TEMMUZ 2018 Yüksek Lisans - Matematik BANAN ALGHOUTHANI

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEUTROSOPHIC HALKALAR

MATEMATİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BANAN ALGHOUTHANI

JULY 2018

Neutrosophic Halkalar

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Necati OLGUN

Banan ALGHOUTHANI

Temmuz 2018

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tezin Adı: Neutrosophic Halkalar
Öğrencinin, Adı Soyadı: Banan ALGHOUTHANİ
Tez SavunmaTarihi: 03.07.2018

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ahmet Necmeddin YAZICI

FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Necati OLGUN

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri :	İmzası
Prof.Dr. İsmet YILDIZ	....
Doç.Dr. Mehmet ŞAHİN	....
Doç.Dr. Necati OLGUN	....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Banan ALGHOUTHANI

ABSTRACT
NEUTROSOPHIC RINGS

ALGHOUTHANI, Banan
M.Sc. in Mathematics
Supervisor: Assoc. Dr. Necati OLGUN
July 2018
41 pages

In this study at the first chapter we introduced neutrosophic rings of characteristic zero, commutative Neutrosophic ring and Neutrosophic subring. At the second chapter we presented pseudo neutrosophic ring and Neutrosophic ideal of neutrosophic ring and proposed some obrevations on the ideal and pseudo Neutrosophic ideal. At the third chapter we gave definitions of Neutrosophic idempotent, neutrosophic zero divisor and the quotient neutrosophic ring. At the fourth we proposed the concept of the Neutrosophic ring homomorphism. At the fifth we gave special types of Neutrosophic rings. At the sixth chapter we introduced Neutrosophic polynomial rings. Finally, we presented Neutrosophic ideal of neutrosophic polynomial ring, Neutrosophic group ring, Neutrosophic biring and Neutrosophic N_ring.

Key words: Neutrosophic group, Neutrosophic ring, pseudo Neutrosophic ring, Neutrosophic idempotent, Neutrosophic zero divisor Neutrosophic ring homomorphism.

ÖZET

NEUTROSOPHIC HALKALAR

ALGHOUTHANI, Banan
Yüksek Lisans Tezi, Matematik
Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Necati OLGUN
Temmuz 2018
41 sayfa

Bu çalışmada ilk bölümde Neutrosophic halka, sıfır karakteristikli Neutrosophic halkalar, komütatif Neutrosophic halka ve Neutrosophic alt halka kavramları tanıtılmış, ikinci bölümde da pseudo Neutrosophic halka ve Neutrosophic halkanın Neutrosophic ideali sunulmuş ve ideal ve pseudo Neutrosophic ideal üzerinde bazı incelemeler önerilmiştir. Üçüncü bölümde Neutrosophic eşkuvvet (idempotent), Neutrosophic sıfır bölen ve bölüm Neutrosophic halkasının tanımları verilmiş, dördüncü bölümde Neutrosophic halka homomorfizmi kavramını önerilmiştir. Beşinci bölümde özel tip Neutrosophic halkalar verilmiştir. altıncı bölümde Neutrosophic polinomlar halkası sunulmaktadır. Son bölümde Neutrosophic polinom halkalarındaki Neutrosophic idealler, Neutrosophic grup halka, neutrosophic ikili halka ve neutrosophik N_halka kavramlarını sunduk.

Anahtar Kelimeler: Neutrosophi, Neutrosophic, Neutrosophic mantık, bulanık küme, Neutrosophic halka, Neutrosophic polinom halkası, Neutrosophic ideal, pseudo Neutrosophic ideal, Neutrosophic R-modülü.

Çok kıymetli aileme, arkadaşlarıma ve tüm yanımda olup yol gösterene teşekkür ederim.

TEŞEKKÜRLER

Bu çalışma konusunun belirlenmesinde ve hazırlanmasında, yanımda olup yol gösteren, bilgi, görüş ve önerilerini esirgemeyen, gösterdiği sabır ve anlayıştan dolayı çok değerli danışman hocam Doç. Dr. Necati OLGUN ‘a teşekkür edirim.

Bu çalışmanın bütün aşamalarında desteğini esirgemeyen eşim Nedal SAWADİ’ye, annem Almasa DUKMAK’a ve babam Adnan ALGHOUTHANI’ye teşekkür edirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BÖLÜM 1

Giriş

Neutrosophik kavramı, 1980 yılında Florentin Smarandache tarafından önerilen kavramdır. Neutrosophic mantık, Neutrosophic olasılık, Neutrosophic küme ve Neutrosophic istatistiklerinin temelidir.

Neutrosophic küme, bulanık kümeyi genelleştirirken, Neutrosophic olasılık, klasik ve kesin olmayan olasılığı genelleştirir, Neutrosophic istatistikler, klasik ve kesin olmayan istatistikleri genelleştirir, fakat Neutrosophic mantık ise, bulanık mantık, sezgisel mantık, Boole mantığı, çoklu değerli mantık, tutarlılık-üstü (paraconsistent) mantığı genelleştirir. Neutrosophic mantıkta, her bir önermeye ilişkin, bir T alt kümesinde doğruluk yüzdesi, bir I alt kümesinde belirsizlik yüzdesi ve bir F alt kümesinde yanlışlık yüzdesi tahmin edilmektedir. Bulanık küme teorisi, belirsizlik içeren bir durumun modellenmesi ile sınırlı olduğundan, belirsizlik içeren bir durumun modellenmesi gerektiğinde Neutrosophic teorinin kullanılması kaçınılmaz hale gelmektedir.

Neutrosophic teorinin ortaya çıkması, Neutrosophic cebirsel yapılar kavramının geliştirilmesine yol açmıştır. Vasantha Kandasamy ve Florentin Smarandache, ilk defa cebirsel yapılarla ilgili çalışmalarında paradigma değişimine neden olan Neutrosophic cebirsel yapılar [2] kavramını önermişlerdir. [2]'de öne sürülen ve üzerinde çalışılan Neutrosophic cebirsel yapıların bir kısmı, Neutrosophic gruplar, Neutrosophic ikili gruplar (bigroup), Neutrosophic N-gruplar, Neutrosophic yarı gruplar (semigroup), Neutrosophic ikili yarı gruplar (bisemigroup), Neutrosophic N-yarı gruplar, Neutrosophic döngüler (loop), Neutrosophic ikili döngüler (biloop), Neutrosophic N-döngü, Neutrosophic grupoidler, Neutrosophic ikili grupoidler ve benzeri konuları kapsamaktadır. Neutrosophic halkalarla ilgili çalışmalar ilk kez Vasantha Kandasamy ve Florentin Smarandache [1] tarafından gerçekleştirilmiştir.[1]'de incelenen Neutrosophic halkalardan bazıları, Neutrosophic polinom halkaları, Neutrosophic matris halkaları, Neutrosophic tamlık bölgesi (integral domain), Neutrosophic tek çarpanlara ayırma bölgesi (unique factorization domains), Neutrosophic bölüm halkaları (division rings), Neutrosophic tamlık kuaterniyonları (integral quaternions), gerçek kuaterniyonların Neutrosophic halkaları, Neutrosophic grup halkalarını ve Neutrosophic yarı grup halkalarını içermektedir.

Bu yazının 2. Bölümünde, Neutrosophic halkaların temel özellikleri sunulmaktadır. Yazının 3. Bölümünde Neutrosophic sıfır bölen ve bölüm Neutrosophic halkasının tanımları verilmiştir. Bölüm 4'te Neutrosophic halka homomorfizmi kavramı önerilmiştir.

