HAZİRAN 2018 Yüksek Lisans - Matematik ARZUM GÜLAY ERDOĞDU

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

k-JACOBSTHAL VE k-JACOBSTHAL LUCAS DİZİLERİNİN BİNOM DÖNÜŞÜMLERİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARZUM GÜLAY ERDOĞDU

HAZİRAN 2018

k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas Dizilerinin Binom Dönüşümleri

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Şükran UYGUN

Arzum Gülay ERDOĞDU

Haziran 2018

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas Dizilerinin Binom Dönüşümleri

Öğrencinin Adı Soyadı: Arzum Gülay ERDOĞDU

Tez Savunma Tarihi: 11 Haziran 2018

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ahmed Necmeddin YAZICI
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Şükran UYGUN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:	İmzası
Prof. Dr. Ali İhsan HASÇELİK	....
Doç. Dr. Fatih HASOĞLU	....
Dr. Öğr. Üyesi Şükran UYGUN	....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Arzum Gülay ERDOĞDU

ABSTRACT

THE BINOMIAL TRANSFORMS OF k-JACOBSTHAL AND k-JACOBSTHAL LUCAS SEQUENCES

ERDOĞDU, Arzum Gülay

M.Sc. Thesis in Mathematics Department

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Şükran UYGUN

June 2018

87 pages

In this study, first of all the special integer sequences are defined briefly by giving some basic properties. And the binom transformations are given.

In this study, we define the binomial, k-binomial rising and falling transforms for *k*-Fibonacci, *k*-Lucas, *k*-Jacobsthal, *k*-Jacobsthal Lucas sequences. We investigate some properties of these sequences such as recurrence relations, Binet's formula, generating functions and in the sequel of this study we denote Pascal Jacobsthal triangle and a matlab programme for finding the elements of these binomial transformation sequences.

Keywords: Jacobsthal numbers, Binomial Transforms, Binet's formula, Generating function, Pascal Triangle

ÖZET

k-JACOBSTHAL VE k-JACOBSTHAL LUCAS DİZİLERİNİN BİNOM DÖNÜŞÜMLERİ

ERDOĞDU, Arzum Gülay

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Dr. Öğr. Üyesi Şükran UYGUN

Haziran 2018

87 sayfa

Bu çalışmada k-Fibonacci, k-Lucas ve k-Jacobsthal, k-Jacobsthal Lucas sayı dizilerinin binom, k- binom, artan k- binom, azalan k- binom, dönüşümleri tanımlanacaktır. Bu dizilerin yineleme bağıntıları, Binet formülü, üreteç fonksiyonu gibi çeşitli özellikleri araştırılacaktır.

Ayrıca bu binom dönüşüm dizilerinin elemanlarını Pascal üçgeni tanımlayarak elde edilmiştir. Bu elemanları hesaplayan bir matlab programı da ek olarak verilmiştir. Farklı tipteki üreteç fonksiyonları kullanılarak sayı dizilerine ait çeşitli özellikler elde edilecektir.

Anahtar Kelimeler: Jacobsthal sayıları, Binom Dönüşümler, Binet Formülü, Üreteç Fonksiyonu, Pascal Üçgeni.

Çok kıymetli aileme…

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince desteğini, deneyimini ve emeğini hiçbir zaman benden esirgemeyen ve aynı zamanda kişiliğiyle de bana örnek olan Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden saygıdeğer hocam Dr. Öğr. Üyesi Şükran UYGUN'a, maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda bulunarak bu günlere gelmemde en büyük pay sahibi olan aileme ve tüm sevdiklerime minnettarlığımı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

F_n : Fibonacci dizisinin *n*-inci elemanı

L_n : Lucas dizisinin *n*-inci elemanı

P_n : Pell dizisinin *n*-inci elemanı

Q_n : Pell Lucas dizisinin *n*-inci elemanı

j_n : Jacobsthal dizisinin *n*-inci elemanı

c_n : Jacobsthal Lucas dizisinin *n*-inci elemanı

h_n : Horadam dizisinin *n*-inci elemanı

BÖLÜM 1
GİRİŞ

12. yüzyılda yaşayan İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci, babasının işi nedeniyle ilköğrenimini günümüzde Cezayir Demokratik Halk Cumhuriyetinin bir kıyı kenti olan Bougie'de almıştır. Daha sonra İtalya'ya döndüğünde o dönem Avrupa'sında kullanılan Romen rakamlarıyla matematik yapmak zor olduğu için öğrendiği Arap rakamlarını anlatmak amacıyla 1201 yılında "Liber Abaci" adlı kitabı yazmıştır. Bu kitabın bir bölümünde aşağıdaki probleme yer verilir.

Elimizde biri erkek diğeri dişi olan 1 çift tavşan vardır ve tavşanlarla ilgili aşağıdaki bilinenleri göz önüne alarak, önümüzdeki bir yıl içinde ne zaman kaç tavşana sahip olduğumuzu nasıl hesaplarız?

i) Bir yeni doğmuş tavşan bir ay sonra yetişkin hale gelir.

ii) Her tavşan çifti yetişkin olduktan sonra 1.aydan itibaren her ay bir çift karma yavru doğurur.

iii) Hiçbir tavşan bir yılda ölmemektedir.

Kabul edelim ki, 1 Ocakta yeni doğmuş (bebek) 1 çift tavşanımız oldu, bunlar 1 Şubatta yetişkin hale gelerek 1 Martta bir çift bebek tavşan doğurmuş olacaklar. Daha sonraki aylarda önceki iki ayda bulunan tavşan çiftlerinin toplamına eşittir. O halde tavşan çifti sayıları aylara göre sırasıyla 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, şeklinde olacaktır.

Bu dizi Avrupa'daki matematikçilerin ilgisini çekmiş ve dizinin sağladığı özelliklerle ilgili çalışmalar yapılmıştır. Ünlü astronom Johannes Kepler 17. yüzyılda bir çalışmasında Fibonacci dizisini veren rekürans bağıntısını kullanmış, ancak Fibonacci dizisi olduğunu yazmamıştır, bunu çağdaşı Albert Girard fark edip Fibonacci dizisinin lineer rekürans bağıntısı ile tanımlanmasını içeren çalışma yapmıştır ve dizinin ilk terimi olarak sıfır alınmıştır.

Altın oran ve Fibonacci sayılarının, bitkilerin büyümeleri ve bazı katıların kristalografik yapılarından, veri tabanlarında arama yapmak için yazılan bilgisayar algoritmalarının geliştirilmesine kadar çok geniş uygulama alanları vardır. Bu yüzden matematikçiler haricinde de Fibonacci dizisi üzerinde birçok çalışma yapılmıştır (Dunlap 1997)

Ayçiçeğinin merkezinden dışarıya doğru sağdan sola ve soldan sağa doğru taneler sayıldığında çıkan sayılar Fibonacci dizisinin ardışık terimleridir. Tütün bitkisinin yapraklarının dizilişinde bir Fibonacci dizisi söz konusudur. Mimar Sinan'ın birçok eserinde Fibonacci dizisi görülmektedir. Mesela Süleymaniye ve Selimiye Cami'lerinin minarelerinde bu dizi mevcuttur.

Dizinin bir terimi, kendinden önceki terime bölündüğünde yaklaşık olarak aynı değer çıkmaktadır. "Altın oran" denilen bu sayı; doğada, bitkilerde, çiçeklerde, ideal insan vücudunda, mimari eserlerde (Mısır Piramitleri vb.) ve birçok alanda görülebilir.

Bu sayıların, sayılar teorisinde çok ilginç özellikleri bulunmuştur. Günümüz matematik literatüründe, Fibonacci dizisinin birçok genelleştirmesi ve Fibonacci ismini içeren yeni dizi tanımları, bunların özellikleri ile diğer dizi ve matematik yapılarıyla aralarındaki ilişkiler büyük bir yer tutmaktadır.

Bu çalışmada özellikle Alman matematikçi Jacobsthal tarafından tanımlanan Jacobsthal sayıları üzerinde çalışma yapılmıştır. Bilgisayarlardaki bazı mikro işlemciler, bir programın akışını değiştirmek için koşullu yönlendirmeler kullanırlar. Bu mikro işlemciler (dallı yönlendirenler) geçici olarak ilerideki yönlendirmeye atlatan komutlandırma yaparlar. Burada, 2 bit' in 4 olasılığı için 1 durumun, 3 bit' in 8 olasılığı için 3 durumun, 4 bit' in 16 olasılığı için 5 durumun, vb. durumları hariç bırakılarak diğerlerinin yararlı olduğu sonucuna varılmış ve hariç bırakılan bu durumların tam olarak Jacobsthal sayılarını verdiği görülmüştür (Horadam,1996).

Özel sayı dizileri çok değişik şekillerde genelleştirilerek yeni sayı dizileri elde edilmiştir. Bu çalışma k pozitif tamsayısı kullanılarak elde edilen genelleştirmelerle ilgildir. Literatürde Falcon (2007), Bolat, H. Köse (2010), D. Jhala(2012), Catarino P. , Paulo Vasco P. (2013) , S. Uygun (2013) vb. çeşitli sayı dizileri ve bunların çeşitli genelleştirmelerini kullanarak üreteç fonksiyonları çalışmıştır.

Binom dönüşümleri ile ilgili literatürde gittikçe artan çalışmalar göze çarpmaktadır. Örneğin, Prodinger 1994 yılında binom dönüşümleri hakkında genel bilgiler vermiştir. Spivey, Steil 2006 yılında Hankel dönüşümlerin binom dönüşümlerini incelemiştir. Chen 2007 yılında binom dönüşümlerinin çeşitli özelliklerini vermiştir. Gülec ve Taskara binom katsayılı Fibonacci sayılarını tanımlamışlardır (2009). Falcon ve Plaza 2009 da. *k*-Fibonacci dizilerinin Binom dönüşümlerini tanımlamışlardır. Taskara, Uslu, Gulec, binom katsayılı Lucas sayılarının çeşitli özelliklerini vermiştir (2010). Bhadouria , Jhala, Singh 2014 yılında., *k*-Lucas dizilerinin çeşitli tipteki binom dönüşümlerini vermişlerdir. 2014 te, Falcon *k*-Fibonacci dizisinin ötelenmiş binom dönüşümleri çalışmıştır. Yılmaz, Taskara 2013 te Padovan ve Perrin sayılarının binom dönüşümlerini çalışmışlardır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde çeşitli sayı dizileri kısaca tanıtılacaktır. Üçüncü bölümde *k*-Fibonacci dizisinin, dördüncü bölümde *k*-Lucas dizisinin, beşinci bölümde *k*-Jacobsthal dizisinin, altıncı bölümde *k*-Jacobsthal Lucas dizisinin çeşitli tipte binom dönüşüm dizileri tanımlanarak temel özellikleri verilmiştir. Son bölümde ise tezle ilgili genel değerlendirmeler yapılmıştır.

BÖLÜM 2
ÇEŞİTLİ SAYI DİZİLERİ

Bu bölümde literatürde önemli bir yere sahip bazı tamsayı dizilerinin tanımları verilecek ve temel bazı özellikleri üzerinde durulacaktır.

2.1. Fibonacci ve Lucas Sayıları

Başlangıç şartları $f_0 = 0,\ \ f_1 = 1$ şeklinde verilen; $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile tanımlanan $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tamsayı dizisine "Fibonacci sayı dizisi" denir. Fibonacci dizisinin Binet formülü, $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere; $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ şeklindedir. Binet formülünden hareketle $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_{n+1}}{f_n} = \alpha$ olduğu görülür. Buradaki $\alpha = 1{,}6183398...$ sayısı "Altın Oran" olarak adlandırılmaktadır.

Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu;

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$$

şeklinde verilir (T. Koshy, 2001).

Simpson formülü

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

bağıntısı ile tanımlanır. Kısmi toplam formülü aşağıdaki gibidir:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1 \qquad .$$

Fransız matematikçi Edward Lucas; başlangıç şartları için $l_0 = 2$ ve $l_1 = 1$ değerlerini kullanarak, "Lucas sayı dizilerini" oluşturmuştur. Bu sayı dizisi de ciddi bir popülarite kazanmıştır. Çünkü, Fibonacci sayı dizileri ile arasında birçok ilginç bağıntı elde edilmiştir. $l_0 = 2$ ve $l_1 = 1$ olmak üzere; $l_{n+1} = l_n + l_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ tamsayı dizisine "Lucas sayı dizisi" denir. Lucas dizisinin Binet formülü, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere; $l_n = \alpha^n + \beta^n$ şeklindedir. Dizinin ardışık iki teriminin oranının sonsuz için limit değeri, $\lim_{n\to\infty} \frac{l_{n+1}}{l_n} = \alpha$ dır. Bu değer sayesinde Lucas sayı dizisi de en az Fibonacci sayı dizisi kadar önem kazanmıştır. Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu;

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n x^n = \frac{2x^2 + x}{1 - x - x^2}$$

şeklindedir (T. Koshy, 2001).

2.2. Pell ve Pell Lucas Sayıları

Başlangıç şartları $p_0 = 0$ ve $p_1 = 1$ olan; $p_{n+1} = 2p_n + p_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ tamsayı dizisine "Pell sayı dizisi" denir. Pell dizisinin Binet formülü, $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere; $p_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ şeklindedir. Negatif indisli Pell sayı dizisi $p_{-n} = (-1)^{n+1} p_n$ ile tanımlanır. Dizinin ardışık iki teriminin oranının sonsuz için limit değeri, $\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \alpha$ dır. Pell sayılarının üreteç fonksiyonu;

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n x^n = \frac{x}{1 - 2x - x^2}$$

şeklindedir. Simpson formülü

$$P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n$$

bağıntısı ile tanımlanır. Kısmi toplam formülü

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = \frac{1}{2}(P_{n+1} + P_n - 1)$$

şeklinde verilir (Horadam, 1971).

Başlangıç şartları $q_0 = 2$ ve $q_1 = 1$ olan; $q_{n+1} = 2q_n + q_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile tanımlanan $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine "Pell Lucas sayı dizisi" denir. Pell Lucas dizisinin Binet formülü, $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere; $q_n = \alpha^n + \beta^n$ şeklindedir. Negatif indisli Pell Lucas sayı dizisi, $q_{-n} = (-1)^{n+1} q_n$ bağıntısıyla tanımlanır. Dizinin ardışık iki teriminin oranının sonsuz için limit değeri, $\lim_{n\to\infty} \frac{q_{n+1}}{q_n} = \alpha$ dır. Pell Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu;

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n x^n = \frac{2-2x}{1-2x-x^2}$$

şeklinde tanımlandıktan sonra Simpson formülü

$$Q_{n+1}Q_{n-1} - Q_n^2 = 8(-1)^{n-1}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Kısmi toplam formülü

$$\sum_{k=1}^{n} Q_k = \frac{1}{2}(Q_{n+1} + Q_n - 2)$$

şeklinde verilir (Horadam, 1971).

Pell ve Pell Lucas sayıları arasında aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$P_{m+n} = 2P_m Q_n - (-1)^n P_{m-n}$$

$$Q_m^2 = 2P_m^2 + (-1)^m$$

$$Q_{2m} = 2Q_m^2 - 2(-1)^m$$

(Horadam, 1971).

2.3. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayıları

Başlangıç şartları $j_0 = 0,\ \ j_1 = 1$ olmak üzere; $j_{n+1} = j_n + 2j_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{j_n\}_{n=0}^{\infty}$ sayı dizisine "Jacobsthal sayı dizisi" denir. $x^2 - x - 2 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri; 2, -1 olmak üzere, Jacobsthal sayıları için Binet formülü, $j_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$ şeklindedir. Dizinin ardışık iki teriminin birbirine oranının sonsuz için limit değeri, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{j_{n+1}}{j_n} = 2$ dir. Jacobsthal sayılarının üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{k=0}^{\infty} j_k x^k = \frac{x}{1 - x - 2x^2}$$

şeklindedir. Jacobsthal sayıları

$$j_n = \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-r}{r} 2^r$$

formülleri kullanılarak da elde edilebilir. n herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere, Jacobsthal sayılarının kısmi toplam formülü

$$\sum_{i=2}^{n} j_i = \frac{1}{2}\left(j_{n+2} - 3\right)$$

olarak verilir.

Başlangıç şartları $c_0 = 2,\ \ c_1 = 1$ olmak üzere; $c_{n+1} = c_n + 2c_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ sayı dizisine "Jacobsthal Lucas sayı dizisi" denir. Jacobsthal Lucas sayıları için Binet formülü, $c_n = 2^n + (-1)^n$ olur. Dizinin ardışık iki teriminin birbirine oranının sonsuz için limit değeri, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_{n+1}}{c_n} = 2$ şeklindedir. Jacobsthal Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \frac{2 - x}{1 - x - 2x^2}$$

şeklinde verilir. Jacobsthal Lucas sayıları

$$j_n = \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-r}{r} 2^r$$

formülleri kullanılarak da elde edilebilir. n herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere, Jacobsthal Lucas sayılarının kısmi toplam formülü

$$\sum_{i=2}^{n} j_i = \frac{1}{2}\left(j_{n+2} - 3\right)$$

olarak verilir. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları arasında aşağıdaki bağıntılar geçerlidir.

a) $j_{n+1} = 2^n - j_n$

b) $j_{n-1} + j_n = 2^{n-1}$

c) $j_{m+n} = j_m j_{n+1} + 2 j_{m-1} j_n$

d) $j_{2n} = j_n j_{n+1} + 2 j_{n-1} j_n = j_n (j_{n+1} + 2 j_{n-1}) = j_n c_n$

e) $j_{2n+1} = j_{n+1}^2 + 2 j_n^2$

f) $(-1)^n 2^{n-1} j_{m-n} = j_m j_{n-1} + 2 j_{m-1} j_n$

2.4. Horadam Sayı Dizileri

$n \geq 2;\quad a, b, p, q \in \mathbb{Z}$ ve $p^2 + 4q \neq 0$ olmak üzere;

$$h_n(a,b;p,q) = p h_{n-1}(a,b;p,q) + q h_{n-2}(a,b;p,q)$$

rekürans bağıntısı ve

$$h_0(a,b;p,q) = a, \qquad h_1(a,b;p,q) = b$$

başlangıç şartları ile tanımlanan diziye Horadam dizisi denir (Horadam 1965).

Yineleme bağıntısının karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - p\lambda - q = 0$$

olup yukarıdaki denklemin kökleri

$$\alpha = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

şeklindedir.

Horadam dizisi için Binet formülü

$$h_n(a,b;p,q) = \frac{(b-\beta a)\alpha^n - (b-\beta a)\beta^n}{\alpha-\beta}$$

ile verilir.

h_n, n. Horadam sayısı ve $n \geq 0$ olmak üzere; Horadam dizisi için kısmi toplam formülü

$$\sum_{n=1}^{k-1} h_n = \frac{h_k + qh_{k-1} - a - b + ap}{p+q-1}$$

ve Simpson formülü

$$h_{n+1}h_{n-1} - h_n^2 = (b^2 - abp - a^2q)(-1)^{n-1}q^{n-2}$$

şeklindedir.

