GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİBONACCİ HEMEN HEMEN YAKINSAKLIK VE ÇEKİRDEK TEOREMLERİ

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

AYŞEGÜL ÖZKAN
NİSAN 2018

NİSAN 2018 **Yüksek Lisans - Matematik** **AYŞEGÜL ÖZKAN**

Fibonacci Hemen Hemen Yakınsaklık ve Çekirdek Teoremleri

Gaziantep Üniversitesi
Matematik
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN

Ayşegül ÖZKAN
Nisan 2018

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tezin Adı: Fibonacci Hemen Hemen Yakınsaklık ve Çekirdek Teoremleri

Öğrencinin, Adı Soyadı: Ayşegül ÖZKAN

Tez Savunma Tarihi: 27 / 04 / 2018

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. A. Necmeddin YAZICI
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri : İmzası

Doç. Dr. M. Fatih HASOĞLU ……………………

Dr. Öğr. Üyesi Sabri BİRLİK ……………………

Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN ……………………

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Ayşegül ÖZKAN

ABSTRACT

FİBONACCİ ALMOST CONVERGENCE AND CORE THEOREMS

ÖZKAN, Ayşegül

M.Sc. in Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Kuddusi Kayaduman

April 2018

48 pages

This work which focused on almost convergence and concept of core had four chapters. In addition, this study focused on the sequence spaces by Fibonacci Sequences..

In the first chapter, basic definitions and theorems were given and transformation sequence which was acquired by matrix was defined and characterization conditions of $A \in (c,c)$, $A \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ and $A \in (\ell_\infty, c)$ matrix classifications are given. Then, by the help of Banach limit, definitions of $\hat{c}_0$, space of all almost null sequences and $\hat{c}$, space of almost convergent sequences were given. The matrix classes of these spaces were also provided.

In the second chapter, definitions of K-core and st-core and the coverage relations between these cores are given.

In the third chapter, by defining Fibonacci sequence spaces, $\hat{c}^{f(r,s)}$ sequence space was created. Some inclusion relations of this space and matrix transformations related to sequence space $\hat{c}^{f(r,s)}$ were given. Furthermore, $B_{\hat{f}(r,s)}$- core was defined and the location of this core was determined among the K- core, Banach- core and other cores .

In the fourth chapter, sequence spaces $\ell_p(\hat{F})$, $c_0(\hat{F})$ and $c(\hat{F})$ created by the help of Fibonacci Null and Fionacci convergent sequences. The location of these spaces were determined among the other spaces. In addition, $\alpha-, \beta-$ and $\lambda-$ duals and matrix transformations of these spaces were given.

Key Words : Banach limits, almost convergence, statistical convergence, K-core, st-core.

ÖZET

FİBONACCİ HEMEN HEMEN YAKINSAKLIK VE ÇEKİRDEK TEOREMLERİ

ÖZKAN, Ayşegül

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Kuddusi Kayaduman

Nisan 2018

48 sayfa

Dört bölümden oluşan bu çalışmada hemen hemen yakınsaklık ve çekirdek kavramı üzerinde duruldu. Ayrıca Fibonacci dizileri kullanılarak oluşturulan dizi uzayları üzerinde çalışıldı.

Birinci bölümde; temel tanım ve teoremler verilerek sonsuz matris yardımıyla elde edilen dönüşüm dizisi tanımlandı ve $A\in(c,c)$, $A\in(\ell_\infty,\ell_\infty)$ ve $A\in(\ell_\infty,c)$ matris sınıflarının karakterizasyon şartları verildi. Sonra Banach limiti yardımıyla $\hat{c}$ hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı ve $\hat{c}_0$ sıfıra hemen hemen yakınsayan dizi uzayları tanımları verilerek bu uzaylara ait matris sınıfları verildi.

İkinci bölümde; Knopp-çekirdek (K-çekirdek) ve istatistiksel çekirdek (st-çekirdek) tanımları verilerek bu çekirdekler arasındaki kapsama bağıntıları verildi.

Üçüncü bölümde; Fibonacci dizi uzayları tanımlanarak $\hat{c}^{f(r,s)}$ dizi uzayı oluşturuldu, bu uzay ile ilgili bazı kapsama bağıntıları verildi ve $\hat{c}^{f(r,s)}$ dizi uzayıyla ilgili matris dönüşümleri verildi. Son kısımda ise $B_{\hat{f}(r,s)}$- çekirdek tanımlanarak Knoop çekirdek, Banach çekirdek ve diğer çekirdekler arasındaki yeri belirlendi.

Dördüncü bölümde; Fibonacci Null ve Fibonacci yakınsak dizilerle $\ell_p(\hat{F})$, $c_0(\hat{F})$ ve $c(\hat{F})$ dizi uzayları oluşturularak bu uzayların diğer uzaylar arasındaki yeri belirlendi, bu uzayların α,β,γ dualleri ve matris dönüşümleri verildi.

Anahtar Kelimeler : Banach limitleri, hemen hemen yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık, K-çekirdek, st-çekirdek

TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca bilgilerini benimle paylaşarak, her türlü konuda bana destek olan ve tezimde büyük emeği geçen Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam sayın Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN'a ve her türlü desteği bana vererek her zaman yanımda olan aileme sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar
w	: Reel terimli bütün dizilerin uzayı
$\hat{c}_0$	: Reel terimli sıfıra hemen hemen yakınsayan dizilerin uzayı
$\hat{c}$	: Reel terimli hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı
bs	: Kısmi toplamları sınırlı olan kompleks terimli serilerin uzayı
cs	: Kısmi toplamları yakınsak olan kompleks terimli serilerin uzayı
$(A_n(x))$	: x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi
$(C,1)$	: Birinci mertebeden cesaro matrisi
(A,B)	: A'dan B'ye tanımlı bütün matrislerin sınıfı
K- çekirdek	: Reel terimli sınırlı bir dizinin Knopp çekirdeği
st- çekirdek	: Reel terimli sınırlı bir dizinin istatistiksel çekirdeği
st-lim	: İstatistiksel limit
λ^{α}	: λ dizi uzayının $\alpha-$duali
λ^{β}	: λ dizi uzayının $\beta-$duali
λ^{γ}	: λ dizi uzayının $\gamma-$duali
$\delta(K)$	: K cümlesinin doğal yoğunluğu

GİRİŞ

Toplanabilme teorisinde, yeni bir dizi uzayının inşa edilmesi bunun topolojik yapısının incelenmesi bilinen uzaylara göre yerinin belirlenmesi ve bilinen uzaylardan bu yeni uzaya veya bu uzaydan bilinen uzaylara yapılan matris dönüşümlerinin belirlenmesi, bu yeni dizi uzayının $\alpha-,\beta-$ ve $\gamma-$ duallerinin belirlenmesi ve bir dizinin çekirdeğinin incelenmesi bir problem çeşididir.

1948 yılında Lorentz [40] , Banach limiti tanımını vererek hemen hemen yakınsaklık denilen yeni bir kavram tanımladı ve buradan hareketle bazı matris sınıfları elde etti. 1946' da J.P. King hemen hemen regülerlik tanımını yaparak bir A matrisinin regülerlik şartlarını belirledi.

Diğer bir problem çeşidi olan dizinin çekirdeği kavramı ilk olarak 1926 yılında K. Knoop'un yakınsaklık kavramı yardımıyla çekirdek teoremleri de olarak bilinen ve kendi adıyla anılan $K-çekirdek$'i tanımladı[43]. Knoop daha sonra esas dizinin çekirdeğinin dönüşüm dizisini kapsadığını ifade eden teoremi verdi. 1951 yılında H. Fast istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımladı[42] , sonra J.A. Fridy 1993 yılında istatistiksel limit noktaları üzerinde çalıştı[17] ve bu da kompleks terimli bir dizinin çekirdeği tanımının yapılmasına yol açtı[6]. Daha sonra J.A. Fridy ve C. Orhan Knopp ki ile benzer fakat önceki tanımdan daha geniş, kompleks dizileri de içeren istatistiksel çekirdek kavramını verdiler ve
$st-çekirdek\{Ax\}\subseteq st-çekirdek\{x\}$, $K-çekirdek\{Ax\}\subseteq st-çekirdek\{Bx\}$ kapsama bağıntılarını incelediler.

Fibonacci sayıları ilk olarak 1202 yılında 'Liber Abaci' kitabında verilmiş ve bu sayılarla oluşturulmuş diziler yardımıyla Golden Ration (Altın Oran) , Cassini formülü gibi Fibonacci dizilerinin bazı özellikleri incelenmiştir. Fibonacci dizileri birçok çalışmada kullanılmış ve yeni dizi uzayları oluşturulmuştur. Bu çalışmamızda Candan ve Kayaduman'ın [19] genelleştirilmiş Fibonacci dizilerinden elde ettikleri $\hat{c}^{f(r,s)}$ dizi uzayı verildi, bu uzayın diğer uzaylar arasındaki yeri belirlendi. $\alpha-,\beta-$ ve $\gamma-$dualleri verildi ve $\hat{c}^{f(r,s)}$uzayının $B_{\hat{F}(r,s)}$ çekirdeği verildi. Yine Fibonacci dizileri ile M. Başarır, F. Başar ve E.E. Kara Null ve yakınsak dizilerin Mutlak $p-$toplanabilme $\ell_p(\hat{F}),c_0(\hat{F})$ ve $c(\hat{F})$ $(0<p<1)$ yeni dizi uzaylarını oluşturarak $\ell_p(\hat{F}),c_0(\hat{F})$ ile $c(\hat{F})$uzayları ve standart dizi uzayları arasındaki bazı kapsama bağıntıları, bu uzayların izometrik olarak izomorf olduklarını, α, β, γ dualleri ve matris dönüşümlerini verdiler[21].

BÖLÜM 1

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde sonraki bölümlerde kullanılacak olan ve yapılan çalışmanın daha iyi anlaşılmasını sağlayacak bazı temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1- X , boştan farklı bir cümle olmak üzere ve X üzerinde $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümü her $x, y, z \in X$ için

i) $d(x, y) \geq 0$

ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

iii) $d(x, y) = d(y, x)$

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

şartlarını sağlarsa d ’ ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) ’ ye metrik uzay denir. [38, syf. 1]

Tanım 1.2- X , boş olmayan bir cümle ve $\mathbb{K}$ de keyfi bir cisim olsun. X üzerinde $(+)$ toplama ve $(\cdot)$ skalerle çarpma olarak adlandırılan işlemleri,

$$+ \; : \; X \times X \to X, \quad (x, y) \mapsto x + y \qquad \text{ve} \qquad \cdot \; : \; \mathbb{K} \times X \to X, \quad (\alpha, x) \mapsto \alpha x$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda her $x, y, z \in X$ ve $\lambda, \gamma \in \mathbb{K}$ için ;

(i) $(x + y) + z = x + (y + z)$, (toplama işleminin birleşme özelliği),

(ii) $x + y = y + x$, (toplama işleminin değişme özelliği),

(iii) $x + \theta = x$ olacak şekilde X cümlesinin sıfır elemanı diye adlandırılan bir $\theta \in X$ elemanı vardır (toplama işleminin birim eleman özelliği),

(iv) Her $x \in X$ için x ’ in toplamaya göre tersi veya negatifi olarak adlandırılan ve $x + (-x) = \theta$ eşitliğini sağlayan bir $-x \in X$ vardır (toplama işleminin ters eleman özelliği),

(v) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$,

(vi) $(\lambda+\gamma)x=\lambda x+\gamma x$,

(vii) $\lambda(\gamma x)=(\lambda\gamma)x$

ve

(viii) $1\cdot x=x$

aksiyomları sağlanıyorsa X cümlesine toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle bir vektör uzayı (veya lineer uzay) denir. Burada X 'in elemanları vektörler ve $\mathbb{C}$ cisminin elemanları skalerler olarak adlandırılır. Bir X vektör uzayı reel veya kompleks vektör uzayı olarak bulunduğu cisim üzerine göre adlandırılır. Burada X vektör uzayı, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde kompleks lineer uzay olarak tanımlandı. [38, syf. 33]

w, $\mathbb{C}$ üzerinde bir lineer uzay olmak üzere, w 'nin bazı özel alt kümelerini verelim:
Sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı;

$$c_0=\{x=(x_k)\in w:\lim x_k=0\},$$

Yakınsak dizilerin uzayı;

$$c=\{x=(x_k)\in w:\lim x_k=\alpha\ ,\ \alpha\in\mathbb{C}\},$$

Sınırlı dizilerin uzayı:

$$\ell_\infty=\{x=(x_k)\in w:\sup|x_k|<\infty\}$$

şeklindedir. Bu dizi uzayları $\|x\|=\sup|x_k|$ normuyla normlu uzay ve Banach uzaylarıdır.

Şimdi de bu uzayların genelleştirilmiş hallerini verelim:
$p=(p_k)$ pozitif sayıların bir dizisi olmak üzere ;

$$c(p)=\left\{x:|x_k-\ell|^{p_k}\to 0\ ,\ \ell:\text{herhangi bir sayı}\right\}\ ,$$

$$c_0(p)=\left\{x:\ |x_k|^{p_k}\to 0\right\}\ ,$$

$$\ell(p)=\left\{x:\sum_k |x_k|^{p_k}<\infty\right\}\ ,$$

$$w(p)=\left\{x:\ n^{-1}\sum_{k=1}^{n}|\chi_k-\ell|^{p_k}\to 0\ ,\ \ell\text{: herhangi bir sayı}\right\}$$

şeklindedir.

Yukarıdan da kolayca görüleceği gibi $c_0 \subset c \subset \ell_\infty$ yazılabilir.

Tanım 1.3- X , $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ olsun. $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n$ elamanları $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ 'in lineer kombinasyonu olarak adlandırılır. $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ olarak yazılan elemanlar A kümesinin lineer skaleri veya A'nın tüm lineer kombinasyonlarıdır. Yine X' in sonlu sayıda bir A alt kümesi $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ ve $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$ için oluyorsa A' ya lineer bağımsız bir küme denir. Lineer bağımsız değilse lineer bağımlı olarak tanımlanır. [38, syf. 35]

Tanım 1.4- X ve Y , $\mathbb{K}$ cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. Bir $f : X \to Y$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ için $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$ şartını sağlarsa bu dönüşüm bir lineer dönüşüm (lineer transformation veya homomorfizma) olarak adlandırılır. Eğer f dönüşümü birebir ve örten ise f dönüşümüne izomorfizm , X ve Y vektör uzaylarına izomorfik uzaylar denir ve $X \cong Y$ şeklinde gösterilir. [38, syf. 39]

Tanım 1.5- X uzayından Y uzayına f izomorfizmi uzaklıkları da koruyorsa f 'ye X 'den Y 'ye bir izometri, X ve Y ' ye de izometrik olarak izomorfik uzaylar denir. [38, syf. 54]

Tanım 1.6- X bir kompleks (veya reel) vektör uzayı olsun. X vektör uzayı üzerinde bir lineer fonksiyonel $f : X \to \mathbb{C}$ (veya $f : X \to \mathbf{R}$) dönüşümü şeklindedir ve bu dönüşüm

$c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ (veya $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$) için

$$f(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

eşitliğini sağlar ve f dönüşümü değer kümesine göre kompleks veya reel lineer fonksiyonel olarak adlandırılır. [38, syf. 40]

Her $x, y \in X$ için

$$f(x+y) \le f(x) + f(y)$$

ise f ' ye alt toplamsal ,

$f(x+y)=f(x)+f(y)$

ise f ' ye toplamsaldır denir. Eğer $\alpha \geq 0$ ve her $x \in X$ için $f(\alpha x)=\alpha f(x)$ ise f ye homojendir denir. Alt toplamsal ve homojen bir fonksiyonele alt lineer, toplamsal ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için homojen olan bir fonksiyonele de lineerdir denir.