Bölüm 5, Neutrosophic polinom halkalarının yapısının incelenmesine ayrılmış ve Neutrosophic polinomlar üzerinde cebirsel işlemler ile Neutrosophic polinom halkalarında çarpanlara ayırma konuları sunulmuştur. Bölme Algoritmasının genel olarak Neutrosophic polinom halkaları için doğru olmadığı görülmüştür. R bir Tamlık Bölgesi olsa bile, $<R \cup I>[x]$ Neutrosophic polinom halkasının bir Tamlık Bölgesi olamayacağı görülmüş ve ayrıca, R Tek Çarpanlara Ayırma Bölgesi olsa bile, $<R \cup I>[x]$'in Tek Çarpanlara Ayırma Bölgesi olamayacağı incelenmiştir. Çalışmanın 6. Bölümünde, Neutrosophic polinom halkalarında Neutrosophic idealler sunulmakta ve sıfırdan farklı tüm Neutrosophic esas ideallerin (principal ideal) bir Neutrosophic asal ideal (prime ideal) olmadığı araştırılmıştır.

BÖLÜM 2

2.1 Bulanık Kümeler

Başlangıç evreni olarak A alınsın ve FA ise A'da boş olmayan bir küme olsun. Bir FA bulanık kümesi, düzenli $\{(f, \mu_{FA}(f))\}$ çiftlerinin kümesi olarak tanımlanır. Burada; $f \in A$, FA'nın μ_{FA}:A→[0,1] üyelik fonksiyonu ve $\mu_{FA} \in [0,1]$ ise herhangi bir $f \in A$ için FA bulanık kümesindeki f elemanının üyelik fonksiyonunun derecesidir[11].

Örnek 2.1.1: U $=\{3,5,6,7,9,10\}$ Söylem evreni olsun. A bulanık kümesi, 'büyük sayı' A=$\{(3,0),(5,0.1),(6,0.2)(7,0.3)(9,0.8)(10,1)\}$ olarak açıklanabilir şeklinde bir fikir olsun.

Bu evrende, 3 sayıları "büyük sayı" değildir, yani, üyelik dereceleri 0'a eşittir. Üyelik dereceleri 0.1, 0.2, 0.3, 0.5 ve 0.8 olan 5-9 sayıları ise kısmen "büyük sayı" fikrine uymaktadır, 10 sayısı ise tam üyelik derecesine sahip en büyük sayıdır.

2.2 Neutrosophic Sayılar

Neutrosophic sayılar, $x(I) = a + bI \mid a, b \in R$ veya $\mathbb{C}$, olarak oluşturulur ve a, x(I) üzerinde belirli kısım (determinate part) ve bI ise $b_1 I + b_2 I = (b_1 + b_2)I$ şeklinde x(I) üzerinde belirsiz kısım (indeterminate part) olarak tanımlanır. Eğer a ve b'nin her ikisi de gerçel sayı ise, x(I)=a+bI bir Neutrosophic gerçel sayı olarak tanımlanır. Eğer a, b veya her ikisi de karmaşık sayı ise, x(I)=a+bI bir Neutrosophic karmaşık sayı olarak tanımlanır [10].

Örnek 2.2.1: x(I)=7+2I bir Neutrosophic sayı ise, 7, x(I) üzerindeki belirli kısım ve 2I ise x(I) üzerindeki belirsiz kısım olur. Benzer şekilde, y(I)=$\sqrt{-3}$I bir karmaşık Neutrosophic sayı ise, 0, y(I) üzerindeki belirli kısım ve $\sqrt{-3}$I ise y(I) üzerindeki belirsiz kısım olur.

2.3 Neutrosophic Kümeler

A başlangıç evreni ve NH, A'nın bir alt kümesi olsun. Eğer k ∈ A'daki bir eleman aşağıdaki şartları sağlıyorsa, NH bir Neutrosophic küme olarak tanımlanır:

$k = (T_{NH}(k), I_{NH}(k), F_{NH}(k)) \in A$

i) $T_{NH}(k)$, $t \in T$ için NH'de %t doğrudur.

ii) $I_{NH}(k)$, $i \in I$ için NH'de %i belirsizdir.

iii) $F_{NH}(k)$, $f \in F$ için NH'de %f yanlıştır.

t+i+f =1 sonucu, klasik ve bulanık mantıklardaki gibi mümkün olduğunu ifade eder. Ayrıca, t+i+f<1 sonucu, sezgisel mantıktaki gibi mümkün olduğunu ifade eder ve t+i+f>1 sonucu tutarlılık-üstü (paraconsistent) mantıktaki gibi mümkün olduğunu ifade eder [2].

Örnek 2.3.1: Bir hastanın ameliyatının başarılı geçme olasılığı hastanedeki doktorundan dolayı "%60 başarılı", bağışıklık sistemindeki zayıflıktan dolayı "%25 başarısız" ve hastanedeki ekipman nedeniyle "%15 belirsizdir".

2.3.1 Bir Neutrosophic Kümenin Tümleyeni

A başlangıç evreni ve NH, A'nın bir Neutrosophic alt kümesi olarak alınırsa, NH'nin tümleyeni $(\mathrm{NH})^{c}$ olarak belirtilir ve şu şekilde tanımlanır:

$T_{(NH)^c}(k) = F_{(NH)}(k)$

$I_{(NH)^c}(k) = \{1^+\} - I_{(NH)^c}(k)$

$F_{(NH)^c}(k) = T_{(NH)}(k)$

$\forall\, k \in A \;\; T_{(NH)}(k), I_{(NH)}(k), F_{(NH)}(k) \in [0,1]$ [9].

2.3.2 İki Neutrosophic Kümenin Kapsaması

A başlangıç evreni, NH ve SH ise A'nın iki Neutrosophic alt kümesi olarak alındığında, aşağıdaki şartlar tam olarak sağlanırsa SH'nin NH'yi kapsadığı söylenir ve $NH \subseteq SH$ şeklinde gösterilir:

$T_{SH} \leq T_{NH}$.

$I_{SH} \leq I_{NH}$.

$F_{SH} \geq F_{NH}$.

$\forall k \in A, T_{NH}, I_{NH}, F_{NH} \in [0,1]$,

$\forall k \in A, T_{SH}, I_{SH}, F_{SH} \in [0,1]$ [9] .

2.3.3 İki Neutrosophic Kümenin Birleşimi

A başlangıç evreni, NH ve SH ise A'nın iki Neutrosophic alt kümesi olarak olsun, aşağıdaki şartlar sağlanırsa, NH ve SH Neutrosophic kümelerinin birleşimi olan NS bir Neutrosophic küme olur ve NS=NH∪SH şeklinde gösterilir:

$$T_{NS}(k) = \max \{T_{NH}(k), T_{SH}(k)\}$$

$$I_{NS}(k) = \max \{I_{NH}(k), I_{SH}(k)\}$$

$$F_{NS}(k) = \max \{F_{NH}(k), F_{SH}(k)\}$$

$\forall k \in A, T_{NH}, I_{NH}, F_{NH} \in [0,1]$,

$\forall k \in A, T_{SH}, I_{SH}, F_{SH} \in [0,1]$ [9] .

2.3.4 İki Neutrosophic Kümenin Kesişimi

A başlangıç evreni, NH ve SH ise A'nın iki Neutrosophic alt kümesi olarak alındığında, ancak ve ancak aşağıdaki şartlar sağlanırsa, NH ve SH Neutrosophic kümelerinin kesişimi olan NS bir Neutrosophic küme olur ve NS=NH∩SH şeklinde gösterilir:

$$T_{NS}(k) = \min \{T_{NH}(k), T_{SH}(k)\}$$

$$I_{NS}(k) = \min \{I_{NH}(k), I_{SH}(k)\}$$

$$F_{NS}(k) = \min \{F_{NH}(k), F_{SH}(k)\}$$

$\forall k \in A, T_{NH}, I_{NH}, F_{NH} \in [0,1]$,

$\forall k \in A, T_{SH}, I_{SH}, F_{SH} \in [0,1]$ [9] .