BÖLÜM 3

k-FIBONACCI DİZİLERİNİN BİNOM DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölüm S. Falcon ve A. Plaza'nın 2009 yılında yayınlanmış "Binomial Transforms of the k-Fibonacci Sequence", adlı makalesinden esinlenilerek yazılmıştır. Bu bölümde k-Fibonacci dizisi kısaca tanıtıldıktan sonra k-Fibonacci dizisinin binom, k-binom, artan k-binom, azalan k-binom dizileri tanımlanacaktır. Oluşturulan bu dizilerin yineleme bağıntıları, üreteç fonksiyonları, binet formülleri, elemanları veren binom Pascal üçgenleri ve matlab programları verilmiştir.

3.1. k-Fibonacci Dizilerinin Binom Dönüşümleri

Tanım 3.1.1. k- Fibonacci sayıları: Her $k > 0$ ve $n \geq 0$ tamsayıları için başlangıç şartları $F_{k,0} = 0$, $F_{k,1} = 1$ olmak üzere;

$$F_{k,n+2} = kF_{k,n+1} + F_{k,n}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan $\{F_{k,n}\}_{n \in N}$ dizisine "k-Fibonacci dizisi" denir. Dizinin her bir elemanına da "k-Fibonacci sayısı" denir. $k = 1$ alınırsa, Fibonacci sayı dizisi elde edilir. $r^2 = kr + 1$ fark denkleminin kökleri; $r_1 = \dfrac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$ ve $r_2 = \dfrac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}$ olarak bulunur. $k-$Fibonacci sayıları için Binet formülü, $F_{k,n} = \dfrac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}$ şeklindedir.

k-Fibonacci sayı dizisi için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n} x^n = F_{k,0} + F_{k,1} x + F_{k,2} x^2 + \ldots. \quad = \frac{x}{1 - kx - x^2}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 3.1.2. $\{b_{k,n}\}_{n\in N}$ k -Fibonacci dizisinin binom dönüşümü aşağıdaki formül ile tanımlanır.

$$b_{k,n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}F_{k,i} \tag{3.1.1}$$

Lemma 3.1.3. k -Fibonacci dizisinin binom dönüşümü aşağıdaki bağıntıyı sağlar:

$$b_{k,n+1}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(F_{k,i}+F_{k,i+1}\right) \tag{3.1.2}$$

İspat: Binom sayılarının $\binom{n+1}{i}=\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}$ özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
b_{k,n+1}=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}F_{k,i} &= 0+\sum_{i=1}^{n+1}\left[\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}\right]F_{k,i}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}F_{k,i}+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}F_{k,i+1}\\
&=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}F_{k,i}+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}F_{k,i+1}\\
b_{k,n+1}&=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(F_{k,i}+F_{k,i+1}\right)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.1.4. k -Fibonacci dizisinin binom dönüşümü aşağıdaki yineleme bağıntısını sağlar.

$$b_{k,n+1}=(k+2)b_{k,n}-kb_{k,n-1} \tag{3.1.3}$$

İspat: Binom sayılarının $\binom{n+1}{i}=\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}$ özelliği kullanılırsa,

$$b_{k,n+1}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(F_{k,i}+F_{k,i+1})$$

$$=1+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(F_{k,i}+F_{k,i+1})$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (F_{k,i} + kF_{k,i} + F_{k,i-1})$$

$$= 1 + (k+1)\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_{k,i} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} F_{k,i-1}$$

$$b_{k,n+1} = (k+1)b_{k,n} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} F_{k,i-1} + 1 \tag{3.1.4}$$

n+1 yerine *n* yerleştirilir ve yukarıdaki eşitlik tekrar yazılırsa:

$$b_{k,n} = (k+1)b_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} F_{k,i-1} + 1$$

$$= kb_{k,n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} F_{k,i} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} F_{k,i-1} + 1$$

$$= kb_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} F_{k,i-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} F_{k,i-1} + 1$$

$$b_{k,n} = kb_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right] F_{k,i-1} + 1$$

$$= kb_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i} \right] F_{k,i-1} + 1$$

Yukarıdaki eşitlik (3.1.4) de yerine yazılırsa

$$b_{k,n+1} = (k+1)b_{k,n} + b_{k,n}, - kb_{k,n-1}$$

$$b_{k,n+1} = (k+2)b_{k,n} - kb_{k,n-1}$$

ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.5. (Binet Formülü) k -Fibonacci dizisinin binom dönüşümünün genel terimi, $\alpha = \dfrac{k+2+\sqrt{k^2+4}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{k+2-\sqrt{k^2+4}}{2}$

olmak üzere

$$b_{k,n} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{3.1.5}$$

Binet formülü ile hesaplanabilir. Kökler aşağıdaki bağıntıyı sağlar:

$$\alpha + \beta = k + 2 \qquad \alpha - \beta = \sqrt{k^2 + 4} \qquad \alpha\beta = k.$$

İspat: Yineleme bağıntısının karakteristik polinom eşitliği $x^2 - (k+2)x + k = 0$ ve bu denklemin kökleri α ve β olmak üzere $\alpha = \dfrac{k+2+\sqrt{k^2+4}}{2}$ $\beta = \dfrac{k+2-\sqrt{k^2+4}}{2}$ olarak bulunur.

$b_{k,n} = c_1\alpha^n + c_2\beta^n$ olarak yazılır ve $b_{k,0} = \sum_{i=0}^{0}\binom{0}{0}F_0 = 0$ ve $b_{k,1} = \sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}F_i = 1$ alınarak hesaplanırsa

$$c_1 + c_2 = 0$$
$$c_1\alpha + c_2\beta = 1$$

eşitlikleri elde edilir.

Daha sonra c_1 ortak parantezine alınırsa,

$$1 = c_1(\alpha - \beta) = c_1\sqrt{k^2 + 4}$$

Binet formülü

$$b_{k,n} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

olarak bulunur.

Teorem 3.1.6.(k-Fibonacci Dizisinin Binom Dönüşümünün Üreteç Fonksiyonu) Katsayıları k-Fibonacci sayıları olan 0 civarında oluşturulan kuvvet serisi k-Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonunu oluşturur. k- Fibonacci dizisinin binom dönüşümünün üreteç fonksiyonunu $b_k(x)$ ile gösterilsin. k - Fibonacci dizisinin binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu

$$b_k(x)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = b_{k,0}+b_{k,1}x+b_{k,2}x^2+\ldots=\frac{x}{1-(k+2)x+kx^2} \tag{3.1.6}$$

eşitliği verilir.

İspat: $b_k(x)$ üreteç fonksiyonu sırasıyla $-(k+2)x$ ve kx^2 ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} -(k+2)xb_k(x) &= -(k+2)xb_{k,0}-(k+2)x^2b_{k,1}-\ldots \\ kx^2b_k(x) &= kx^2b_{k,0}+kx^3b_{k,1}+\ldots \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu son üç eşitlik $b_k(x)$ ortak parantezine alınıp (3.1.3) yineleme bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left[1-(k+2)x+kx^2\right]b_k(x) &= b_{k,0}+x(b_{k,1}-(k+2)b_{k,0}) \\ &\quad + x^2(b_{k,2}-(k+2)b_{k,1}+kb_{k,0})+\ldots \end{aligned}$$

$b_{k,0}=\sum_{i=0}^{0}\binom{0}{0}F_0=0$ ve $b_{k,1}=\sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}F_i=\binom{1}{0}F_0+\binom{1}{1}F_1=1$ değerleri kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\left[1-(k+2)x+kx^2\right]b_k(x)=0+x(1-(k+2).0)$$

$$b_k(x)=\frac{x}{1-(k+2)x+kx^2}$$

k-Fibonacci Dizisinin Binom Dönüşümünün Üçgeni

Her bir k değeri için aşağıdaki üçgen kullanılarak Fibonacci sayılarının binom dönüşüm dizisinin elemanları kolaylıkla elde edilebilir:

a) Üçgenin sol köşegen elemanları k - Fibonacci sayılarından oluşur.
b) Diğer elemanlar sol yanındaki ve sol üstündeki sayıların toplamından oluşur.
c) Üçgenin sağ köşegen elemanları k - Fibonacci sayılarının binom dönüşüm elemanlarını verir.

Örneğin; 3-Fibonacci dizisinin üçgeni ve binom dönüşüm elemanları aşağıdaki gibidir:

0
1 1
3 4 5
10 13 17 22
33 43 56 73 95

k-Fibonacci Dizisinin Binom Dönüşümünün Matlab Programı

k - Fibonacci sayılarının binom dönüşüm elemanlarını her bir k değeri için yineleme bağıntısı kullanılarak aşağıdaki Matlab programı ile bulunur:

```
% Fibonacci k Binom Dönüşümü
k=3;
b(1)=0;
b(2)=k;
N=15;
format long
for n=2:N
b(n+1)=(k+2)*b(n)-k*b(n-1);
end
 b
```

3.2. k-Fibonacci Dizilerinin k-Binom Dönüşümleri

Tanım 3.2.1. k-Fibonacci dizisinin k-binom dönüşümü $\{w_{k,n}\}_{n\in N}$ olmak üzere aşağıdaki formül ile tanımlanır:

$$w_{k,n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^n F_{k,i}. \tag{3.2.1}$$

Lemma 3.2.2. k-Fibonacci dizisinin binom dönüşümü

$$w_{k,n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^n \left(F_{k,i} + F_{k,i+1}\right) \tag{3.2.2}$$

bağıntısını sağlar.

İspat: Binom sayılarının $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}$ özelliği ve (3.2.1) eşitliği kullanılırsa,

$$w_{k,n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} k^{n+1} F_{k,i} = 0 + \sum_{i=1}^{n+1} \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}\right] k^{n+1} F_{k,i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^{n+1} F_{k,i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n+1} F_{k,i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n+1} F_{k,i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n+1} F_{k,i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n+1} \left(F_{k,i} + F_{k,i+1}\right)$$

ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.3. k-Fibonacci dizisinin k-binom dönüşümünün yineleme bağıntısı şu şekilde verilir.

$$w_{k,n+1} = k\left(k+2\right) w_{k,n} - k^3 w_{k,n-1} \tag{3.2.3}$$

İspat: Lemma (3.2.2) kullanılarak

$$w_{k,n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n+1} (F_{k,i} + F_{k,i+1})$$

$$= k^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^{n+1} (F_{k,i} + F_{k,i+1})$$

$$= k^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^{n+1} (F_{k,i} + kF_{k,i} + F_{k,i-1})$$

$$w_{k,n+1} = k(k+1)w_{k,n} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^{n+1} F_{k,i-1} + k^{n+1} \tag{3.2.4}$$

(3.2.4) denkleminde $n+1$ yerine n yazılırsa

$$w_{k,n} = k(k+1)w_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} k^{n} F_{k,i-1} + k^{n}$$

eşitliği elde edilir. İlk parantez açılırsa ve Tanım (3.2.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned} w_{k,n} &= k^2 w_{k,n-1} + k\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} k^{n-1} F_{k,i} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} k^{n} F_{k,i-1} + k^{n} \\ &= k^2 w_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} k^{n} F_{k,i-1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i} k^{n} F_{k,i-1} + k^{n} \\ &= k^2 w_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right] k^{n} F_{k,i-1} + k^{n} \\ &= k^2 w_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^{n} F_{k,i-1} + k^{n} \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

eşitliği elde edilir. (3.2.4) eşitliği (3.2.5) eşitliğinde kullanılırsa

$$w_{k,n+1} = k(k+1)w_{k,n} + kw_{k,n} - k^3 w_{k,n-1}$$
$$w_{k,n+1} = k(k+2)w_{k,n} - k^3 w_{k,n-1}$$

ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.4.(Binet Formülü) k-Fibonacci dizisinin k-binom dönüşümünün genel terimi aşağıdaki Binet formülüyle hesaplanabilir. $\alpha_1 = \frac{\mathrm{k}+2+\sqrt{k^2+4}}{2}k$ ve $\beta_1 = \frac{\mathrm{k}+2-\sqrt{k^2+4}}{2}k$ olmak üzere

$$w_{k,n} = \frac{\alpha_1^{\,n} - \beta_1^{\,n}}{\alpha_1 - \beta_1} \tag{3.2.6}$$

şeklindedir.

Kökler aşağıdaki bağıntıyı sağlar:

$$\alpha_1+\beta_1=k(k+2) \qquad \alpha_1-\beta_1=k\sqrt{k^2+4} \qquad \alpha_1\beta_1=k^3.$$

İspat: Yineleme formülünün karakteristik polinom eşitliği $w^2-k(k+2)w+k^3=0$ idi ve bu denklemin kökleri α_1 ve β_1 olmak üzere $\alpha_1=\dfrac{\mathrm{k}+2+\sqrt{k^2+4}}{2}k$, $\beta_1=\dfrac{\mathrm{k}+2-\sqrt{k^2+4}}{2}k$ olarak bulunur. Binet formülünü $w_{k,n}=c_1\alpha_1{}^n+c_2\beta_1{}^n$ şeklinde kabul edip $w_{k,0}=0$ ve $w_{k,1}=k$ başlangıç değerleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}c_1+c_2&=0\\ c_1\alpha_1-c_1\beta_1&=k\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu sistem çözülürse Binet formülü

$$w_{k,n}=\frac{\alpha_1{}^n-\beta_1{}^n}{\alpha_1-\beta_1}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.2.5. (k-Fibonacci dizisinin k-binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu)

k-Fibonacci dizisinin k-binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu

$$w_k(x)=w_{k,0}+w_{k,1}x+w_{k,2}x^2+\ldots=\frac{kx}{1-k(k+2)x+k^3x^2}$$

şeklinde gösterilir.

İspat: k-Fibonacci dizisinin k-binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu $-xk(k+2)$ ve k^3x^2 ile ayrı ayrı çarpılırsa iki yeni eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}w_k(x)&=w_{k,0}+w_{k,1}x+w_{k,2}x^2+\ldots\\ -xk(k+2)w_k(x)&=-xk(k+2)w_{k,0}-k(k+2)x^2w_{k,1}+\ldots\\ k^3x^2w_k(x)&=k^3x^2w_{k,0}+k^3x^3w_{k,1}+\ldots\end{aligned}$$

elde edilir. Bu üç eşitlik taraf tarafa toplanır ve $w_k(x)$ ortak parantezine alınırsa

$$\left[1-k(k+2)x+k^3x^2\right]w_k(x)=w_{k,0}+x(w_{k,1}-k(k+2)w_{k,0})$$
$$+x^2(w_{k,2}-k(k+2)w_{k,1}+k^3w_{k,0})+\ldots$$

elde edilir. (3.2.3) yineleme bağıntısı ve $w_{k,0}=\sum_{i=0}^{0}\binom{0}{0}k^0F_{k,0}=0$,

$w_{k,1}=\sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}kF_{k,i}=k$ başlangıç değerleri göz önünde bulundurulursa

$$\left[1-k(k+2)x+k^3x^2\right]w_k(x)=w_{k,0}+x(w_{k,1}-k(k+2)w_{k,0})=0+x(k-0)$$

şekline dönüşür. Buradan üreteç fonksiyonu

$$w_k(x)=\frac{kx}{1-k(k+2)x+k^3x^2}\ .$$

olarak elde edilir.

k-Fibonacci Dizisinin k-Binom Dönüşümünün Üçgeni

Bu bölümde, aşağıdaki kurallar kullanılarak her bir k sayısı için k - Fibonacci sayılarının k-binom dönüşüm elemanları yeni bir üçgen kullanılarak elde edilir.

a) Üçgenin sol köşegen elemanları k - Fibonacci sayılarından oluşur.
b) Diğer elemanlar sol yanındaki ve sol üstündeki sayıların toplamının k katından oluşur.
c) Üçgenin sağ köşegen elemanları k - Fibonacci sayılarının k-binom dönüşüm elemanlarını verir.

Örneğin; 3-Fibonacci dizisinin üçgeni ve 3-binom dönüşümü aşağıdaki gibidir:

0
1 3
3 12 45
10 39 153 594
33 129 504 1971 7695

k-Fibonacci Dizisinin k- Binom Dönüşümünün Matlab Programı

k - Fibonacci sayılarının k - binom dönüşüm elemanlarını her bir k değeri için yineleme bağıntısı kullanılarak aşağıdaki Matlab programı ile bulunur:

```
% k Fibonacci Dizisinin k Binom Dönüşümü
k=3;
w(1)=0;
w(2)=k;
N=15;
format long
for n=2:N
W(n+1)=k*(k+2)*W(n)-k^3*W(n-1);
end
 W
```

3.3. k-Fibonacci Dizisinin Artan k-Binom Dönüşümü

Tanım 3.3.1. $\{F_{k,n}\}$ dizisinin artan k -binom dönüşümü $r_{k,n}$ olmak üzere

$$r_{k,n} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^i F_{k,n} & , \ k \neq 0 \\ 0 & , \ k = 0 \end{cases} \tag{3.3.1}$$

eşitliği ile verilir.

Teorem 3.3.2.(Binet formülü) $n \in N$ olsun. k -Fibonacci dizisinin artan k -binom dönüşümünün Binet formülü α, β Fibonacci dizisinin karekteristik denkleminin kökleri olmak üzere aşağıdaki gibi verilir.

$$r_{k,n} = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} = F_{k,2n} \tag{3.3.2}$$

İspat: $\{F_{k,n}\}$ dizisinin Binet formülü kullanılarak ispat yapılır.

$$r_{k,n}=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{i}F_{k,n}=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{i}\,\frac{\alpha^{i}-\beta^{i}}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(k\alpha)^{i}-\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(k\beta)^{i}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left((k\alpha+1)^{n}-(k\beta+1)^{n}\right)$$

$$=\frac{\left(\alpha^{2}\right)^{n}-\left(\beta^{2}\right)^{n}}{\alpha-\beta}=F_{k,2n}$$

Teorem 3.3.3. Artan k-Fibonacci dizisinin yineleme bağıntısı başlangıç şartları $r_{k,0}=0$ ve $r_{k,1}=k$, $n\geq 1$olmak üzere şu şekilde gösterilir.

$$r_{k,n+1}=(k^{2}+2)r_{k,n}-r_{k,n-1} \tag{3.3.3}$$

İspat: Binet formülü kullanılarak

$$(k^{2}+2)r_{k,n}-r_{k,n-1}=(k^{2}+2)\frac{(\alpha)^{2n}-(\beta)^{2n}}{\alpha-\beta}-\frac{\alpha^{2n-2}-\beta^{2n-2}}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\alpha^{2n-2}((k^{2}+2)\alpha^{2}-1)-\beta^{2n-2}((k^{2}+2)\beta^{2}-1)\right\}$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\begin{array}{l}(k\alpha+1)^{n-1}\left[k^{2}(k\alpha+1)+2k\alpha+1\right]\\-(k\beta+1)^{n-1}\left[k^{2}(k\beta+1)+2k\beta+1\right]\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\begin{array}{l}(k\alpha+1)^{n-1}\left[k^{2}\alpha^{2}+2k\alpha+1\right]\\-(k\beta+1)^{n-1}\left[k^{2}\beta^{2}+2k\beta+1\right]\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left\{(k\alpha+1)^{n-1}(k\alpha+1)^{2}-(k\beta+1)^{n-1}(k\beta+1)^{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left\{(k\alpha + 1)^{n+1} - (k\beta + 1)^{n+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left\{(\alpha^2)^{n+1} - (\beta^2)^{n+1}\right\}$$

$$= r_{k,n+1}$$

Teorem 3.3.4. (k-Fibonacci Dizisinin Artan Binom Dönüşümünün Üreteç Fonksiyonu) k-Fibonacci dizisinin artan binom dönüşümünün üreteç fonksiyonunu $R_k(x)$ ile gösterilsin. Yani

$$R_k(x) = r_{k,0} + r_{k,1}x + r_{k,2}x^2 + \ldots = \frac{kx}{1-(k^2+2)x + x^2}$$

İspat: k-Fibonacci dizisinin artan *k*-binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu *(k²+2)x* ve x^2 ile ayrı ayrı çarpılırsa iki yeni eşitlik elde edilir.

$$-(k^2+2)xR_k(x) = -x(k^2+2)r_{k,0} - x^2(k^2+2)r_{k,1} + \ldots$$
$$x^2R_k(x) = x^2r_{k,0} + x^3r_{k,1} + \ldots$$

Bu son üç eşitliği $R_k(x)$ ortak parantezine alırsak ve (3.3.3) yineleme bağıntısı ve $r_{k,0} = \sum_{i=0}^{0}\binom{0}{0}k^0F_{k,n} = 0$ $\quad , r_{k,1} = \sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}kF_{k,i} = k$ başlangıç değerleri göz önünde bulundurulursa

$$\left[1-(k^2+2)x + x^2\right]R_k(x) = r_{k,0} + x\left[-r_{k,0}(k^2+2) + r_{k,1}\right]$$
$$= 0 + x(k)$$

eşitliği elde edilir. Buradan üreteç fonksiyonu

$$R_k(x) = \frac{kx}{1-(k^2+2)x + x^2}$$

şeklinde elde edilir.

k-Fibonacci Dizisinin Artan k-Binom Dönüşümünün Üçgeni

Bu bölümde, aşağıdaki kurallar kullanılarak her bir k sayısı için k - Fibonacci sayılarının artan k-binom dönüşüm elemanları yeni bir üçgen kullanılarak elde edilir.

a)Üçgenin sol köşegen elemanları k - Fibonacci sayılarından oluşur.

b)Diğer elemanlar k-Fibonacci sayılarının sol yanındaki sayının k ile çarpılıp sol üstündeki elemanla toplanması sonucu oluşur.

c)Üçgenin sağ köşegen elemanları k - Fibonacci sayılarının artan k-binom dönüşüm elemanlarını verir.