Tanım 1.7- X vektör uzayı olmak üzere , $\|.\|: X \to \mathbf{R}$ fonksiyonu keyfi $x, y \in X$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa ;

i) $\|x\| \geq 0$

ii) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$

iii) $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$

iv) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=\theta$

$\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm, $(X,\|.\|)$ ikilisine normlu lineer uzay denir. [38, syf. 4]

Tanım 1.8- Norm tanımındaki ii) özelliği yerine $\|\lambda x\|=|\lambda|^p\|x\|$ özelliğinin konulmasıyla elde edilen norma $p-$ norm adı verilir. [38, syf. 47]

Tanım 1.9- Bir (x_n) dizisi X normlu lineer uzay üzerinde bir Cauchy dizisidir öyle ki her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in N$ vardır öyle ki $n, m > n_0$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ 'dır. [38, syf. 51]

Tanım 1.10- X normlu lineer uzay üzerinde (x_n) dizisi bir $x \in X$ 'e yakınsaktır öyle ki her $\varepsilon > 0$ ve bir $n_0 \in N$ vardır öyle ki $n \geq n_0$ için $\|x_n - x\| < \varepsilon$ 'dır. [38, syf. 51]

Tanım 1.11- Eğer X normlu lineer uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise X normlu lineer uzayına tam normlu lineer uzay veya Banach uzayı denir. [38, syf. 51]

Tanım 1.12- X normlu lineer uzayında bir (b_n) dizisi bulunabilirse öyle ki her bir $x \in X$ ' e karşılık bir tek (α_n) kompleks terimli varsa ve $x=\sum_n \alpha_n b_n$ şeklinde bir türlü yazılabiliyorsa yani $\lim_{n\to\infty}\left\| x-\sum_{n=0}^{m}\alpha_n b_n \right\|=0$ ise (b_n) dizisine X için bir Schauder bazıdır denir. [38, syf. 45]

Tanım 1.13- (q_n), elemanlarının hepsi sıfır olmayan pozitif sayıların bir dizisi ve $Q_n=q_1+q_2+...+q_n$, $q_1>0$, $n=1,2,...$ olsun. Bu durumda

$$t_n=\frac{q_1x_1+q_2x_2+...+q_nx_n}{Q_n}$$

ile tanımlı dönüşüme x 'in Riesz dönüşümü denir. Riesz matrisi

$$r_{nk}=\begin{cases}\dfrac{q_k}{Q_n} & , \quad k\le n\\ 0 & , \quad diğer\ durumlar\end{cases}$$

şeklinde verilir. [38, syf. 248] Eğer her n için $q_n=1$ alınırsa birinci mertebeden Cesaro matrisi denilen $c_{nk}=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1} & , \ k\le n\\ 0 & , \ -\end{cases}$ matrisi elde edilir. [38, syf. 246-247]

A=(a_{nk}) reel terimli bir sonsuz matris ve $x=(x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her n için $\mathrm{A}_n(x)=\sum_k a_{nk}x_k$ serileri yakınsak ise $(\mathrm{A}_n(x))$ dizisine (x_k) dizisinin A matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi denir.

H ve T herhangi iki dizi uzayı ve A da sonsuz bir matris olsun. Eğer her $x\in H$ için $(A_n(x))\in T$ ise A matrisi H ' dan T 'ye tanımlıdır ve $A\in(H,T)$ yazılır. H 'dan T ' ye tanımlı bütün matrislerin sınıfı (H,T) ile gösterilir.

Eğer H ve T üzerinde limit veya toplam mevcut ise (H,T)' nin elemanlarının limit veya toplamı koruması halinde $(H,T)_{reg}$ yazılır. Örneğin $A\in(c,c)_{reg}$ ise her $x\in c$ ise $\lim x_k=l$ olmak üzere $\lim x_k=\lim Ax$ 'dir. Bu tip matrislere regüler matris sınıfı denir ve aşağıda $A\in(\ell_\infty,\ell_\infty)$, $A\in(\ell_\infty,c)$ ve $A\in(c,c)$ sınıflarının matris karakterizasyon şartları verilmiştir.

Teorem 1.1- Bir A matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart

i) $\| A\|=\sup_n\sum_k|a_{nk}|<\infty$

ii) $\lim a_{nk}=0$ her k için

iii) $\lim\sum_k a_{nk}=1$

olmasıdır. [38, syf. 246]

Teorem 1.2- $A \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

i) $\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$

ii) $\lim \mathrm{a}_{nk} = 0,$ her k için

iii) $\lim \sum_k a_{nk} = 1$

koşullarının sağlanmasıdır. [44, syf.245]

Teorem 1.3- $A \in (\ell_\infty, c)$ olması için gerek ve yeter şart

i) $\sum_k |a_{nk}|$ n'ye göre düzgün yakınsak

ii) $\lim_n a_{nk} = \alpha_k$

koşullarının sağlanmasıdır. [38, syf.248]

Teorem 1.4- $A \in (c, c)$ olması için gerek ve yeter şart

i) $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$

ii) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = \alpha_k$

iii) $\lim_{n\to\infty} \sum_k a_{nk} = \alpha$

koşullarının sağlanmasıdır. [38, syf.245]

Tanım 1.14- $L: \ \ell_\infty \to \mathbb{R}$ lineer olsun. Eğer

i) $x = (x_n)$ olmak üzere her n için $x_n \geq 0$ ise $\mathrm{L}(x) \geq 0$

ii) $e = (1,1,...)$ için $L(e) = 1$

iii) $(\varphi x)_n = x_{n+1}$ olmak üzere

$L\left[(\varphi x)_n\right] = L(x)$ veya $L(x_{n+1}) = L(x_n)$

şartları sağlanıyorsa L'ye bir Banach limiti denir. [40]

Bütün banach limitleri eşit olan diziye hemen hemen yakınsak dizi denir. Hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı $\hat{c}$,sıfıra hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı da $\hat{c}_0$ ile gösterilir ve $x = (x_k)$ dizisi s değerine hemen hemen yakınsak ise;

$\hat{c} - \lim x_k = s$ yazılır. G.G. Lorentz tarafından verilen hemen hemen yakınsaklık tanımı aşağıdaki şekilde verildi.

Teorem 1.5- Sınırlı bir x dizisinin hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_p \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} x_{n+i} = s \ \ (n \text{ ' ye göre düzgün olarak })$$

olmasıdır. [40]

Tanım 1.15- Hemen hemen tüm null (hemen hemen sıfıra yakınsayan) dizi uzayları ve hemen hemen tüm yakınsak dizi uzayları sırasıyla $\hat{c}_0$ ve $\hat{c}$ olmak üzere;

$$\hat{c}_0 = \left\{ x=(x_k)\in \ell_\infty : \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{x_{n+k}}{m+1}=0 \ \ , \ \ n'de\ düzgün\ olarak \right\}$$

$$\hat{c} = \left\{ x=(x_k)\in \ell_\infty : \exists \alpha \in \mathbb{C} \ \ni \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{x_{n+k}}{m+1}=\alpha \ , \ \ n'de\ düzgün\ olarak \right\}$$

şeklinde tanımlanırlar. Ayrıca $\hat{c}$ uzayı $\|x\|_{\hat{c}} = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j=0}^{m}\frac{x_{n+k}}{m+1} \right|$ normuyla [4] bir Banach uzayıdır.

Şimdi de hemen hemen yakınsaklıkla ilgili literatürde mevcut bazı matris sınıflarını verelim.

Tanım 1.16- Eğer $A\in(\hat{c},c)_{reg}$ ise A 'ya kuvvetli regülerdir denir. [40]

Teorem 1.6- Regüler bir A matrisinin kuvvetli regüler olması için gerek ve yeter şart $\lim_n \sum_k |a_{nk}-a_{n,k+1}|=0$ olmasıdır.

Tanım 1.17- Eğer $A\in(c,\hat{c})_{reg}$ ise A' ya hemen hemen regülerdir denir. [40]

Teorem 1.7- Bir A matrisinin hemen hemen regüler olması için gerek ve yeter şart

i) $\|A\| = \sup_n \sum a_{nk} < \infty$

ii) $\hat{c}-\lim a_{nk} = 0$ **(** her k için)

iii) $\hat{c}-\lim \sum_k a_{nk} = 1$

koşullarının sağlanmasıdır. [41]

Tanım 1.18- Eğer $A\in(\hat{c},\hat{c})_{reg}$ ise A'ya $\hat{c}$ – regülerdir denir. [41]

Teorem 1.8- Bir A matrisinin $\hat{c}$ – regüler olması için gerek ve yeter şart A matrisi regüler ve $\lim_p \sum_k \frac{1}{p+1}\left|\sum_{i=0}^{p}(a_{n+i,k}-a_{n+i,k+1}\right| = 0$ şartlarının sağlanmasıdır.

Tanım 1.19- K pozitif tamsayıların bir alt cümlesi olmak üzere $K \subseteq \mathbb{N}$ ve $\{k \leq n : k \in K\}$ notasyonu K'nın n'den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstersin. Eğer $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$ mevcutsa bu limite K cümlesinin doğal yoğunluğu denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir. [44]

Tanım 1.20- $x = (x_k)$ herhangi bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\delta\left(\left\{k : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim x = \ell$ yazılır. Bir başka ifadeyle $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$ şeklinde de yazılabilir. [42] Buna göre yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır, fakat tersi doğru değildir.

Lemma 1.1- Sonsuz bir $A = (a_{nk})$ matrisi hemen hemen yakınsayan her diziyi hemen hemen yakınsak bir diziye dönüştürmesi için gerek ve yeter şart

i) $\|A\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty$

ii) $\hat{c} - \lim_{n\to\infty} \sum_k a_{nk} = \alpha$

iii) $\hat{c} - \lim_{n\to\infty} a_{nk} = \alpha_k \quad (her\ k \in \mathbb{N}\ için)$

iv) $\lim_{q\to\infty} \sum_k \frac{1}{q+1} \left| \sum_{i=0}^{q} (a_{n+i,k-1} - \alpha_{k-1} + \alpha_k - a_{n+i,k}) \right| = 0 \quad (n'de\ düzgün\ olarak)$

koşullarının sağlanmasıdır. [13]

Lemma 1.2- $A = (a_{nk}) \in (\hat{c} : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart $\|A\| < \infty$ olmasıdır. [3]

Tanım 1.21- $A = (a_{nk})$ sonsuz matris olsun. Eğer $k > n$ için $a_{nk} = 0$ ise A'ya üçgensel matris denir. A üçgensel matrisi her n için $a_{nn} \neq 0$ ise A'ya normal matris denir. [10]

Tanım 1.22- Sonsuz bir A matrisinin λ dizi uzayı üzerindeki etki alanı

$$\lambda_A = \{x = (x_k) \in w : Ax \in \lambda\}$$

olarak tanımlanır ve λ_A da bir dizi uzayıdır.

Tanım 1.23- λ normlu veya paranormlu bir dizi uzayı olmak üzere ; λ_Δ fark dizi uzayı olarak olarak adlandırılır ve $\Delta = (d_{nk})$ olup her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$d_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k} & , \quad n-1 \le k \le n \, , \\ 0 & , \quad 0 \le k < n-1 \quad veya \;\; k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [21]. Fark dizi uzayları [20]'de $X = \ell_\infty, c$ ve c_0 için

$$X(\Delta) = \{ x = (x_k) \in w : (x_k - x_{k+1}) \in X \}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Tanım 1.24- Eğer bir λ dizi uzayı sürekli $p_n : \lambda \to \mathbb{C}$ dönüşümü ile tüm $x = (x_n) \in \lambda$ dizileri ve her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n(x) = x_n$ ile beraber bir lineer metrik uzay ise λ dizi uzayı bir $FK-$uzayı olarak adlandırılır. [21]

Tanım 1.25- Normlu $FK-$uzayı $BK-$uzayı olarak adlandırılır yani $BK-$uzayı bir Banach uzayıdır. [21]

BÖLÜM 2

2.1 ÇEKİRDEK TEOREMLERİ

Bu bölümde K. Knoop'ın verdiği K-çekirdek ve K-çekirdek ile ilgili çalışmalara [43] ve daha sonra J.A. Fridy ve C.Orhan tarafından verilen istatistiksel çekirdek ile ilgili çalışmalara yer verildi. [5]

K-çekirdek tanımını vermeden önce tanımda kullanılacak olan konveks cümle tanımını verelim.

Tanım 2.1.1- E, bir nokta cümlesi ve $a \geq 0$, $b \geq 0$ ve a+b=1 olsun. Eğer her $x, y \in E$ için $ax + by \in E$ oluyorsa, E'ye konvekstir denir. [45, syf.80]

Teorem 2.1.1- Konveks cümlelerin herhangi sayıdaki kesişimleri konvekstir.

Tanım 2.1.2- $s_n \in \mathbb{C}$ bir dizi ve R_n de her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$ noktalarını içeren sonlu kompleks düzlemin en küçük kapalı konveks bir bölgesi olsun (Bu durumda $R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \ldots$ olacağı açıktır).

Buna göre ;

$R = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n = R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap \ldots$ cümlesine (s_n) dizisinin çekirdeği denir. Sonsuz sayıdaki kapalı cümlelerin kesişimi kapalı olduğundan ve teorem 2.1.1'den (s_n) dizisinin R çekirdeği kapalı konveks bir cümledir. O halde kapalılığın tanımından (s_n) dizisinin limit noktalarının cümlesi D ise $D \subset R$'dir. Eğer R cümlesi tek noktadan ibaretse (s_n) dizisi yakınsaktır (tersi de doğrudur). R boş ise (yani sonlu sayıda nokta ihtiva etmez ise) , (s_n) dizisine ''belirli ıraksak'' denir ve $s_n \approx \infty$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3- Reel terimli sınırlı bir x dizisinin K-çekirdeği $L(x) = \lim\sup x_n$ $l(x) = \lim\inf x_n$ olmak üzere, $\left[L(x), l(x)\right]$ kapalı aralığıdır. Bu tanımdan sonra Knoop'un kendi adıyla anılan ve dönüşüm dizisinin çekirdeğinin esas dizinin çekirdeği içinde kaldığını ispatlayan aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 2.1.2- (Knoop's Core Theorem) $A=(a_{nk})$ pozitif terimli ve regüler bir matris olsun. Şu halde $K-çekirdek(Ax)\subseteq K-çekirdek(x)$ dir.

İspat : $x=(x_k)$ reel terimli bir dizi ve $A=(a_{nk})$ regüler bir matris olsun. Knoop çekirdek teoreminden $K-çekirdek(x)=\left[\liminf x_n, \limsup x_n\right]$ ve $K-Core(Ax)=\left[\liminf Ax, \limsup Ax\right]$'dir. Teoremi ispat etmek için $\limsup Ax \le \limsup x$ olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer $\limsup=\infty$ ise ispat edecek bir şey yoktur. Şimdi $\limsup x=b$ olsun. Şu halde $\varepsilon>0$ için bir $m\in N$ vardır öyle ki $k>m$ olduğundan $x_k \le b+\varepsilon$'dır. Böylece pozitif terimli A matrisi

$$
\begin{aligned}
(Ax)_n &= \sum_{k=0}^{m} a_{nk}x_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk}x_k \\
&\le \sum_{k=0}^{m} a_{nk}x_k + (b+\varepsilon)\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk} \\
&\le \sum_{k=0}^{m} a_{nk}x_k + (b+\varepsilon)\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. Burada $A=(a_{nk})$ regüler olduğundan $\lim a_{nk}=0$ ve her $k\in N$ için $\sum_k a_{nk}=1$ dir. Böylece $Ax\le b+\varepsilon$ elde edilir. ε keyfi olduğundan $Ax\le b$ olur ki bu da ispatı tamamlar.

2.2 İstatistiksel Çekirdek

Knoop tarafından ortaya atılan kompleks değerli bir dizi, doğası gereği dizinin limit noktalarının kümesiyle bağlantılıdır. İstatistiksel yakınsaklığa bağlı limit noktası kavramının bir çeşidi [17]'de ortaya atılmıştır ve bu [6]'da reel terimli bir dizinin istatistiksel çekirdeğinin tanımının yapılmasına olanak sağlamıştır. Bu kısımda Ax'in knoop-çekirdeğini içeren sınırlı her x dizisinin istatistiksel çekirdeği için A matrisi üzerindeki gerekli ve yeterli şartlar verildi. Choudhary' nin [2] çalışmasında, $Knoop-Çekirdek(Ax)$ için A ve B matrisleri üzerindeki verilen şartlar, sınırlı her x dizisinin $istatistiksel-Çekirdek(Bx)$ içinde aynı olduğu verildi.