2.3.5 İki Neutrosophic Kümenin Farkı

A başlangıç evreni, NH ve SH ise A'nın iki Neutrosophic alt kümesi olarak alındığında, ancak ve ancak aşağıdaki şartlar sağlanırsa, NH ve SH Neutrosophic kümelerinin farkı olan NS bir Neutrosophic küme olur ve NS=NH\SH şeklinde gösterilir:

$$T_{NS}(k) = \min\{T_{NH}(k), F_{SH}(k)\}$$

$$I_{NS}(k) = \min\{I_{NH}(k), 1 - I_{SH}(k)\}$$

$$F_{NS}(k) = \min\{F_{NH}(k), T_{SH}(k)\}$$

$\forall k \in A, T_{NH}, I_{NH}, F_{NH} \in [0,1]$,

$\forall k \in A, T_{SH}, I_{SH}, F_{SH} \in [0,1]$ [9] .

Örnek 2.3.2: U başlangıç evreni, PH ve SH aşağıdaki gibi ise U'nun iki Neutrosophic alt kümesi olarak alındığında,

$$NH = \{< K_1(0.6,0.3,0.5), K_1 < (0.2,0.3,0.4) >, K_1 < (0.2,0.8,0.7) >\}$$

$$SH = \{< K_1(0.2,0.6,0.1), K_1 < (0.6,0.3,0.2) >, K_1 < (0.5,0.4,0.1) >\}$$

$k_1, k_2, k_3 \in [0,1]$:

$$(NH)^C = \{< K_1(0.5,0.7,0.6), K_1 < (0.4,0.7,0.2) >, K_1 < (0.7,0.2,0.2) >\}$$

$$(SH)^C = \{< K_1(0.1,0.4,0.2), K_1 < (0.2,0.7,0.6) >, K_1 < (0.1,0.6,0.5) >\}$$

$$NH \cup SH = \{< K_1(0.6,0.6,0.5), K_1 < (0.6,0.3,0.4) >, K_1 < (0.5,0.8,0.7) >\}$$

$$NH \cap SH = \{< K_1(0.2,0.3,0.1), K_1 < (0.2,0.3,0.2) >, K_1 < (0.2,0.4,0.1) >\}$$

$$NH \setminus SH = \{< K_1(0.1,0.4,0.2), K_1 < (0.2,0.3,0.4) >, K_1 < (0.1,0.6,0.5) >\}$$

2.4 Neutrosophic Gruplar

(G,∗) grubu olsun, NHG = (G (I),∗), I ve G'nin ∗ ile oluşturduğu bir Neutrosophic grup olarak tanımlanır.

• Her bir g_1,g_2 ∈ NHG için g_1*g_2=g_2*g_1sağlandığında, NHG'nin değişmeli Neutrosophic grup olduğu fark edilir[1].

Teorem 2.4.1: NHG bir Neutrosophic grup olsun, NHG her zaman bir grup değildir, ancak bir gruba sahip olmak zorundadır [1].

Örnek 2.4.1: Mod 3'e göre çarpım yapıldığında $Z_3/\{0\}$ = {1,2} grubu vardır fakat NH $\mathbb{Z}_3/\{0\}$ ={ 1,2, I ,2I } bir grup değildir.

Örnek 2.4.2: (NH ℤ,+),(NHℚ,+),(NHℝ,+) ve (NHℂ,+) grupları (+) ile Neutrosophic gruptur.

Örnek 2.4.3: (NH $\{\mathbb{Q}-\{0\}\}$, •), (NH $\{\mathbb{R}-\{0\}\}$,•) ve NH ({ $\mathbb{C}-\{0\}$}, •) grupları (•) ile Neutrosophic gruptur.

Örnek 2.4.4: NHG) $\{\!\!\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}_4\}\!\!\}$ grubunun mod 4'e göre matris çarpımı yapıldığında, PHG'nin değişmeli olmayan Neutrosophic grup olduğu kolayca bulunur.

2.4.1 Neutrosophic Alt Gruplar

NHG bir Neutrosophic grup ve SHG, NHG'nin alt kümesi ise, aşağıdaki şartlar sağlandığında SHG kesin olarak Neutrosophic alt grup olarak tanımlanır:

1)SHG ≠ ∅.

2) SHG'nin kendisi bir Neutrosophic gruptur.

3)SHG'nin grup olan bir alt kümesi olmak zorundadır [1].

Örnek 2.4.1.1: NHG Neutrosophic grubu NHG ={} e,a_1, $a_2, a_3, I, a_1I, a_2I, a_3I$} ise, SHG={ e,$a_1, I, a_1I$}, LHG={ e,$a_2, I, , a_2I$}, MHG={ e,$a_3, I, a_3I$} alt grupları NHG'nin Neutrosophic alt gruplarıdır [3].

2.4.2 Neutrosophic Grubun Mertebesi

NHG bir Neutrosophic grup olsun. NHG grubunun mertebesi |NHG| sayma sayısıdır. |PHG| sonlu (resp. infinite) ise NHG sonludur (resp. infinite) [1] .

2.4.3 Neutrosophic Eleman ve Serbest Eleman

Bir NHG Neutrosophic grubu ve $k \in$NHG olacak şekilde bir k elemanı olsun. Eğer $r \in \mathbb{Z}^{+}$ için k^{r}= I varsa, k Neutrosophic eleman olarak adlandırılır ve eğer $r \in \mathbb{Z}^{+}$ yoksa bu durumda k, Neutrosophic serbest eleman olarak adlandırılır [1].

Örnek 2.4.3.1: Mod 10'a göre çarpımda NHG = {1, 3, 7, I, 3I, 8I, 9I} olsun, bu durumda:

- |NHG| = 7
- (I), (3I), (8I) ve (9I), Neutrosophic elemanlardır.
- 1,3 ve 7 Neutrosophic serbest elemanlardır.

BÖLÜM 3

3.1 Netrosofik Halka:

(R , + , .) bir halka olsun. $< \mathrm{R} \cup \mathrm{I} >$, R' nin işlemine göre genelleştirilmiş halka 'ya Neutrosophic halka denir.

$NH(R) = (< \mathrm{R} \cup \mathrm{I} >, +, .)$ ile gösteriyoruz[1] .

Örnek 3.1.1: $\mathbb{Z}$ bir tamsayılar halkası olsun; $\langle \mathbb{Z} \cup \mathrm{I} \rangle = \{a + b\mathrm{I} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. $\langle \mathbb{Z} \cup \mathrm{I} \rangle$ halkası da tamsayılar Neutrosophic halkası olarak isimlendirilir.

Ayrıca, $\mathbb{Z} \subsetneq \langle \mathbb{Z} \cup \mathrm{I} \rangle$ 'dir [1].

Örnek 3.1.2: $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar halkası olsun; $\langle \mathbb{Q} \cup \mathrm{I} \rangle = \{r + s\mathrm{I} \mid r, s \in \mathbb{Q}\}$ halkası da rasyonel sayılar Neutrosophic halkası olarak belirtilir.

Örnek 3.1.3: $\mathbb{R}$ gerçel sayılar halkası olsun; $\langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle$ Neutrosophic halkası da gerçel sayılar Neutrosophic halkası olarak belirtilir.

Örnek 3.1.4: $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar halkası olsun; $\langle \mathbb{C} \cup \mathrm{I} \rangle$ da karmaşık sayılar Neutrosophic halkası olarak belirtilir.

Örnek 3.1.5: $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$ n moduna göre tamsayılar halkası olsun. $\langle \mathbb{Z}n \cup \mathrm{I} \rangle$ n moduna göre tamsayılar Neutrosophic halkası olarak belirtilir.