Örneğin, bu üçgende 3-Fibonacci artan binom dizisinin uygulaması gösterilir.

```
                0
           1          3
      3         10         33
  10       33        109        360
33     109      360       1189       3927
```

k-Fibonacci Dizisinin Artan k-Binom Dönüşümünün Matlab Programı

k - Fibonacci sayılarının artan k -binom dönüşüm elemanlarını her bir k değeri için yineleme bağıntısı kullanılarak aşağıdaki Matlab programı ile bulunur:

```
% Fibonacci Artan k-Binom Dönüşümü
k=3;
r(1)=0;
r(2)=k;
N=15;
format long
for n=2:N
r(n+1)=(k^2+2)*r(n)-r(n-1);
end
r
```

3.4. k-Fibonacci Dizisinin Azalan k-Binom Dönüşümü

Tanım 3.4.1. $\{F_{k,n}\}$ dizisinin azalan k-Binom dönüşümü $f_{k,n} = \{F_{k,n}\}$ olmak üzere

$$f_{k,n} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} F_{k,n}, & k \neq 0 \\ 0 & , \quad k = 0 \end{cases} \tag{3.4.1}$$

ile verilir.

Lemma 3.4.2. k- Fibonacci dizisinin binom dönüşümü aşağıdaki bağıntıyı sağlar.

$$f_{k,n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} \left(kF_{k,i} + F_{k,i+1}\right) \tag{3.4.2}$$

İspat: k -Fibonacci dizisinin azalan k -binom dönüşümünün tanımını kullanılarak

$$f_{k,n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} k^{n+1-i} F_{k,i} = 0 + \sum_{i=1}^{n+1} \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right] k^{n+1-i} F_{k,i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^{n+1-i} F_{k,i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} F_{k,i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} \left(kF_{k,i} + F_{k,i+1}\right)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.4.3. k -Fibonacci dizisinin azalan k - binom dönüşümü aşağıdaki yineleme bağıntısını sağlar.

$$f_{k,n+1} = 3kf_{k,n} \quad -(2k^2 - 1)\, f_{k,n-1} \tag{3.4.3}$$

İspat: Lemma 3.4.2 kullanılarak

$$f_{k,n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} \left(kF_{k,i} + F_{k,i+1}\right) = k^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} (kF_{k,i} + kF_{k,i} + F_{k,i-1})$$

$$f_{k,n+1} = 2kf_{k,n} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} F_{k,i-1} + k^n \tag{3.4.4}$$

eşitliği elde edilir. $n+1$ yerine n yazılırsa

$$f_{k,n} = 2kf_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n-1-i}F_{k,i-1} + k^{n-1}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
f_{k,n} &= kf_{k,n-1} + k\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n-1-i}F_{k,i} + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n-1-i}F_{k,i-1} + k^{n-1} \\
&= kf_{k,n-1} + k\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}k^{n-i}F_{k,i-1} + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n-1-i}F_{k,i-1} + k^{n-1} \\
&= kf_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n}\left[\binom{n-1}{i} + k^2\binom{n-1}{i-1}\right]k^{n-1-i}F_{k,i-1} + k^{n-1}
\end{aligned}$$

$\binom{n-1}{i-1}$ eklenip çıkartılırsa

$$\begin{aligned}
&= kf_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n}\left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} - \binom{n-1}{i-1} + k^2\binom{n-1}{i-1}\right]k^{n-1-i}F_{k,i-1} + k^{n-1} \\
&= kf_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n}\left[(k^2-1)\binom{n-1}{i-1} + \binom{n}{i}\right]k^{n-1-i}F_{k,i-1} + k^{n-1} \\
&= kf_{k,n-1} + \sum_{i=0}^{n-1}\left[(k^2-1)\binom{n-1}{i}\right]k^{n-2-i}F_{k,i} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{n-1-i}F_{k,i-1} + k^{n-1}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
&= kf_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{n-1-i}F_{k,i-1} + \left(\frac{k^2-1}{k}\right)\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n-1-i}F_{k,i} + k^{n-1} \\
&= \left(\frac{2k^2-1}{k}\right) f_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{n-1-i}F_{k,i-1} + k^{n-1}
\end{aligned}$$

Bu eşitlik (3.4.4) de yerine yazılırsa

$$(f_{k,n+1} - 2kf_{k,n})/k = 2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{n-1-i}F_{k,i-1} + k^{n-1} = f_{k,n} - \left(\frac{2k^2-1}{k}\right) f_{k,n-1}$$

cebirsel işlemlerle;

$$f_{k,n+1} = 3kf_{k,n} - (2k^2 - 1)\, f_{k,n-1}$$

elde edilir.

Teorem 3.4.4. (Binet Formülü) k -Fibonacci dizisinin k -binom dönüşümünün genel terimi aşağıdaki Binet formülüyle hesaplanabilir. $\alpha_2 = \dfrac{3\mathrm{k} + \sqrt{k^2+4}}{2}$ ve $\beta_2 = \dfrac{3\mathrm{k} - \sqrt{k^2+4}}{2}$ olmak üzere

$$f_{k,n} = \frac{\alpha_2{}^n - \beta_2{}^n}{\alpha_2 - \beta_2} \qquad (3.4.4)$$

şeklindedir. Kökler aşağıdaki bağıntıyı sağlar:

$$\alpha_2 + \beta_2 = 3k \qquad \alpha_2 - \beta_2 = \sqrt{k^2+4} \qquad \alpha_2\beta_2 = 2k^2 - 1.$$

İspat: Yineleme formülünün karakteristik polinom eşitliği $f_{k,n+1} = 3kf_{k,n} - (2k^2-1)\, f_{k,n-1}$ ve bu denklemin kökleri α_2 ve β_2 olmak üzere $\alpha_2 = \dfrac{3\mathrm{k} + \sqrt{k^2+4}}{2}$ ve $\beta_2 = \dfrac{3\mathrm{k} - \sqrt{k^2+4}}{2}$ olarak bulunur.

. $f_{k,n} = c_1\alpha_2{}^n + c_2\beta_2{}^n$ yazıp $f_{k,0} = 0$ ve $f_{k,1} = 1$ alınırsa

$$c_1 + c_2 = 0$$
$$c_1\alpha_2 - c_1\beta_2 = 1$$

eşitlikleri elde edilir.

Binet formülü

$$f_{k,n} = \frac{\alpha_2^n - \beta_2^n}{\alpha_2 - \beta_2}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.4.5.(k-Fibonacci Dizisinin Azalan k-Binom Dönüşümünün Üreteç Fonksiyonu) k-Fibonacci dizisinin azalan k-binom dönüşümünün üreteç fonksiyonunu $F_k(x)$ ile gösterelim.

$$F_k(x) = f_{k,0} + f_{k,1}x + f_{k,2}x^2 + \dots = \frac{x}{1-3kx+(2k^2-1)x^2}$$

İspat: Bu eşitlik $-3kx$ ve $(2k^2-1)x^2$ ile ayrı ayrı çarpılırsa iki yeni eşitlik elde edilir.

$$F_k(x) = f_{k,0} + f_{k,1}x + f_{k,2}x^2 + \dots$$
$$-3kxF_k(x) = -3kxf_{k,0} - 3kx^2 f_{k,1} + \dots$$
$$(2k^2-1)x^2F_k(x) = (2k^2-1)x^2 f_{k,0} + (2k^2-1)x^3 f_{k,1} + \dots$$

Bu üç eşitlik taraf tarafa toplanır ve $f_{k,0} = \sum_{i=0}^{0}\binom{0}{0}k^0F_{k,0} = 0$, $f_{k,1} = \sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}kF_{k,i} = 1$ değerleri kullanılırsa

$$\left[1-3kx+(2k^2-1)x^2\right]F_k(x) = f_{k,0} + x(-3kf_{k,0} + f_{k,1}) = 0 + x$$

bulunur. Üreteç Fonksiyonu,

$$F_k(x) = \frac{x}{1-3kx+(2k^2-1)x^2}$$

olarak elde edilir.

k-Fibonacci Dizisinin Azalan k-Binom Dönüşümünün Üçgeni

a)Üçgenin sol köşegen elemanları k - Fibonacci sayılarından oluşur.

b)Diğer elemanlar kendisinin sol üst çapraz elemanının k ile çarpılıp bu çarpılan elemanın sol altındaki elamanla toplanması sonucunda oluşur.

c)Üçgenin sağ köşegen elemanları k - Fibonacci sayılarının azalan k-binom dönüşüm elemanlarını verir.

Örneğin, bu üçgende 3-Fibonacci dizisinin uygulaması gösterilir.

0

1 *1*

3 *6* *9*

10 *19* *37* *64*

33 *63* *120* *231* *423*

k-Fibonacci Dizisinin Azalan k-Binom Dönüşümünün Matlab Programı

```
% k-Fibonacci Azalan k-Binom Dönüşümü

k=3;
F(1)=0;
F(2)=1;
N=15;
format long
for n=2:N
F(n+1)=3*k*F(n)-(2*k^2-1)*F(n-1)
end
F
```

3.5.k-Fibonacci Binom Dönüşümlerinin Matris Formu

k -Fibonacci dizinin elemanlarının matris formu $S=\left[f_{k,0}, f_{k,1},...\right]^T$ ile ifade edilsin.

$K=diag\left[k^0, k^1,...\right]^T$ ve Pascal üçgen matrisi

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 1 & 1 & 0 & 0 & ... \\ 1 & 2 & 1 & 0 & ... \\ 1 & 3 & 3 & 1 & ... \end{bmatrix}$$

olsun.

S,P,K matrisleri kullanılarak k -Fibonacci dizisinin binom dönüşüm matrisi bulunabilir.

k -Fibonacci dizisinin binom dönüşümlerinin matrisi $B=[b_{k,0},b_{k,1},...]^T$, k -Fibonacci dizisinin k -binom dönüşümlerinin matrisi $W=[w_{k,0},w_{k,1},...]^T$, k - Fibonacci dizisinin artan binom dönüşümlerinin matrisi $R=[r_{k,0},r_{k,1},...]^T$ ve son olarak k -Fibonacci dizilerinin azalan binom dönüşümlerinin matrisi $F=[f_{k,0},f_{k,1},...]^T$ olarak tanımlanır.

B binom dönüşümü, W k -binom dönüşümü, R artan binom dönüşümü, F azalan binom dönüşümü aşağıdaki bağıntıları sağlar.

$$B=P.S, \qquad W=K.P.S, \qquad R=P.K.S, \qquad F=K.P.K^{-1}.S$$

P ve K matrisleri tersinirdir ve P 'nin tersi P^{-1} matrisinin elemanları $(-1)^{i-j}\binom{i}{j}$ ve K 'nın tersi $K^{-1}=diag(k^0k^{-1},k^{-2},...)$ diagonal matrisi şeklindedir. S aşağıdaki bağıntıları sağlar, sonuç olarak bu bağıntılar kullanılarak k- Fibonacci dizisinin elemanları elde edilir.

$$S=P^{-1}.B=P^{-1}.K^{-1}.W=K^{-1}.P^{-1}.R=K.P^{-1}.K^{-1}.F$$

BÖLÜM 4

ÇEŞİTLİ TİPTEKİ k- LUCAS SAYI DİZİLERİNİN BİNOM DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölüm Bhadouria P., Jhala D., Singh B. nın 2014 yılında yayınlanmış “Binomial Transforms of the k-Lucas Sequence” adlı makalesinden esinlenilerek yazılmıştır. Bu bölümde k-Lucas dizisi kısaca tanıtıldıktan sonra k- Lucas dizisinin binom, k-binom, artan k-binom, azalan k-binom dizileri tanımlanacaktır. Oluşturulan bu dizilerin yineleme bağıntıları, üreteç fonksiyonları, binet formülleri, elemanları veren binom Pascal üçgenleri ve matlab programları verilmiştir.

4.1. k-Lucas Dizilerinin Binom Dönüşümleri

Her $k>0$ ve $n \geq 0$ tamsayıları için başlangıç şartları $l_{k,0}=2$, $l_{k,1}=k$ olmak üzere;

$$l_{k,n+2}=kl_{k,n+1}+l_{k,n}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan $\{l_{k,n}\}_{n\in N}$ dizisine “k-Lucas dizisi” denir. $k=1$ alınırsa, Lucas dizisi elde edilir. k- Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{i=0}^{\infty} l_{k,i}x^{i}=l_{k,0}+l_{k,1}x+l_{k,2}x^{2}+....+l_{k,n}x^{n}+...=\frac{2-kx}{1-kx-x^{2}}$$

şeklindedir (S. Falcon, 2011).

Tanım 4.1.1. $\{b_{k,n}\}_{n\in N}$ k-Fibonacci dizisinin binom dönüşümü aşağıdaki formül ile tanımlanır.

$$b_{k,n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}l_{k,i}$$

Lemma 4.1.2. $n \geq 1$ pozitif tam sayısı olmak üzere k- Lucas dizisinin binom dönüşümü aşağıdaki bağıntıyı sağlar.

$$b_{k,n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(l_{k,i} + l_{k,i+1}\right) \tag{4.1.1}$$

İspat: Tanım 4.1.1 ve binom sayılarının $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}$, $\binom{n}{n+1} = 0$ özellikleri

$$\begin{aligned} b_{k,n+1} &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} l_{k,i} = 2 + \sum_{i=1}^{n+1} \left[\binom{n+1}{i}\right] l_{k,i} \\ &= 2 + \sum_{i=1}^{n+1} \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}\right] l_{k,i} \\ &= 2 + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i} l_{k,i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} l_{k,i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} l_{k,i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} l_{k,i+1} \end{aligned}$$

$$b_{k,n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (l_{k,i} + l_{k,i+1})$$

ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.3. $n \geq 1$ pozitif tam sayısı olmak üzere, aşağıdaki yineleme bağıntısı k-Lucas dizisinin binom dönüşümü tarafından sağlanır.

$$b_{k,n+1} = (k+2)b_{k,n} - kb_{k,n-1} \tag{4.1.2}$$

İspat:

$$b_{k,n+1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \left(l_{k,i} + l_{k,i+1}\right) + l_{k,0} + l_{k,1}$$

Burada $l_{k,0} + l_{k,1}$ serideki sıfırıncı terimdir.

$$b_{k,n+1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \left((k+1)l_{k,i} + l_{k,i-1}\right) + (l_{k,0} + l_{k,1})$$

$$b_{k,n+1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (k+1)l_{k,i} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} l_{k,i-1} + (k+2) \pm (k+1)l_{k,0}$$

$$b_{k,n+1}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(k+1)l_{k,i}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}l_{k,i-1}+(k+2)-2(k+1)$$

$$b_{k,n+1}=(k+1)b_{k,n}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}l_{k,i-1}-k \tag{4.1.3}$$

(4.1.3) eşitliğinde n yerine $n-1$ yazılırsa

$$b_{k,n}=(k+1)b_{k,n-1}+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}l_{k,i-1}-k$$

$$b_{k,n}=kb_{k,n-1}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}l_{k,i}+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}l_{k,i-1}-k$$

$\binom{n-1}{n}=0$ özelliğinden dolayı

$$b_{k,n}=kb_{k,n-1}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}l_{k,i-1}+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}l_{k,i-1}-k$$

$$b_{k,n}=kb_{k,n-1}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}l_{k,i-1}-k \tag{4.1.4}$$

(4.1.4) eşitliğinde, (4.1.3) eşitliğini kullanılırsa

$$b_{k,n+1}=(k+1)b_{k,n}+b_{k,n}-kb_{k,n-1}$$
$$b_{k,n+1}=(k+2)b_{k,n}-kb_{k,n-1}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.4 (**Binet formülü**) k-Lucas dizisinin binom dönüşümünün herhangi bir terimi Binet formülü yardımıyla hesaplanabilir. $b_{1,2}=\dfrac{\mathrm{k}+2\mp\sqrt{k^2+4}}{2}$ olmak üzere Binet formülü

$$b_{k,n}=b_1^n+b_2^n \tag{4.1.5}$$

şeklindedir.

Kökler aşağıdaki bağıntıyı sağlar:

$$b_1 + b_2 = k + 2 \qquad b_1 - b_2 = \sqrt{k^2 + 4} \qquad b_1 b_2 = k$$

İspat: Yineleme formülünün karakteristik denklemi $x^2 - (k+2)x + k = 0$ olup kökleri

$b_{1,2} = \dfrac{\mathrm{k} + 2 \mp \sqrt{k^2 + 4}}{2}$ dir. Binet formülünü elde etmek için

$b_{k,n} = l_1 b_1^n + l_2 b_2^n$ yazılır.

$$n=0 \text{ için } b_{k,0} = 2 = l_1 + l_2$$

$$n=1 \text{ için } b_{k,1} = k + 2 = l_1 b_1 + l_2 b_2$$

$$k + 2 = (2 - l_2) b_1 + l_2 b_2$$

$$k + 2 = l_2 (b_2 - b_1) + 2b_1$$

$$l_2 (b_2 - b_1) = k + 2 - 2b_1$$

$$l_2 (b_2 - b_1) = k + 2 - 2\left(\frac{k + 2 + \sqrt{k^2 + 4}}{2}\right)$$

$$l_2 (b_2 - b_1) = k + 2 - k - 2 - \sqrt{k^2 + 4}$$

$$l_2 . (-\sqrt{k^2 + 4}) = -\sqrt{k^2 + 4}$$

$$l_2 = 1$$

$2 = l_1 + l_2$ eşitliğinden $l_1 = 1$ bulunur.