Kompleks sayıların kümesi $\mathbb{C}$ ve pozitif tamsayıların kümesi $\mathbb{N}$ olmak üzere, $E\subseteq N$ ise $\delta(E)$, E'nin doğal yoğunluğunu göstersin. x' in Knoop çekirdeği [27]'de

$$K-çekirdek\{x\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n(x)$$

şeklindedir ve burada $C_n(x)$, $\{x_k\}_{k\geq n}$ ' nın kapalı konveks hull'dır. [23]'de sınırlı her x dizisi için ;

$$K-çekirdek\{x\}=\bigcap_{z\in\mathbb{C}}B_x^*(z)$$

şeklinde gösterilmiştir ve burada

$$B_x^*=\left\{w\in\mathbb{C}:|w-z|\leq\limsup_k|x_k-z|\right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

[17]'de , bir x dizisinin bir istatistiksel yığılma noktası bir γ sayısıdır öyle ki her $\varepsilon>0$ için $\{k\in\mathbb{N}:|x_k-\gamma|<\varepsilon\}$ kümesi sıfır yoğunluğuna sahip değildir. [6]' da eğer x dizisi ℓ yoğunluklu sınırlı bir alt diziye sahipse x dizisi istatistiksel sınırlı olarak tanımlanmıştır ve bu x dizisinin (reel değerli) istatistiksel çekirdeği; $[st-\liminf x, st-\limsup x]$ kapalı aralığıdır, burada $st-\liminf x$ ve $st-\limsup x$, x'in en küçük ve en büyük yığılma noktalarıdır. Aynı zamanda [6,teorem1]' de reel terimli bir x dizisi için $st-\limsup x=\beta$ olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon>0$ için $\delta\{k:x_k>\beta-\varepsilon\}\neq 0$ ve $\delta\{k:x_k>\beta+\varepsilon\}=0$ ifadelerinin sağlanmasıdır. x dizisi bir yoğunluklu sınırlı bir alt diziye sahipse x'e istatistiksel sınırlı denir[39]. Burada eğer x ve y dizileri; $\delta\{k\in\mathbb{N}:x_k=y_k\}=1$ şartını sağlıyorsa $x_k=y_k$ a.a.k. şeklinde yazılır ve hemen hemen her k için $x_k=y_k$ şeklinde okunur.

Bu açıklamalardan sonra kompleks değerli istatistiksel çekirdeğin tanımı aşağıdaki gibi verildi.

Tanım 2.2.1- Herhangi bir kompleks x dizisi için x_k *a.a.k.* ları içeren tüm kapalı yarı-düzlemlerin kümesi $H(x)$ olsun ve x' in istatistiksel çekirdeği;

$$istatistiksel-çekirdek\{x\}=st-çekirdek\{x\}=\bigcap_{H\in H(x)}H$$ şeklinde tanımlanır.

$K-çekirdek\{x\}$'in tanımında kapalı konveks hull $C_n(x)$, $\{x_k\}_{k\geq n}$ leri içeren tüm kapalı yarı düzlemlerin kesişimi olduğundan $st-çekirdek\{x\}$'in tanımında $\{x_k\}_{k\geq n}$ ile ℓ yoğunluklu keyfi bir alt dizinin yerine keyfi 1 yoğunluklu alt dizi alınır. Böylece tüm x'ler için $st-çekirdek\{x\}\subseteq K-çekirdek\{x\}$ yazılabilir.

Lemma 2.2.1- x, istatistiksel sınırlı bir dizi olsun ve her bir $z \in \mathbb{C}$ için

$B_x = \left\{ w \in \mathbb{C} : |w - z| \le st - \limsup_k |x_k - z| \right\}$ olmak üzere $st - çekirdek\{x\} = \bigcap_{z \in \mathbb{C}} B_x(z)$

dir.

İspat - $st - \limsup x$ 'in tanımından ve [6, teorem 1]'den $B_x(z)$ diski, z merkezli x_k a.a.k ları içeren tüm kapalı disklerin kesişimine eşit olduğunu biliyoruz. İlk olarak $w \notin \cap_{z \in \mathbb{C}} B_x(z)$ olsun. Bu durumda bazı z^* için $w \notin B_x(z^*)$ olur. H, $B_x(z^*)$ 'yi ihtiva eden yarı düzlem olsun öyle ki $B_x(z^*)$ 'nin sınır doğruları w ve z^* 'yi ihtiva eden doğrulara dik ve $B_x(z^*)$ 'ın sınır çemberine teğettir. $B_x(z^*) \subset H$ ve $B_x(z^*)$, x_k a.a.k ları içerdiğinden $H \in H(x)$ 'dir ve $w \notin H$ olduğundan $w \notin \bigcap_{H \in H(x)} H$ olduğu görülür. Sonuç olarak $st - çekirdek\{x\} \subseteq \bigcap_{z \in \mathbb{C}} B_x(z)$ 'dir. Diğer taraftan eğer $w \notin \bigcap_{H \in H(x)} H$ ise burada açıkça H, $H(x)$ 'de bir düzlemdir ve dolayısıyla $w \notin H$ olduğu açıktır. L, w boyunca bir şerit yani H 'nin sınırına dik olsun ve p, w ve H arasında L'nin bir parçasının orta noktası olsun. z de L 'nin bir noktası ve $z \in H$ olsun.

$B(z) = \left\{ \xi \in \mathbb{C} : |\xi - z| \le |p - z| \right\}$ diskini alalım. x istatistiksel sınırlı ve $x_k \in H$ a.a.k olduğundan z 'yi p 'den yeterli uzaklıkta seçebiliriz öyle ki

$|p - z| = st - \limsup_k |x_k - z|$ 'dır. O halde $B(z)$, $B_x(z)$ disklerinden bir tanesidir ve

$w \notin B(z)$ olduğundan $w \notin \bigcap_{z \in \mathbb{C}} B_x(z)$ olduğu söylenir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Not 2.2.1- Önceki lemmada verilen $st - çekirdek\{x\}$'in alternatif formu eğer x istatistiksel sınırlı değilse geçerli yeterlilikte değildir. Örneğin; tüm k lar için $x_k = k$ ise x, istatistiksel yığılma noktasına sahip değildir ve $st - çekirdek\{x\} = \varnothing$ 'dur. Fakat herhangi bir $z \in \mathbb{C}$ için sonlu yarıçaplı olmayan disk x_k a.a.k ları içerebilir. O halde $st - \limsup_k |x_k - z| = \infty$ ve $B_x(z)$, $\mathbb{C}$ düzleminin tamamıdır. Bu nedenle $\bigcap_{z \in \mathbb{C}} B_x(z) = \mathbb{C}$ 'dır.

Şimdi de sınırlı bir x dizisinin matris dönüşümü Ax olmak üzere st- çekirdeğin dönüşüm dizisinin çekirdeğini ihtiva ettiği verilecektir.

Teorem 2.2.1- Eğer A, $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$ şartını sağlıyorsa her $x \in \ell_\infty$ için $K-\text{çekirdek}\{Ax\} \subseteq st-\text{çekirdek}\{x\}$ olması için gerek ve yeter şart

i) A regüler ve $\delta(E)=0$ olmak üzere $\lim_n \sum_{k\in E} |a_{nk}| = 0$

ii) $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$

koşullarının sağlanmasıdır.

İspat - (gerek şart) $st-\lim_x = L$ ise $\{L\} = st-\text{çekirdek}\{x\} \supseteq K-\text{çekirdek}\{Ax\}$ 'dir. Her $x \in \ell_\infty$ için Ax sınırlı olduğundan $K-\text{çekirdek}\{Ax\} = \{L\}$ yazabiliriz ki böylece Ax, L 'ye yakınsaktır. Connor [28] ve Maddox [29] daki teoremlerden $\delta(E)=0$ olmak üzere A regüler ve $\lim_n \sum_{k\in E} |a_{nk}| = 0$ olduğundan i) şartı sağlanır. Aynı zamanda $K-\text{çekirdek}\{Ax\} \subseteq st-\text{çekirdek}\{x\} \subseteq K-\text{çekirdek}\{x\}$ olduğunu biliyoruz. Şimdi [30, teorem 2.1]'de $\alpha = 1$ ve $K = \mathbb{C}$ için $\limsup_k \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \le 1$ ve A regüler olduğundan $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$ 'e eşittir. Bu da i) ve ii) şartlarının gerekliliğini ispatlar.

(yeter şart) i) ve ii) şartları sağlansın ve $w \in K-\text{çekirdek}\{Ax\}$ olsun. Herhangi bir $z \in \mathbb{C}$ için;

$$
\begin{aligned}
|w-z| &\le \limsup_n |z-(Ax)_n| \\
&= \limsup_n \left| z - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right| \\
&\le \limsup_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(z-x_k) \right| + \limsup_n |z| \left| 1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right| \qquad (1) \\
&= \limsup_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(z-x_k) \right|
\end{aligned}
$$

yazabiliriz. O halde $r = st-\limsup |x_k - z|$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $E = \{k : |z-x_k| > r+\varepsilon\}$ alalım. $\delta(E)=0$ olduğundan dolayı

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(z-x_k) \right| \le \sup_k |z-x_k| \sum_{k\in E} |a_{nk}| + (r+\varepsilon) \sum_{k\notin E} |a_{nk}|$$

yazılabilir ve i) ve ii) şartları dikkate alınırsa

$$\lim_n \sup \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} (z - x_k) \right| \le r + \varepsilon$$

olur. (1) eşitliğinden $|w - z| \le r + \varepsilon$ sonucuna varılır ve ε keyfi olduğundan $|w - z| \le r$ bulunur yani $w \in B_x(z)$ olur ki lemma 2.2.1'den $w \in st - çekirdek\{x\}$ olup ispat tamamlanır.

$st - çekirdek\{x\} \subseteq K - çekirdek\{x\}$ olduğundan Knoop çekirdek teoremindeki aynı düşünce ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.1- Eğer A matrisi, $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} | a_{nk} | < \infty$ ve teorem 2.2.1'in i) ve ii) şartlarını sağlarsa her $x \in \ell_\infty$ için $st - çekirdek\{Ax\} \subseteq st - çekirdek\{x\}$ 'dir. Fakat bu sonucun tersi doğru değildir. Bunu bir örnekle göstermeye çalışalım.

Örnek 2.2.1- A matrisini [17, teorem1]'de ki $(Ax)_n = x_n$ a.a.k olarak tanımlayalım ve bu da Ax 'in istatistiksel yığılma noktaları x 'in istatistiksel yığılma noktaları ile aynı olduğundan $st - çekirdek\{Ax\} = st - çekirdek\{x\}$ sağlanır. A matrisi her $x \in \ell_\infty$ için ve $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} | a_{nk} | < \infty$ ve teorem 2.2.1'in i) ve ii) şartlarından

$st - çekirdek\{Ax\} \subseteq st - çekirdek\{x\}$ olur. Şimdi de

$$a_{nk} = \begin{cases} 1, & k = n \ ve \ n \ tek \\ 1, & k \le n \ ve \ n \ çift \\ 0, & diğer \ durumlar \end{cases}$$

ve

$$(Ax)_n = \begin{cases} x_n, & n \ tek \\ \sum_{k=1}^{n} x_k, & n \ çift \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

Burada $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} | a_{nk} | = \infty$ olduğundan A matrisi hem ii) şartını hem de $\delta(E) = 0$ olmak üzere $\lim_n \sum_{k \in E} | a_{nk} | = 0$ şartını sağlamaz.

Not 2.2.2- Bir A matrisi için gerekli ve yeterli şartlar sağlandığında her $x \in \ell_\infty$ için $st - çekirdek\{Ax\} \subseteq st - çekirdek\{x\}$ yazabiliriz fakat bu olmasaydı bu durum açık bir soru olarak kalırdı. Teorem 2.2.1 ve sonuç 2.2.1 ile K-çekirdekle ilgili verilen önceki teoremler istatistiksel benzer olduğundan ve burada eğer sınırlı diziler istatistiksel sınırlı dizilere kısıtlanabiliyorsa bu sorunun akla gelmesi doğal olacaktır. Fakat bu durum olası değildir bunu aşağıdaki örnekle açıklamaya çalışalım.

Örnek 2.2.2- $A = C_1$ alalım (C, cesaro aritmetiği) ve x,

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k \text{ çift} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Sonra $x_k = 0$ a.a.k ve böylece x istatistiksel sınırlı ve $st - çekirdek\{x\} = \{0\}$ 'dır. Teorem 2.2.1'de A 'nın tüm şartlarını C_1 in de sağladığı açıktır. Fakat

$$(C_1x)_n = \frac{1}{n}\sum_{k \le \sqrt{n}} k = \frac{1}{n}\left[\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+1\right)}{2} + 0\left(\sqrt{n}\right)\right]$$

dır. Böylece $\lim (C_1x)_n = 1/2$ ve $st - çekirdek\{C_1x\} = K - çekirdek\{C_1x\} = \{1/2\}$ 'dir.

2.3 İki Matris Dönüşümünün Çekirdeklerinin Karşılaştırılması

[2]'de Choudhary, Knoop' un çekirdek teoremini iki dönüşümün çekirdeklerini kıyaslayarak çalışma alanını genişletmiş ve $K - çekirdek\{Ax\} \subseteq K - çekirdek\{Bx\}$ sonucuna varmıştır. Burada B matrisi Knoop teoremindeki matris ile özdeştir ve onun yerine yazılmıştır. Şimdi de choudhary'nin teoremini istatistiksel olarak verelim.

Teorem 2.3.1- B, normal bir matris (köşegen elemanları sıfırdan farklı üçgensel matris) olsun ve bu üçgensel matrisin tersi $B^{-1} = \left[b_{nk}^{-1}\right]$ şeklinde verilsin. Keyfi bir A matrisi için $Bx \in \ell_\infty$ olduğunda oluşan Ax matrisi sınırlı ve

$$K - çekirdek\{Ax\} \subseteq st - çekirdek\{Bx\} \qquad (2)$$

olması için gerek ve yeter şart

(i) $C = AB^{-1}$, şeklinde oluşur

(ii) C regüler ve $\delta(E) = 0$ olduğunda $\lim\limits_n \sum\limits_{k \in E} |c_{nk}| = 0$

(iii) $\lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_{nk}| = 1$

(iv) Herhangi bir sabit n sayısı için

$$\lim_{v} \sum_{k=0}^{v} \left| \sum_{j=v+1}^{\infty} a_{nj} b_{jk}^{-1} \right| = 0$$

koşullarının sağlanmasıdır.

İspat - (gerek şart) $Bx \in \ell_{\infty}$ olduğunda her n için $(Ax)_n$ oluşuyorsa ve [2, lemma 2]'den (i) ve (iv) şartlarının sağlandığını söyleyebiliriz. Yine benzer lemma ile $y = Bx$ olmak üzere $Ax = Cy$ elde edilir. $Ax \in \ell_{\infty}$ olduğundan $Cy \in \ell_{\infty}$ yazabiliriz. O halde (2) eşitliğinden $K - çekirdek\{Cy\} \subseteq st - çekirdek\{y\}$ 'dir. Şimdi de teorem 2.2.1'den (ii) ve (iii) şartlarının sağlandığını söyleyebiliriz.

(yeter şart) (i)-(iv) şartlarının sağlandığı Choudhary'nin lemma 2'de açıkça ifade edilir ve böylece lemma 2.2.1'den $Cy \in \ell_{\infty}$ ve dolayısıyla $Ax \in \ell_{\infty}$ yazabiliriz. Şimdi de teorem 2.2.1'den $K - çekirdek\{Cy\} \subseteq st - çekirdek\{y\}$ yazabiliriz.