Örnek 3.1.6: $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$, 3 moduna göre tamsayılar halkası olsun. $\langle \mathbb{Z}_3 \cup \mathrm{I} \rangle = \{0, 1, 2, \mathrm{I}, 2\mathrm{I}, 1 + \mathrm{I}, 2+\mathrm{I}, 1+2\mathrm{I}, 2+2\mathrm{I}\}$ Neutrosophic halkadır.

3.2 Krakteristik Sıfır Nuetrosofik Halkası

$\langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle$ Neutrosophic halka olsun. Eğer, her bir $x \in \langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle$ için $nx = 0$ (n bir tamsayı) durumu sadece n=0 için sağlanıyorsa, bu durumda $\langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle$ Neutrosophic halkası, karakteristik sıfır Neutrosophic halkası olarak adlandırılır.

Eğer $\langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle$ Neutrosophic halkasında, her bir $x \in \langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle$ için $nx=0$ (n bir tamsayı) durumunda $\langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle$, n karakteristiğinin Neutrosophic halkasıdır ve n, $\langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle$ Neutrosophic halkasının karakteristiği olarak adlandırılır.[4]

Örnek 3.2.1: $\langle \mathbb{Q} \cup I \rangle$ bir rasyonel sayılar Neutrosophic halkası olsun. $\langle \mathbb{Q} \cup I \rangle$ karakteristik sıfır Neutrosophic halkasıdır.

Örnek 3.2.2: $\langle \mathbb{C} \cup I \rangle$ bir karmaşık sayılar Neutrosophic halkası olsun. $\langle \mathbb{C} \cup I \rangle$ karakteristik sıfır Neutrosophic halkasıdır.

Örnek 3.2.3: $\langle \mathbb{Z}_4 \cup I \rangle$ = {0, 1, 2, 3, I, 2I, 3I, 1 + I, 2 + I, 3 + I, 2I + 1, 2I+ 2, 2I+ 3, 3I+ 1, 3I+ 2, 3I+ 3} Neutrosophic halka olsun. ⟨Z4 ∪ I⟩ 4 karakteristikli bir Neutrosophic halkadır.

(2I + 2) (2I + 2) = 4I2 + 4 + 8I = 4 ([I + 1 + 2I]) ≡ 0 (mod 4).

Karakteristiği sonlu olan Neutrosophic halkaların tümüne sonlu karakteristikli Neutrosophic halkalar denir.

Örnek 3.2.4: $\langle \mathbb{Z}_5 \cup I \rangle$= {0, 1, 2, 3, 4, I, 2I, 3I, 4I, 1 + I, 2 + I, 3 + I, 4 + I, 2 + 2I, 3 + 2I, 4 + 2I, 3+ 3I, 3 + 4I, 4 + 2I, 4+ 4I, 3I + 2, 3I + 1, 2I + 1, 4I + 2, 4I + 1}, $\langle \mathbb{Z}_5 \cup I \rangle$ 5 karakteristikli bir Neutrosophic halka olsun. Her bir x∈$\langle \mathbb{Z}_5 \cup I \rangle$ için $\langle \mathbb{Z}_5 \cup I \rangle$'nın tüm elemanları 5 x ≡ 0 (mod 5) şeklindedir.

Neutrosophic halkanın karakteristiğinin tanımlanmasından sonar, her Neutrosophic halkanın bir halka olduğunu ve her bir Neutrosophic halkanın sadece bir halka olan uygun bir alt küme içerdiğinin ispatıyla devam edilecektir.

TEOREM 3.1.1: $\langle \mathbb{R} \cup I \rangle$ bir Neutrosophic halka ise $\langle \mathbb{R} \cup I \rangle$ bir halkadır.

İspat: $\langle \mathbb{R} \cup I \rangle$ bir Neutrosophic halka olsun. $\mathbb{R}$ '+' ve '•' nın ikili işlem olduğu bir halka olsun. $\langle \mathbb{R} \cup I \rangle$ 'nın bir halka olduğunu göstermek için $\langle \mathbb{R} \cup I \rangle$ 'nın '•' $\langle \mathbb{R} \cup I \rangle$ = {a + bI / a, b ∈ $\mathbb{R}$} işlemine göre bir yarı grup ve '+' işlemine göre bir abelyen grup olduğunu ispat etmemiz gerekir. a + bI, c+ dI ∈ $\langle \mathbb{R} \cup I \rangle$ olsun. Kapalılığı göstermek için (a + bI) + (c + dI) 'nın $\langle \mathbb{R} \cup I \rangle$ 'de olduğunu göstermek yeterlidir.

a + c ve b + d ∈ R için (a + bI) + (c + dI) = (a + c) + (b + d) I olarak alındığında; (a + bI) + (c + dI) 'nin $\langle \mathbb{R} \cup I \rangle$'de olduğu görülmektedir. Böylece, + işlemine göre kapalılık aksiyomu yerine getirilmiştir.a + c = c + a ve b + d = d + b $\mathbb{R}$'de iken, (a + bI) + (c + dI) = (c + dI) + (a + bI) olduğu kolayca sağlanır.

Böylece, ‘+’ ikili işlemi $\langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle$ işlemine göre değişmelitir.

$\mathbb{R}$ bir halka ve ‘0’ toplamaya göre birim değeri (additive identity) olduğundan, (a + bI + 0) = a + 0 + (b + 0) I = a + bI alınır. Böylece ‘0’, $\langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle$ toplamaya göre birim değeridir. Her bir a + bI ∈ $\langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle$ için $\langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle$’da tek bir – a + (– b) I vardır ve bu (a + bI) + (–a + (–b) I) = 0 şeklindedir. $\mathbb{R}$’deki her bir a ≠ 0 için $\mathbb{R}$’de tek bir –a ve a + (–a) = 0 olduğu gerçeğini gösterir. Böylece ‘+’ işlemine göre $\langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle$ bir abelyen gruptur[1].

3.3 Değişmeli Neutrosophic Halka

$\langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle$ bir Neutrosophic halka olsun. Her bir x, y ∈ $\langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle$ için x y = y x ise $\langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle$ değişmeli Neutrosophic halkadır. Eğer sadece bir çift için bile xy ≠ y x ise bu Neutrosophic halka değişmeli olmayan Neutrosophic halka olarak adlandırılır[1].

Örnek 3.3.1: $\langle \mathbb{Q} \cup \mathrm{I} \rangle$ bir Neutrosophic halka olsun. $\langle \mathbb{Q} \cup \mathrm{I} \rangle$ sıfır karakteristikli neutrosophic bir değişmeli halkadır.

Örnek 3.3.2: $\langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \langle \mathbb{Q} \cup \mathrm{I} \rangle \right\}$ tüm 2 × 2 boyutlu matrislerin bir kümesi olsun.

⟨R ∪ I⟩, matris toplama ve matris çarpma işlemlerine göre sıfır karakteristikli değişmeli olmayan bir halkadır. Eğer 1 ∈ ⟨R ∪ I⟩, her bir x∈ ⟨R ∪ I⟩ için, 1 x = x. 1 = x sağlanıyorsa, ⟨R ∪ I⟩’nın birimli Neutrosophic halka olduğu söylenir. Örnek olarak verilen tüm Neutrosophic halkalar birimli Neutrosophic halkalardır.

Örnek 3.3.3: $\langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \{0, 1, 2, I, 2I, 1 + I, 2 + I, 1 + 2I, 2 + 2I\} \right\}$ ise, $\langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle$ genel matris toplama ve çarpma işlemlerine göre bir Neutrosophic halka ve $\langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle$ sonlu mertebeden değişmeli olmayan bir Neutrosophic halkadır.