Teorem 4.1.5. k -Lucas dizisinin binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu

$$b_k(x) = \frac{2 - x(k+2)}{1 - (k+2)x + kx^2} \tag{4.1.6}$$

şeklindedir.

İspat : k -Lucas dizisinin binom dönüşümünün üreteç fonksiyonunu $b_k(x)$ ile gösterelim. Yani

$$b_k(x)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = b_{k,0}+b_{k,1}x+b_{k,2}x^2+\dots$$

şeklinde tanımlanır. Daha sonra eşitliği sırasıyla –(k+2)x ve kx^2 ile çarparsak

$$-(k+2)xb_k(x)=-(k+2)xb_{k,0}-(k+2)x^2b_{k,1}-\dots$$
$$kx^2b_k(x)=kx^2b_{k,0}+kx^3b_{k,1}+\dots$$

elde ederiz. Bu son üç eşitliği $b_k(x)$ ortak parantezine alırsak ve (4.1.2) yineleme bağıntısını kullanırsak

$$\left[1-(k+2)x+kx^2\right]b_k(x)=b_{k,0}+x(b_{k,1}-(k+2)b_{k,0})$$
$$+x^2(b_{k,2}-(k+2)b_{k,1}+kb_{k,0})+\dots$$

$$\left[1-(k+2)x+kx^2\right]b_k(x)=2+x(k+2-2k-4)$$

$$b_k(x)=\frac{2-x(k+2)}{1-(k+2)x+kx^2}$$

üreteç fonksiyonunu yukarıdaki gibi elde ederiz.

k- Lucas dizisinin binom dönüşümünün Pascal üçgeni

Her bir değeri için aşağıdaki üçgeni kullanarak Lucas sayılarının binom dönüşüm dizisinin elemanlarını kolaylıkla elde edebiliriz:

a) Üçgenin sol köşegen elemanları k - Lucas sayılarından oluşur.
b) Diğer elemanlar sol yanındaki ve sol üstündeki sayıların toplamından oluşur.
c) Üçgenin sağ köşegen elemanları k - Lucas sayılarının binom dönüşüm elemanlarını verir.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 2 & & & & \\
 & & & 4 & & 6 & & & \\
 & & 18 & & 22 & & 28 & & \\
 & 76 & & 94 & & 116 & & 144 & \\
161 & & 237 & & 300 & & 426 & & 570
\end{array}$$

k-Lucas Dizisinin Binom Dönüşümünün Matlab Programı

```
% k-Lucas Dizisinin Binom Dönüşümü
k=3;
L(1)=2;
L(2)=1;
N=15;
format long
for n=2:N
L(n+1)=(k+2)*L(n)-k*L(n-1)
end
L
```

4.2. k-Lucas Dizisinin k-Binom Dönüşümü

Tanım 4.2.1. k -Lucas dizisinin k binom dönüşümü $\{w_{k,n}\}_{n\in N}$ olmak üzere

$$w_{k,n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^n l_{k,i} \tag{4.2.1}$$

şeklinde tanımlanır. $w_{k,n} = k^n l_{k,n}$ olduğu görülür.

Teorem 4.2.2. Aşağıdaki yineleme bağıntısı k - Lucas dizisinin k - binom dönüşümünü sağlar.

$$w_{k,n+1} = k(k+2)w_{k,n} - k^3 w_{k,n-1} \tag{4.2.2}$$

İspat: (4.2.1) eşitliğinde $n = 0$ ile $n = 1$ değerleri yazılarak $w_{k,0} = 2$ ve $w_{k,1} = k(k+2)$ olduğu görülür. Ayrıca (4.2.1) eşitliğinden

$$w_{k,n} = k^n b_{k,n}$$

$$w_{k,n+1} = k^{n+1} b_{k,n+1}$$

eşitlikleri kolaylıkla elde edilir. (4.1.3) eşitliğinden

$$w_{k,n+1} = k^{n+1}((k+2)b_{k,n} - kb_{k,n-1})$$
$$w_{k,n+1} = k^{n}((k^2+2k)b_{k,n} - k^2 b_{k,n-1})$$
$$w_{k,n+1} = (k^2+2k)k^n b_{k,n} - k^3 k^{n-1} b_{k,n-1}$$
$$w_{k,n+1} = (k^2+2k)w_{k,n} - k^3 w_{k,n-1}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.3. (**Binet formülü**) k -Lucas dizisinin *k*-binom dönüşümünün herhangi bir terimi Binet formülü yardımıyla hesaplanabilir. $w_{1,2} = k\dfrac{\mathrm{k}+2 \mp \sqrt{k^2+4}}{2} = kb_{1,2}$ olmak üzere Binet formülü

$$w_{k,n} = w_1^n + w_2^n \tag{4.2.3}$$

şeklindedir.

Kökler aşağıdaki bağıntıyı sağlar:

$$w_1 + w_2 = k(k+2) \quad , \quad w_1 - w_2 = k\sqrt{k^2+4} \quad , \quad w_1 w_2 = k^3$$

İspat: Yineleme formülünün karakteristik denklemi $x^2 - k(k+2)x + k^3 = 0$ olup kökleri $w_{1,2} = k\dfrac{k+2 \mp \sqrt{k^2+4}}{2} = kb_{1,2}$ dir.

$$w_{k,n} = k^n b_{k,n} = k^n (b_1^n + b_2^n) = w_1^n + w_2^n$$

Teorem 4.2.4. k -Lucas dizisinin k-binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu

$$w_k(x) = \frac{2 - x[k(k+2)]}{1 - k(k+2)x + k^3 x^2} \tag{4.2.4}$$

İspat: k -Lucas dizisinin *k*-binom dönüşümünün üreteç fonksiyonunu $w_k(x)$ ile gösterelim. Yani

$$w_k(x) = w_{k,0} + w_{k,1}x + w_{k,2}x^2 + \ldots$$

şeklinde tanımlanır. Daha sonra eşitliği sırasıyla $-k(k+2)x$ ve k^3x^2 ile çarparsak

$$-k(k+2)xw_k(x) = -k(k+2)xw_{k,0} - k(k+2)x^2w_{k,1} - \ldots$$
$$k^3x^2w_k(x) = k^3x^2w_{k,0} + k^3x^3w_{k,1} + \ldots$$

elde ederiz. Bu son üç eşitliği $w_k(x)$ ortak paranteze alırsak ve (4.2.2) yineleme bağıntısını kullanırsak

$$\left[1 - k(k+2)x + k^3x^2\right]w_k(x) = w_{k,0} + x\left[w_{k,1} - k(k+2)w_{k,0}\right]$$
$$+ x^2(w_{k,2} - k(k+2)w_{k,1} + k^3w_{k,0})\ldots$$

$$w_k(x) = \frac{2 - x\left[k(k+2)\right]}{1 - k(k+2)x + k^3x^2}$$

üreteç fonksiyonunu yukarıdaki gibi elde ederiz.

k- Lucas dizisinin k- binom dönüşümünün Pascal üçgeni

Her bir k değeri için aşağıdaki üçgeni kullanarak Lucas sayılarının k-binom dönüşüm dizisinin elemanlarını kolaylıkla elde edebiliriz:

a) Üçgenin sol köşegen elemanları k-Lucas sayılarından oluşur.
b) Diğer elemanlar sol yanındaki ve sol çapraz üstündaki sayıların toplamının k katından oluşur.
c) Üçgenin sağ köşegen elemanları k-Lucas sayılarının k-binom dönüşüm elemanlarını verir.

2
3 15
13 48 189
45 174 666 2565
161 618 2376 9126 35073

k-Lucas Dizisinin k-Binom Dönüşümünün Matlab Programı

% k-Lucas k-Binom Dönüşümü

k=3;

L(1)=2;

L(2)=1;

N=15;

```
format long
for n=2:N
L(n+1)=(k^2+2*k)*L(n)-(k^3)*L(n-1)
end
L
```

4.3. k-Lucas Dizisinin Artan k-Binom Dönüşümü

Tanım 4.3.1. k - Lucas dizisinin artan k binom dönüşümü $\{r_{k,n}\}_{n\in N}$ olmak üzere

$$r_{k,n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^i l_{k,i} . \tag{4.3.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.3.2.(Binet formülü): k - Lucas dizisinin artan k-binom dönüşümünün herhangi bir terimi Binet formülünün yardımıyla hesaplanabilir. Binet formülü

$$r_{k,n} = b_1^{2n} + b_2^{2n} = b_{k,2n} \tag{4.3.2}$$

$b_{1,2} = \dfrac{\mathrm{k}+2 \mp \sqrt{k^2+4}}{2}$ ile gösterilir. Kökler aşağıdaki bağıntıyı sağlar:

$$b_1 + b_2 = 3k \quad , \quad b_1 - b_2 = \sqrt{k^2+4} \quad , \quad b_1 b_2 = k.$$

İspat $b_1^2 = kb_1 + 1$ eşitliği kullanılarak

$$r_{k,n} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^i l_{k,n} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^i \left(\alpha^i + \beta^i \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (k\alpha)^i + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (k\beta)^i \right)$$

$$= \left((k\alpha + 1)^n + (k\beta + 1)^n \right)$$

$$= \left(\alpha^2 \right)^n + \left(\beta^2 \right)^n = l_{k,2n}$$

elde edilir.

Teorem 4.3.3. k Lucas dizisinin artan k binom dönüşümünün yineleme bağıntısı aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$r_{n+1} = (k^2+2)r_n - r_{n-1} \tag{4.3.3}$$

$r_{k,0} = 2$ ve $r_{k,1} = 2 + k^2$ başlangıç şartlarını tanımdan kolaylıkla bulunur.

İspat: Binet formülünü kullanarak

$$\begin{aligned} r_{k,n+1} &= l_{k,2n+2} = kl_{k,2n+1} + l_{k,2n} = k(kl_{k,2n} + l_{k,2n-1}) + l_{k,2n} \\ &= (k^2+1)l_{k,2n} + (l_{k,2n} - l_{k,2n-2}) = (k^2+2)l_{k,2n} - l_{k,2n-2} \\ r_{k,n+1} &= (k^2+2)r_{k,n} - r_{k,n-1} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.3.4. k-Lucas dizisinin artan k-binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu

$$r(x) = \frac{2 - x[k^2+2]}{1-(k^2+2)x + k^2x^2} \tag{4.3.4}$$

İspat: k-Lucas dizisinin binom dönüşümünün üreteç fonksiyonunu $r_k(x)$ ile gösterelim. Yani

$$r(x) = r_0 + r_1x + r_2x^2 + \ldots$$

Daha sonra eşitliği sırasıyla $-(k^2+2)x$ ve x^2 ile çarparsak

$$\begin{aligned} -(k^2+2)xr(x) &= -(k^2+2)xr_0 + \ldots \\ x^2r(x) &= x^2r_0 + \ldots \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu son üç eşitliği $r_k(x)$ ortak paranteze alırsak ve (4.3.3) yineleme bağıntısını kullanırsak

$$r(x)\left[1-(k^2+2)x + k^2x^2\right] = r_0 + x\left[r_1 - (k^2+2)r_0\right] + x^2(r_{k,2} - (k^2+2)r_{k,1} + r_{k,0}) + ..$$

$$= 2 - x[k^2+2]$$

$$r(x)=\frac{2-x\left[k^2+2\right]}{1-(k^2+2)x+x^2}$$

üreteç fonksiyonunu yukarıdaki gibi elde ederiz.

k-Lucas Dizisinin Artan k-Binom Dönüşümünün Üçgeni

Her bir k değeri için aşağıdaki üçgeni kullanarak k - Lucas sayılarının artan k - binom dönüşüm dizisinin elemanlarını kolaylıkla elde edebiliriz:

a. Üçgenin sol köşegen elemanları k - Lucas sayılarından oluşur.
b. Diğer elemanlar sol yanındaki sayının k ile çarpılıp sol çapraz üstündeki sayıların toplamıyla oluşur.
c. Üçgenin sağ köşegen elemanları k - Lucas sayılarının artan k - binom dönüşüm elemanlarını verir.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 2 & & & & \\
 & & & 3 & & 11 & & & \\
 & & 13 & & 42 & & 137 & & \\
 & 45 & & 148 & & 486 & & 1595 & \\
161 & & 528 & & 1730 & & 5676 & & 18623
\end{array}$$

k-Lucas Dizisinin Artan k- Binom Dönüşümünün Matlab Programı

```
% k-Lucas Dizisinin Artan k-Binom Dönüşümü
k=3;
L(1)=2;
L(2)=1;
N=15;
format long
for n=2:N
L(n+1)=(k^2+2)*L(n)- L(n-1)
end
L
```

4.4. k-Lucas Dizisinin Azalan k-Binom Dönüşümü

Tanım 4.4.1. k - Lucas dizisinin azalan k binom dönüşümü $\{f_{k,n}\}_{n\in N}$ olmak üzere

$$f_{k,n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} l_{k,i}. \qquad (4.4.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 4.4.2. k - Lucas dizisinin azalan k-binom dönüşümü aşağıdaki bağıntıyı sağlar.

$$f_{k,n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} (kl_i + l_{i+1}) \qquad (4.4.2)$$

İspat: Tanım (4.4.1) kullanılarak

$$\begin{aligned} f_{k,n+1} &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} k^{n+1-i} l_{k,i} \\ &= 2k^{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i} k^{n+1-i} l_{k,i} + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} k^{n+1-i} l_{k,i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n+1-i} l_{k,i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} l_{k,i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} (kl_i + l_{i+1}) \end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.3. k - Lucas dizisinin azalan *k*-binom dönüşümünün yineleme bağıntısı aşağıda verilmiştir.

$$f_{k,n+1} = 3kf_{k,n} - 2(k^2 - 1) f_{k,n-1} \qquad (4.4.3)$$

İspat: Lemma (4.4.2) ve (4.4.1) kullanılarak,

$$\begin{aligned} f_{k,n+1} &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} . k^{n-i} (kl_{k,i} + l_{k,i+1}) = 3k^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} (kl_{k,i} + kl_{k,i} + l_{k,i-1}) \\ &= 3k^{n+1} + 2k \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} l_{k,i} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} l_{k,i-1} \end{aligned}$$

$$f_{k,n+1} = 2kf_{k,n} - k^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} l_{k,i-1} \qquad (4.4.4)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $n+1$ yerine n yazılırsa,

$$\begin{aligned} f_{k,n} &= 2kf_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n-1-i}l_{k,i-1} - k^n \\ &= kf_{k,n-1} + k\left[\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n-1-i}l_{k,i}\right] + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n-1-i}l_{k,i-1} - k^n \\ &= kf_{k,n-1} - k^n + k\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}k^{n-i}l_{k,i-1} + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n-1-i}l_{k,i-1} \end{aligned}$$

$\binom{n-1}{n} = 0$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} f_{k,n} &= kf_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n}\left[\binom{n-1}{i} + k^2\binom{n-1}{i-1}\right]k^{n-1-i}l_{k,i-1} - k^n \\ &= kf_{k,n-1} - k^n + \sum_{i=1}^{n}\left[\binom{n-1}{i} + k^2\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i-1} - \binom{n-1}{i-1}\right]k^{n-1-i}l_{k,i-1} \\ &= kf_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n}\left[(k^2-1)\binom{n-1}{i-1} + \binom{n}{i}\right]k^{n-1-i}l_{k,i-1} - k^n \\ &= kf_{k,n-1} - k^n + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{n-1-i}l_{k,i-1} + (k^2-1)\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n-2-i}l_{k,i} \\ &= kf_{k,n-1} - k^n + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{n-1-i}l_{k,i-1} + \left(\frac{k^2-1}{k}\right)f_{k,n-1} \end{aligned}$$

oluşturulur. (4.4.4) eşitliğini tekrar hatırlayacak olursak

$$f_{k,n+1} = 2kf_{k,n} - k^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{n-i}l_{k,i-1}.$$

elde ederiz.

(4.4.4) eşitliğini son denklemde yerleştirirsek

$$f_{k,n} = kf_{k,n-1} + f_{k,n+1}/k - 2f_{k,n} + (k^2-1)f_{k,n-1}/k$$

elde edilir. Birkaç cebirsel işlemden sonra

$$kf_{k,n} = k^2 f_{k,n-1} + f_{k,n+1} - 2kf_{k,n} + (k^2-1)f_{k,n-1}$$

$$f_{k,n+1} = 3kf_{k,n} - (2k^2-1)f_{k,n-1}$$

elde edilir.

Teorem 4.4.4. (Binet Formülü) (4.4.3) yineleme bağıntısının karakteristik denklemi $x^2 - 3kx + 2k^2 - 1 = 0$ dır. k - Lucas dizisi için azalan k -binom dönüşümü için Binet formülü $f_{k,n} = f_1^n + f_2^n$ ile gösterilir.

$$f_1 = \frac{3k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \qquad , \qquad f_2 = \frac{3k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

Kökler aşağıdaki bağıntıyı sağlar:

$$f_1 + f_2 = 3k \qquad f_1 - f_2 = \sqrt{k^2 + 4} \qquad f_1 . f_2 = 2k^2 - 1.$$

İspat: Yineleme formülünün karakteristik polinom eşitliği $f_{k,n+1} = 3kf_{k,n} - (2k^2 - 1) f_{k,n-1}$ ve bu denklemin kökleri α_2 ve β_2 olmak üzere

$$\alpha_2 = \frac{3\text{k} + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta_2 = \frac{3\text{k} - \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$ olarak bulunur.

. $f_{k,n} = c_1 \alpha_2{}^n + c_2 \beta_2{}^n$ yazıp $f_{k,0} = 0$ ve $f_{k,1} = 1$ alınırsa

$$c_1 + c_2 = 0$$
$$c_1\alpha_2 - c_1\beta_2 = 1$$

eşitlikleri elde edilir.

Binet formülü

$$f_{k,n} = \frac{\alpha_2{}^n - \beta_2{}^n}{\alpha_2 - \beta_2}$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.4.5. (Üreteç Fonksiyonu) k -Lucas dizisinin azalan k -binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu

$$f_k(x) = \frac{x}{1 - 3kx + (2k^2 - 1)x^2} \tag{4.4.5}$$

şeklindedir.

İspat: $f_k(x)$ eşitliği $-3kx$ ve $(2k^2-1)x^2$ ile çarpılırsa istenen sonuç elde edilir.

Teorem 4.4.6. k- Lucas dizisinin azalan binom dönüşümünün kombinasyonel formülü

$$f_{k,n}=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{2^{n-1}}\binom{n}{2i}(3k)^{n-2i}(k^2+4)^i \tag{4.4.6}$$

k- Lucas Dizisinin Azalan k- Binom Dönüşümünün Pascal Üçgeni

Bu bölümde aşağıdaki kuralları kullanarak her bir k sayısı için yeni bir üçgen tanıtılacaktır: Üçgenin sol köşegeni k Lucas dizilerinin elemanlarından oluşmaktadır. Üçgenin diğer elemanları sol köşedeki elemanların k sayısı ile çarpılıp bir sol alt köşedeki elemanla toplanıp sağ tarafına yazılarak bulunur.

