$, semptomların kümesi ise S={Sırt ağrısı, mide ağrısı, kulak ağrısı} olsun. Uygulamada günün dört farklı zaman diliminde (08:30, 13:30, 18:30 ve 23.30) hastalarda beliren semptomlar göz önünde bulundurularak, hangi hastalığa daha uygun yakalanmış olabilecekleri değerlendirilmiştir.

$\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 0.4$ olsun.

Tablo 4.2 Q (Hasta ve Semptomlar arasındaki ilişki)

Q	Sırt ağrısı	Mide ağrısı	Kulak ağrısı
Ali	$\langle(0.1,0.3,0.3,0.4); 0.1,0.3,0.6,0,7\rangle$	$\langle(0.2,0.4,0.4,0.5); 0.2,0.4,0.7,0.8\rangle$	$\langle(0.1,0.2,0.2,0.3); 0.2,0.4,0.6,0.8\rangle$
Hasan	$\langle(0.2,0.4,04,0.5); 0.2,0.4,0.7,0.8\rangle$	$\langle(0.1,0.2,0.2,0.3); 0.1,0.3,0.5,0,7\rangle$	$\langle(0.2,0.4,0.4,0.7); 0.2,0.4,0.6,0.7\rangle$
Ezgi	$\langle(0.1,0.2,0.3,0.4); 0.2,0.4,0.6,0.8\rangle$	$\langle(0.4,0.6,0.6,0.7); 0.4,0.6,0.7,0.7\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.7,0.8); 0.1,0.3,0.6,0.9\rangle$

Gün içerisinde 4 (dört) farklı zamanda örnekler alınmaktadır.(08:30, 13:30, 18:30 ve 23.30)

Tablo 4.3 R (Semptomlar ve Hastalıklar arasındaki ilişki)

R	Kızamık	Öksürük	Grip
Sırt ağrısı	⟨(0.1,0.2,0.4,0.4); 0.2,0.3,0.7,0.8⟩	⟨(0.1,0.2,0.5,0.6); 0.3,0.4,0.4,0.7⟩	⟨(0.1,0.2,0.3,0.5); 0.2,0.3,0.5,0.7⟩
Mide ağrısı	⟨(0.2,0.4,0.5,0.6); 0.1,0.4,0.5,0.7⟩	⟨(0.2,0.2,0.5,0.7); 0.2,0.3,03,0.4⟩	⟨(0.3,0.4,0.5,0.6); 0.3,0.7,0.8,0.9⟩
Kulak ağrısı	⟨(0.5,0.6,0.7,0.8); 0.1,0.4,0.5,0.9⟩	⟨(0.1,0.2,0.5,0.6); 0.3,0.5,0.7,0.9⟩	⟨(0.3,0.5,0.6,0.8); 0.2,0.3,0.5,0.6⟩

Tablo 4.4 Jaccard benzerlik ölçüsü(Q ve R yi kullanarak)

Jaccard	Kızamık	Öksürük	Grip
Ali	0,78719	**0,737372**	0,800518
Hasan	0,798176	**0,752882**	0,76456
Ezgi	**0,683783**	0,773332	0,728903
Optimal−Ali(Öksürük);Hasan(Öksürük); Ezgi(Kızamık)			

Tablo 4.5 Ağırlıklı Jaccard benzerlik ölçüsü(Q ve R yi kullanarak)

Ağırlıklı Jaccard	Kızamık	Öksürük	Grip
Ali	0,7871	**0,7373**	0,8005
Hasan	0,7981	**0,75287**	0,76455
Ezgi	**0,68378**	0,77332	0,72888
Optimal−Ali(Öksürük);Hasan(Öksürük); Ezgi(Kızamık)			

Tablo 4.6 Cosine benzerlik ölçüsü(Q ve R yi kullanarak)

Cosine	Kızamık	Öksürük	Grip
Ali	0,82508	**0,68566**	0,81249
Hasan	0,88142	**0,70496**	0,73462
Ezgi	**0,68887**	0,81786	0,71412
Optimal−Ali(Öksürük);Hasan(Öksürük); Ezgi(Kızamık)			