Örnek 3.3.4: $\langle Z_2 \cup I \rangle = \{0, 1, I, 1 + I\}$ neutrosophic halka olsun.

$$1. I = I. 1 = I$$
$$I. (1 + I) = I + I^2 = (1 + I)I = 0$$
$$1. (1 + I) = (1 + I). 1 = (1 + I)$$
$$\text{Ve } (1 + I). I = I + I^2 = \mathrm{I}.(1+\mathrm{I}).$$

O zaman $\langle Z_2 \cup I \rangle$ değişmeli neutrosophic halkadır.

3.4 Neutrosophic Alt Halka

$\langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle$ bir Neutrosophic halka P, $\langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle$'nın uygun bir alt kümesi olsun. $\langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle$'daki işlemlerine göre Neutrosophic yapısı oluşturuyorsa P'ye, $\langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle$'nın neutrosophic alt halkası denir.

S'nin $\mathbb{R}$'nin bir alt halkası olması durumunda, P = $\langle \mathrm{S} \cup \mathrm{nI} \rangle$ ve n'nin pozitif bir tamsayı olması yani {P, S'nin alt halkaları ve n I. (n ∈ Z+) ile birlikte oluşturulmaktadır}[1].

Not: S, $\mathbb{R}$'nin bir alt halkası iken, P bir halka olsa bile $\langle \mathrm{S} \cup \mathrm{nI} \rangle$ olarak gösterilemiyorsa, bu durumda P, $\langle \mathbb{R} \cup \mathrm{I} \rangle$'nın Neutrosophic bir alt halkası olarak adlandırılamaz.

Örnek 3.4.1: $\langle \mathbb{Z}_{12} \cup \mathrm{I} \rangle$ 12 karakteristikli sonlu bir Neutrosophic halka olsun. S = {0, 6},$\mathbb{Z}_{12}$'nin alt halkası olduğundan, P = {0, 6, I, 6I, 2I, 3I, 4I, 5I, 7I, 8I, …, 11I, 6+ I, 6 + 2I, …, 6 + 11I}, $\langle \mathbb{Z}_{12} \cup \mathrm{I} \rangle$'nin bir Neutrosophic alt halkasıdır. Bu nedenle, P = $\langle \mathrm{S} \cup \mathrm{I} \rangle$, $\langle \mathbb{Z}_{12} \cup \mathrm{I} \rangle$'nın bir Neutrosophic alt halkasıdır. P1 = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 2I, 4I, 6I, 8I, 10I, 2 + 2I, 2 + 4I, …, 2 +10I, 10 + 2I, …, 10 + 10I}, $\langle \mathbb{Z}_{12} \cup \mathrm{I} \rangle$'nın bir Neutrosophic alt halkası olarak alınsın. Bu durumda P2 = {0, 6 + 6I}, $\langle \mathbb{Z}_{12} \cup \mathrm{I} \rangle$'nin işlemlerine göre alt halkadır fakat Neutrosophic alt halka değildir.

Örnek 3.4.2: $\langle Z_3 \cup I \rangle = \{0, 1,2, I, 2I, 1 + I, 2 + I, 1 + 2I, 2 + 2I\}$ karakteristiği 3 olan sonlu bir neutrosophic halkası olsun. $S = \{0, 1\}$, $Z_3{}'$ün alt halkası olduğundan, $P = \{0, 1, 2I, 1 + 2I\}$, $\langle Z_3 \cup I \rangle'$nın bir neutrosophic alt halkasıdır. Açıkça $P = \langle S \cup 2I \rangle$dir.

BÖLÜM 4

Bir halka tarafından oluşturulmamış Neutrosophic halkalar nasıl karakterize edilir? Bunun için pseudo Neutrosophic halka olarak adlandırılan bir kavram tanımlanmaktadır.

4.1 Pseudo Neutrosophic Halka

T, '+' ve '•' şeklinde iki ikili işlemi olan boş kümeden farklı bir küme olsun. Aşağıdaki koşullar sağılıyorsa T'ye bir pseudo Neutrosophic halka denir:

1. T'nin elemanları, x + yI (x ve y gerçel sayıdır ve en az bir değer için y ≠ 0'dır) olarak şeklinde ifade edilmelidir.
2. (T, +) bir abelyen gruptur.
3. (T, •) bir yarı gruptur.
4. Tüm t, t1, t2 ∈ T için t (t1 + t2) = tt1 + tt2 ve (t1 + t2) t = tt1 + t2t'dir.

Neutrosophic halka ile pseudo Neutrosophic halka arasında herhangi bir görünür ilişki yoktur[5].

Örnek 4.1.1: Mod 12'ye göre toplama işlemine ve genel çarpma işlemine göre T = {0, 2I, 4I, 6I, 8I, 10I} pseudo Neutrosophic halkadır. Açıkça, T bir Neutrosophic halka değildir.

Örnek 4.1.2: T = {2ZI ∪ 0}= {0, ±2I, ±4I, ±6 I, ±8I…, ∞} ise T pseudo Neutrosophic halkadır, Neutrosophic halka değildir.

Örnek4.1.3: mod 9'a göre toplama ve genel çarpma işlemlerine göre $K = \{0, 3I, 6I\}$ pseudo neutrosophic halkadır.

4.2 Neutrosophic Halkanın Neutrosophic İdeali

⟨R ∪ I⟩ herhangi bir Neutrosophic halka olsun, ⟨R ∪ I⟩'nın boş olmayan bir alt kümesi, aşağıdaki şartlar sağlandığında ⟨R ∪ I⟩'nın Neutrosophic ideali olarak tanımlanır;

1. P, ⟨R ∪ I⟩'nın Neutrosophic alt halkasıdır.
2. Her bir p ∈ P ve r ∈ ⟨R ∪ I⟩ için rp ve pr ∈ P'dir[1].

Not: ⟨R ∪ I⟩ değişmeli olmayan Neutrosophic halka ise Neutrosophic sağ ideal ve Neutrosophic sol ideal kavramları da tanımlanabilir.

Örnek 4.2.1: $\langle \mathbb{Z}_{12} \cup I\rangle$, mod 12'ye göre '+' ve '×' işlemlerine göre bir Neutrosophic halka olsun. {0, 6, 2I, 4I, 6I, 8I, 10I, 6 + 2I, …, 6 +10I}, $\langle \mathbb{Z}_{12} \cup I\rangle$'nın Neutrosophic alt halkası olsun. $\langle \mathbb{Z}_{12} \cup I\rangle$'nın bir Neutrosophic ideali olduğu kolayca doğrulanabilir. Şimdi ⟨R ∪ I⟩ Neutrosophic halkasının Neutrosophic pseudo ideali kavramını tanımlayabiliriz.

Örnek 4.2.2: $\langle Z_4 \cup I\rangle = \{0, 1,2,3, I, 2I, 3I\ 1 + I, 2 + I, 3 + I, 1 + 2I, 2 + 2I, 3 + 2I, 1 + 3I, 2 + 3I, 3 + 3I\}$ mod 4'e göre '+' ve '×' işmelerine göre bir neutrosophic halka ve $K = \{0, 2, I, 2I, 3I, 2 + I, 2 + 2I, 2 + 3I\}$, $\langle Z_4 \cup I\rangle$'nın neutrosophic alt halkası olsun. Kolayca $K, \langle Z_4 \cup I\rangle$'nın neutrosophic ideali olduğu doğrulanmaktadır.