Örneğin aşağıdaki üçgen 3- Lucas dizisi ve azalan 3- binom dönüşümü içindir.

2
3 9
13 22 49
45 84 150 297
161 296 548 998 1889

k-Lucas Dizisinin Azalan k-Binom Dönüşümünün Matlab Programı

```
% k-Lucas Dizisinin Azalan k-Binom Dönüşümü
k=3;
L(1)=2;
L(2)=1;
N=15;
format long
for n=2:N
L(n+1)=3*k*L(n)-2*(k^2-1)*L(n-1)
end
L
```

4.5. k-Lucas Binom Dönüşümlerinin Matris Formu

k - Lucas dizinin elemanlarının matris formu $S = [l_{k,0}, l_{k,1}, ...]^T$ ile ifade edilsin.

$K = diag[k^0, k^1, ...]^T$ ve Pascal üçgen matrisi

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 1 & 1 & 0 & 0 & ... \\ 1 & 2 & 1 & 0 & ... \\ 1 & 3 & 3 & 1 & ... \end{bmatrix}$$

olsun.

S,P,K matrislerini kullanarak *k*- Lucas dizisinin binom dönüşümünün matrisini bulmak istiyoruz.

k -Lucas dizisinin binom dönüşümlerinin matrisi $B = [b_{k,0}, b_{k,1}, ...]^T$, k - Lucas dizisinin k -binom dönüşümlerinin matrisi $W = [w_{k,0}, w_{k,1}, ...]^T$, k - Lucas dizisinin artan binom dönüşümlerinin matrisi $R = [r_{k,0}, r_{k,1}, ...]^T$ ve son olarak k - Lucas dizilerinin azalan binom dönüşümlerinin matrisi $F = [f_{k,0}, f_{k,1}, ...]^T$ olarak tanımlayalım.

B binom dönüşümü, W k -binom dönüşümü, R artan binom dönüşümü, F azalan binom dönüşümü aşağıdaki bağıntıları karşılar.

$$B = P.S, \qquad W = K.P.S, \qquad R = P.K.S, \qquad F = K.P.K^{-1}.S$$

P ve K matrisleri tersinirdir. Ve P 'nin tersi P^{-1} matrisinin elemanları $(-1)^{i-j}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$

ve K 'nın tersi $K^{-1} = diag(k^0 k^{-1}, k^{-2}, ...)$ diagonal matrisi şeklindedir. S aşağıdaki bağıntıları sağlar, sonuç olarak bu bağıntılar kullanılarak k -Lucas dizisinin elemanları elde edilir.

$$S = P^{-1}.B = P^{-1}.K^{-1}.W = K^{-1}.P^{-1}.R = K.P^{-1}.K^{-1}.F$$

BÖLÜM 5
ÇEŞİTLİ TİPTEKİ k-JACOBSTHAL DİZİLERİNİN BİNOM DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölüm Uygun S., Erdoğdu A. nın 2017 yılında yayınlanmış ”Binominal transforms of k-Jacobsthal sequences” adlı makalesinden esinlenilerek yazılmıştır. Bu bölümde k- Jacobsthal dizisi kısaca tanıtıldıktan sonra k- Jacobsthal dizisinin binom, k-binom, artan k-binom, azalan k-binom dizileri tanımlanacaktır. Oluşturulan bu dizilerin yineleme bağıntıları, üreteç fonksiyonları, binet formülleri, elemanları veren binom Pascal üçgenleri ve matlab programları verilmiştir.

5.1. k-Jacobsthal Dizilerinin Binom Dönüşümleri

Her $k>0$ reel sayısı ve $n\geq 0$ tamsayısı için başlangıç şartları $j_{k,0}=0$, $j_{k,1}=1$ olmak üzere;

$$j_{k,n+2}=kj_{k,n+1}+2j_{k,n}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{j_{k,n}\}_{n\in N}$ dizisine “k**-Jacobsthal dizisi**” denir. $k=1$ alınırsa, Jacobsthal dizisi elde edilir. $x^2=kx+2$ karakteristik denkleminin kökleri; $x_1=\dfrac{k+\sqrt{k^2+8}}{2}$, $x_2=\dfrac{k-\sqrt{k^2+8}}{2}$ şeklindedir.

k-Jacobsthal sayıları için Binet formülü,

$$j_{k,n}=\frac{x_1^n-x_2^n}{x_1-x_2}$$

şeklindedir.

Tanım 5.1.1: k-Jacobsthal dizisinin binom dönüşümü $\{b_{k,n}\}_{n\in N}$ olmak üzere aşağıdaki formülle tanımlanır.

$$b_{k,n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} j_{k,i} \tag{5.1.1}$$

Lemma 5.1.2. k-Jacobsthal dizisinin binom dönüşümü aşağıdaki bağıntıyı sağlar.

$$b_{k,n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(j_{k,i} + j_{k,i+1} \right) \tag{5.1.2}$$

İspat: Tanım 5.1.1 ve binom sayılarının $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}$ özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
b_{k,n+1} &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} j_{k,i} = 0 + \sum_{i=1}^{n+1} \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right] j_{k,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} j_{k,i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} j_{k,i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} j_{k,i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} j_{k,i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(j_{k,i} + j_{k,i+1} \right)
\end{aligned}$$

Teorem 5.1.3. k-Jacobsthal dizisinin binom dönüşümü aşağıdaki bağıntıyı sağlar.

$$b_{k,n+1} = (k+2)b_{k,n} + (1-k)b_{k,n-1} \tag{5.1.3}$$

İspat: (5.1.2) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
b_{k,n+1} &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (j_{k,i} + j_{k,i+1}) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (j_{k,i} + j_{k,i+1}) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (j_{k,i} + kj_{k,i} + 2j_{k,i-1})
\end{aligned}$$

$$= 1 + (k+1)\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} j_{k,i} + 2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} j_{k,i-1}$$

$$b_{k,n+1} = (k+1)b_{k,n} + 2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} j_{k,i-1} + 1 \qquad (5.1.4)$$

(5.1.4) eşitliğinde n yerine $n-1$ yazılırsa

$$b_{k,n} = (k+1)b_{k,n-1} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i} j_{k,i-1} + 1$$

$$= kb_{k,n-1} + \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} j_{k,i} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i} j_{k,i-1} + 1$$

$$= kb_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1} j_{k,i-1} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i} j_{k,i-1} + 1$$

$$b_{k,n} = kb_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n}\left[2\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right] j_{k,i-1} + 1$$

$$= kb_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n}\left[2\binom{n-1}{i} + 2\binom{n-1}{i-1} - 2\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i-1}\right] j_{k,i-1} + 1$$

$$= kb_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n}\left[\binom{n-1}{i-1} + 2\binom{n-1}{i} + 2\binom{n-1}{i-1} - 2\binom{n-1}{i-1}\right] j_{k,i-1} + 1$$

$$= kb_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n}\left[-\binom{n-1}{i-1} + 2\binom{n}{i}\right] j_{k,i-1} + 1$$

$$= kb_{k,n-1} + 2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} j_{k,i-1} - \sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1} j_{k,i-1} + 1$$

$$= kb_{k,n-1} + 2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} j_{k,i-1} - \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} j_{k,i} + 1$$

$$b_{k,n,} = (k-1)b_{k,n-1} + 2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} j_{k,i-1} + 1$$

(5.1.4) eşitliği kullanılarak

$$b_{k,n+1} = (k+1)b_{k,n} + b_{k,n} - (k-1)b_{k,n-1}$$

$$b_{k,n+1} = (k+2)b_{k,n} + (1-k)b_{k,n-1}$$

ispat tamamlanır.

Teorem 5.1.4.(Binet Formülü) k-Jabosthal dizisinin binom dönüşümünün genel terimi aşağıdaki Binet formülü ile hesaplanabilir.

$$b_{k,n} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad , \quad \alpha = \frac{k+2+\sqrt{k^2+8}}{2} \quad , \quad \beta = \frac{k+2-\sqrt{k^2+8}}{2}$$

İspat: Yineleme bağıntısının karakteristik polinom eşitliği $x^2 - (k+2)x + (k-1) = 0$,kökleri α, β olmak üzere $\alpha = \dfrac{k+2+\sqrt{k^2+8}}{2}$, $\beta = \dfrac{k+2-\sqrt{\,^2k+}}{2}$ olarak bulunur. k-Jacobsthal dizisi için Binet formülü $b_{k,n} = c_1\alpha^n + c_2\beta^n$ ile gösterilir**.** $b_{k,0} = 0$ ve $b_{k,1} = 1$ alınırsa kökler aşağıdaki bağıntıyı sağlar.

$$c_1 + c_2 = 0$$
$$c_1\alpha - c_1\beta = 1$$

Yukarıdaki formülde yazılırsa

$$1 = c_1.(\alpha - \beta) = c_1.\sqrt{k^2+8}$$

Binet formülü

$$b_{k,n} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

olarak bulunur.

Teorem 5.1.5.(k-Jacobsthal Dizisinin Binom Dönüşümünün Üreteç Fonksiyonu) k-Jacobsthal dizisinin binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu

$$b_k(x) = \frac{x}{1-(k+2)x+(1-k)x^2}$$

İspat: k-Jacobsthal dizisinin binom dönüşümünün üreteç fonksiyonunu $b_k(x)$ ile gösterelim. Yani

$$b_k(x) = b_{k,0} + b_{k,1}x + b_{k,2}x^2 + ...$$

şeklinde tanımlanır. Daha sonra eşitliği sırasıyla $-(k+2)x$ ve $(1-k)x^2$ ile çarparsak

$$-(k+2)xb_k(x) = -(k+2)xb_{k,0} - (k+2)x^2b_{k,1} + ...$$
$$(1-k)x^2b_k(x) = (1-k)x^2b_{k,0} + (1-k)x^3b_{k,1} + ...$$

elde ederiz. Bu son üç eşitliği $b_k(x)$ ortak parantezine alır ve (5.1.3) yineleme bağıntısını kullanılırsa

$b_{k,0} = \sum_{i=0}^{0}\binom{0}{0}j_{k,0} = 0\,, b_{k,1} = \sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}j_i = \binom{1}{0}j_0 + \binom{1}{1}j_1 = 1$ değerlerini de göz önüne alırsak

$$\begin{aligned}\left[1-(k+2)x+(1-k)x^2\right]b_k(x) &= b_{k,0} + x(b_{k,1} - (k+2)b_{k,0}) \\ &\quad + x^2(b_{k,2} - (k+2)b_{k,1} + (k-1)b_{k,0}) \\ &= 0 + x(1-0)\end{aligned}$$

elde edilir. Üreteç fonksiyonu

$$b_k(x) = \frac{x}{1-(k+2)x+(1-k)x^2}.$$

olarak bulunur.

k-Jacobsthal Dizisinin Binom Dönüşümü Üçgeni

Bu bölümde aşağıdaki kuralları kullanarak her bir k sayısı için yeni bir üçgen tanıtılacaktır.

a)Üçgenin sol köşegeni k-Jacobsthal sayılarının elemanlarından oluşmaktadır.

b)Üçgenin diğer elemanları sol üst çaprazdaki elemanların sol yandaki elemanla toplanması sonucu oluşur.

c)Sağ köşegen elemanları *k*-Jacobsthal dizisinin binom dönüşümüdür.

Örneğin aşağıdaki üçgen 3-Jacobsthal dizisi ve 3-Jacobsthal dizisinin binom dönüşümü içindir.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 3 & & 4 & & 5 & & \\
 & 11 & & 14 & & 18 & & 23 & \\
39 & & 50 & & 64 & & 82 & & 105
\end{array}
$$

k-Jacobsthal Dizisinin Binom Dönüşümünün Matlab Programı

```
% k-Jacobsthal Dizisinin Binom Dönüşümü
k=3;
J(1)=0;
J(2)=1;
N=15;
format long
for n=2:N
J(n+1)=(k+2)*J(n)+(1-k)*J(n-1)
end
J
```

5.2. k-Jacobstal Dizisinin k-Binom Dönüşümleri

Tanım 5.2.1. k-Jacobsthal dizisinin *k*-binom dönüşümü $\{w_{k,n}\}_{n\in N}$ olmak üzere aşağıdaki formülle tanımlanır.

$$w_{k,n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^n j_{k,i}$$

Lemma 5.2.2. k-Jacobsthal dizisinin *k*-binom dönüşümü aşağıdaki yineleme bağıntısını sağlar.

$$w_{k,n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n+1} \left(j_{k,i} + j_{k,i+1} \right)$$

İspat: Tanım 5.2.1 ve binom sayılarının $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}$, $\binom{n}{n+1} = 0$

özelliği kullanılırsa

$$w_{k,n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} k^{n+1} j_{k,i} = 0 + \sum_{i=1}^{n+1} \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right] k^{n+1} j_{k,i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^{n+1} j_{k,i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n+1} j_{k,i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n+1} j_{k,i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n+1} j_{k,i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n+1} \left(j_{k,i} + j_{k,i+1} \right)$$

elde edilir.

Teorem 5.2.3. $w_{k,n+1} = (k^2 + 2k) w_{k,n} + k^2 (1-k) w_{k,n-1}$ yineleme bağıntısı sağlanır.

İspat: Lemma 5.2.2. kullanılırsa,

$$\begin{aligned} w_{k,n+1} &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n+1} (j_{k,i} + j_{k,i+1}) \\ &= k^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^{n+1} (j_{k,i} + j_{k,i+1}) \\ &= k^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^{n+1} (j_{k,i} + k j_{k,i} + 2 j_{k,i-1}) \end{aligned}$$

$$w_{k,n+1} = k(k+1) w_{k,n} + 2 \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^{n+1} j_{k,i-1} + k^{n+1} \qquad (5.2.4)$$

$n+1$ yerine n yazıp yukarıdaki eşitliği tekrar yazarsak

$$
\begin{aligned}
w_{k,n} &= k(k+1)w_{k,n-1} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^n j_{k,i-1} + k^n \\
&= k^2 w_{k,n-1} + \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^n j_{k,i} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^n j_{k,i-1} + k^n \\
&= k^2 w_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}k^n j_{k,i-1} + 2\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i}k^n j_{k,i-1} + k^n \\
&= k^2 w_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n}\left[2\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right]k^n j_{k,i-1} + k^n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= k^2 w_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n}\left[2\binom{n-1}{i} + 2\binom{n-1}{i-1} - 2\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i-1}\right]k^n j_{k,i-1} + k^n \\
&= k^2 w_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n}\left[-\binom{n-1}{i-1} + 2\binom{n}{i}\right]k^n j_{k,i-1} + k^n \\
&= k^2 w_{k,n-1} + 2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^n j_{k,i-1} - \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^n j_{k,i} + k^n \\
&= k(k-1)\, w_{k,n-1} \quad + 2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^n j_{k,i-1} + k^n
\end{aligned}
$$

elde edilir. (5.2.4) eşitliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
w_{k,n+1} &= (k+1)w_{k,n} + 2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^n j_{i-1} + k^n \\
&= k(k+1)w_{k,n} + k(w_{k,n} - k(k-1)w_{k,n-1} - k^n) + k^{n+1} \\
&= (k^2 + 2k)w_{k,n} + k^2(1-k)w_{k,n-1}
\end{aligned}
$$

ispat tamamlanır.

2.İspat: $w_{k,n} = k^n b_{k,n}$ ve $w_{k,n+1} = k^{n+1} b_{k,n+1}$

eşitlikleri tanımdan görülür. (5.1.3) eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
w_{k,n+1} &= k^{n+1}((k+2)b_{k,n} + (1-k)b_{k,n-1}) \\
w_{k,n+1} &= k^n(k^2+2k)b_{k,n} + k^{n-1}k^2(1-k)b_{k,n-1} \\
w_{k,n+1} &= (k^2+2k)w_{k,n} + k^2(1-k)w_{k,n-1}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 5.2.4. (Binet Formülü) k-Jabosthal dizisinin k-binom dönüşümünün genel terimi aşağıdaki Binet formülü ile hesaplanabilir.

$$b_{k,n}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta},\quad \alpha=k\frac{k+2+\sqrt{k^2+8}}{2}\qquad \beta=k\frac{k+2-\sqrt{k^2+8}}{2}$$

Kökler aşağıdaki bağıntıyı sağlar:

$$\alpha+\beta=k(k+2)\qquad \alpha-\beta=k\sqrt{k^2+8}\qquad \alpha\beta=k^2(k-1).$$

İspat: Yineleme formülünün karakteristik polinom eşitliği $w^2-(k^2+2k)w+k^2(k-1)=0$ idi ve bu denklemin kökleri $\alpha=k\dfrac{k+2+\sqrt{k^2+8k}}{2}$ ve $\beta=k\dfrac{k+2-\sqrt{k^2+8k}}{2}$ olarak bulunur. Binet formülünü $w_{k,n}=c_1\alpha_1^{\,n}+c_2\beta_1^{\,n}$ şeklinde kabul edip $w_{k,0}=0$ ve $w_{k,1}=k$ başlangıç değerleri kullanılırsa

$$c_1+c_2=0$$
$$c_1\alpha-c_1\beta=k$$

eşitlikleri elde edilir. Bu sistem çözülürse Binet formülü

$$w_{k,n}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

olarak elde edilir.

Teorem 5.2.5. (k-Jacobsthal Dizilerinin k-Binom Dönüşünün Üreteç Fonksiyonu) k-Jacobsthal dizisinin k-binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu

$$w_k(x)=\frac{kx}{1-x+k(1-k)x^2}$$

İspat: k-Jacobsthal dizisinin binom dönüşümünün üreteç fonksiyonunu $w_k(x)$ ile gösterelim. Yani

$$w_k(x) = w_{k,0} + w_{k,1}x + w_{k,2}x^2 + ...$$

şeklinde tanımlanır. Daha sonra eşitliği sırasıyla $-x$ ve $k(1-k)x^2$ ile çarparsak

$$-xw_k(x) = -xw_{k,0} - x^2 w_{k,1} + ...$$
$$k(1-k)x^2 w_k(x) = k(1-k)x^2 w_{k,0} + k(1-k)x^3 w_{k,1} + ...$$

elde ederiz. Bu son üç eşitliği $w_k(x)$ ortak paranteze alırsak (5.1.3) yineleme bağıntısını kullanırsak ve $w_{k,0} = \sum_{i=0}^{0}\binom{0}{0}k^0 j_{k,0} = 0$, $w_{k,1} = \sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}kj_{k,1} = k$ değerlerini göz önünde bulundurursak

$$\left[1 - x + k(1-k)x^2\right]w_k(x) = w_{k,0} + x(w_{k,1} - w_{k,0})$$
$$= 0 + x(k-0)$$

elde edilir. Üreteç fonksiyonu

$$w_k(x) = \frac{kx}{1 - x + k(1-k)x^2}.$$

şeklinde elde edilir.

k-Jacobsthal Dizisinin k-Binom Dönüşümünün Üçgeni

Bu bölümde aşağıdaki kuralları kullanarak her bir k sayısı için yeni bir üçgen tanıtılacaktır.

a)Üçgenin sol köşegeni k-Jacobsthal sayılarının elemanlarından oluşmaktadır.

b) Üçgenin diğer elemanları sol köşedeki elemanların sol altındaki elemanla toplanıp k sayısı ile çarpılması sonucu oluşur.

c)Sağ köşegen elemanları k-Jacobsthal dizisinin k-binom dönüşümüdür.