$y = Bx$ olduğundan dolayı $Cy = Ax$ aldığımızda

$K - çekirdek\{Ax\} \subseteq st - çekirdek\{Bx\}$ 'dır. [2]'de Coudhary'nin kullandığı matrisler ve diziler reeldir çünkü orada ulaşılmak istenen Ax ve Bx in üst limitleri ile ilgili eşitsizlikleri ispat etmekti. Fakat Choudhary'nin lemma 2'nin ispatında dikkat edilirse kompleks değerler içinde geçerli olduğu görülecektir.

Yukardaki teoremden aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.3.1- Eğer A ve B matrisleri her x için teorem 2.2.2'nin (i)-(iv) şartlarını sağlıyorsa şu halde her bir x için $Bx \in \ell_{\infty}$ olmak üzere

$st - çekirdek\{Ax\} \subseteq st - çekirdek\{Bx\}$ 'dır.

Fakat sonuç 2.3.1'in tersi doğru değildir bu örnek 2.2.1'de açık olarak görülmektedir

BÖLÜM 3

3.1 Fibonacci Dizi Uzayları

Bu kısımda; Fibonacci dizilerinin tanımı, özellikleri ve sağladığı bazı eşitsizlikler verildi ve daha sonra Candan ve Kayaduman'nın [19] $r,s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere genelleştirilmiş fark fibonacci band matrisleri ile oluşturduğu $\hat{c}^{f(r,s)}$ dizi uzayı inşa edildi. Bu uzay ile ilgili bazı kapsama bağıntıları verildi ve $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayının $\hat{c}$ uzayına izometrik olarak izomorfik olduğu gösterildi, $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayının $\beta-,\gamma-$ dualleri verildi, $\hat{c}^{f(r,s)}$ dizi uzayıyla ilgili bazı matris dönüşümleri ve son kısımda bu dizi uzayının çekirdek teoremleri verildi.

Tanım 3.1.1- Kendinden önceki iki terimin toplanmasıyla elde edilen dizilere Fibonacci dizisi denir ve

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad n \geq 2$$

şeklinde formüle edilir.

Bu çalışma boyunca f_0 ve f_1 1 olarak alınacaktır. Şimdi Fibonacci dizilerinin bazı bilinen özelliklerinden bahsedelim:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \text{ (Altın Oran)},$$

$$\sum_{k=0}^{n} f_k = f_{n+2} - 1 \text{ her } n \in \mathbb{N}\,, \tag{3}$$

$$\sum_k \frac{1}{f_k} \text{ yakınsak,}$$

$$f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^{n+1} \text{ tüm } n \geq 1 \text{ için (Cassini Formula)}$$

şeklinde bazı özellikleri verilebilir[31].

Yeni dizi uzayları inşa etmek için Fibonacci dizileri birçok kez kullanılmıştır. Örneğin; Kara [32]'de Fibonacci matrisini kullanarak $\ell_p(\hat{F})$ uzayını;

$$\ell_p(\hat{F})=\left\{x\in\omega:\ \hat{F}x\in\ell_p\right\}\ ,\ \left(1\le p\le\infty\right)$$

şeklinde vermiştir.

Burada $\hat{F}=(\hat{f}_{nk})$, (f_n) fibonacci dizisiyle oluşturulmuş çift band matrisi ve

$$\hat{f}_{nk}=\begin{cases}-\dfrac{f_{n+1}}{f_n} & , \quad k=n-1,\\ \dfrac{f_n}{f_{n+1}} & , \quad k=n \\ 0 & , \quad 0\le k<n-1 \quad veya \quad k>n\end{cases} \qquad\qquad k,n\in\mathbb{N}$$

dır.

Aynı zamanda Kara ve diğerleri [33]'de $\ell_p(\hat{F})$ ve $\ell_\infty(\hat{F})$ uzayları üzerinde kompakt operatörlerin bazı sınıflarını tanımlayarak yeni çalışmalar yapmıştır. Ayrıca $\lambda\in\{c_0,c\}$ ve $\mu\in\{c_0,c,\ell_\infty\}$ olmak üzere [34]' de $\lambda(\hat{F})$ ve Kara ile Demiriz [35]' de $\mu(\hat{F},p)$ uzaylarını inşa ederek çalışmalar yapmışlardır. Candan [36]'da $c_0(\hat{F}(r,s))$ ve $c(\hat{F}(r,s)$ uzaylarını oluşturmuş ve daha sonrasında Candan ve Kara [37]' de $\ell_p(\hat{F}(r,s))$ uzayı üzerinde çalışmışlardır. $\hat{F}(r,s)=(\hat{f}_{nk}(r,s))$ fibonacci matrisi r,s sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$\hat{f}_{nk}(r,s)=\begin{cases}s\dfrac{f_{n+1}}{f_n} & , \quad k=n-1\\ r\dfrac{f_{n+1}}{f_n} & , \quad k=n\\ 0 & , \quad 0\le k<n-1\ veya\ k>n\end{cases} \qquad\qquad (4)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (4) kullanılarak $\hat{c}^{f(r,s)}$ dizi uzayının $\hat{c}$ uzayındaki $\hat{F}(r,s)$ dönüşümü

$$\hat{c}^{f(r,s)}=\left\{x=x_k\in\ell_\infty:\ \exists\alpha\in\mathbb{C}\ \ni\ \lim_{m\to\infty}\sum_{j=0}^{m}\frac{y_{n+j}}{m+1}=\alpha,\ n'de\ düzgün\ olarak\right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Burada $y=y_n$ dizisi bir $x=x_n$ dizisinin $\hat{F}(r,s)$ dönüşümüdür ve

$$y_n = \hat{F}(r,s)_n(x) = \begin{cases} rx_0 & , \quad n=0 \\ r\dfrac{f_n}{f_{n+1}}x_n + s\dfrac{f_{n+1}}{f_n}x_{n-1} & , \quad n \geq 1 \end{cases} \qquad (5)$$

şeklindedir.

Burada açıkça görüleceği gibi $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayı $\hat{c}^{f(r,s)} = \hat{c}_{\hat{F}(r,s)}$ şeklinde de yazılabilir. Eğer $\alpha = 0$ ise $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayı $\hat{c}_0^{f(r,s)}$ şeklinde gösterilecektir. Burada $\hat{F}(r,s)$ matrisi $r=1$ ve $s=-1$ durumunda $\hat{F}$ matrisine indirgenebilir. Bundan dolayı $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayı ile ilgili sonuçlar Demiriz [9] tarafından tanımlanan $\hat{c}^f$ uzayından daha genel ve kapsamlıdır.

Teorem 3.1.1- $\hat{c}_0^{f(r,s)}$ ve $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayları sırasıyla $\hat{c}_0$ ve $\hat{c}$ uzaylarını kapsar.

İspat - $\hat{F}(r,s)$ matrisi lemma 1.1'in şartlarını sağladığı için $(\hat{c}:\hat{c})$ sınıfındadır. O halde $x \in \hat{c}_0$ veya $x \in \hat{c}$ ise $\hat{F}(r,s)x \in \hat{c}_0$ veya $\hat{F}(r,s)x \in \hat{c}$ olur ki bu da $\hat{c}_0 \subset \hat{c}_0^{f(r,s)}$ ve $\hat{c} \subset \hat{c}^{f(r,s)}$ olduğunu gösterir. Şimdi de her $n \in \mathbb{N}$ için $(k_n) = \left(\dfrac{(-s)^n f^2(n+1)}{r^{n+1}} \right)$ dizisini alalım. Eğer $\lambda \in \{\hat{c}_0, \hat{c}\}$ ise $\hat{F}(r,s)(k_n) = (1,0,\cdots,0,\cdots) = e^0 \in \lambda$ olur ki $(k_n) \in \lambda_{\hat{F}(r,s)} \setminus \lambda$ sonucuna varılır. Böylece $\hat{c}_0 \subset \hat{c}_0^{f(r,s)}$ ve $\hat{c} \subset \hat{c}^{f(r,s)}$ olduğu ispatlanır.

Teorem 3.1.2- Eğer $|s/r| < 1/4$ ise $\hat{c}_0^{f(r,s)} \subset \ell_\infty$ ve $\hat{c}^{f(r,s)} \subset \ell_\infty$ kapsama bağıntıları sağlanır.

İspat - $\hat{c}^{f(r,s)} \subset \ell_\infty$ olduğunu ispatlamak için $|s/r| < 1/4$ olduğunu kabul edelim ve herhangi bir $x \in \hat{c}^{f(r,s)}$ alalım. O halde $y = \hat{F}(r,s)x \in \hat{c} \subset \ell_\infty$ olur. $\hat{F}^{-1}(r,s)$ ters matrisi lemma 1.2'nin şartlarını sağlar ve

$$\|A\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k \left| f_{nk}^{-1}(r,s) \right| \leq \frac{1}{\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{rf_n}{f_{n+1}}} \sum_k \left(\frac{\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{sf_{n+2}}{f_{n+1}}}{\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{rf_n}{f_{n+1}}} \right)^k \leq \frac{2}{r} \sum_k \left(\frac{4s}{r} \right)^k < \infty$$ olur ki bu da

$(\hat{c}:\ell_\infty)$ sınıfının şartlarını sağlar. Böylece $x = F^{-1}(r,s)y \in \ell_\infty$'dur ve $\hat{c}^{f(r,s)} \subset \ell_\infty$ bağıntısı sağlanır. Şimdi $|s/r| \geq 1/4$ alalım. $u = (u_k)$ (0'lar 100 tane, 1'ler 10 tane blok olarak artan şekilde) sınırlı dizisini $u = (0,\cdots,0,\cdots 1,\cdots,1,0,\cdots,0,1,\cdots 1,\cdots)$ şeklinde verelim [7]. $\hat{F}(r,s)u$ dizisi hemen hemen yakınsak olmadığından

$u \in \ell_\infty \setminus \hat{c}^{f(r,s)}$ olur. Böylece $\hat{c}^{f(r,s)} \subset \ell_\infty$ kapsama bağıntısının geçerli olduğu gösterilmiş olur. Yine benzer şekilde $\hat{c}_0^{f(r,s)} \subset \ell_\infty$ olduğu gösterilebilir. Şimdi $\hat{c}^{f(r,s)}$ ve $\hat{c}$ uzayları arasındaki izomorfizma ile ilgili teoremi verelim.

Teorem 3.1.3- $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayı ile $\hat{c}$ uzayı lineer izomorfiktir yani; $\hat{c}^{f(r,s)} \cong \hat{c}$ 'dır.

İspat - Teoremi ispatlamadan önce , $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayından $\hat{c}$ uzayına bir L dönüşümünün varlığına ihtiyaç duyuyoruz. Bu sebepten L dönüşümünü (5) notasyonu yardımı ile $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayından $\hat{c}$ 'ye dönüşümü $x \to y = Lx = \hat{F}(r,s)x$ şeklinde olsun. L 'nin lineer ve birebir olduğu açıktır. L dönüşümünün örten olduğunu göstermek için öncelikle keyfi bir $y = (y_k) \in \hat{c}$ alalım ve bu diziyi $\hat{F}^{-1}(r,s)$ ters matrisinde yerine yazdığımızda her $k \in \mathbb{N}$ için ;

$$x_k = \left\{ \hat{F}^{-1}(r,s)y \right\}_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r} \right)^{k-j} \frac{f_{k+1}^2}{f_j f_{j+1}} y_j \qquad (6)$$

dizisini elde ederiz. O halde (x_k) dizisini (5)'de yazdığımızda her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} r\frac{f_k}{f_{k+1}} x_k + s\frac{f_{k+1}}{f_k} x_{k-1} &= r\frac{f_k}{f_{k+1}} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r} \right)^{k-j} \frac{f_{k+1}^2}{f_j f_{j+1}} y_j \\ &+ s\frac{f_{k+1}}{f_k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r} \right)^{k-j-1} \frac{f_k^2}{f_j f_{j+1}} = y_k \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{m} \frac{r\dfrac{f_{k+j}}{f_{k+1+j}} x_{k+j} + s\dfrac{f_{k+1+j}}{f_{k+j}} x_{k-1+j}}{m+1} &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m} y_{k+j} \\ &= \hat{c} - \lim y_k \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da $x = (x_k) \in \hat{c}^{f(r,s)}$ olduğunu gösterir. Yani L örtendir. Sonuç olarak, L lineer, birebir ve örten olduğundan $\hat{c}^{f(r,s)}$ ve $\hat{c}$ uzayları lineer olarak izomorfiktir ve bu da ispatı tamamlar.

Not 3.1.1- [22] Bir μ lineer metrik dizi uzayının μ_A alt matrisinin bir bazının olması için gerek ve yeter şart μ 'nün bir baza sahip olmasıdır.

Lemma 3.1.1- [14, sonuçlar 3.3] $\hat{c}$ banach uzayının Schauder bazı yoktur.

Sonuç 3.1.1- $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayının Schauder bazı yoktur.

İspat – Banach uzayının Schauder bazı olmadığından ve not 3.1.1 dikkate alındığında $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayının Schauder bazı yoktur.

Bu kısımda öncelikle herhangi λ ve μ dizi uzaylarının çarpım uzayı olan $S(\lambda,\mu)$ uzayını tanımlayalım. Eğer $\lambda,\mu\subset w$ ve z de keyfi bir dizi olmak üzere

$z^{-1}*\lambda=\{x=(x_k)\in w: xz\in\lambda\}$ ve $S(\lambda,\mu)=\cap_{x\in\lambda}x^{-1}*\mu$ şeklinde tanımlayalım.

Şimdi Keyfi bir λ uzayının $\alpha-,\beta-$ ve $\gamma-$ duallerinin tanımlarını yapalım: $\mu=\ell_1,cs,bs$ olmak üzere λ uzayının $\alpha-,\beta-,$ ve $\gamma-$ dualleri;

$$\lambda^{\alpha}=S(\lambda,\ell_1)=\{a=(a_k)\in w: ax=(a_kx_k)\in\ell_1 \text{ her } x\in\lambda\}$$
$$\lambda^{\beta}=S(\lambda,cs)=\{a=(a_k)\in w: ax=(a_kx_k)\in cs \text{ her } x\in\lambda\}$$
$$\lambda^{\gamma}=S(\lambda,bs)=\{a=(a_k)\in w: ax=(a_kx_k)\in bs \text{ her } x\in\lambda\}$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi de $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayının $\beta-$ dualini tanımlamada yardımcı olan aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.1.4- [24] $A=(a_{nk})\in(\hat{c}:c)$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha_k,\alpha\in\mathbb{C}$ olmak üzere;

$$\lim_{n\to\infty}a_{nk}=\alpha_k \quad \text{her } k\in\mathbb{N} \text{ için}, \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k a_{nk}=\alpha, \tag{8}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k\left|\Delta\,(a_{nk}-\alpha_k)\right|=0, \tag{9}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k|a_{nk}|<\infty \tag{10}$$

şartlarının sağlanmasıdır.

Burada $\Delta\,(a_{nk}-\alpha_k)=(a_{nk}-\alpha_k)-(a_{n,k+1}-\alpha_{k+1})\ (n,k\in\mathbb{N})$ 'dır.

Teorem 3.1.4- $d_1(r,s),d_2(r,s),d_3(r,s),d_4d(r,s)$ ve $d_5(r,s)$ kümeleri

$$d_1(r,s)=\left\{a=(\alpha_k)\in w: \lim_{n\to\infty}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{r}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k}\frac{f_{j+1}^2}{f_k\,f_{k+1}}a_j\right\},$$

$$d_2(r,s)=\left\{a=(\alpha_k)\in w: \lim_{n\to\infty}\sum_{k=o}^{n}\left(\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{r}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k}\frac{f_{j+1}^2}{f_k\,f_{k+1}}a_j\right)\right\},$$

$$d_3(r,s)=\left\{a=(\alpha_k)\in w:\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{r}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k}\frac{f_{i+1}^2}{f_k f_{k+1}}a_i\right|=0\right\},$$

$$d_4(r,s)=\left\{a=(a_k)\in w:\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\kappa(r,s,f_k,f_{k+1},f_{k+2},a_k)\right|=0\right\}$$

şeklinde tanımlanırlar, burada

$$\kappa(r,s,f_k,f_{k+1},f_{k+2},a_k)=r\frac{f_k}{f_{k+1}}a_k+\left(1+\frac{rf_k}{sf_{k+2}}\right)\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{r}\left(\frac{-s}{r}\right)^{k-j}\frac{f_{i+1}^2}{f_k f_{k+1}}a_i$$

ve

$$d_5(r,s)=\left\{a=(\alpha_k)\in w:\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{r}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k}\frac{f_{j+1}^2}{f_k f_{k+1}}a_j\right|<\infty\right\}$$

şeklindedir.