4.3 Neutrosophic Halkanın Neutrosophic Pseudo İdeali

⟨R ∪ I⟩ bir Neutrosophic halka olsun, P, R'nin pseudo Neutrosophic alt halkası olsun. Her bir p ∈ P ve r ∈ ⟨R ∪I⟩ için aşağıdaki şartlar sağlandığında, pr, rp ∈ P'dir. Bu durumda P'ye, ⟨R ∪ I⟩'nın pseudo Neutrosophic ideali denir[1][5].

Örnek 4.3.1: $\langle Z_{16}\ \cup\ I\rangle = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots, 15, I, 2I, \ldots, 15I, 1 + I, 2 + I, \ldots, 15 + I, \ldots 15 + 15I\}$, karakteristiği 16 olan bir Neutrosophic halka olsun. $\langle Z_{16} \cup I\rangle$ içinden P = {0, 2I, 4I, 6I, 8I, 10I, 12I, 14I} alınsın. P pseudo Neutrosophic alt halkadır. Aslında, o$\langle Z_{16} \cup I\rangle = 16^2$ ve P, $\langle Z_{16} \cup I\rangle$.'nın bir pseudo Neutrosophic idealidir.

aşağıdaki incelemeleri düzenleylim.

$\langle Z_n \cup I\rangle$ bir Neutrosophic halka n < ∞, o $(\langle Z_n \cup I\rangle) = n^2$ olsun.

Neutrosophic ideal veya pseudo Neutrosophic ideal mertebesi Neutrosophic $\langle Z_n \cup I\rangle$; n<∞ halkasının mertebesini böler mi?

Örnek 4.3.2: $\langle Z_5 \cup I\rangle$ = {0, 1, 2, 3, 4, I, 2I, 3I, 4I, 1 + I, 2 + I, 3+I, 4+I, 1+2I, 2+2I, 3+2I, 4+2I, 1+3I, 2+3I, 3+3I, 4+3I, 1+4I, 2+4I, 3+4I, 4+4I} sınırlı Neutrosophic halka olsun. Açıkça, o$(\langle Z_5 \cup I\rangle) = 25$. {0, I, 2I, 3I, 4I} = P alındığında; P, $\langle Z_5 \cup I\rangle$'nın pseudo Neutrosophic idealidir. $\langle Z_5 \cup I\rangle$'nın hiç Neutrosophic ideali yoktur ve sadece bir tane 5. mertebeden pseudo Neutrosophic ideali vardır.

TEOREM 4.3.1: $\langle Z_p \cup I\rangle$ p'nin asal olduğu bir Neutrosophic halkadır.

$o(\langle Z_p \cup I\rangle) = p^2$.

1. $\langle Z_p \cup I\rangle$ 'nın hiç Neutrosophic ideali yoktur ve
2. $\langle Z_p \cup I\rangle$ 'nın sadece bir tane p. mertebeden pseudo Neutrosophic ideali vardır.

İspat: Verilen $\langle Zp \cup I\rangle$, p'nın asal olduğu p^2. Mertebeden bir Neutrosophic halkadır. $\langle Zp \cup I\rangle$'nın hiç Neutrosophic ideali olmadığını ispatlamak için, bunun aksine, $\langle Zp \cup I\rangle$ 'nın bir Neutrosophic ideali olduğu ve bunun P olduğu varsayılırsa; P= $\langle P1 \cup I\rangle$, P1 ise Zp'nin uygun bir alt halkası olur. P asal olduğundan, Zp'nin {0} ve Zp'den başka hiçbir alt halkası yoktur. Bu nedenle, P = $\langle P1 \cup I\rangle$'nin herhangi bir P1 alt halkası olması imkansızdır. Bu yüzden, $\langle Zp \cup I\rangle$'nın Neutrosophic ideali yoktur.

$\langle Zp \cup I\rangle$ 'nın sadece bir tane pseudo Neutrosophic ideali olduğunu göstermek için, K = {0, I, 2I, 3I, …, (p – 1) I} ve K, $\langle Zp \cup I\rangle$'nın pseudo Neutrosophic ideali olsun. o(K) = p. P asal olduğundan, K\{0}'ın her elemanını K üretir, böylece K maksimal ve minimaldir[1].

Örnek 2.1.20: $\langle \mathbb{Z}_4 \cup I\rangle$ = {0, 1, 2, 3, I, 2I, 3I, 1 + I, 1 + 2I, 1 +3I, 2 + I, 2 + 2I, 2 + 3I, 3 + I, 3 + 2I, 3 + 3I} karakteristiği 4 olan bir Neutrosophic halka olsun. ($\langle \mathbb{Z}_4 \cup I\rangle$'nın hem Neutrosophic idealleri hem de pseudo Neutrosophic idealleri vardır. P = {0, 2, 2I, 2 + 2I} $\subset \langle \mathbb{Z}_4 \cup I\rangle$, alınırsa, P, $\langle \mathbb{Z}_4 \cup I\rangle$'nın Neutrosophic idealidir.

L = {0, I, 2I, 3I} $\subset \langle \mathbb{Z}_4 \cup I\rangle$ alınırsa, L, $\langle \mathbb{Z}_4 \cup I\rangle$'nın pseudo Neutrosophic idealidir. Böylece $\langle \mathbb{Z}_4 \cup I\rangle$'nın hem Neutrosophic idealleri hem de pseudo Neutrosophic idealleri vardır

BÖLÜM 5

5.1 Neutrosophic Eşkuvvet (Idempotent) Elemanı

$\langle R \cup I \rangle$ bir Neutrosophic halka olsun ,$x = a + bI$,$\langle R \cup I \rangle$ ‘nın bir elemanı .
Eğer $x^2 = x$ ve $b \neq 0$ ise $< R \cup I >$ Neutrosophic halkasının bir $x = a + bI$ elemanı eşkuvvet (idempotent) eleman olarak adlandırılır[4].

Örnek 5.1.1: $< Z_3 \cup I >= \{0, 1, 2, I, 2I, 1 + I, 2 + I, 1 + 2I, 2 + 2I\}$ Neutrosophic halkasında I ve $(1 + 2I)$ elemanları eşkuvvet elemanlarıdır.
$I^2 = I.I = I$ ve $(1 + 2I)^2 = (1 + 2I)(1 + 2I) = 1 + 2I + 2I + 4I^2 = 1 + 2I.$

5.2 Neutrosophic Sıfır Bölen

$< R \cup I >$ bir Neutrosophic halka olsun. $< R \cup I >$’da $c \neq \mp d$ olmak üzere y = c + dI varsa, xy = yx= 0 şartını sağlayan ve $a \neq \mp b$ olmak üzere bir $x = a + bI$ elemanı Neutrosophic sıfır bölen olarak adlandırılır[6].

Örnek 5.2.1: $< Z_6 \cup I >$ Neutrosophic halkasında $3 + 5I$ Neutrosophic sıfır bölendir.

$$(3 + 5I).(2 + 4I) = 6 + 12I + 10I + 2OI^2 = 0$$
$$(2 + 4I).(3 + 5I) = 0$$

5.3 Yarı Neutrosophic Sıfır Bölen

$< R \cup I >$ bir Neutrosophic halka ve $x = a + bI$; $a , b \neq 0$ $< R \cup I >$ $'$ nın bir elemanı olsun, Eğer xy = yx= 0 Şartını sağlayan bir y ∈ R varsa, y’ye yarı Neutrosophic sıfır bölen denir[6].

Örnek 5.3.1: $< Z_6 \cup I >$ Neutrosophic halkasında 3 yarı Neutrosophic sıfır bölendir.
$(3).(2 + 4I) = (2 + 4I).(3) = 0.$

5.4 Neutrosophic Nilpotent (Sıfır Güçlü) Eleman

$< R \cup I >$ Neutrosophic halkasında $b \neq 0$ olmak üzere bir $x = a + bI$ elemanı,

$x^n = 0$ şartını sağlayan bir pozitif n tamsayısı varsa, Neutrosophic nilpotent elemandır[6].