Tablo 4.7 Ağırlıklı Cosine benzerlik ölçüsü(Q ve R yi kullanarak)

Ağırlıklı cosine	Kızamık	Öksürük	Grip
Ali	0,82507	**0,68566**	0,81248
Hasan	0,88141	**0,70495**	0,73641
Ezgi	**0,68886**	0,81786	0,71412
Optimal−Ali(Öksürük);Hasan(Öksürük); Ezgi(Kızamık)			

Tablo 4.8 Hybrid benzerlik ölçüsü (Q ve R yi kullanarak) $\lambda = 0,9$ ve $1-\lambda = 0,1$

Hybrid	Kızamık	Öksürük	Grip
Ali	0,790979	**0,732201**	0,801715
Hasan	0,8065	**0,74809**	0,761566
Ezgi	**0,684292**	0,777785	0,727425
Optimal–Ali(Öksürük);Hasan(Öksürük); Ezgi(Kızamık)			

Tablo 4.9 Ağırlıklı Hybrid benzerlik ölçüsü (Q ve R yi kullanarak) $\lambda = 0,9$ ve $1-\lambda = 0,1$

Ağırlıklı Hybrid	Kızamık	Öksürük	Grip
Ali	0,790897	**0,732136**	0,801698
Hasan	0,806431	**0,748078**	0,761736
Ezgi	**0,684288**	0,777774	0,727404
Optimal–Ali(Öksürük);Hasan(Öksürük); Ezgi(Kızamık)			

Tablo 4.10 Optimal(en uygun) değerli Hybrid benzerlik ölçümü ve ağırlıklı hybrid benzerlik ölçümü

Benzerlik Ölçüsü	Değerler	Ölçüm Değeri
$S_i = J(P,D)$		$J(Ali, Öksürük) = 0,737372$ $J(Hasan, Öksürük) = 0,752882$ $J(Ezgi, Öksürük) = 0,683783$
$S_i = J_{w_i}(P,D)$		$J_w(Ali, Öksürük) = 0,7373$ $J_w(Hasan, Öksürük) = 0,75287$ $J_w(Ezgi, Öksürük) = 0,68378$
$S_i = C(P,D)$		$C(Ali, Öksürük) = 0,68566$ $C(Hasan, Öksürük) = 0,70496$ $C(Ezgi, Öksürük) = 0,68887$
$S_i = C_{w_i}(P,D)$		$C_w(Ali, Öksürük) = 0,68566$ $C_w(Hasan, Öksürük) = 0,70495$ $C_w(Ezgi, Öksürük) = 0,68886$

$S_i = HybV(P,D)$	$\lambda = 0,9$	$HybV(Ali, Öksürük) = 0{,}732201$ $HybV(Hasan, Öksürük) = 0{,}74809$ $HybV(Ezgi, Kızamık) = 0{,}684292$
$S_i = HybV_{w_i}(P,D)$	$\lambda = 0,9$	$HybV_w(Ali, Öksürük) = 0{,}732136$ $HybV_w(Hasan, Öksürük) = 0{,}748078$ $HybV_w(Ezgi, Kızamık) = 0{,}684288$

BÖLÜM 5

SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tezde çalışılan tanım ve metotları inşa etmek için ikinci bölümde, bulanık kümeler, bulanık sayılar, çoklu bulanık küme kavramları ile yamuksal bulanık sayılarda bir çok yerde karşılaşılan s-norm, t-norm özellikleri ve bunların başlıca temel tanım ve işlemleri verilmiştir. Sonra yamuksal bulanık çoklu sayılar üzerine Dice, Jaccard, Cosine ve Hybrid benzerlik ölçüsü tanımlandı. Daha sonra üçüncü bölümde Dice, Jaccard ve Cosine ve Hybrid benzerlik ölçüleri ile çok kriterli karar verme problemleri için karar verme metotları üzerinde çalışıldı. Ayrıca geliştirilen bu yeni benzerlik ölçümleri için önermeler üzerinde çalışmalar yapıldı. Son olarak dördüncü bölümde, yamuksal bulanık çoklu sayılar üzerine inşa edilen benzerlik ölçümleri kullanılarak çok kriterli karar verme problemleri için karar verme metotları üzerinde çalışıldı. Dördüncü bölüm olan uygulama kısmında ise, yeni metodların uygulanabilirliği gösterilerek kanıtlanmıştır. Ayrıca, kriterlere bağlı seçeneklerin nasıl sıralanacağının gösterilmesi için bazı nümerik örnekler verilmiştir.