Şu halde $\left\{\hat{c}^f\right\}^\beta=\bigcap_{i=1}^{5}d_i(r,s)$ olduğunu ispatlayalım.

İspat - Herhangi bir $a=(a_k)\in w$ dizisini düşünelim. O halde (6) eşitliği yardımıyla her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}a_kx_k&=\sum_{k=0}^{n}a_k\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{r}\left(\frac{-s}{r}\right)^{k-j}\frac{f_{k+1}^2}{f_j f_{j+1}}y_j\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{r}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k}\frac{f_{j+1}^2}{f_k f_{k+1}}a_j\right)y_k \qquad (11)\\&=\mathrm{E}_n(\mathrm{y}),\end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada $E=(e_{nk})$; $n,k\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$e_{nk}=\begin{cases}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{r}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k}\frac{f_{j+1}^2}{f_k f_{k+1}}a_j & (0\le k\le n)\\ 0 & (k>n)\end{cases}$$

şeklindedir.

(11) eşitliğinden $x=(x_k)\in\hat{c}^{f(r,s)}$ için $ax=(a_kx_k)\in cs$ olması için gerek ve yeter şart $y=(y_k)\in\hat{c}$ için $Ey\in c$ olmasıdır. Böylece lemma 3.1.4'den $x=(x_k)\in\hat{c}^{f(r,s)}$ için $ax=(a_kx_k)\in cs$ olması için gerek ve yeter şart $a=(a_k)\in\bigcap_{i=1}^{5}d_i(r,s)$ olması gerektiği elde edilir. Bu da $\left\{\hat{c}^f\right\}^\beta=\bigcap_{i=1}^{5}d_i(r,s)$ olduğunu gösterir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.5- $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayının γ duali $d_5(r,s)$ kümesidir.

İspat - 3.1.4 teoreminde cs yakınsak serisinin yerine bs sınırlı serisinin alınmasıyla benzer şekilde ispatlanır.

3.2 $\hat{c}^{f(r,s)}$ Dizi Uzayıyla Alakalı Bazı Matris Dönüşümleri

Bu kısımda; $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayından verilen herhangi bir X dizi uzayı içine olan ve verilen bir X dizi uzayından $\hat{c}^{f(r,s)}$ içine olan matris dönüşümlerinin karakterize edilmesi üzerinde çalışıldı.

Kolaylık açısından burada ve ilerleyen bölümlerde kullanmak üzere; her $k,n\in\mathbb{N}$ için

$$\tilde{a}_{nk}=\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{r}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k}\frac{f_{j+1}^2}{f_k f_{k+1}}a_{nj}\ ,$$

$$\bar{a}_{nk}=r\frac{f_n}{f_{n+1}}a_{nk}+s\frac{f_{n+1}}{f_n}a_{n-1,k}\ ,$$

$$a(n,k)=\sum_{j=0}^{n}a_{jk}$$

ve

$$a(n,k,m)=\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}a_{n+j,k}\qquad (m\in\mathbb{N})$$

ifadelerini şeklinde alalım.

Şimdi, $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayı üzerindeki matris sınıflarını belirlemek için aşağıdaki iki teoremi vereceğiz.

Teorem 3.2.1- $A=(a_{nk})$ ve $T=(t_{nk})$ sonsuz matrisleri arasında her $k,n\in\mathbb{N}$ için

$$t_{nk}=\tilde{a}_{nk} \tag{12}$$

bağıntısının olduğunu kabul edelim ve X verilen herhangi bir dizi uzayı olsun. O halde $A\in\left(\hat{c}^{f(r,s)}:X\right)$ olması için gerek ve yeter şart her $n\in\mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}\in\left\{\hat{c}^{f(r,s)}\right\}^{\beta}$ ve $T\in(\hat{c}:X)$ olmasıdır.

İspat - $\hat{c}^{f(r,s)}$ uzayı ile $\hat{c}$ uzayının lineer izomorfik olduğunu teorem 3.1.3'den biliyoruz. X bir dizi uzayı olsun ve (12) şartı $A=(a_{nk})$ ve $T=(t_{nk})$ matrisleri için geçerli olsun. İspatın gereklilik kısmının ispatı içinde $A\in(\hat{c}^{f(r,s)}:X)$ olduğunu kabul edelim ve $y=(y_k)\in\hat{c}$ alalım. Bu varsayımlar altında $T\hat{F}(r,s)$'nin mevcut olacağı açıkça görülür ve dolayısıyla $\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \bigcap_{i=1}^{5} d_i$ 'dir. O halde her $n\in\mathbb{N}$ için $\{t_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ 'dir. Buradan Ty mevcut olup ve her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\sum_k t_{nk} y_k = \sum_k a_{nk} x_k$$

eşitliğini (12)'den yazabiliriz. Elde edilen bu eşitlikten $Ty = Ax$ olduğu görülür ve $T \in (\hat{c} : Y)$ olduğu gösterilmiş olur. İspatın yeterlilik kısmının ispatında aynı varsayımlar kullanılarak Ax 'in mevcut olacağı açıkça görülür ve basit bir işlem kullanarak her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{m}\left[\sum_{j=k}^{m} \frac{1}{r}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k} \frac{f_{j+1}^2}{f_k f_{k+1}} a_{nj}\right] y_k$$

eşitliği yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafında $m\to\infty$ için limit alınırsa $Ty = Ax$ olduğu görülür ve bu da $A \in \left(\hat{c}^{f(r,s)} : X\right)$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.2- $A = (a_{nk})$ ve $R = (r_{nk})$ sonsuz matrisleri arasında her $k, n \in\mathbb{N}$ için $r_{nk} = \bar{a}_{nk}$ bağıntısının olduğunu kabul edelim ve X dizi uzayı verilsin. O halde $A \in (X : \hat{c}^{f(r,s)})$ olması için gerek ve yeter şart $R \in (X : \hat{c})$ olmasıdır.

İspat - Herhangi bir $x = (x_k) \in X$ dizisini alalım ve her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\left\{\hat{F}(Ax)\right\}_n &= r\frac{f_n}{f_{n+1}}(Ax)_n + s\frac{f_{n+1}}{f_n}(Ax)_{n-1}\\ &= r\frac{f_n}{f_{n+1}}\sum_k a_{nk}x_k + s\frac{f_{n+1}}{f_n}\sum_k a_{n-1,k}x_k\\ &= \sum_k\left(r\frac{f_n}{f_{n+1}}a_{nk} + s\frac{f_{n+1}}{f_n}a_{n-1,k}\right)x_k = (Rx)_n\end{aligned}$$

eşitliklerini yazalım. Yukarıdaki eşitlikte genelleştirilmiş limite geçerek $A \in (X : \hat{c}^{f(r,s)}) \Leftrightarrow R \in (X : \hat{c})$ olduğu açıkça görülür. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi de matris sınıflarının karakterizasyonunda kullanacağımız bazı ifadeleri aşağıdaki gibi verelim:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k |\Delta a_{nk}| < \infty \ , \tag{13}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{nk} = 0 \qquad \text{sabit her } n\in\mathbb{N} \text{ için}, \tag{14}$$

$$\hat{c}-\lim\ a_{nk} = \alpha_k \ \text{ sabit her } k\in\mathbb{N} \text{ için}, \tag{15}$$

$$\lim_{m\to\infty}\sum_k \left|a(n,k,m)-\alpha_k\right| = 0 \qquad n\text{' de düzgün olarak,} \tag{16}$$

$$\hat{c}-\lim \sum_k a_{nk} = \alpha\,, \tag{17}$$

$$\lim_{m\to\infty}\sum_k \left|\Delta\left[a(n,k,m)-\alpha_k\right]\right| = 0 \quad n\text{' de düzgün olarak,} \tag{18}$$

$$\lim_{q\to\infty}\sum_k \frac{1}{q+1}\left|\sum_{i=0}^{q}\Delta\left[a(n+i,k)-\alpha_k\right]\right| = 0 \quad n\text{' de düzgün olarak,} \tag{19}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k \left|a(n,k)\right| < \infty\,, \tag{20}$$

$$\sum_n a_{nk} = \alpha_k \quad \text{sabit her } n\in\mathbb{N} \text{ için,} \tag{21}$$

$$\sum_n\sum_k a_{nk} = \alpha\,, \tag{22}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k \left|\Delta\left[a(n,k)-\alpha_k\right]\right| = 0 \tag{23}$$

Lemma 3.2.1- [14] $A=(a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun ve

i) $A=(a_{nk})\in(\hat{c}:\ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (10) şartının sağlanmasıdır,

ii) $A=(a_{nk})\in(\ell_\infty:\hat{c})$ olması için gerek ve yeter şart (10), (15) ve (16) şartlarının sağlanmasıdır,

iii) $A=(a_{nk})\in(\hat{c}:\hat{c})$ olması için gerek ve yeter şart (10),(15),(17) ve (18) şartlarının sağlanmasıdır,

iv) $A=(a_{nk})\in(c:\hat{c})$ olması için gerek ve yeter şart (10),(15) ve (17) şartlarının sağlanmasıdır,

v) $A=(a_{nk})\in(b_s:\hat{c})$ olması için gerek ve yeter şart (13),(14),(15) ve (19) şartlarının sağlanmasıdır,

vi) $A=(a_{nk})\in(c_s:\hat{c})$ olması için gerek ve yeter şart (13) ve (15) şartlarının sağlanmasıdır,

vii) $A=(a_{nk})\in(\hat{c}:c_s)$ olması için gerek ve yeter şart (20) - (23) şartlarının sağlanmasıdır.

Şimdi de teorem 3.2.1 ve 3.2.2 ile beraber lemma 3.1.4 ve 3.2.1 kullanılarak aşağıdaki sonuçları yazalım.

Sonuç 3.2.1-

i) $A=(a_{nk})\in\left(\hat{c}^{f(r,s)}:\ell_{\infty}\right)$ olması için gerek ve yeter şart her $n\in\mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}\in\left\{\hat{c}^{f(r,s)}\right\}^{\beta}$ olması ve a_{nk} yerine $\tilde{a}_{nk}$ yazılmasıyla (10) şartının sağlanmasıdır,

ii) $A=(a_{nk})\in\left(\hat{c}^{f(r,s)}:c\right)$ olması için gerek ve yeter şart her $n\in\mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}\in\left\{\hat{c}^{f(r,s)}\right\}^{\beta}$ olması ve a_{nk} yerine $\tilde{a}_{nk}$ yazılmasıyla (7)-(10) şartlarının sağlanmasıdır,

iii) $A=(a_{nk})\in\left(\hat{c}^{f(r,s)}:\hat{c}\right)$ olması için gerek ve yeter şart her $n\in\mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}\in\left\{\hat{c}^{f(r,s)}\right\}^{\beta}$ olması ve (10),(15),(17) şartlarının sağlanması ve a_{nk} yerine $\tilde{a}_{nk}$ yazılmasıyla (18) şartının sağlanmasıdır,

iv) $A=(a_{nk})\in\left(\hat{c}^{f(r,s)}:b_s\right)$ olması için gerek ve yeter şart her $n\in\mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}\in\left\{\hat{c}^{f(r,s)}\right\}^{\beta}$ olması ve (20) şartının sağlanmasıdır,

v) $A=(a_{nk})\in\left(\hat{c}^{f(r,s)}:c_s\right)$ olması için gerek ve yeter şart her $n\in\mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}\in\left\{\hat{c}^{f(r,s)}\right\}^{\beta}$ olması ve a_{nk} yerine $\tilde{a}_{nk}$ yazılmasıyla (20)-(23) şartlarının sağlanmasıdır,

ifadeleri geçerlidir.

Sonuç 3.2.2-

i) $A=(a_{nk})\in\left(\ell_{\infty}:\hat{c}^{f(r,s)}\right)$ olması için gerek ve yeter şart (10),(15) ve a_{nk} yerine $\bar{a}_{nk}$ yazılmasıyla. (16) şartlarının sağlanmasıdır,

ii) $A=(a_{nk})\in\left(c:\hat{c}^{f(r,s)}\right)$ olması için gerek ve yeter şart (10),(15) şartlarının sağlanması ve a_{nk} yerine $\bar{a}_{nk}$ yazılmasıyla (17) şartının sağlanmasıdır,

iii) $A=(a_{nk})\in\left(\hat{c}:\hat{c}^{f(r,s)}\right)$ olması için gerek ve yeter şart (10),(15),(17) şartlarının sağlanması ve a_{nk} yerine $\bar{a}_{nk}$ yazılmasıyla (18) şartının sağlanmasıdır,

iv) $A=(a_{nk})\in\left(b_s:\hat{c}^{f(r,s)}\right)$ olması için gerek ve yeter şart (13),(14),(15) şartlarının sağlanması ve a_{nk} yerine $\bar{a}_{nk}$ yazılmasıyla (19) şartının sağlanmasıdır,

v) $A=(a_{nk})\in\left(c_s:\hat{c}^{f(r,s)}\right)$ olması için gerek ve yeter şart (13) şartının sağlanması ve a_{nk} yerine $\bar{a}_{nk}$ yazılmasıyla (15) şartının sağlanmasıdır,

3.3 $B_{\hat{F}(r,s)}$ Çekirdek ve Teoremleri

Bu kısımda $B_{\hat{F}(r,s)}$ tanımlandı ve $B_{\hat{f}(r,s)}$ çekirdek ile Knoop çekirdek, Banach çekirdek ve diğer çekirdekler arasındaki yeri belirlendi. [1,11,12,15,16,18]'de çekirdek teoremleri ile ilgili çalışmalar yapılmıştır.

$\hat{F}(r,s)=(f_{nk}(r,s))$ matrisinin tanım kümesi yakınsaklığını kullanarak, $c_0(\hat{F}(r,s))$ ve $c(\hat{F}(r,s))$ yeni dizi uzayları oluşturuldu ve onların bazı özellikleri verildi [36]. Bu kısımda dizileri kompleks öğelerle düşüneceğiz ve tüm sınırlı kompleks değerli dizilerin uzayı $\ell_\infty(\mathbb{C})$ ile göstereceğiz ve her $x\in\ell_\infty$ için

$B_{\hat{F}(r,s)}-çekirdek(Ax)\subseteq K-çekirdek(x)\,, K-çekirdek(Ax)\subseteq B_{\hat{F}(r,s)}-çekirdek(x)\,,$

$B_{\hat{F}(r,s)}-çekirdek(Ax)\subseteq B_{\hat{F}(r,s)}-çekirdek(x)\,,$

$B_{\hat{F}(r,s)}-çekirdek(Ax)\subseteq st-çekirdek(x)$ ve

$$t_{mn}(x)=\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\left(r\frac{f_{n+j}}{f_{n+1+j}}x_{n+j}+s\frac{f_{n+1+j}}{f_{n+j}}x_{n-1+j}\right)$$

yazalım ve bir kompleks dizinin $B_{\hat{F}(r,s)}-$çekirdeğini tanımlayalım.

Tanım 3.3.1- H_n, $t_{mn}(x),t_{m+1,n}(x),t_{m+2,n}(x),...$ leri içeren en küçük kapalı konveks hull olsun. x' in $B_{\hat{F}(r,s)}-çekirdeği\,, H_n$ kapalı konveks hullarının kesişimidir yani;

$$B_{\hat{F}(r,s)}-çekirdek(x)=\bigcap_{n=1}^{\infty}H_n$$

şeklindedir.