Örneğin aşağıdaki üçgen 3-Jacobsthal dizisi ve 3-Jacobsthal dizisinin 3-binom dönüşümü içindir.

				0				
			1		3			
		3		12		45		
	11		42		162		621	
39		150		576		2214		8505

k-Jacobsthal Dizisinin k-Binom Dönüşümünün Matlab Programı

```
% k-Jacobsthal Dizisinin k-Binom Dönüşümü
k=3;
J(1)=0;
J(2)=1;
N=15;
format long
for n=2:N
J(n+1)= J(n)-k*(k-1)*J(n-1)
end
J
```

5.3. k-Jacobsthal Dizisinin Artan k-Binom Dönüşümü

Tanım 5.3.1. k-Jacobsthal dizisinin artan *k*-binom dönüşümü $R_k = \{r_{k,n}\}$ dizisi olmak üzere aşağıdaki gibi verilir.

$$r_{k,n} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^i J_{k,i} & , \ k \neq 0 \\ 0 & , \ k = 0 \end{cases} \tag{5.3.1}$$

Teorem 5.3.2.(Binet formülü) k-Jacobsthal dizisinin artan k-binom dönüşümünün herhangi bir terimi Binet formülü yardımıyla hesaplanabilir. Binet formülü aşağıdaki gibidir.

$$J_{k,n} = \frac{\left(\alpha^2 - 1\right)^n - \left(\beta^2 - 1\right)^n}{\alpha - \beta}. \tag{5.3.2}$$

İspat: Tanım 5.3.1 kullanılarak ispat yapılır

$$r_{k,n}=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^iJ_{k,i}=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^i\frac{\alpha^i-\beta^i}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(k\alpha)^i-\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(k\beta)^i\right)$$
$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left((k\alpha+1)^n-(k\beta+1)^n\right)$$
$$=\frac{\left(\alpha^2-1\right)^n-\left(\beta^2-1\right)^n}{\alpha-\beta}$$

Teorem 5.3.3. k- Jacobsthal dizisinin artan k-binom dönüşümünün başlangıç şartları $r_{k,0}=0$ ve $r_{k,1}=k$ olmak üzere aşağıdaki bağıntıyı sağlar.

$$r_{k,n+1}=(k^2+2)r_{k,n}-(1-k^2)r_{k,n-1} \qquad n\geq 1 \qquad (5.3.3)$$

İspat: Binet formülü kullanılırsa

$$(k^2+2)r_{k,n}-(1-k^2)r_{k,n-1}=(k^2+2)\frac{\left(k\alpha+1\right)^n-\left(k\beta+1\right)^n}{\alpha-\beta}$$
$$-(1-k^2)\frac{\left(k\alpha+1\right)^{n-1}-\left(k\beta+1\right)^{n-1}}{\alpha-\beta}$$
$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\begin{Bmatrix}\left(k\alpha+1\right)^{n-1}\left[(k^2+2)\left(k\alpha+1\right)-(1-k^2)\right]\\-\left(k\beta+1\right)^{n-1}\left[(k^2+2)\left(k\beta+1\right)-(1-k^2)\right]\end{Bmatrix}$$
$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\begin{Bmatrix}\left(k\alpha+1\right)^{n-1}\left[k^2\left(k\alpha+2\right)+2k\alpha+1\right]\\-\left(k\beta+1\right)^{n-1}\left[k^2\left(k\beta+2\right)+2k\beta+1\right]\end{Bmatrix}$$
$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\begin{Bmatrix}\left(k\alpha+1\right)^{n-1}\left[\left(k\alpha\right)^2+2k\alpha+1\right]\\-\left(k\beta+1\right)^{n-1}\left[\left(k\beta\right)^2+2k\beta+1\right]\end{Bmatrix}$$
$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\left(k\alpha+1\right)^{n-1}\left(k\alpha+1\right)^2-\left(k\beta+1\right)^{n-1}\left(k\beta+1\right)^2\right\}$$
$$=r_{k,n+1}$$

Teorem 5.3.4.(k-Jacobsthal Dizisinin Artan k-Binom Dönüşümünün Üreteç Fonksiyonu) k-Jacobsthal dizisinin artan k-binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu

$$R_k(x)=\frac{kx}{1-(k^2+2)x+(1-k^2)x^2}$$

İspat: k-Jacobsthal dizisinin artan binom dönüşümünün üreteç fonksiyonunu $R_k(x)$ ile gösterelim. Yani

$$R_k(x) = r_{k,0} + r_{k,1}x + r_{k,2}x^2 + \ldots$$

şeklinde tanımlanır. Daha sonra eşitliği sırasıyla $-(k^2+2)x$ ve $(1-k^2)x^2$ ile çarparsak

$$-(k^2+2)xR_k(x) = -x(k^2+2)r_{k,0} - x^2(k^2+2)r_{k,1} + \ldots$$
$$(1-k^2)x^2R_k(x) = (1-k^2)x^2r_{k,0} + (1-k^2)x^3r_{k,1} + \ldots$$

elde ederiz. Bu son üç eşitliği $R_k(x)$ ortak parantezine alıp ve (5.3.3) yineleme bağıntısını kullanıp $r_{k,0} = \sum_{i=0}^{0}\binom{0}{0}k^0 j_{k,0} = 0$, $r_{k,1} = \sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}kj_{k,i} = k$ değerlerini göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}\left[1-(k^2+2)x+(1-k^2)x^2\right]R_k(x) &= r_{k,0} - x(k^2+2)r_{k,0} \\ &= 0 + x(k-0)\end{aligned}$$

elde edilir. Üreteç fonksiyonu

$$R_k(x) = \frac{kx}{1-(k^2+2)x+(1-k^2)x^2}$$

şeklinde bulunur.

k-Jacobsthal Dizisinin Artan k-Binom Dönüşüm Üçgeni

Bu bölümde aşağıdaki kuralları kullanarak her bir k sayısı için yeni bir üçgen tanıtılacaktır.

a) Üçgenin sol köşegeni k-Jacobsthal sayılarının elemanlarından oluşmaktadır.

b) Üçgenin diğer elemanları sol yanındaki elemanın k katının sol üst çaprazındaki elemanla toplanması ile oluşur.

c) Sağ köşegen elemanları k-Jacobsthal dizisinin artan k-binom dönüşüm elemanlarıdır.

Örneğin aşağıdaki üçgen 3-Jacobsthal dizisi ve 3-Jacobsthal dizisinin 3-binom dönüşümü içindir.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & & \\
 & & 3 & & 10 & & 33 & & \\
 & 11 & & 36 & & 118 & & 387 & \\
39 & & 128 & & 420 & & 1378 & & 4521
\end{array}
$$

k-Jacobsthal Dizisinin Artan k-Binom Dönüşümün Matlab Programı

```
% k-Jacobsthal Dizisinin Artan k-Binom Dönüşümü
k=3;
J(1)=0;
J(2)=1;
N=15;
format long
for n=2:N
J(n+1)=(k^2+2)*J(n)-(1-k^2)*J(n-1)
end
J
```

5.4. k-Jacobsthal Dizisinin Azalan k-Binom Dönüşümü

Tanım 5.4.1. *k*-Jacobsthal dizisinin azalan k-binom dönüşümü $F_k = \{f_{k,n}\}$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f_{k,n} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} J_{k,i} & , \ k \neq 0 \\ 0 & , \ k = 0 \end{cases} \tag{5.4.1}$$

Lemma 5.4.2. k-Jacobsthal dizisinin azalan *k*- binom dönüşümü aşağıdaki bağıntıyı sağlar.

$$f_{k,n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} \left(kj_{k,i} + j_{k,i+1} \right) \qquad (5.4.2)$$

İspat: Tanım 5.4.1 ve binom sayılarının $\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}$ özelliği kullanılarak

$$f_{k,n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} k^{n+1-i} j_{k,i} = 0 + \sum_{i=1}^{n+1} \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right] k^{n+1-i} j_{k,i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^{n+1-i} j_{k,i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} j_{k,i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} (kj_{k,i} + j_{k,i+1})$$

bağıntısı elde edilir.

Teorem 5.4.3. k-Jacobsthal dizisinin azalan *k*-binom dizisi başlangıç şartları $f_{k,0} = 0$ ve $f_{k,1} = 1$ olan aşağıdaki bağıntıyı sağlar.

$$f_{k,n+1} = 3kf_{k,n} - (2k^2 - 2)\, f_{k,n-1} \qquad (5.4.3)$$

İspat: Lemma 5.4.2 ve binom sayılarının $\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}$ özelliği kullanılarak

$$f_{k,n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} (kj_{k,i} + j_{k,i+1})$$

$$= k^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} (kj_{k,i} + j_{k,i+1})$$

$$= k^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} (kj_{k,i} + kj_{k,i} + 2j_{k,i-1})$$

$$f_{k,n+1} = 2kf_{k,n} + 2\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} j_{k,i-1} + k^n \qquad (5.4.4)$$

$n+1$ yerine n yazılırsa

$$f_{k,n}=2kf_{k,n-1}+2\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n-1-i}j_{k,i-1}+k^{n-1}$$

$$f_{k,n}=kf_{k,n-1}+k\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n-1-i}j_{k,i}+2\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n-1-i}j_{k,i-1}+k^{n-1}$$

$$=kf_{k,n-1}+k\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}k^{n-i}j_{k,i-1}+2\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n-1-i}j_{k,i-1}+k^{n-1}$$

$$=kf_{k,n-1}+\sum_{i=1}^{n}\left[2\binom{n-1}{i}+k^2\binom{n-1}{i-1}\right]k^{n-1-i}j_{k,i-1}+k^{n-1}$$

$$=kf_{k,n-1}+\sum_{i=1}^{n}\left[2\binom{n-1}{i}+2\binom{n-1}{i-1}-2\binom{n-1}{i-1}+k^2\binom{n-1}{i-1}\right]k^{n-1-i}j_{k,i-1}+k^{n-1}$$

$$=kf_{k,n-1}+\sum_{i=1}^{n}\left[(k^2-2)\binom{n-1}{i-1}+2\binom{n}{i}\right]k^{n-1-i}j_{k,i-1}+k^{n-1}$$

$$=kf_{k,n-1}+\sum_{i=0}^{n-1}\left[(k^2-2)\binom{n-1}{i}\right]k^{n-2-i}j_{k,i}+2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{n-1-i}j_{k,i-1}+k^{n-1}$$

$$=kf_{k,n-1}+2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{n-1-i}j_{k,i-1}+(\frac{k^2-2}{k})\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n-1-i}j_{k,i}+k^{n-1}$$

$$=(\frac{k^2-2}{k})\,f_{k,n-1}\;+2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{n-1-i}j_{k,i-1}+k^{n-1}+kf_{k,n-1}$$

Yukarıdaki eşitlikte (5.4.4) denklemi yerleştirilirse

$$f_{k,n}=(\frac{2k^2-2}{k})\,f_{k,n-1}\;+2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{n-1-i}j_{k,i-1}+k^{n-1}$$

$$(f_{k,n+1}-2kf_{k,n})/k=2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{n-1-i}j_{k,i-1}+k^{n-1}=f_{k,n}\quad-(\frac{2k^2-2}{k})\,f_{k,n-1}$$

$$f_{k,n+1}-2kf_{k,n}=kf_{k,n}-(2k^2-2)\,f_{k,n-1}$$

Cebirsel işlemlerle

$$f_{k,n+1}=3kf_{k,n}\;-(2k^2-2)\,f_{k,n-1}$$

elde edilir.

Teorem 5.4.2. (Binet formülü) k-Jacobsthal dizisinin azalan k-binom dönüşümünün Binet formülü, kökleri $f_1 = \dfrac{3k + \sqrt{k^2 + 8}}{2}$, $f_2 = \dfrac{3k - \sqrt{k^2 + 8}}{2}$ olmak üzere

$$f_{k,n} = \frac{f_1^n - f_2^n}{f_1 - f_2}$$

şeklindedir.

İspat: Yineleme formülünün karakteristik polinom eşitliği $f_{k,n+1} = 3kf_{k,n} - (2k^2 - 2)f_{k,n-1}$ ve bu denklemin kökleri $f_1 = \dfrac{3k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$ ve $f_2 = \dfrac{3k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}$ olarak bulunur.

. $f_{k,n} = c_1 f_1^n + c_2 f_2^n$ yazıp $f_{k,0} = 0$ ve $f_{k,1} = 1$ alınırsa

$$c_1 + c_2 = 0$$
$$c_1 f_1 - c_1 f_2 = 1$$

eşitlikleri elde edilir.

Binet formülü

$$f_{k,n} = \frac{f_1^n - f_2^n}{f_1 - f_2}$$

olarak elde edilir.

Teorem 5.4.5.(k-Jacobsthal Dizisinin Azalan Binom Dönüşümünün Üreteç Fonksiyonu) k-Jacobsthal dizisinin azalan binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu

$$F_k(x) = \frac{kx}{1 - 3kx + (2k^2 - 2)x^2}$$

İspat: k-Jacobsthal dizisinin azalan binom dönüşümünün üreteç fonksiyonunu $F_k(x)$ ile gösterelim. Yani

$$. \quad F_k(x) = f_{k,0} + f_{k,1}x + f_{k,2}x^2 + ...$$

şeklinde tanımlanır. Daha sonra eşitliği sırasıyla $-3kx$ ve $(2k^2-2)x^2$ ile çarparsak

$$-3kxR_k(x) = -x(k^2+2)r_{k,0} - x^2(k^2+2)r_{k,1} + ...$$
$$(2k^2-2)x^2R_k(x) = (1-k^2)x^2r_{k,0} + (1-k^2)x^3r_{k,1} + ...$$

elde ederiz. Bu son üç eşitliği $F_k(x)$ ortak parantezine alıp (5.4.4) yineleme bağıntısını kullanır $f_{k,0} = \sum_{i=0}^{0}\binom{0}{0}k^0 j_{k,0} = 0$ $f_{k,1} = \sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}kj_{k,1} = 0$ değerlerini göz önünde bulundurursak

$$\left[1-3kx+(2k^2-2)x^2\right]R_k(x) = r_{k,0} - x(k^2+2)r_{k,0}$$
$$= 0 + x(k-0)$$

elde ederiz. Üreteç fonksiyonunu

$$F_k(x) = \frac{kx}{1-3kx+(2k^2-2)x^2}.$$

olarak buluruz.

k-Jacobsthal Dizisinin Azalan k-Binom Dönüşüm Üçgeni

Bu bölümde aşağıdaki kuralları kullanarak her bir *k* sayısı için yeni bir üçgen tanıtılacaktır: Üçgenin sol köşegeni *k*-Jacobsthal dizilerinin elemanlarından oluşmaktadır. Üçgenin diğer elemanları sol üst çapradaki elemanın *k* sayısı ile çarpılıp bir sol alt elemanla toplanıp sağ tarafına yazılarak bulunur.

Örneğin aşağıdaki üçgen 3-Jacobsthal dizisi ve azalan 3- binom dönüşümü içindir

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 3 & & 6 & & 9 & & \\ & 11 & & 20 & & 38 & & 65 & \\ 39 & & 72 & & 132 & & 246 & & 441 \end{array}$$

k-Jacobsthal Dizisinin Azalan k- Binom Dönüşümünün Matlab Programı

```
% k-Jacobsthal Dizisinin Azalan k-Binom Dönüşümü
k=3;
J(1)=0;
J(2)=1;
N=15;
format long
for n=2:N
J(n+1)=3*k*J(n)+(2*k^2-2)*J(n-1)
end
J
```

5.5. k-Jacobsthal Dizisinin Binom Dönüşümlerinin Matris Formu

k - Jacobsthal dizinin elemanlarının matris formu $S = [j_{k,0}, j_{k,1},...]^T$ ile ifade edilsin.

$K = diag[k^0, k^1,...]^T$ ve Pascal üçgen matrisi

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 1 & 1 & 0 & 0 & ... \\ 1 & 2 & 1 & 0 & ... \\ 1 & 3 & 3 & 1 & ... \end{bmatrix}$$

olsun.

S,P,K kullanarak k-Jacobsthal dizisinin binom dönüşümünün matrisini bulmak istiyoruz.

k - Jacobsthal dizisinin binom dönüşümlerinin matrisi $B = [b_{k,0}, b_{k,1},...]^T$, k - Jacobsthal dizisinin k-binom dönüşümlerinin matrisi $W = [w_{k,0}, w_{k,1},...]^T$, k - Jacobsthal dizisinin artan binom dönüşümlerinin matrisi $R = [r_{k,0}, r_{k,1},...]^T$ ve son olarak k- Jacobsthal dizilerinin azalan binom dönüşümlerinin matrisi $F = [f_{k,0}, f_{k,1},...]^T$ olarak tanımlanır.

B binom dönüşümü, W k-binom dönüşümü, R artan binom dönüşümü, F azalan binom dönüşümü aşağıdaki bağıntıları karşılar.

$B = P.S$, $\quad W = K.P.S$, $\quad R = P.K.S$, $\quad F = K.P.K^{-1}.S$

P ve K matrisleri tersinirdir. Ve P'nin tersi P^{-1} matrisinin elemanları $(-1)^{i-j}\binom{i}{j}$ ve K'nın tersi $K^{-1} = diag(k^0 k^{-1}, k^{-2}, ...)$ diagonal matrisi şeklindedir. S aşağıdaki bağıntıları sağlar, sonuç olarak bu bağıntılar kullanılarak k- Jacobsthal dizisinin elemanları elde edilir.

BÖLÜM 6

ÇEŞİTLİ TİPTEKİ k-JACOBSTHAL LUCAS DİZİLERİNİN BİNOM DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde k - Jacobsthal Lucas dizisi kısaca tanıtıldıktan sonra k - Jacobsthal Lucas dizisinin binom, k-binom, artan k-binom, azalan k-binom dizileri tanımlanacaktır. Oluşturulan bu dizilerin yineleme bağıntıları, üreteç fonksiyonları, binet formülleri, elemanları veren binom Pascal üçgenleri ve matlab programları verilmiştir. Bu bölümde bulunan sonuçlar değerlendirilmek üzere "Binominal transforms of k-Jacobsthal Lucas sequences"başlığıyla bir dergiye gönderilmiştir.