Yamuksal bulanık çoklu sayılar ilerleyen zamanlarda belirsizlik içeren birçok olayı modellemek ve çözmek için çok daha fazla alana uygulanabilir. Örnek olarak belirsiz ifadeler içeren operasyon araştırması, mühendislik, yönetim ve sinyal işleme, bilgisayar teknolojileri, karar verme problemleri, ekonomi problemleri ve daha geniş alanlardaki uygulamalar üzerine çalışmalar yapılabilir. Bunun için yamuksal bulanık çoklu sayılar ve işlemleri değişik uygulamalar ve teknikler kullanılarak genişletilebilir.

KAYNAKLAR

[1]. Alim A, JohoraFT,Babu S,Sultana A (2015) Elementary operations on LR fuzzy number. *Adv Pure Math* **5(03)**:131.

[2]. Ban AI, Coroianu L(2015) Existence, uniqueness, calculus and properties of triangular approximations of fuzzy numbersunder ageneral condition. *Int J Approx Reason* **62**:1–26.

[3]. Chandra S,Aggarwal A(2015) On solving matrix game swith pay-offs of triangular fuzzy numbers: certain observations and generalizations. *Eur J Oper Res* **246(2)**:575–581.

[4]. Chakraborty D, Guha D (2010) Addition two generalized fuzzy numbers. *Int J Ind Math* **2(1)**:9–20

[5]. Kaufmann A,Gupta MM (1988) Fuzzy mathematical models in engineering and management science. Elsevier Science Publishers,Amsterdam.

[6]. Miyamoto S (2001) Fuzzy multi-sets and their generalizations. Multi-set processing, *Lecture notes in computer science* **2235**. Springer, Berlin, pp 225–235.

[7]. Miyamoto S (2004) Data structure and operations for fuzzy multi-sets. Transactions on roughsets II, *Lecturenotes in computer science*, vol 3135. Springer,Berlin, pp 189–200.

[8]. Maturo A (2009) On some structures of fuzzy numbers. *Iran J Fuzzy Syst* **6(4)**:49–59.

[9]. Meng Y, Zhou Q, Jiao J, Zheng J, Gao D (2015) The ordered weighted geometric averaging algorithm to multiple attribute decision making with in triangular fuzzy numbers based on the mean area measurement method1. *Appl Math Sci* **9(43)**:2147–2151.

[10]. Wang YJ (2015) Ranking triangleand trapezoidal fuzzy numbers based on the relative preference relation. *Appl Math Model* **39(2)**:586–599.

[11]. Rouhparvar H, Panahi A (2015) A new definition for defuzzification of Generalized fuzzy numbers and its application. *Appl Soft Comput* **30**:577–584.

[12]. Rezvani S (2015) Ranking generalized exponential trapezoidal fuzzy numbers based on variance. *Appl Math Comput* **262**:191–198.

[13]. Riera JV, Massanet S, Herrera-Viedma , Torrens J (2015) Some interesting properties of The fuzzy linguistic model based on discrete fuzzy number stomanage hesitant fuzzy linguistic information. *Appl Soft Comput* **36**:383–391.

[14]. Riera JV, Torrens J (2015) Using discrete fuzzy numbers in the aggregation of in complete qualitative information. *Fuzzy Sets Syst* **264**:121–137.

[15]. Roseline S, Amirtharaj S (2015) Improved ranking of generalized trapezoidal fuzzy numbers. *Int J Innov Res Sci Eng Technol* **4**:6106–6113.