Biz aslında x in $B_{\hat{F}(r,s)}-çekirdeği$'ni $(t_{mn}(x))$ dizisinin $K-çekirdeği$ ile tanımlamış olduk. O halde $K-$çekirdeğin benzer bir teoremini aşağıda verelim.

Teorem 3.3.1- Herhangi bir $z\in\mathbb{C}$ için,

$$G_x(z)=\left\{w\in\mathbb{C}:|w-z|\le\lim_{m\to\infty}\sup\sup_{n\in\mathbb{N}}|t_{mn}(x)-z|\right\}$$

alalım ve herhangi bir $x\in\ell_\infty$ için

$$B_{\hat{F}(r,s)} - çekirdek(x) = \bigcap_{z\in\mathbb{C}} G_x(z)$$

dır.

Çekirdek teoremlerinin ispatında bize yardımcı olacak $(c:\hat{c}^{f(r,s)})_{reg}$ ve $(st\cap\ell_\infty:\hat{c}^{f(r,s)})_{reg}$ sınıflarının karakterizasyon şartlarını ispatsız verelim. Burada her $m,n,k\in\mathbb{N}$ için kısa olması açısından

$$\tilde{a}(m,n,k) = \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\left(r\frac{f_{n+j}}{f_{n+1+j}} a_{n+j,k} + s\frac{f_{n+1+j}}{f_{n+j}} a_{n-1+j,k} \right)$$

olarak alacağız.

Lemma 3.3.1- $A\in(\ell_\infty:\hat{c}^{f(r,s)})$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|A\| = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_k |\tilde{a}(m,n,k)| < \infty \ , \qquad (24)$$

$$\lim_{m\to\infty} \tilde{a}(m,n,k) = \alpha_k \quad \text{her } k \text{ için} \qquad (25)$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_k |\tilde{a}(m,n,k) - \alpha_k| = 0 \qquad n\text{' de düzgün olarak} \qquad (26)$$

koşullarının sağlanmasıdır.

Lemma 3.3.2- $A\in(c:\hat{c}^{f(r,s)})_{reg}$ olması için gerek ve yeter şart lemma (3.3.1)' in (24),(25) ve her $k\in\mathbb{N}$ için $\alpha_k = 0$ ile

$$\lim_{m\to\infty} \sum_k \tilde{a}(m,n,k) = 1 \qquad n\text{' de düzgün olarak} \qquad (27)$$

şartlarının sağlanmasıdır.

Lemma 3.3.3- $A\in(st\cap\ell_\infty:\hat{c}^{f(r,s)})_{reg}$ olması için gerek ve yeter şart $A\in(c:\hat{c}^{f(r,s)})_{reg}$ ve sıfır doğal yoğunluklu her $E\subset\mathbb{N}$ için

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k\in E} |\tilde{a}(m,n,k)| = 0 \qquad n\text{' de düzgün olarak} \qquad (28)$$

olmasıdır.

İspat - $A\in(st\cap\ell_\infty:\hat{c}^{f(r,s)})_{reg}$ olsun. $c\subset st\cap\ell_\infty$ olduğundan açık bir şekilde $A\in(c:\hat{c}^{f(r,s)})_{reg}$ olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi bir $x\in\ell_\infty$ için $t=(t_k)$ dizisini

$$t_k = \begin{cases} x_k \ , & k\in E \\ 0 \ , & k\notin E \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Burada E **,** $\mathbb{N}$ 'nin herhangi bir alt kümesi ve $\delta(E)=0$ 'dır. $st-\lim t_n=0$ ve $t\in st_0$ olduğundan $At\in \hat{c}_0^{f(r,s)}$ 'dır. Diğer taraftan $(At)_n=\sum_{k\in E} a_{nk}t_k$ olduğundan bir $B=(b_{nk})$ matrisini her $n\in\mathbb{N}$ için

$$b_{nk}=\begin{cases} a_{nk}\ , & k\in E \\ 0\ , & k\notin E \end{cases}$$

olarak tanımlayabiliriz ve bu matrisimiz de $(\ell_\infty:\hat{c}_0^{f(r,s)})$ sınıfına aittir. Böylece (28) şartının sağlandığı da açıkça görülür. Tersine $x\in st\cap\ell_\infty$ ve $st-\lim x=l$ olsun. Sonrasında, sıfır doğal yoğunluğuna sahip E kümesini de $E=\{k:|x_k-l|\geq\varepsilon\}$ şeklinde tanımlayalım ve eğer $k\notin E$ ise $|x_k-l|\leq\varepsilon$ olduğu söylenir. Şimdi

$$\sum_k \tilde{a}(m,n,k)x_k=\sum_k \tilde{a}(m,n,k)(x_k-l)+l\sum_k \tilde{a}(m,n,k) \qquad (29)$$

şeklinde yazabiliriz.

$$\left|\sum_k \tilde{a}(m,n,k)(x_k-l)\right|\leq\|x\|\sum_{k\in E}\left|\tilde{a}(m,n,k)\right|+\varepsilon\|A\|$$

olduğundan ve (29)'da $m\to\infty$ için limit alınırsa ve (27) ile (28) eşitliklerini kullanarak

$$\lim_{m\to\infty}\sum_k \tilde{a}(m,n,k)x_k=l$$

elde edilir. Bu da bize $A\in(st\cap\ell_\infty:\hat{c}^{f(r,s)})_{reg}$ olduğunu ifade eder ve ispat tamamlanmış olur.

Şimdi de kapsama teoremlerinin ispatında kullanacağımız bir lemma verelim.

Lemma 3.3.4- [25] $A=\{a_{mk}(n)\}$ matrisi her $m,n,k\in\mathbb{N}$ için $a_{mk}(n)=\tilde{a}(m,n,k)$ ile tanımlanır ve $\|A\|=\|a_{mk}(n)\|<\infty$ ve $\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_{mk}(n)|=0$ sağlansın. O halde burada en az bir $y\in\ell_\infty$ mevcut olup ve $\|y\|\leq 1$'dir öyle ki

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k \tilde{a}(m,n,k)y_k=\lim_{m\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k\left|\tilde{a}(m,n,k)\right|$$

dır.

Teorem 3.3.2- Her $x\in\ell_\infty$ için $B_{\hat{F}(r,s)}-\text{çekirdek}(Ax)\subseteq K-\text{çekirdek}(x)$ olması için gerek ve yeter şart $A\in(c:\hat{c}^{f(r,s)})_{reg}$ ve $\lim_{m\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k|\tilde{a}(m,n,k)|=1$ olmasıdır.

İspat - $B_{\hat{F}(r,s)}-çekirdek(Ax)\subseteq K-çekirdek(x)$ olsun ve $x\in c$ olmak üzere $\lim x=\ell$ olsun. O halde $K-çekirdek(x)\subseteq\{\ell\}$ olduğundan $B_{\hat{F}(r,s)}-çekirdek(Ax)\subseteq\{\ell\}$ 'dir. Böylece $\hat{c}^{f(r,s)}-\lim Ax=\ell$ olur ki bu da $A\in(c:\hat{c}^{f(r,s)})_{reg}$ olduğunu gösterir. $A\in(c:\hat{c}^{f(r,s)})_{reg}$ olduğundan $A=\tilde{a}(m,n,k)$ matrisi lemma (3.3.4) şartlarını sağlar ve böylece $\|y\|\le 1$ olacak şekilde $y\in\ell_\infty$ mevcut olup

$$\left\{w\in\mathbb{C}:|w|\le\lim_{m\to\infty}\sup\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k\tilde{a}(m,n,k)y_k\right\}=\left\{w\in\mathbb{C}:|w|\le\lim_{m\to\infty}\sup\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k\tilde{a}(m,n,k)\right\}$$

yazılır.

Diğer taraftan $K-çekirdek(y)\subseteq A_1(0)$ olduğundan hipotezden

$$\left\{w\in\mathbb{C}:|w|\le\lim_{m\to\infty}\sup\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k\tilde{a}(m,n,k)\right\}\subseteq A_1(0)=\left\{w\in\mathbb{C}:|w|\le 1\right\}\qquad(30)$$

olur.

Tersine $w\in B_{\hat{F}(r,s)}-çekirdek(Ax)$ olsun. Sonra verilen herhangi bir $z\in\mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}|w-z|&\le\lim_{m\to\infty}\sup\sup_{n\in\mathbb{N}}|t_{mn}(Ax)-z|\\&=\lim_{m\to\infty}\sup\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|z-\sum_k\tilde{a}(m,n,k)x_k\right|\\&\le\lim_{m\to\infty}\sup\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_k\tilde{a}(m,n,k)(z-x_k)\right|+\lim_{m\to\infty}\sup\sup_{n\in\mathbb{N}}|z|\left|1-\sum_k\tilde{a}(m,n,k)\right|\\&=\lim_{m\to\infty}\sup\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_k\tilde{a}(m,n,k)(z-x_k)\right|\qquad(31)\end{aligned}$$

yazılır.

Şimdi $L(x)=\lim\sup_k|x_k-z|$ alalım ve herhangi bir $\varepsilon>0$ için $|x_k-z|\le L(x)+\varepsilon$ olur öyle ki $k\ge k_0$ kalır. O halde

$$\begin{aligned}\left|\sum_k\tilde{a}(m,n,k)(z-x_k)\right|&=\left|\sum_{k<k_0}\tilde{a}(m,n,k)(z-x_k)+\sum_{k\ge k_0}\tilde{a}(m,n,k)(z-x_k)\right|\\&\le\sup_k|z-x_k|\sum_{k<k_0}|\tilde{a}(m,n,k)|+\left[L(x)+\varepsilon\right]\sum_{k\ge k_0}|\tilde{a}(m,n,k)|\qquad(32)\\&\le\sup_k|z-x_k|\sum_{k<k_0}|\tilde{a}(m,n,k)|+\left[L(x)+\varepsilon\right]\sum_{k\ge k_0}|\tilde{a}(m,n,k)|\end{aligned}$$

yazılır. Dolayısıyla hipotez ışığı altında $\lim_{m\to\infty}\sup\sup_{n\in\mathbb{N}}$ uygulanır ve (31) ile (32) birleştirilirse;

$$|w-z| \le \lim_{m\to\infty}\sup\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_k \tilde{a}(m,n,k)(z-x_k)\right| \le L(x)+\varepsilon$$

elde edilir. Bu da $w\in K-çekirdek(x)$ olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır.

Şimdi de teorem (3.3.2) ile benzer olan iki teoremi ispatsız olarak vereceğiz.

Teorem 3.3.3- Her $x\in\ell_\infty$ için $K-çekirdek(Ax)\subseteq B_{\hat{F}(r,s)}-çekirdek(x)$ olması için gerek ve yeter şart $A\in(\hat{c}^{f(r,s)}:c)_{reg}$ ve $\lim_{m\to\infty}\sup\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k|\tilde{a}(m,n,k)|=1$ şartlarının sağlanmasıdır.

Teorem 3.3.4- Her $x\in\ell_\infty$ için $B_{\hat{F}(r,s)}-çekirdek(Ax)\subseteq B_{\hat{F}(r,s)}-çekirdek(x)$ olması için gerek ve yeter şart $A\in(\hat{c}^{f(r,s)}:\hat{c}^{f(r,s)})_{reg}$ ve $\lim_{m\to\infty}\sup\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k|\tilde{a}(m,n,k)|=1$ şartlarının sağlanmasıdır.

Teorem 3.3.5- Her $x\in\ell_\infty$ için $B_{\hat{F}(r,s)}-çekirdek(Ax)\subseteq st-çekirdek(x)$ olması için gerek ve yeter şart $A\in(st\cap\ell_\infty:\hat{c}^{f(r,s)})_{reg}$ ve $\lim_{m\to\infty}\sup\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k|\tilde{a}(m,n,k)|=1$ şartlarının sağlanmasıdır.

İspat - İlk olarak her $x\in\ell_\infty$ için $B_{\hat{F}(r,s)}-çekirdek(Ax)\subseteq st-çekirdek(x)$ olduğunu kabul edelim. $x\in st\cap\ell_\infty$ aldığımızda $A\in(st\cap\ell_\infty:\hat{c}^{f(r,s)})_{reg}$ olduğu açıkça görülür. Aynı zamanda herhangi bir x için $st-çekirdek(x)\subseteq K-çekirdek(x)$ [16] olduğundan teorem (3.3.2)'de ki $\lim_{m\to\infty}\sup\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k|\tilde{a}(m,n,k)|=1$ eşitliği teorem 3.3.2' de görülür. Tersine $A\in(st\cap\ell_\infty:\hat{c}^{f(r,s)})_{reg}$ olsun , $\lim_{m\to\infty}\sup\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k|\tilde{a}(m,n,k)|=1$ şartı sağlansın ve $w\in B_{\hat{F}(r,s)}-çekirdek(Ax)$ alalım. Sonra (31) eşitliğini tekrar yazabiliriz.

Şimdi $\beta=st-\lim\sup|z-x_k|$ olsun. Eğer $E=\{k:|x_k-z|\ge\beta+\varepsilon\}$ yazarsak $\delta(E)=0$ ve $k\notin E$ olduğunda $|z-x_k|\le\beta+\varepsilon$ olacağından

$$\left|\sum_k \tilde{a}(m,n,k)(z-x_k)\right| = \left|\sum_{k\in E}\tilde{a}(m,n,k)(z-x_k) + \sum_{k\notin E}\tilde{a}(m,n,k)(z-x_k)\right|$$
$$\leq |z-x_k|\sum_{k\in E}|\tilde{a}(m,n,k)| + \sum_{k\notin E}|\tilde{a}(m,n,k)||z-x_k|$$
$$\leq |z-x_k|\sum_{k\in E}|\tilde{a}(m,n,k)| + [\beta+\varepsilon]\sum_{k\notin E}|\tilde{a}(m,n,k)|$$

elde edilir. Böylece $\lim\limits_{m\to\infty}\sup\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}$ operatörünü uygulayarak ve (27) ile

$\lim\limits_{m\to\infty}\sup\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\sum\limits_k|\tilde{a}(m,n,k)|=1$ eşitliğini kullanarak

$$\lim_{m\to\infty}\sup\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_k \tilde{a}(m,n,k)(z-x_k)\right| \leq \beta+\varepsilon \qquad (33)$$

elde edilir. Böylece (31) ve (33)'den $|w-z|\leq\beta+\varepsilon$ olduğu anlaşılır. ε, keyfi olduğundan $w\in st-çekirdek(x)$ olup ispat tamamlanır.

BÖLÜM 4

4.1- Null (sıfıra yakınsak) ve Yakınsak Dizilerin Mutlak $p-$Toplanabilme Fibonacci Fark Uzayları

Bu bölümde Fibonacci null ve Fibonacci yakınsak dizilerin Fibonacci mutlak $p-$toplanabilme $\ell_p(\hat{F}), c_0(\hat{F})$ ve $c(\hat{F})$ $(0<p<1)$ yeni dizi uzayları oluşturularak $\ell_p(\hat{F}), c_0(\hat{F})$ ile $c(\hat{F})$ uzayları ve standart dizi uzayları arasındaki bazı kapsama bağıntıları, bu uzayların izometrik olarak izomorf oldukları, α, β, γ dualleri ve matris dönüşümleri verildi[21].

$A=(a_{nk})$ sonsuz matrisi için bazı matris sınıflarının karakterizasyon şartları için kullanacağımız aşağıdaki ifadeleri verelim:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k |a_{nk}|<\infty \qquad (34)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk}=0 \text{ , her } k\in\mathbb{N} \text{ için} \qquad (35)$$

$$\exists \alpha_k\in\mathbb{C} \ni \lim_{n\to\infty} a_{nk}=\alpha_k \text{ , her } k\in\mathbb{N} \text{ için} \qquad (36)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k a_{nk}=0 \qquad (37)$$

$$\exists \alpha\in\mathbb{C} \ni \lim_{n\to\infty}\sum_k a_{nk}=\alpha \qquad (38)$$

$$\sup_{k\in F}\sum_n \left|\sum_{k\in K} a_{nk}\right|<\infty \qquad (39)$$

$$\sup_{k,n\in\mathbb{N}} |a_{nk}|<\infty \qquad (40)$$

Burada F , $\mathbb{N}$ nin tüm sınırlı alt kümelerinin toplam kümesini ifade eder.