6.1. k-Jacobsthal Lucas Dizilerinin Binom Dönüşümleri

Her $k > 0$ reel sayısı ve $n \geq 0$ tamsayısı için başlangıç şartları $c_{k,0} = 2$, $c_{k,1} = k$ olmak üzere;

$$c_{k,n+2} = kc_{k,n+1} + 2c_{k,n}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan $\{c_{k,n}\}_{n\in N}$ dizisine "**k-Jacobsthal Lucas dizisi**" denir. Dizinin her bir elemanına da, k-Jacobsthal Lucas sayısı denir. $k = 1$ alınırsa, Jacobsthal Lucas dizisi elde edilir. $x^2 = kx + 2$ karakteristik denkleminin kökleri; $x_1 = \dfrac{k + \sqrt{k^2 + 8}}{2}$, $x_2 = \dfrac{k - \sqrt{k^2 + 8}}{2}$ şeklindedir. k-Jacobsthal Lucas sayıları için Binet formülü,

$$c_{k,n} = x_1^n + x_2^n$$

şeklindedir

Tanım 6.1.1. $\{c_{k,n}\}_{n\in N}$ k-Jacobsthal Lucas dizisinin binom dönüşümü $\{\beta_{k,n}\}_{n\in N}$ şeklinde gösterilir. $\beta_{k,n}$ her pozitif k tam sayısı için

$$\beta_{k,n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c_{k,i} \tag{6.1.1}$$

ile verilir.

Lemma 6.1.2. $n \geq 1$ pozitif tam sayısı olsun. k - Jacobsthal Lucas dizisinin binom dönüşümü aşağıdaki bağıntıyı sağlar.

$$\beta_{k,n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(c_{k,i} + c_{k,i+1} \right) \tag{6.1.2}$$

İspat: Tanım 6.1.1ve binom sayılarının $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}, \quad \binom{n}{n+1} = 0$

özellikleri kullanılırsa

$$\beta_{k,n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} c_{k,i} = 2 + \sum_{i=1}^{n+1} \left[\binom{n+1}{i} \right] c_{k,i}$$

$$= 2 + \sum_{i=1}^{n+1} \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right] c_{k,i}$$

$$= 2 + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i} c_{k,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n}{i} c_{k,i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n}{i} c_{k,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n}{i} c_{k,i+1}$$

$$\beta_{k,n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(c_{k,i} + c_{k,i+1} \right)$$

ispat tamamlanır.

Teorem 6.1.3. k-Jacobsthal Lucas dizisinin binom dönüşümü aşağıdaki yineleme bağıntısını sağlar.

$$\beta_{k,n+1} = (k+2)\beta_{k,n} + (1-k)\beta_{k,n-1} \tag{6.1.3}$$

İspat: k-Jacobsthal Lucas dizisinin binom dönüşümü için yukardaki Lemma kulanılırsa

$$\beta_{k,n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(c_{k,i} + c_{k,i+1} \right)$$

eşitliği elde edilir. Burada sıfırıncı terim seriden ayrı yazılır ve seri dağıtılırsa

$$\beta_{k,n+1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \left((k+1)c_{k,i} + 2c_{k,i-1} \right) + (c_{k,0} + c_{k,1})$$

$$\beta_{k,n+1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (k+1)c_{k,i} + 2\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} c_{k,i-1} + (k+2)$$

elde edilir. $\beta_{k,n}$ tanımındaki serinin sıfırıncı terimi eklenir çıkarılır

$$\beta_{k,n+1} = (k+1)\beta_{k,n} + 2\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} c_{k,i-1} - k \tag{6.1.4}$$

ve son eşitlikte $n+1$ yerine n yazılırsa

$$\beta_{k,n} = (k+1)\beta_{k,n-1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} c_{k,i-1} - k$$

$$\beta_{k,n} = k\beta_{k,n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} c_{k,i} + 2\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} c_{k,i-1} - k$$

$\binom{n-1}{n} = 0$ olmak üzere

$$\beta_{k,n} = k\beta_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} c_{k,i-1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} c_{k,i-1} - k$$

$$\beta_{k,n} = k\beta_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n-1}{i-1} + 2\binom{n-1}{i} \mp 2\binom{n-1}{i-1} \right] c_{k,i-1} - k$$

$$\beta_{k,n} = k\beta_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n} \left[-\binom{n-1}{i-1} + 2\binom{n}{i} \right] c_{k,i-1} - k$$

$$\beta_{k,n} = k\beta_{k,n-1} - \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} c_{k,i-1} + 2\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} c_{k,i-1} - k$$

$$\beta_{k,n} = k\beta_{k,n-1} - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} c_{k,i} + 2\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} c_{k,i-1} - k$$

bulunur. Burada (6.1.4) eşitliği kullanılırsa

$$\beta_{k,n+1} = (k+1)\beta_{k,n} + 2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}c_{k,i-1} - k$$

$$\beta_{k,n} = (k-1)\beta_{k,n-1} + (\beta_{k,n+1} - (k+1)\beta_{k,n} + k) - k$$

$$\beta_{k,n} = (k-1)\beta_{k,n-1} + \beta_{k,n+1} - (k+1)\beta_{k,n}$$

$$\beta_{k,n+1} = (k+2)\beta_{k,n} + (1-k)\beta_{k,n-1}$$

ispat tamamlanır.

Teorem 6.1.4. (Binet Formülü) k-Jacobsthal Lucas dizisinin binom dönüşümünün herhangi bir terimi Binet formülünün yardımıyla hesaplanabilir.

$$\beta_{k,n} = \frac{\beta_1^n - \beta_2^n}{\beta_1 - \beta_2} \quad , \quad \beta_{1,2} = \frac{\mathrm{k} + 2 \mp \sqrt{k^2+8}}{2}$$

Bu kökler aşağıdaki bağıntıları sağlar:

$$\beta_1 + \beta_2 = k + 2 \quad , \qquad \beta_1 - \beta_2 = \sqrt{k^2+8} \quad , \qquad \beta_1.\beta_2 = k - 1$$

İspat: Yineleme formülünün karakteristik polinom eşitliği $x^2 - (k+2)x + (k-1) = 0$ olup kökleri β_1 ve β_2 ‘ dir. Binet formülünü elde etmek için $\beta_{k,n} = c_1\beta_1^n + c_2\beta_2^n$ yazılır. Başlangıç değerleri kullanılırsa

$$n = 0 \text{ için } \beta_{k,0} = 2 = c_1 + c_2$$

$$n = 1 \text{ için } \beta_{k,1} = k + 2 = c_1\beta_1 + c_2\beta_2$$

Eşitlikleri bulunur. Bu denklem sistemi çözülürse

$$k + 2 = (2 - c_2)\beta_1 + c_2\beta_2$$

$$k + 2 = c_2(\beta_2 - \beta_1) + 2\beta_1$$

$$c_2.(\beta_2 - \beta_1) = k + 2 - 2\beta_1$$

$$= k + 2 - 2.(\frac{k + 2 + \sqrt{k^2 + 8}}{2})$$

$$c_2.(\beta_2 - \beta_1) = k + 2 - k - 2 - \sqrt{k^2 + 8}$$

$$c_2(-\sqrt{k^2 + 8}) = -\sqrt{k^2 + 8}$$

$$c_2 = 1$$

$2 = c_1 + c_2$ idi. Buradan $c_1 = 1$ bulunur.

Teorem 6.1.5. (k -Jacobsthal dizisinin binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu)

k -Jacobsthal Lucas dizisinin binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu orijin merkezli katsayıları k -Jacobsthal dizisinin binom dönüşümünün elemanları olan bir kuvvet serisidir. Üreteç fonksiyonunu $b_k(x)$ şeklinde gösterelim. $b_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = b_{k,0} + b_{k,1}x + b_{k,2}x^2 + \ldots$ ile tanımlanır. k -Jacobsthal Lucas dizisinin binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu

$$b_k(x) = \frac{2 - x(k+2)}{\left[1 - (k+2)x - (1-k)x^2\right]}$$

şeklinde verilir.

İspat: $b_k(x)$ eşitliği $-(k+2)$ ve $-(1-k)x^2$ ile çarpılırsa

$$-(k+2)xb_k(x) = -(k+2)xb_{k,0} - (k+2)x^2 b_{k,1} - \ldots$$
$$-(1-k)x^2 b_k(x) = -(1-k)x^2 b_{k,0} - (1-k)x^3 b_{k,1} + \ldots$$

elde edilir.

Bu üç eşitlikten ve (6.1.3) yineleme bağıntısı, başlangıç değerleri kullanılarak

$$\left[1-(k+2)x+(1-k)x^2\right]b_k(x) = b_{k,0} + x(b_{k,1} - (k+2)b_{k,0})$$
$$+ x^2(b_{k,2} - (k+2)b_{k,1} + (k-1)b_{k,0}) + \ldots$$
$$= 2 + x(k+2-2k-4)$$

bulunur. Böylece üreteç fonksiyonu;

$$b_k(x) = \frac{2-x(k+2)}{\left[1-(k+2)x-(1-k)x^2\right]}$$

olarak elde edilir.

k-Jacobsthal Lucas dizisinin binom dönüşümünün Pascal üçgeni

Her bir k değeri için aşağıdaki üçgen kullanılarak k - Jacobsthal Lucas sayılarının binom dönüşüm dizisinin elemanları kolaylıkla elde edilebilir:

a) Üçgenin sol köşegen elemanları k - Jacobsthal Lucas sayılarından oluşur.
b) Diğer elemanlar sol yanındaki ve sol çapraz üstündeki sayıların toplamından oluşur.
c) Üçgenin sağ köşegen elemanları k - Jacobsthal Lucas sayılarının binom dönüşüm elemanlarını verir.

Örneğin; 3 - Jacobsthal Lucas dizisinin üçgeni ve binom dönüşüm elemanları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 2 & & & & \\ & & & 3 & & 5 & & & \\ & & 13 & & 16 & & 21 & & \\ & 45 & & 58 & & 74 & & 95 & \\ 161 & & 206 & & 264 & & 338 & & 433 \end{array}$$

k-Jacobsthal Lucas Dizisinin Binom Dönüşümünün Matlab Programı

```
% k-Jacobsthal Lucas Dizisinin Binom Dönüşümü
k=3;
C(1)=2;
C(2)=k;
N=15;
```

```
format long
for n=2:N
C(n+1)=(k+2)*C(n)+(1-k)*C(n-1)
end
C
```

6.2. k-Jacobsthal Lucas Dizisinin k-Binom Dönüşümleri

Tanım 6.2.1. k -Jacobsthal Lucas dizisinin k binom dönüşümü $\{\psi_{k,n}\}_{n\in N}$ olmak üzere

$$\psi_{k,n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}k^n c_{k,i} \tag{6.2.1}$$

şeklinde tanımlanır.

$\psi_{k,n} = k^n b_{k,n}$ $\quad \psi_{k,0} = 2,\ \psi_{k,1} = 2k + k^2$ olduğu görülür.

Lemma 6.2.2. k - Jacobtshal Lucas dizisinin k -binom dönüşümü aşağıdaki özelliği sağlar .

$$\psi_{k,n+1} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}k^{n+1}\left(c_{k,i} + c_{k,i+1}\right) \tag{6.2.2}$$

İspat: Tanım 6.2.1 ve binom sayılarının $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1},\ \binom{n}{n+1} = 0$

özellikleri kullanılırsa istenen sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
\psi_{k,n+1} &= \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}k^{n+1}c_{k,i} = 2k^{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1}\left[\binom{n}{i} + \binom{n}{n-1}\right]k^{n+1}c_{k,i} \\
&= 2k^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}k^{n+1}\binom{n}{i}c_{k,i} + \sum_{i=0}^{n}k^{n+1}\binom{n}{i}c_{k,i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}k^{n+1}(c_{k,i} + c_{k,i+1}).
\end{aligned}$$

Teorem 6.2.3. Aşağıdaki yineleme bağıntısı k -Jacobsthal Lucas dizisinin k - binom dönüşümünü sağlar.

$$\psi_{k,n+1} = k.(k+2)\psi_{k,n} + k^2.(1-k)\psi_{k,n-1} \tag{6.2.3}$$

İspat: (6.2.2) eşitliği ve $\psi_{k,0} = 2$ ve $\psi_{k,1} = k(k+2)$ başlangıç şartlarını kullanalım,

$$\begin{aligned}\psi_{k,n+1} &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}k^{n+1}(c_{k,i}+c_{k,i+1}) \\ &= (k+2)k^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{n+1}(c_{k,i}+c_{k,i+1}) \\ &= (k+2)k^{n+1} + (k+1)\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{n+1}c_{k,i} + 2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{n+1}c_{k,i-1}\end{aligned}$$

$$\psi_{k,n+1} = -k^{n+2} + k(k+1)\psi_{k,n} + 2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{n+1}c_{k,i-1} \tag{6.2.4}$$

(6.2.4) eşitliğinde $n+1$ yerine n yazılırsa

$$\begin{aligned}\psi_{k,n} &= k(k+1)\psi_{k,n-1} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n}c_{k,i-1} - k^{n+1} \\ &= k^2\psi_{k,n-1} + k\left[\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n-1}c_{k,i}\right] + 2\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n}c_{k,i-1} - k^{n+1} \\ &= k^2\psi_{k,n-1} + \left[\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}k^{n}c_{k,i-1}\right] + 2\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n}c_{k,i-1} - k^{n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{k,n} &= k^2\psi_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n}\left[2\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right]k^{n}c_{k,i-1} - k^{n+1} \\ &= k^2\psi_{k,n-1} - k^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\left[2\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} + 2\binom{n-1}{i-1} - 2\binom{n-1}{i-1}\right]k^{n}c_{k,i-1} \\ &= k^2\psi_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n}\left[-\binom{n-1}{i-1}' + 2\binom{n}{i}\right]k^{n}c_{k,i-1} - k^{n+1} \\ &= k^2\psi_{k,n-1} + 2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{n}c_{k,i-1} - \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n}c_{k,i} - k^{n+1}\end{aligned}$$

$$\psi_{k,n} = k(k-1)\psi_{k,n-1} + 2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{n}c_{k,i-1} - k^{n+1} \tag{6.2.5}$$

(6.2.5) te (6.2.4) denklemi yerleştirilirse

$$
\begin{aligned}
\psi_{k,n} &= k(k-1)\psi_{k,n-1} + 2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^n c_{k,i-1} - k^{n+1} \\
&= k(k-1)\psi_{k,n-1} + (\psi_{k,n+1} - k(k+1)\psi_{k,n} + k^{n+2})/k - k^{n+1} \\
\psi_{k,n} &= k(k-1)\psi_{k,n-1} + \psi_{k,n+1}/k - (k+1)\psi_{k,n}
\end{aligned}
$$

Bazı basit işlemler yapılarak ispat

$$\psi_{k,n+1} = k(k+2)\psi_{k,n} - k^2(k-1)\psi_{k,n-1}$$

olarak bulunur.

Teorem 6.2.4. k -Jacobsthal Lucas dizisinin k-binom dönüşümünün Binet formülü

$$w_{k,n} = \psi_1^{\,n} + \psi_2^{\,n}$$

olarak elde edilir.

İspat: (6.2.3) yineleme bağıntısının karakteristik denklemi $x^2 - k(k+2)x + k^2(k-1) = 0$ dır ve bu denklemin kökleri $\psi_1 = k\dfrac{k+2+\sqrt{k^2+8}}{2}$ ve $\psi_2 = k\dfrac{k+2-\sqrt{k^2+8}}{2}$ olarak bulunur. Binet formülünü $w_{k,n} = c_1\psi_1^{\,n} + c_2\psi_2^{\,n}$ şeklinde kabul edip $w_{k,0} = 2$ ve $w_{k,1} = k(k+2)$ başlangıç değerleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&c_1 + c_2 = 2 \\
&c_1\psi_1(2-c_1)\psi_2 = k(k+2)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir. Bu sistem çözülürse Binet formülü

$$w_{k,n} = \psi_1^{\,n} + \psi_2^{\,n}$$

olarak elde edilir

$$\psi_1 + \psi_2 = k(k+2), \quad \psi_1 - \psi_2 = k\sqrt{k^2+8}, \quad \psi_1\psi_2 = k^2(k-1)$$

bağıntıları sağlanır.

Teorem 6.2.5. (k-Jacobsthal Lucas dizisinin k-binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu) k-Jacobsthal Lucas dizisinin k-binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu orijin merkezli katsayıları k-Jacobsthal Lucas dizisinin binom dönüşümünün elemanları olan bir kuvvet serisidir. Üreteç fonksiyonunu $\psi_k(x)$ şeklinde gösterilir Üreteç fonksiyonu;

$$\psi_k(x) = \frac{2 - x[k(k+2)]}{1 - k(k+2)x + k^2(1-k)x^2}$$

.ile tanımlanır.

İspat: $\psi_k(x)$ eşitliğini $-k(k+2)x$ ve $k^2(1-k)$ ile çarpılırsa

$$-k(k+2)x\psi_k(x) = -(k+2)x\psi_{k,0} - (k+2)x^2\psi_{k,1} - \ldots$$
$$k^2(1-k)x^2\psi_k(x) = k^2(1-k)x^2\psi_{k,0} + k^2(1-k)x^3\psi_{k,1} + \ldots$$

Bu üç eşitlikten ve (6.2.3) yineleme bağıntısından

$$\left[1 - k(k+2)x + k^2(1-k)x^2\right]\psi_k(x) = \psi_{k,0} + \left[\psi_{k,1} - k(k+2)\psi_{k,0}\right]x - 0 + 0$$
$$= 2 + \left[-k(k+2)\right]x$$
$$= 2 - x\left[k(k+2)\right]$$

Üreteç fonksiyonu;

$$\psi_k(x) = \frac{2 - x[k(k+2)]}{1 - k(k+2)x + k^2(1-k)x^2}$$

olarak elde edilir.

k-Jacobsthal Lucas Dizisinin k- Binom Dönüşümünün Pascal Üçgeni

Her bir k değeri için aşağıdaki üçgeni kullanarak Jacobsthal Lucas sayılarının k-binom dönüşüm dizisinin elemanlarını kolaylıkla elde edebiliriz:

a) Üçgenin sol köşegen elemanları k - Jacobsthal Lucas sayılarından oluşur.

b) Diğer elemanlar sol yanındaki ve sol çapraz üstündeki sayıların toplamının k katından oluşur.

c) Üçgenin sağ köşegen elemanları k - Jacobsthal Lucas sayılarının k-binom dönüşüm elemanlarını verir.

				2				
			3		15			
		13		48		189		
	45		174		666		2565	
161		618		2376		9126		35073

k-Jacobsthal Lucas Dizisinin k-Binom Dönüşümünün Matlab Programı

```
% k-Jacobsthal Lucas Dizisinin k-Binom Dönüşümü
k=3;
C(1)=2;
C(2)=k;
N=15;
format long
for n=2:N
C(n+1)=k*(k+1)*C(n)-k^2*(k-1)*C(n-1)
end
C
```

6.3. k-Jacobsthal Lucas Dizisinin Artan k-Binom Dönüşümü

Tanım 6.3.1. k-Jacobsthal Lucas dizisinin artan k binom dönüşümü $\{\gamma_{k,n}\}_{n\in N}$ olmak üzere

$$\gamma_{k,n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^i c_{k,i} \tag{6.3.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 6.3.2. (Binet Formülü) k-Jacobsthal Lucas dizisinin k-binom dönüşümünün herhangi bir terimi Binet formülünün yardımıyla hesaplanabilir.

$$\gamma_{k,n} = (\alpha^2 - 1)^n + (\beta^2 - 1)^n \tag{6.3.2}$$

İspat: $\alpha^2 = k\alpha + 2,\quad \gamma_{k,0} = 2,$ ve $\gamma_{k,1} = \binom{1}{0}k^0 c_0 + \binom{1}{1}k^1 c_1 = 2 + k^2$ kullanılarak

$$\gamma_{k,n} = \sum_{i=0}^{n} k^i \binom{n}{i}(\alpha^i + \beta^i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\left[(\alpha k)^i + (\beta k)^i\right]$$

$$(\alpha k + 1)^n + (\beta k + 1)^n = (\alpha^2 - 1)^n + (\beta^2 - 1)^n$$

istenen elde edilir.