Örnek 5.4.1: $< Z_4 \cup I >$ Neutrosophic tamsayılar halkasında 4 moduna göre, $(2 + 2I)$ bir Neutrosophic nilpotent elemandır.çünkü $(2 + 2I)^n = 0$.

Örnek 5.4.2: $< M_{2\times2} \cup I >$ her bir 2 × 2 matrisin Neutrosophic halkası olsun. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olduğu için $A = \begin{pmatrix} 0 & 2I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ elemanı Neutrosophic nilpotent elemandır.

Şimdi bölüm Neutrosophic halkası ve pseudo bölüm Neutrosophic halkasını tanımlayalım.

5.5 Bölüm Neutrosophic Halkası

$\langle R \cup I \rangle$ bir Neutrosophic halka ve P, $\langle R \cup I \rangle$'nin Neutrosophic ideali olsun.

$$\frac{< R \cup I >}{P} = \{a + PI \mid a \in < R \cup I >\}$$

Toplama ve çarpma işlemlerini bu şekilde tanılıyor:

$\forall\, r, s \in \langle R \cup I \rangle$ için

$$(r + P) + (s + P) = (R + S) + P$$

$$\text{Ve} \qquad (r + P)(s + P) = (rs) + P$$

$\frac{<R\cup I>}{P}$ kümesi bir neutrosophic halka oluyorsa o zaman $\frac{<R\cup I>}{P}$'ye neutrosophic bölüm halka denir[1].

Örnek 5.5.1: ⟨Z ∪ I⟩ bir Neutrosophic halka, P = ⟨3Z ∪I⟩, ⟨Z ∪ I⟩'nın Neutrosophic ideali olsun.

$\frac{<Z\cup I>}{P} = \{a + P \mid a \in < Z \cup I >\}$= {P, 1 + P, 2 + P, I + P, 2I + P, (1 + I) + P, (2 + I) + P, (1 + 2I) + P, (2 + 2I) + P}

bölüm Neutrosophic halkası bir Neutrosophic halkadır.

Örnek 5.5.2: $\langle Z_{12} \cup$ I⟩ = {0, 1, 2, 3,4,5, 6, 7, 8,…, 11, I, 2I,3I, 4I, 5I, 6I, 7I, 8I, …,11I, 1 + I, 2+ I,3+I, 4+I, 5+I, 6+I, 7+I, 8+I, …, 11 + I,1+2I, 2+2I, 3+2I, 4+2I, 5+2I, 6+2I, 7+2I, 8+2I,…, 11+2I, …, 11 + 11I} bir Neutrosophic halka olsun. P = {0, 6, I, 2I, …, 11I, 1 + 6, …, 11I + 6}, $\langle Z_{12}$ ∪I⟩'nin Neutrosophic idealidir.bu durumda

$\frac{<Z_{12} \cup I>}{P} = \{P, 1+P, 2+P, 3+P, 4+P, 5+P\}$ bölüm bir halkadır fakat Neutrosophic halka değildir.

5.6 False Neutrosophic Bölüm Halkas

⟨R ∪ I⟩ bir Neutrosophic halka ve P, ⟨R ∪ I⟩'nın Neutrosophic ideali olsun. Eğer $\frac{<R \cup I>}{P}$ bölümü sadece bir halka ise ve Neutrosophic halka değilse, bu durumda $\frac{<R \cup I>}{P}$ false Neutrosophic bölüm halkası olarak adlandırılır[1].

Örnek 5.6.1: ⟨Z12 ∪ I⟩ bir Neutrosophic halka ve H = {0, 2I,4I, 6I, 8I, 10I}, ⟨Z12 ∪ I⟩'nin pseudo Neutrosophic ideali olsun. $\frac{<Z_{12} \cup I>}{H} = \{H, 1+H, 2+H, 3+H, 4+H, 5+H, 6+H, 7+H, 8+H, 9+H, 10+H, 11+H, I\, H, (1+I)+H, (2+I)+H, (3+I)+H, (4+I)+H, (5+I)+H, (6+I)H, (7+I)+H, (8+I)+H, (9+I)+H, (10+I)+H, (11+I)+H\}$ bölüm halkası farklı şekilde isimlendirilen bir Neutrosophic halkadır.

5.7 Pseudo Bölüm Neutrosophic Halkası

⟨R ∪ I⟩ bir Neutrosophic halka olsun. P, ⟨R ∪ I⟩'nın bir pseudo Neutrosophic ideali olsun. Eğer $\frac{<R \cup I>}{P}$ bölüm halkası bir Neutrosophic halka ise bu durumda pseudo bölüm Neutrosophic halkası olarak adlandırılır. Eğer $\frac{<R \cup I>}{P}$ sadece bir halka ise, bu durumda false pseudo bölüm Neutrosophic halkası olarak adlandırılır[1].

Örnek 5.7.1: $\langle Z_6 \cup I\rangle = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, I, 2I, 3I, 4I, 5I, 1+I, 2+I, 3+I, 4+I, 5+I, 1+2I, 2+2I, 3+2I, 4+2I, 5+2I, 1+3I, 2+3I, 3+3I, 4+3I, 5+3I, 1+4I, 2+4I, 3+4I, 4+4I, 5+4I, 1+5I, 2+5I, 3+5I, 4+5I, 5+5I\}$bir Neutrosophic halka olsun ve P = {0, I, 2I, 3I, 4I, 5I}, $\frac{<Z_6 \cup I>}{P}$'nin pseudo Neutrosophic ideali olsun. Bu durumda $\frac{<Z_6 \cup I>}{P} = \{P, 1+P, 2+P, 3+P, 4+P, 5+P\}$ bölüm halkası sadece halka ama neutrosophic halka değil o yüzden $\frac{<Z_6 \cup I>}{P}$ false pseudo Neutrosophic halka olur.

P = {0, 2I, 4I}, $\frac{<Z_6 \cup I>}{P}$'nin pseudo Neutrosophic ideali olsun. Bu durumda $\frac{<Z_6 \cup I>}{P} = \{P, 1 + P, 2 + P, 3 + P, 4 + P, 5 + P, I + P, (1 + I) + P, (2 + I) + P, (3 + I) + P, (4 + I) + P, (5 + I) + P\}$ bölüm halkası pseudo neutrosophic bölüm halkasıdır.

P = {0, I, 2I, 3I, 4I, 5I, 2+I, 2+2I, 2+3I, 2+4I, 2+5I}, $\frac{<Z_6 \cup I>}{P}$'nin Neutrosophic ideali olsun. Bu durumda $\frac{<Z_6 \cup I>}{P} = \{P, 1 + P, 2 + P, 3 + P, 4 + P, 5 + P\}$ bölüm halkası sadece halka ama neutrosophic halka değil o yüzden $\frac{<Z_6 \cup I>}{P}$ false Neutrosophic halka olur.

Örnek 5.7.2: $\langle Z_7 \cup \mathrm{I}\rangle$ bir Neutrosophic halka olsun. H = {0, I, 2I, 3I, 4I, 5I, 6I} alındığında;

$$\frac{< Z_7 \cup I >}{H} = \{H, 1 + H, 2 + H, 3 + H, 4 + H, 5 + H, 6 + H\}$$

$\frac{<Z_7 \cup I>}{H}$'ye false Neutrosophic halkadır.