Şimdi de bazı klasik dizi uzayları arasındaki matris dönüşümleri ile ilgili bir lemma verelim.

Lemma 4.1.1- Aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

(a) $A=(a_{nk})\in(c_0,c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (34) ve (35) şartlarının sağlanmasıdır.

(b) $A=(a_{nk})\in(c_0,c)$ olması için gerek ve yeter şart (34) ve (36) şartlarının sağlanmasıdır.

(c) $A=(a_{nk})\in(c,c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (34), (35) ve (37) şartlarının sağlanmasıdır.

(d) $A=(a_{nk})\in(c,c)$ olması için gerek ve yeter (34), (36) ve (38) şartlarının sağlanmasıdır.

(e) $A=(a_{nk})\in(c_0,\ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (34) şartının sağlanmasıdır.

(f) $A=(a_{nk})\in(c_0,\ell_1)$ olması için gerek ve yeter (39) şartının sağlanmasıdır.

(g) $A=(a_{nk})\in(\ell_p,c)$ olması için gerek ve yeter şart (34) ve (40) $(0<p<1)$ şartlarının sağlanmasıdır.

(h) $A=(a_{nk})\in(\ell_p,\ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (40) $(0<p<1)$ şartının sağlanmasıdır.

Bir $\hat{F}$ Fibonacci matrisinin $\hat{F}^{-1}=(g_{nk})$ tersi her $k,n\in\mathbb{N}$ için

$$g_{nk}=\begin{cases}\dfrac{f_{n+1}^2}{f_k f_{k+1}}, & 0\le k\le n,\\ 0, & k>n,\end{cases}$$

basitçe bu şekilde hesaplanabilir. Şimdi de tüm dizilerin kümesi olarak $\ell_p(\hat{F}), c_0(\hat{F})$ ve $c(\hat{F})$ Fibonacci fark dizi uzaylarının $\hat{F}$ - dönüşümleri sırasıyla;

$$\ell_p(\hat{F})=\left\{x=(x_n)\in w:\sum_n\left|\frac{f_n}{f_{n+1}}x_n-\frac{f_{n+1}}{f_n}x_{n-1}\right|^p<\infty\right\},\ (0<p<1),$$

$$c_0(\hat{F})=\left\{x=(x_n)\in w:\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f_n}{f_{n+1}}x_n-\frac{f_{n+1}}{f_n}x_{n-1}\right)=0\right\},$$

$$c(\hat{F})=\left\{x=(x_n)\in w:\exists l\in\mathbb{C}\ \ni \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f_n}{f_{n+1}}x_n-\frac{f_{n+1}}{f_n}x_{n-1}\right)=l\right\}$$

şeklindedir.

Ayrıca $\ell_p(\hat{F}), c_0(\hat{F})$ ve $c(\hat{F})$ uzaylarının $\ell_p(\hat{F})=(\ell_p)_{\hat{F}}$, $c_0(\hat{F})=(c_0)_{\hat{F}}$ ve $c(\hat{F})=c_{\hat{F}}$ şeklinde de gösterimlerini yazabiliriz.

Bir $x=(x_k)$ dizisinin $\hat{F}$ -dönüşümü , $y=(y_k)$ dizisidir ve her $k\in\mathbb{N}$ için

$$y_k=\hat{F}_k(x)=\frac{f_k}{f_{k+1}}x_k-\frac{f_{k+1}}{f_k}x_{k-1} \qquad (41)$$

şeklinde tanımlanır ve bu tanımdan faydalanarak her $k\in\mathbb{N}$ için

$$x_k=\sum_{j=0}^{k}\frac{f_{k+1}^2}{f_j f_{j+1}}y_j \qquad (42)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.1- Aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

(i) $\ell_p(\hat{F}), c_0(\hat{F})$ ve $c(\hat{F})$ uzayları toplama ve skalerle çarpma ile lineer uzaylardır.

(ii) $\ell_p(\hat{F})$ uzayı $\|x\|_p=\sum_n\left|\hat{F}_n(x)\right|^p$ normuyla tamamen $p-$normlu uzaydır.

(iii) $c_0(\hat{F})$ ve $c(\hat{F})$ uzayları $\|x\|_{c_0(\hat{F})}=\|x\|_{c(\hat{F})}=\|\hat{F}x\|_\infty$ normuyla $BK-$uzaylarıdır.

İspat- Verilenlerin ispatı açıktır.

Not 4.1.1- $\ell_p(\hat{F}), c_0(\hat{F})$ ve $c(\hat{F})$ uzaylarından alınan en az bir dizi için $\|x\|_p\neq\||x|\|_p$, $\|x\|_{c_0(\hat{F})}\neq\||x|\|_{c_0(\hat{F})}$, $\|x\|_{c(\hat{F})}\neq\||x|\|_{c(\hat{F})}$ eşitsizlikleri geçerlidir yani $\ell_p(\hat{F}), c_0(\hat{F})$ ve $c(\hat{F})$ uzayları mutlak olmayan dizi uzayı tipleridir (burada $|x|=(|x_k|)$ 'dır). λ uzayı ℓ_p, c_0 ve c uzaylarından herhangi biri olsun. (41) notasyonu ile $T:\lambda(\hat{F})\rightarrow\lambda$, $x\mapsto y=Tx=\hat{F}x$ şeklinde tanımlanan dönüşüm, normu koruyan birebir, örten ve lineer bir fonksiyondur. Buradan hareketle aşağıdaki sonucu yazalım.

Sonuç 4.1.1- Mutlak olmayan $\ell_p(\hat{F}), c_0(\hat{F})$ ve $c(\hat{F})$ Fibonacci fark dizi uzayları norm veya $p-$normuyla sırasıyla ℓ_p, c_0 ve c uzaylarıyla lineer izomorfiktir yani; $\ell_p(\hat{F})\cong\ell_p$, $c_0(\hat{F})\cong c_0$ ve $c(\hat{F})\cong c$ 'dir.

Şimdi de $c_0(\hat{F})$ ve $c(\hat{F})$ uzaylarıyla ilgili bazı kapsama bağıntıları verelim.

Teorem 4.1.2 - $c_0(\hat{F})\subset c(\hat{F})$ kapsama bağıntısı geçerlidir.

İspat - Aslında $c_0(\hat{F}) \subset c(\hat{F})$ kapsama bağıntısının sağlandığı açıktır. Bu kapsama bağıntısını göstermek için $x = (x_k) = \sum_{j=0}^{k} f_{k+1}^2 / f_j^2$ dizisini düşünelim. Daha sonra (41)'den her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\hat{F}_k(x) = \frac{f_k}{f_{k+1}} \sum_{j=0}^{k} \frac{f_{k+1}^2}{f_j^2} - \frac{f_{k+1}}{f_k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f_k^2}{f_j^2} = \frac{f_{k+1}}{f_k}$$

yazılır ve buradan (3) eşitliğinden $k \to \infty$ için $\hat{F}_k(x) = \frac{f_k}{f_{k+1}} \to \varphi$'dir. Yani $\hat{F}(x) \in c \setminus c_0$'dır. Böylece x dizisi $c(\hat{F})$'de bulunur fakat $c_0(\hat{F})$'de bulunmaz. Sonuç olarak $c_0(\hat{F}) \subset c(\hat{F})$ sağlanır.

Teorem 4.1.3 - ℓ_∞ uzayı, $c_0(\hat{F})$ ve $c(\hat{F})$ uzaylarını kapsamaz.

İspat- $x = (x_k) = (f_{k+1}^2)$ dizisini ele alalım. $k \to \infty$ için

$$f_{k+1}^2 \to \infty \quad \text{ve} \qquad \hat{F}x = e^{(0)} = (1,0,0,...)$$

olduğundan x dizisi $c_0(\hat{F})$ uzayında bulunur fakat ℓ_∞ uzayında bulunmaz. Bu da gösterir ki ℓ_∞ uzayı hem $c_0(\hat{F})$ hem de $c(\hat{F})$ uzaylarını kapsamaz.

Teorem 4.1.4- $c_0 \subset c_0(\hat{F})$ ve $c \subset c(\hat{F})$ kapsama bağıntıları geçerlidir.

İspat - $\lambda = c_0$ veya $\lambda = c$ alalım. $\hat{F} = (f_{nk})$ matrisi aşağıdaki şartları sağladığından

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |\hat{f}_{nk}| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{f_n}{f_{n+1}} + \frac{f_{n+1}}{f_n} \right) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \ ,$$

$$\lim_{n \to \infty} \hat{f}_{nk} = 0 \ ,$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_k \hat{f}_{nk} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{f_n}{f_{n+1}} - \frac{f_{n+1}}{f_n} \right) = \frac{1}{\varphi} - \varphi$$

ve lemma 4.1.1'in (a) ve (d) kısımlarından $\hat{F} \in (\lambda, \lambda)$'dır. Buradan herhangi bir $x \in \lambda$ için $\hat{F}x \in \lambda$'dır. Böylece $x \in \lambda_{\hat{F}}$ ve bu da $\lambda \subset \lambda_{\hat{F}}$ olduğunu gösterir. Şimdi $x = (x_k) = (f_{k+1}^2)$ dizisini alalım. Buradan $x \in \lambda_{\hat{F}} \setminus \lambda$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\lambda \subset \lambda_{\hat{F}}$ kapsama bağıntısı sağlanır.

Sonuç 4.1.2- Her sabit $n \in \mathbb{N}$ için $c^{(-1)} = \{c_k^{(-1)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ ve $c^{(n)} = \{c_k^{(n)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizileri

$$c_k^{(-1)} = \sum_{j=0}^{k} \frac{f_{k+1}^2}{f_j f_{j+1}} \text{ ve } c_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \le k \le n-1 \\ \dfrac{f_{k+1}^2}{f_n f_{n+1}} & , \quad k \ge n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırlar ve aşağıdaki durumlar sağlanır.

(a) $\{c^n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $\ell_p(\hat{F})$ ve $c_0(\hat{F})$ uzayları için bir bazdır ve her $x \in c_0(\hat{F})$ veya her $x \in \ell_p(\hat{F})$ dizisi tek bir $x = \sum_n \hat{F}_n(x)c^{(n)}$ gösterimine sahiptir.

(b) $\{c^{(n)}\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisi $c(\hat{F})$ uzayı için bir bazdır ve her $z = (z_n) \in c(\hat{F})$ dizisi tek bir $z = lc^{(-1)} + \sum_n \left[\hat{F}_n(z) - l \right] c^{(n)}$ gösterimine sahiptir ve $l = \lim_{n\to\infty} \hat{F}_n(z)$ 'dir.

4.2- $\ell_p(\hat{F}), c_0(\hat{F})$ ve $c(\hat{F})$ Uzaylarının Alfa- ,Beta- ve Gamma Dualleri ve Bazı Matris Dönüşümleri

Bu bölümde $\ell_p(\hat{F}), c_0(\hat{F})$ ve $c(\hat{F})$ uzaylarının alfa-,beta- ve gamma dualleri belirlendi, $\ell_p(\hat{F})$ uzayından ℓ_∞, c ve c_0 uzaylarına sonsuz matrislerin sınıfları karakterize edildi.

Teorem 4.2.1- $c_0(\hat{F})$ ve $c(\hat{F})$ uzaylarının alfa duali;

$$d_1 = \left\{ a = (a_k) \in w : \sup_{K \in F} \sum_n \left| \sum_{k \in K} b_{nk} \right| < \infty \right\},$$

kümesi olarak tanımlanır ve $B = (b_{nk})$ matrisi her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$b_{nk} = \begin{cases} \dfrac{f_{n+1}^2}{f_k f_{k+1}} a_n & , \quad 0 \le k \le n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

İspat- $a = (a_n) \in w$ alalım ve

$$a_n x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_{n+1}^2}{f_k f_{k+1}} a_n y_k = \sum_{k=0}^{n} b_{nk} y_k = B_n(y) \qquad (43)$$

eşitliğini düşünelim. (43) eşitliğinden $x = (x_k) \in c_0(\hat{F})$ veya $x = (x_k) \in c(\hat{F})$ için $ax = (a_n x_n) \in \ell_1$ elde etmek için gerek ve yeter şart $y = (y_k) \in c_0$ veya $y = (y_k) \in c$ için $By \in \ell_1$ olmasıdır. Yani $a = (a_n)$ dizisinin $c_0(\hat{F})$ veya

$c(\hat{F})$ uzaylarındaki alfa dualinin olması için gerek ve yeter şart $B \in (c_0, \ell_1) = (c, \ell_1)$ olmasıdır. Lemma 4.1.1'in (f) kısmında A matrisi yerine B alınmasıyla $a \in \left[c_0(\hat{F})\right]^{\alpha} = \left[c(\hat{F})\right]^{\alpha}$ olması için gerek ve yeter şartın $\sup_{K \in F} \sum_n \left| \sum_{k \in K} b_{nk} \right| < \infty$ olması elde edilir. Bu da $\left[c_0(\hat{F})\right]^{\alpha} = \left[c(\hat{F})\right]^{\alpha} = d_1$ olması anlamına gelir.

Teorem 4.2.2- d_2, d_3, d_4 ve d_5 kümeleri;

$$d_2 = \left\{ a = (a_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{j=k}^{n} \frac{f_{j+1}^2}{f_k f_{k+1}} a_j \right| < \infty \right\},$$

$$d_3 = \left\{ a = (a_k) \in w : \lim_{n \to \infty} \sum_{j=k}^{n} \frac{f_{j+1}^2}{f_k f_{k+1}} a_j \ \ her\ k \in \mathbb{N}\ \ için \right\},$$

$$d_4 = \left\{ a = (a_k) \in w : \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{f_{j+1}^2}{f_k f_{k+1}} a_j \right\}$$

$$d_5 = \left\{ a = (a_k) \in w : \sup_{k,n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=k}^{n} \frac{f_{j+1}^2}{f_k f_{k+1}} a_j \right| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanırlar ve aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

(a) $\left[c_0(\hat{F})\right]^{\alpha} = \left[c(\hat{F})\right]^{\alpha} = d_1$,

(b) $\left[c_0(\hat{F})\right]^{\beta} = d_2 \cap d_3$

(c) $\left[c(\hat{F})\right]^{\beta} = d_2 \cap d_3 \cap d_4$

(d) $\left[\ell_p(\hat{F})\right]^{\beta} = d_3 \cap d_5$

(e) $\left[c_0(\hat{F})\right]^{\gamma} = \left[c(\hat{F})\right]^{\gamma} = d_2$

(f) $\left[\ell_p(\hat{F})\right]^{\gamma} = d_5$.

İspat - $$\sum_{k=0}^{n} a_k x_k = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{f_{k+1}^2}{f_i f_{i+1}} y_i \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=k}^{n} \frac{f_{i+1}^2}{f_k f_{k+1}} a_i \right) y_k = C_n(y) \qquad (44)$$

eşitliğini ele alalım ve burada $C = (c_{nk})$ matrisi her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$c_{nk} = \begin{cases} \sum_{i=k}^{n} \frac{f_{i+1}^2}{f_k f_{k+1}} a_i & , \quad 0 \le k \le n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. (44) eşitliğini kullanarak $x \in c_0(\hat{F})$ için

$ax = (a_n x_n) \in c_s$ olması için gerek ve yeter şartın $y = (y_k) \in c_0$ için $Cy \in c$ olmasını

elde ederiz yani; $a \in \left[c_0(\hat{F})\right]^{\beta}$ olması için gerek ve yeter şart $C \in (c_0, c)$ olmasıdır.