Teorem 6.3.3. Aşağıda verilen yineleme bağıntısı k - Jacobsthal Lucas dizisinin artan k binom dönüşümü içindir.

$$\gamma_{n+1} = (k^2 + 2)\gamma_n - (1 - k^2)\gamma_{n-1} \tag{6.3.3}$$

İspat: Binet formülünü kullanarak yineleme bağıntısı bulunur:

$$(k^2 + 2)\gamma_n - (1 - k^2)\gamma_{n-1} = (k^2 + 2)\left[(\alpha^2 - 1)^n + (\beta^2 - 1)^n\right]$$
$$-(1 - k^2)\left[(\alpha^2 - 1)^{n-1} + (\beta^2 - 1)^{n-1}\right]$$

$$= (\alpha k + 1)^{n-1}\left[\alpha k^3 + k^2 + 2\alpha k + 2 - 1 + k^2\right] + (\beta k + 1)^{n-1}\left[\beta k^3 + k^2 + 2\beta k + 1 + k^2\right]$$

$$= (\alpha k + 1)^{n-1}\left[k^2(\alpha k + 2) + 2\alpha k + 1\right] + (\beta k + 1)^{n-1}\left[k^2(\beta k + 2) + 2\beta k + 1\right]$$

$$= (\alpha k + 1)^{n-1}\left[k^2\alpha^2 + 2\alpha k + 1\right] + (\beta k + 1)^{n-1}\left[k^2(\beta k + 2) + 2\beta k + 1\right]$$

$$= (\alpha k + 1)^{n-1}(\alpha k + 1)^2 + (\beta k + 1)^{n-1}(\beta k + 1)^2$$
$$= (\alpha k + 1)^{n+1} + (\beta k + 1)^{n+1} = \gamma_{n+1}$$

Teorem 6.3.4. k -Jacobsthal Lucas dizisinin artan k-binom dönüşümünün üreteç fonksiyonu orijin merkezli katsayıları k -Jacobsthal Lucas dizisinin artan k-binom dönüşümünün elemanları olan bir kuvvet serisidir. Üreteç fonksiyonu;

$$\gamma(x) = \frac{2 - x\left[k^2 + 2\right]}{1 - (k^2 + 2)x + (1 - k^2)x^2}$$

şeklindedir.

İspat: $\gamma(x)=\gamma_0+\gamma_1 x+\gamma_2 x^2+...$ üreteç fonksiyonunu $-(k^2+2)x$ ve $(1-k^2)x^2$ ile çarpılır

$$-(k^2+2)x\gamma(x)=-(k^2+2)x\gamma_0+...$$
$$(1-k^2)x^2\gamma(x)=(1-k^2)x^2\gamma_0+...$$

$\gamma(x)$ ortak parantezine alınırsa

$$\begin{aligned}\gamma(x)\left[1-(k^2+2)x+(1-k^2)x^2\right]&=\gamma_0+x\left[\gamma_1-(k^2+2)\gamma_0\right]+0\\&=2-x\left[k^2+2\right]\end{aligned}$$

$$\gamma(x)=\frac{2-x\left[k^2+2\right]}{1-(k^2+2)x+(1-k^2)x^2}$$

istenen elde edilir.

k-Jacobsthal Lucas Dizisinin Artan k- Binom Dönüşümünün Pascal Üçgeni

Her bir k değeri için aşağıdaki üçgeni kullanarak k-Jacobsthal Lucas artan k- binom binom dönüşüm dizisinin elemanlarını kolaylıkla elde edebiliriz:

a) Üçgenin sol köşegen elemanları k - Jacobsthal Lucas sayılarından oluşur.
b) Diğer elemanlar sol yanındaki sayının k ile çarpılıp sol çapraz üstündeki sayıların toplamıyla oluşur.
c) Üçgenin sağ köşegen elemanları k - Jacobsthal Lucas sayılarının artan k-binom dönüşüm elemanlarını verir.

2

3 *11*

13 *42* *137*

45 *148* *486* *1595*

161 *528* *1732* *5682* *18641*

k-Jacobsthal Lucas Dizisinin Artan k-Binom Dönüşümünün Matlab Programı

% k-Jacobsthal Lucas Dizisinin Artan k-Binom Dönüşümü

k=3;

```
C(1)=2;
C(2)=k;
N=15;
format long
for n=2:N
C(n+1)=3*k*C(n)-2*(k^2-1)*C(n-1)
end
C
```

6.4. k-Jacobsthal Lucas Dizisinin Azalan k-Binom Dönüşümü

Tanım 6.4.1. k-Jacobsthal Lucas dizisinin azalan k binom dönüşümü $\{\alpha_{k,n}\}_{n\in N}$ olmak üzere

$$\alpha_{k,n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} c_{k,i} \tag{6.4.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 6.4.2. k-Jacobsthal Lucas dizisinin azalan k-binom dönüşümü $\alpha_{k,0} = 2$ ve $\alpha_{k,1} = 3k$ başlangıç şartlarıyla aşağıdaki bağıntıyı sağlar.

$$\alpha_{k,n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} (kc_{k,i} + c_{k,i+1}) \tag{6.4.2}$$

İspat: Tanım 6.4.1 ve binom sayılarının $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}, \binom{n}{n+1} = 0$ özelliği kullanılırsa istenen sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
\alpha_{k,n+1} &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} k^{n+1-i} c_{k,i} \\
&= 2k^{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i} k^{n+1-i} c_{k,i} + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} k^{n+1-i} c_{k,i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n+1-i} c_{k,i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} c_{k,i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} (kc_{k,i} + c_{k,i+1})
\end{aligned}$$

Teorem 6.4.3. Aşağıdaki yineleme bağıntısı k-Jacobsthal Lucas dizisinin azalan k-binom dönüşümünü sağlar.

$$\alpha_{k,n+1} = 3k\alpha_{k,n} - 2(k^2-1)\alpha_{k,n-1} \qquad (6.4.3)$$

İspat: Lemma (6.4.2) kullanılarak,

$$\begin{aligned}\alpha_{k,n+1} &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}k^{n-i}(kc_{k,i}+c_{k,i+1}) = 3k^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{n-i}(kc_{k,i}+c_{k,i+1})\\ &= 3k^{n+1} + 2k\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{n-i}c_{k,i} + 2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{n-i}c_{k,i-1}\end{aligned}$$

$$\alpha_{k,n+1} = 2k\alpha_{k,n} - k^{n+1} + 2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{n-i}c_{k,i-1}. \qquad (6.4.4)$$

elde edilir.

Bu eşitlikte $n+1$ yerine n yazılırsa,

$$\begin{aligned}\alpha_{k,n} &= 2k\alpha_{k,n-1} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n-1-i}c_{k,i-1} - k^n\\ &= k\alpha_{k,n-1} + \left[\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n-i}c_{k,i}\right] + 2\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n-1-i}c_{k,i-1} - k^n\\ &= k\alpha_{k,n-1} - k^n + \left[\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}k^{n+1-i}c_{k,i-1}\right] + 2\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n-1-i}c_{k,i-1}\end{aligned}$$

$\binom{n-1}{n} = 0$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}\alpha_{k,n} &= k\alpha_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n}\left[2\binom{n-1}{i} + k^2\binom{n-1}{i-1}\right]k^{n-1-i}c_{k,i-1} - k^n\\ &= k\alpha_{k,n-1} - k^n + \sum_{i=1}^{n}\left[2\binom{n-1}{i} + k^2\binom{n-1}{i-1} + 2\binom{n-1}{i-1} - 2\binom{n-1}{i-1}\right]k^{n-1-i}c_{k,i-1}\end{aligned}$$

$$= k\alpha_{k,n-1} + \sum_{i=1}^{n}\left[(k^2-2)\binom{n-1}{i-1} + 2\binom{n}{i}\right]k^{n-1-i}c_{k,i-1} - k^n$$

$$= k\alpha_{k,n-1} - k^n + 2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}k^{n-1-i}c_{k,i-1} + (k^2-2)\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}k^{n-2-i}c_{k,i}$$

$$\alpha_{k,n} = k\alpha_{k,n-1} + \alpha_{k,n+1}/k - 2\alpha_{k,n} + k^n + (k^2-2)f_{k,n-1}/k - k^n \qquad (6.4.5)$$

$$k\alpha_{k,n} = k^2\alpha_{k,n-1} + \alpha_{k,n+1} - 2k\alpha_{k,n} + (k^2-2)\alpha_{k,n-1}$$

(6.4.5) eşitliğinde (6.4.4) eşitliğini yerine koyulursa,

$$\alpha_{k,n+1} = 3k\alpha_{k,n} - 2(k^2-1)\alpha_{k,n-1}$$

elde edilir.

Teorem 6.4.4. (Binet Formülü) (6.4.3) yineleme bağıntısının karakteristik denklemi $x^2 - 3kx + 2(k^2-1) = 0$ dır. k -Jacobsthal Lucas dizisi için azalan k -binom dönüşümü için Binet formülü $\alpha_{k,n} = \alpha_1^n + \alpha_2^n$ ile gösterilir.

$$\alpha_1 = \frac{3k + \sqrt{k^2+8}}{2} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{3k - \sqrt{k^2+8}}{2}$$

Kökler aşağıdaki bağıntıyı sağlar:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 3k \qquad \alpha_1 - \alpha_2 = \sqrt{k^2+8} \qquad \alpha_1.\alpha_2 = 2(k^2-1).$$

İspat: $\alpha_{k,n+1} = 3k\alpha_{k,n} - 2(k^2-1)\alpha_{k,n-1}$ yineleme formülünün karakteristik denkleminin kökleri α_1 ve α_2 olmak üzere $\alpha_1 = \dfrac{3k + \sqrt{k^2+8}}{2}$ ve $\alpha_2 = \dfrac{3k - \sqrt{k^2+8}}{2}$ olarak bulunur.

$\alpha_{k,n} = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n$ yazıp $\alpha_{k,0} = 0$ ve $\alpha_{k,1} = 1$ alınırsa

$$c_1 + c_2 = 0$$
$$c_1\alpha_1 - c_1\alpha_2 = 1$$

eşitlikleri elde edilir.

Binet formülü

$$f_{k,n} = \alpha_1^n + \alpha_2^n$$

olarak elde edilir.

Teorem 6.4.5. (Üreteç Fonksiyonu)

$$\alpha_k(x) = \alpha_{k,0} + \alpha_{k,1}x + \alpha_{k,2}x^2 + \ldots \frac{x}{1-3kx+2(k^2-1)x^2} \tag{6.4.6}$$

İspat: $\alpha_k(x)$ eşitliği $-3kx$ ve $2(k^2-1)x^2$ ile çarpılırsa istenen sonuç elde edilir.

Teorem 6.4.6. k-Jacobsthal Lucas dizisinin azalan k-binom dönüşümünün kombinasyonel formülü

$$\alpha_{k,n} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n}{2i} (3k)^{n-2i} (k^2+8)^i \tag{6.4.7}$$

k-Jacobsthal Lucas Dizisinin Azalan k- Binom Dönüşümünün Pascal Üçgeni

Bu bölümde aşağıdaki kuralları kullanarak her bir k sayısı için yeni bir üçgen tanıtılacaktır: Üçgenin sol köşegeni k-Jacobsthal Lucas sayılarının elemanlarından oluşmaktadır. Üçgenin diğer elemanları sol üst çapraz köşedeki elemanların k sayısı ile çarpılıp bir sol alt köşedeki elemanla toplanıp sağ tarafına yazılarak bulunur.

Örneğin aşağıdaki üçgen 3-Jacobsthal Lucas dizisi ve azalan 3- binom dönüşümü içindir.

2
3 9
13 22 49
45 84 150 297
161 296 548 998 1889

k-Jacobsthal Lucas Dizisinin Azalan k-Binom Dönüşümünün Matlab Programı

```
% k-Jacobsthal Lucas Dizisinin Azalan k- Binom Dönüşümü
k=3;
C(1)=2;
C(2)=k;
N=15;
format long
for n=2:N
C(n+1)=3*k*C(n)-2*(k^2-1)*C(n-1)
end
C
```

6.5. k-Jacobsthal Lucas Binom Dönüşümlerinin Matris Formu

k-Jacobsthal Lucas dizinin elemanlarının matris formu $S=\left[c_{k,0},c_{k,1},...\right]^T$ ile ifade edilsin.

$K=diag\left[k^0,k^1,...\right]^T$ ve Pascal üçgen matrisi

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0&...\\1&1&0&0&...\\1&2&1&0&...\\1&3&3&1&...\end{bmatrix}$$

olsun.

S,P,K kullanarak k-Jacobsthal Lucas dizisinin binom dönüşümünün matrisini bulmak istiyoruz.

k-Jacobsthal Lucas dizisinin binom dönüşümlerinin matrisi $B=\left[b_{k,0},b_{k,1},...\right]^T$, k-Jacobsthal Lucas dizisinin k-binom dönüşümlerinin matrisi $W=\left[w_{k,0},w_{k,1},...\right]^T$, k-Jacobsthal Lucas dizisinin artan binom dönüşümlerinin matrisi $R=\left[r_{k,0},r_{k,1},...\right]^T$ ve son olarak k-Jacobsthal Lucas dizilerinin azalan binom dönüşümlerinin matrisi $F=\left[f_{k,0},f_{k,1},...\right]^T$ olarak tanımlanır.

B binom dönüşümü, W k-binom dönüşümü, R artan binom dönüşümü, F azalan binom dönüşümü aşağıdaki bağıntıları karşılar.

$$B = P.S\,, \qquad W = K.P.S\,, \qquad R = P.K.S\,, \qquad F = K.P.K^{-1}.S$$

P ve K matrisleri tersinirdir. Ve P'nin tersi P^{-1} matrisinin elemanları $(-1)^{i-j}\binom{i}{j}$ ve K'nın tersi $K^{-1} = diag(k^0 k^{-1}, k^{-2}, ...)$ diagonal matrisi şeklindedir. S aşağıdaki bağıntıları sağlar, sonuç olarak bu bağıntılar kullanılarak k - Jacobsthal Lucas dizisinin elemanları elde edilir.

$$S = P^{-1}.B = P^{-1}.K^{-1}.W = K^{-1}.P^{-1}.R = K.P^{-1}.K^{-1}.F$$

BÖLÜM 7
SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada öncelikle çeşitli sayı dizileri ve temel bazı özellikleri verilmiştir. Fibonacci, Lucas sayı dizilerinin genelleştirilmesiyle oluşan k- Fibonacci, Lucas sayı dizilerinin çeşitli binom dönüşümleri tanıtılmıştır. Bu dönüşümlerden yararlanarak k-Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayı dizilerinin binom, k-binom, artan k -binom, azalan k-binom dönüşümleri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Çalışmamızla ilgili "Binominal transforms of k-Jacobsthal sequences" adlı makalemiz Journal of Mathematical and Computational Science adlı dergide yayınlanmıştır. Ayrıca "Properties of Binominal transforms of k-Jacobsthal sequences" başlıklı çalışmamız International Conference on Mathematics and Mathematics Education isimli konferansta ve k- Jacobsthal Lucas dizilerinin binom dönüşümleri başlıklı çalışmamız 13. Ankara Matematik Günleri'nde sunulmuştur. "Properties of Binominal transforms of k-Jacobsthal Lucas sequences" adlı çalışmamız incelenmek üzere bir dergiye gönderilmiştir.

KAYNAKLAR

Bhadouria P., Jhala D. (2014). Singh B., Binomial Transforms of the k-Lucas Sequence, *Journal of Mathematical Computer Sci*ences, **8(1)**, 81-92.

Bolat, C., Köse, H. (2010). On the properties of k-Fibonacci Numbers. *International Journal of Contemporary Mathematical. Sciences*. **22(5),** 1097-1105.

Catarino, P., Vasco P. (2013). On Some Identities and Generating Functions for k-Pell Lucas Sequence. *Applied Mathematical Sciences.* **7 (98),** 4867-4873.

Chen K. W. (2007). Identities from the binomial transform, *Journal of Number Theory*, **124**, 142-150.

Dunlap, R.A., Aktaş B.(Çevirmen) (2010). Altın Oran ve Fibonacci Sayıları. Tübitak, 166s.

Falcon S., Plaza A. (2007). On the Fibonacci k-numbers, *Chaos, Solitons & Fractals,* **32(5),** 1615-1624,

Falcon, S. (2011). On the *k*-Lucas numbers. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*. **6(21),** 1039-1050.

Falcon S., Plaza A. (2009). Binomial Transforms of the *k*-Fibonacci Sequence, International *Journal of Nonlinear Sciences & Numerical Simulation* **10(11-12),** 1527-1538.

Falcon S. (2014) , Iterated Binomial Transforms of the k-Fibonacci Sequence, British Journal of Mathematics & Computer Science, **4(22)**, 3135-3145

Gulec H. H., Taskara N., (2009). On the properties of Fibonacci Numbers with Binomial Coefficients, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, **4(25),** 1251-1256.

Horadam A . F. (1996). Jacobsthal Representation Numbers, *The Fibonacci Quarterly,* **34(1),** 40-54

Horadam A. F. (1997). Jacobsthal Representation Polynomials, *The Fibonacci Quarterly*., **35(2),** 137-148.

Koshy, T. (2001). Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. New York: Wiley-Interscience Publication

Prodinger H., (1994). Some Information about the Binomial Transform, The *Fibonacci Quarterly*, **32(5),** 412-415.

Spivey M. Z., Steil L. L., (2006), The k- Binomial Transformand the Hankel Transform, *Journal of Integer Sequences*, **9**, Article 06.1.1, 1-18.

Taskara N., Uslu K., Gulec H. H., (2010). On the properties of Lucas numbers with binomial coefficients, *Applied Mathematics Letters*, **23(1),** 68-72.

Uygun S., Eldoğan H., (2016). The *k*-Jacobsthal and *k*-Jacobsthal Lucas sequences, *General Mathematics Notes*, **36(1),** 34-47.

Uygun S., Erdoğdu A. (2017). Binominal transforms of *k*-Jacobsthal sequences, *Journal of Mathematical and Computational Science*, **7(6),** 1100-1114.

Uygun S., Erdoğdu A. (2017). Properties of Binominal transforms of *k*-Jacobsthal sequences International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017) 11-13 May

Uygun S., Erdoğdu A., Binominal transforms of k- Jacobsthal Lucas sequences, 13. Ankara Matematik Günleri, 27-28 Nisan 2018.

Yazlık Y., Yılmaz N., Taskara N. (2014), The Generalized (s,t)- Matrix Sequence's Binomial Transforms, *General Mathematical Notes*, **24(1)**, 127-136.

Yılmaz N., Taskara N. (2013). Binomial transforms of the Padovan and Perrin numbers, *Journal of Abstract and Applied Mathematics*, Article ID941673

Yılmaz N., Taskara N. (2016), On the Properties of Iterated Binomial Transforms for the Padovan and Perrin Matrix Sequences, *Mediterranean Journal of Math*ematics **13** 1435–1447.