[16]. Roseline S, Amirtharaj S (2014) Generalized fuzzy hungarian method for generalized trapezoidal fuzzy transportation problem with ranking of Generalized fuzzy numbers. *Int J Appl Math Stat Sci* (IJAMSS) **1(3)**:5–12.

[17]. Ruan J, Shi P, Lim CC, Wang X (2015) Relief suppliesal location and optimization by interval and fuzzy number approaches. *Inf Sci* **303**:15–32.

[18]. Surapati P, Biswas P (2012) Multi-objective assignment Problem with generalized trapezoidal fuzzy numbers. *Int J Appl Inf Syst* **2(6)**:13–20.

[19]. Sebastian S, RamakrishnanTV (2010) Multi-fuzzy sets. *Int Math Forum* **5(50)**:2471–2476.

[20]. Syropoulos A (2012) On generalized fuzzy multisets and their use in computation. *arXivpreprint arXiv*:1208.245721.

[21]. Syropoulos A (2010) On nonsymmetric multi-fuzzy sets.*Crit Rev IV*:35–41.

[22]. Saeidifar A (2015) Possibilistic characteristic functions. *Fuzzy Inf Eng* **7(1)**:61–72.

[23]. Sinova B, Casals MR, Gil MA, Lubiano MA (2015) The fuzzy characterizing function of The distribution of a random fuzzy number. *Appl Math Model* **39(14)**:4044–4056.

[24]. Stupnanova´ A (2015) A probabilistic approach to the arithmetics of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets Syst* **264**:64–75.

[25]. Thowhida A, Ahmad SU (2009) A computational method for fuzzy arithmetic operations. *Daffodil Int Univ J SciTechnol* **4(1)**:18–22.

[26]. Dice, L.R. (1945), Measures of the amount of ecologic association between species, *Ecology*, **26**, 297–302.

[27]. Ye, J. (2012), Multi criteria decision-making method using the Dice similarity measure based on the reduct intuitionistic fuzzy sets of interval-valued intuitionistic fuzzy sets, *Applied Mathematical Modelling*, **36**, 4466–4472.

[28]. Ye, J. (2012), Multi criteria group decision-making method using vector similarity measures for trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers, *Group Decision and Negotiation*, **21**, 519–530.

[29]. Yager RR (1986) On the theory of bags. *Int J Gen Syst* **13**:23–37.

[30]. L.A. Zadeh.(1965). Fuzzy Sets.*Information and Control*.**8**, 338-353.

[31]. Zimmermann H-J (1993) Fuzzy set theory and its applications. Kluwer Academic Publishers, Berlin.

[32]. Uluçay, V., Deli, I., & Şahin, M. (2017). Trapezoidal fuzzy multi number and its application to multi-criteria decision-making problems. *Neural Computing and Applications,* 1-10.

[33]. Şahin Memet, Acıoğlu Hatice. uluçay vakkas (2016) New Similarity Measures of Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Numbers And Their Application To Multiple Criteria Decision Making. *Asian Journal of Mathematics and Computer Research* **1(2),** 76-84.

[34]. Pramanik, S, Biswas, P., & Giri, B. C. (2017). Hybrid vector similarity measures and their applications to multi-attribute decision making under neutrosophic environment. *Neural computing and Applications*,**28(5),** 1163-1176.
[35]. H. Wang, F. Smarandache, Y. Q. Zhang, R. Sunderraman (2005). Interval neutrosophic sets and logic: Theory and applications in computing, Hexis, Phoenix, Ariz, USA.
[36]. J. Ye (2004). A multicriteria decision-making method using aggregation operators for simplified neutrosophic sets, *Journal of Intelligent and fuzzy Systems*, **26(5)** 2459-2466.
[37]. Kaufmann A, Grupta MM (1988) Fuzzy mathematical models in engineering and management science. Elsevier Science Publishers, Amsterdam.
[38]. Salton G, McGill MJ (1987) Introduction to modern information retrieval. McGraw-Hill, New York.
[39]. Jaccard P (1901) Distribution de la flore alpine dans leBassin des Drouces et dans quelques regions voisines. *Bull de la Societe Vaudoise des Sciences Naturelles* **37 (140)**:241-272.