Lemma 4.1.1'in (b) kısmını kullanarak her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k \left| \sum_{i=k}^{n} \frac{f_{i+1}^2}{f_k f_{k+1}} a_i \right| < \infty \ ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=k}^{n} \frac{f_{i+1}^2}{f_k f_{k+1}} a_i$$

elde edilir. Sonuç olarak $\left[c_0(\hat{F})\right]^{\beta} = d_2 \cap d_3$ bulunur. Benzer şekilde $c(\hat{F})$, $\ell_p(\hat{F})$

uzaylarının beta dualleri ve $c_0(\hat{F})$, $c(\hat{F})$, $\ell_p(\hat{F})$ uzaylarının gamma dualleri

gösterilebilir.

Şimdi de $(\ell_p(\hat{F}) : \ell_\infty)$, $(\ell_p(\hat{F}) : c)$ ve $(\ell_p(\hat{F}) : c_0)$ sonsuz matrislerinin sınıflarını

karakterize eden teoremler verelim.

Teorem 4.2.3- $A = (a_{nk}) \in (\ell_p(\hat{F}) : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{k,n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j=k}^{\infty} \frac{f_{j+1}^2}{f_k f_{k+1}} a_{nj} \right| < \infty \qquad (45)$$

olmasıdır.

İspat- $A = (a_{nk}) \in (\ell_p(\hat{F}) : \ell_\infty)$ ve $x = (x_k) \in \ell_p(\hat{F})$ olsun. Böylece Ax mevcut olup

ve ℓ_∞ uzayının elemanıdır. O halde her $j, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$x^{(k)} = \left\{x_j^{(k)}\right\} \in \ell_p(\hat{F})$ için

$$x_j^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{f_{j+1}^2}{f_k f_{k+1}} & , \quad j \ge k \\ 0 & , \quad 0 \le j \le k-1 \end{cases} \qquad (46)$$

şeklinde tanımlanır ve her $k \in \mathbb{N}$ için $Ax^{(k)} = (\sum_{j=k}^{\infty} f_{j+1}^2 a_{nj} / f_k f_{k+1}) \in \ell_\infty$ yazılır. Bu da

(45) durumunu gerektirir. Diğer taraftan (45) eşitsizliğinin var olduğunu kabul

edelim ve herhangi bir $x = (x_k) \in \ell_p(\hat{F})$ alalım. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için

$A_n \in [\ell_p(\hat{F})]^{\beta}$ yazılır ve Ax elde edilmiş olur. Sabit bir $n \in \mathbb{N}$ alalım ve her

$m,n \in \mathbb{N}$ için (42) eşitliği ile beraber $\sum_k a_{nk} x_k$ serisinin m 'inci terimine kadar olan toplamını düşünerek

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=k}^{m} \frac{f_{j+1}^2}{f_k f_{k+1}} a_{nj} y_k \qquad (47)$$

eşitliğini elde ederiz. (47) eşitliğinde $m \to \infty$ için limit alınırsa her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k = \sum_k e_{nk} y_k = E_n(y) \qquad (48)$$

elde edilir ve eşitlikteki $E = (e_{nk})$ matrisi her $k,n \in \mathbb{N}$ için

$$e_{nk} = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{f_{j+1}^2}{f_k f_{k+1}} a_{nj} \qquad (49)$$

şeklindedir. Böylece

$$\begin{aligned} \left| \sum_k a_{nk} x_k \right|^p &= \left| \sum_k \sum_{j=k}^{\infty} \frac{f_{j+1}^2}{f_k f_{k+1}} a_{nj} y_k \right|^p \\ &\le \left(\sum_k \left| \sum_{j=k}^{\infty} \frac{f_{j+1}^2}{f_k f_{k+1}} a_{nj} \right| |y_k| \right)^p \\ &\le \left(\sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=k}^{\infty} \frac{f_{j+1}^2}{f_k f_{k+1}} a_{nj} \right| \right)^p \left(\sum_k |y_k| \right)^p \\ &\le \left(\sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=k}^{\infty} \frac{f_{j+1}^2}{f_k f_{k+1}} a_{nj} \right| \right)^p \sum_k |y_k|^p \end{aligned}$$

olduğundan $n \in \mathbb{N}$ üzerinden supremum alınırsa ;

$$\|Ax\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_k a_{nk} x_k \right| \le \left(\|y\|_p \right)^{1/p} \sup_{k,n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=k}^{\infty} \frac{f_{j+1}^2}{f_k f_{k+1}} a_{nj} \right| < \infty$$

elde edilir. Yani $Ax \in \ell_\infty$ olup bu da istenendir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.4- $A = (a_{nk}) \in (\ell_p(\hat{F}) : c)$ olması için gerek ve yeter şart (45) şartının ve $\exists \alpha_k \in \mathbb{C}$ ile her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{f_{j+1}^2}{f_k f_{k+1}} a_{nj} = \alpha_k \qquad (50)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat- $A = (a_{nk}) \in (\ell_p(\hat{F}) : c)$ olsun. O halde her $x = (x_k) \in \ell_p(\hat{F})$ için c uzayında

Ax elde edilir ve $c \subset \ell_\infty$ kapsama bağıntısı sağlandığından teorem 4.2.3'de (45) şartının sağlandığı gösterilmiştir. (50) eşitliğinin gerekliliği de teorem 4.2.3'de (46) eşitliğinde tanımlanan $x^{(k)} = \left\{x_j^{(k)}\right\} \in \ell_p(\hat{F})$ dizisi alınarak gösterilir. Diğer taraftan (45) ve (50) şartlarının sağlandığını kabul edelim ve herhangi bir $x = (x_k) \in \ell_p(\hat{F})$ alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \left\{\ell_p(\hat{F})\right\}^\beta$ olduğundan Ax mevcut olup ve (48) eşitliği göz önüne alınarak (40) ve (36) eşitliklerinde a_{nk} yerine e_{nk} yazılmasıyla (40), (36) ile (45), (50) eşitlikleri birbirleriyle denk olacaklardır. Burada e_{nk} (49)'da verilen eşitliktir. Sonuç olarak (48) eşitliğinden $Ey \in c$ ve dolayısıyla $A \in (\ell_p(\hat{F}) : c)$ 'dir.

Şimdi de teorem 4.2.4'de c yerine c_0 yazıldığında oluşan sonucu verelim.

Sonuç 4.2.1- $A = (a_{nk}) \in (\ell_p(\hat{F}) : c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (45) şartının sağlanması ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha_k = 0$ ile (50) şartının sağlanmasıdır.

Teorem 4.2.5- $A = (a_{nk})$ ve $H = (h_{nk})$ sonsuz matrisleri arasında her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$h_{nk} = -\frac{f_{n+1}}{f_n} a_{n-1,k} + \frac{f_n}{f_{n+1}} a_{nk} \qquad (51)$$

ilişkisinin olduğunu varsayalım ve μ de herhangi verilmiş bir dizi uzayı olsun. O halde $A \in (\mu, \lambda(\hat{F}))$ olması için gerek ve yeter şart $H \in (\mu, \lambda)$ olmasıdır. Burada λ uzayı , ℓ_p, c_0 veya c uzaylarından herhangi birisidir.

İspat- $z = (z_k) \in \mu$ alalım. (51)'deki ilişki göz önüne alınarak her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^{m} h_{nk} z_k = \sum_{k=0}^{m} \left(-\frac{f_{n+1}}{f_n} a_{n-1,k} + \frac{f_n}{f_{n+1}} a_{nk} \right) z_k$$

eşitliği elde edilir ve $m \to \infty$ alınarak $H_n(z) = (\hat{F}A)_n(z)$ yazılır. Buradan hareketle $z \in \mu$ için $Az \in \lambda(\hat{F})$ olması için gerek ve yeter şartın $z \in \mu$ için $Hz \in \lambda$ olması sonucuna varılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.3, teorem 4.2.4 ve sonuç 4.2.1 ile teorem 4.2.5 birlikte göz önüne alınarak aşağıdaki sonucu verelim.

Sonuç 4.2.2- $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris ve her $k, n \in \mathbb{N}$ için $a(n,k) = \sum_{j=0}^{n} a_{jk}$ olsun.

O halde aşağıdaki şartlar sağlanır:

(a) $A=(a_{nk})\in(\ell_p(\hat{F}):bs)$ olması için gerek ve yeter şart a_{nk} yerine $a(n,k)$ yazılmasıyla (45) şartının sağlanmasıdır.

(b) $A=(a_{nk})\in(\ell_p(\hat{F}):cs)$ olması için gerek ve yeter şart (45) şartının ve a_{nk} yerine $a(n,k)$ yazılmasıyla (50) şartının sağlanmasıdır.

(c) $A=(a_{nk})\in(\ell_p(\hat{F}):cs_0)$ olması için gerek ve yeter şart (45) şartının ve her $k\in\mathbb{N}$ için $\alpha_k=0$ ile a_{nk} yerine $a(n,k)$ yazılmasıyla (50) şartının sağlanmasıdır.

(d) $A=(a_{nk})\in(\ell_p(\hat{F}):\ell_\infty(\hat{F}))$ olması için gerek ve yeter şart a_{nk} yerine h_{nk} yazılmasıyla (45) şartının sağlanmasıdır.

(e) $A=(a_{nk})\in(\ell_p(\hat{F}):c(\hat{F}))$ olması için gerek ve yeter şart (45) şartının ve a_{nk} yerine h_{nk} yazılmasıyla (50) şartının sağlanmasıdır.

(f) $A=(a_{nk})\in(\ell_p(\hat{F}):c_0(\hat{F}))$ olması için gerek ve yeter şart (45) şartının ve her $k\in\mathbb{N}$ için $\alpha_k=0$ ile a_{nk} yerine h_{nk} yazılmasıyla (50) şartının sağlanmasıdır.

KAYNAKLAR

[1] Allen HS. (1944). T-transformations which leave the core of every bounded sequence invariant. *Journal of the london mathematical society*, **19**, 42-46.

[2] B.Choudhary (1998). An Extension of Knoop's Core Theorem. *J. Math Anal. Appl.* **132**, 226-233.

[3] Başar F. (2012). Summability theory and its applications. Bentham Science Publishers .

[4] Boos J. (2000). Classical and modern methods in summability. *Oxford University Press Inc*, Newyork.

[5] C.Orhan, J.A. Fridy (1997). Statistical Core Theorems. Departmen of Mathematics and Computer Science, **208**, 520-527.

[6] C.Orhan, J.A. Fridy (1997). Statistical Limit Superior and Limit İnferior. Proceedings of the American Mathematical Society, **125**, 3625-3631.

[7] HI. Miller, C. (2001). On almost convergent and statistically convergent subsequences. *Acta. Math. Hung.* ***93***, 135-151.

[8] Candan M. (2014). A new sequence space isomorphic to the space $\ell(p)$ and compact operators. *J.Math. Comput. Sci.* **4 (2)**, 306-334.

[9] Demiriz S. , Kara EE. , Başarır M. On the Fibonacci almost sequence space and Fibonacci core, *Kyungpook Math. J. in press*.

[10] Cooke R.G , (1950). İnfinite matrices and sequence spaces. Mcmillan.

[11] Çakan C, Coşkun H. (2007). Some new inequalities related to the invariant means and uniformly bounded function sequences. *Applied mathematics letters*, **20**, 605-609.

[12] Coşkun H. , Çakan C. (2005). A class of statistical and $\sigma -$conservative matrices. *Czechoslavak mathematical journal*, **55,(3)**, 791-81.

[13] Duran JP. (1972). İnfinite matrices and almost convergence. *Mathematische Zeitschrift*, **128,** 75-83.

[14] Başar F. , Kirişçi M. (2011). Almost convergence and generalized difference matrix. *Computers ve Mathematics with Applications*, **61**, 602- 611.

[15] Coşkun H. , Çakan C. (2003). On the statistical and $\sigma -$cores. *Studia mathematica*, **154 (1),** 29-35.

[16] Connor J. , JA. Fridy , Orhan C. (2006). Core equality results for sequences. *Journal of mathematical analysis and applications*, **321**, 515-523.

[17] JA. Fridy. (1993). Statistical Limit Points. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **118**, 1187-1192.

[18] Kayaduman K. , Furkan H. (2006). İnfinite matrices and $\sigma^A -$core. *Demonstratio mathematica*, **39**, 531-53.

[19] Candan M. , Kayaduman K. (2015). Almost Convergent Sequence Space Derived by Generalized Fibonacci Matrix and Fibonacci Core. *British Journal of Mathematics & Computer Science*, **7 (2),** 150-167.

[20] Kızmaz H. (1981). On certain sequence spaces . *Canad. math. bull.*, **24 (2),** 169-176.

[21] Başarır M. , Başar F. , Kara E.E. (2016). On the spaces of Fibonacci difference absolutely p - summable, null and convergent sequences. *Sarajevo journal of mathematics*, **12 (25),** 167-182.

[22] Jarrah AM. , Malkowsky E. (1990). BK spaces, bases and linear operators. *Ren. Circ. Mat. Palermo II.*, **52** , 177-191.

[23] Scherbakov AA. (1977). Kernels of sequences of complex numbers and their regular transformations. *Mathematical notes of the academy of sciences of the USSR.* **22**, 948-953.

[24] Sıddıqi JA. (1971). İnfinite matrices summing every almost periodic sequences. *Pacific Journal of Mathematics*, 235-251.

[25] Simons S. , (1969). Banach limits, infinite matrices and sublinear functionals. *Journal of mathematical analysis and applications*, **26**, 640-655.

[26] Steinhaus H. (1951). Quality control by sampling. *Collog. Math.*, **2**, 98-108.

[27] G.H. Hardy (1949). Divergent series. *Oxford Üniv. Press,* London.

[28] J.S. Connor (1988). The statistical and strong $p-$Cesaro convergence of sequences. Analysis. **8**, 47-63.

[29] I.J. Maddox (1974). Steinhaus type theorems for summability matrices . *Proc. Amer. Math. Soc.* **45**, 209-213.

[30] P.N. Natarajan (1990). On the core of a sequence over valued fields. *J. Indian Math. Soc.*, **55**, 189-198.

[31] Koshy T. (2001). Fibonacci and Lucas numbers with applications. Wiley.

[32] Kara EE. (2013). Some topological and geometrical properties of new Banach sequence spaces. *J. Inequal. Appl.*, **38**, 15.

[33] Kara EE. , Başarır M. , Mursaleen M. (2012). Compact operators on the Fibonacci difference sequence spaces $\ell_p(F)$ and $\ell_\infty(F)$. *1 st International Eurasian Conf. on Math. Sci. and Appl.*, Prishtine-Kosovo, September, 3-7.

[34] Başarır M. , Başar F. , Kara EE. , On the space of Fibonacci difference null and convergent sequences. *arXiv:1309.0150*.

[35] Kara EE. , Demiriz S. (2013). Some new paranormed Fibonacci difference sequence spaces. *2 st International Eurasian Conf. on Math. Sci. and Appl.*, Sarajevo-Bosnia and Herzegouina. 26-29.

[36] Candan M. (2015). A new approach on the spaces of generalized Fibonacci difference null and convergent sequences. *Mathematica Aeterna*, **5**, 191-210.

[37] Candan M. , Kara EE. (2015). A study on topological and geometrical characteristics of new Banach sequence spaces. Under communacition. 67-84.

[38] B. Choudhary , Nadarsan S. (1989). Functional Analysis with Applications, New Delhi India.

[39] J.A. Fridy (1985). On statistical convergence. Analysis **5**, 301-313.

[40] G.G. Lorentz (1948). A contribution to the theory of divergent sequences, *Acta. Math.*, **80**, 167-190.

[41] J.P. King (1972). Almost summable sequence, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **26**, 75-83.

[42] H.FAST (1951). Surla convergence statistique. *Collog. Math.*, **2** , 241-244.

[43] K.Knoop (1930). Zur theorie der limitierungsverfahren (Erste Mitteilung), Math. Z., **31**, 97-127.

[44] I.Niven, H.S. Zuekerroan and H.Montgororey (1991). An introduction to the theory of numbers, Fifth. Ed. Wiley , Newyork.

[45] Maddox, I.J. 1970. Elements of functional analysis. Cambridge: C. University Press.