Teorem 5.7.1: $\langle Z_n \cup \mathrm{I}\rangle$ bir Neutrosophic halka olsun. P, ⟨Zn ∪ I⟩'nın aşağıdaki şartı sağlan bir pseudo ideali olsun; $\frac{<Z_n \cup I>}{P} \cong Z_n$

İspat: $\langle Z_n \cup \mathrm{I}\rangle$'nin bir Neutrosophic halka olduğu verilsin. P = {0, I, 2I, …, (n – 2) I, (n – 1) I} seçildiğinde, P açıkça, $\langle Z_n \cup \mathrm{I}\rangle$ ve o(P) = n'nin bir pseudo Neutrosophic idealidir[1].

Şimdi, pseudo bölüm Neutrosophic halkası,

$\frac{<Z_n \cup I>}{P} = \{P, 1 + P, 2 + P, \dots, (n - 2) + P, (n - 1) + P\} \cong Z_n$.

Bundan dolayı sonraki iddia $\frac{<Z_n \cup I>}{P}$ sadece bir false Neutrosophic bölüm halkası olduğudur.

Örnek 5.7.3: $\langle Z_{10} \cup \mathrm{I}\rangle$ bir Neutrosophic halka olsun. P = {0, 5, 5I, 5 + 5I} ⊂ ⟨Z10 ∪ I⟩ ve P, $\langle Z_{10} \cup \mathrm{I}\rangle$'nın bir ideali olsun.

$\frac{<Z_{10} \cup I>}{P}$= {P, 1 + P, 2 + P, 3 + P, 4 + P, I + P, 2I + P, 3I + P, 4I + P, (1 + 4I) + P, + P (1 + I) + P (1 + 3I) + P, (1 + 4I) + P, 2 + I + P, 2 + 2I + P, 2 + 3I + P, 2 + 4I + P, 3 + I + P, 3 + 2I + P, 3 + 3I + P, 3+ 4I + P, 4 + I + P, 4 + 2I + P, 4 + 3I + P, 4 + 4I + P}

$o\left[\frac{<Z_{10} \cup I>}{P}\right] = 25$'in bir Neutrosophic bölüm halkasıdır.

5.8 Neutrosophic Halka Homomorfizmi

$< R \cup I >$ ve $< S \cup I >$ her hangi iki Neutrosophic halka olsun. $\varphi: < R \cup I > \to < S \cup I >$ dönüşümü aşağıdaki şartlar sağlandığında bir Neutrosophic halka homomorfizmi olarak adlandırılır:

(i) φ bir halka homomorfizmidir.

(ii) $\varphi(I) = I$.

$\{x \in < R \cup I >: \varphi(x) = 0 \}$ kümesi φ'nin çekirdeği olarak adlandırılır ve $ker\varphi$ şeklinde gösterilir[1].

Teorem 5.8.1: $\varphi: < R \cup I > \to < S \cup I >$ bir Neutrosophic halka homomorfizmi olsun ve

$k = ker\varphi$, φ'nin çekirdeği olsun. Bu durumda:

(i) k her zaman $< R \cup I >$'nın bir alt halkasıdır;

(ii) k, $< R \cup I >$'nın neutrosophic alt halkası olamaz;

(iii) k, $< R \cup I >$'nın bir ideali olamaz;

İspat (i) Açıktır. (ii) $\varphi(I) = I$ olduğundan, $I \notin k$ olur ve sonuç gelir. (iii) Doğrudan (ii)'den takip eder[1].

Örnek 5.8.1: $< R \cup I >$ bir Neutrosophic halka ve $\varphi: < R \cup I > \to < R \cup I >$, $\varphi(r) = r \ \forall r \in < R \cup I >$. ile tanımlı bir dönüşüm olsun. Bu durumda, φ bir Neutrosophic halka homomorfizmidir.

Örnek 5.8.2: P, $< R \cup I >$ Neutrosophic halkasının bir Neutrosophic ideali olsun ve $\varphi: < R \cup I > \to \frac{<R \cup I>}{P}$, $\varphi(r) = r + P \ \forall r \in < R \cup I >$ ile tanımlı bir dönüşüm olsun. O zaman $\forall r, s \in < R \cup I >$ için

$$\varphi(r + s) = \varphi(r) + \varphi(s)$$

elde edilir ve bu da φ 'nin bir halka homomorfizmi olduğunu gösterir.

$$\varphi(I) = I + P.$$

Bundan dolayı, φ Neutrosophic halka homomorfizmi değildir. Bu klasik halka kavramı ve Neutrosophic halka kavramı arasındaki diğer bir farktır.

Önerme 5.8.3: $(< R \cup I >, +)$ bir Neutrosophic abelyen grup ve $Hom\,(< R \cup I >, < R \cup I >)$, $(< R \cup I >, +)$'nin kendi içine Neutrosophic endomorfizmlerin kümesi olsun. + ve •, $Hom\,(< R \cup I >, < R \cup I >)$ üzerinde

$$(\psi + \varphi)(x) = \psi(x) + \varphi(x),$$

$$(\psi \bullet \varphi) = \psi\big(\varphi(x)\big), \forall\, \psi, \varphi \in Hom\,(< R \cup I >, < R \cup I >), x \in < R \cup I >.$$

şeklinde tanımlı toplama ve çarpma işlemi olsun. Bu durumda, $Hom\,(< R \cup I >, < R \cup I >)$ bir Neutrosophic halkadır.

İspat: İspatı klasik halka konusundakiyle aynıdır.

BÖLÜM 6

6.1 Neutrosophic Polinom Halkalar

$< R \cup I >$ birimli bir değişmeli neutrosophic halka olsun. x ile herhangi bir sembolü anlayalım $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ Şeklindenki sembollerle, katsayıları $< R \cup I >$ den gelen neutrosophic polinomlar diyelim. Bu şekildeki neutrosophic polinomları $p(x)$, $q(x)$gibi ifadelerle gösterelim:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

burada n negative olmayan bir tamsayı ve a_0 , a_1 , $a_2,\ldots,$ a_n katsayılarının tümü$< R \cup I >$ içindedir.$< R \cup I > [x]$ ile katsayıları$< R \cup I >$ den gelen tüm neutrosophic polinomlar kümesini gösterelim.

$< R \cup I > [x]$'in Neutrosophic halka yapılması için, içindeki iki elemanın birbirine ne zaman eşit olduğunu bilebilmek gerekir, $(< R \cup I > [x])$'nın elemanlarının toplanabilmesi ve çarpılabilmesi gerekir.

Polinom halkalarında olduğu gibi, iki polinomun eşit olduğu durumlarda Neutrosophic polinom halkaları için eşitlik söz konusu olur.

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \text{ ve}$$
$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$$

polinomlarının $(< R \cup I > [x])$ içinde olsun, ancak ve ancak her bir $i \geq 0$ $tamsayısı\ için,$ $a_i = b_i$ a_0 , a_1 , a_2 ,…, a_n, b_0, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ 'nin $< R \cup I >$'dan olması ve $n = m$ $olması\ durumunda$ $p(x) = q(x)$ olur.

İki Neutrosophic polinomun toplanması, genel polinomlarda olduğu gibi yapılır; diğer bir deyişle,

$$p(x) + q(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_kx^k$$

burada her bir i için $c_i = a_i + b_i$. Başka bir ifadeyle, iki Neutrosophic polinomun toplamı, katsayıların toplanması ve terimlerin birleştirilmesi bulunur.

$(5+4I)+(3-6I)x$ ve $(9+5I)-(3+14I)x+(9-I)x^2$'yi topladığımızı varsayalım.

Şu şekilde gerçekleştiririz;

$$(5+4I)+(3-6I)x+(0+0I)x^2+(9+5I)-(3+14I)x+(9-I)x^2 =$$
$$(14+9I)+(0+8I)x+(9-I)x^2.$$

Şimdi $(< R \cup I > [x])$'de iki Neutrosophic polinomun çarpımının nasıl tanımlandığına bakalım.

Eğer, p(x) = a_0 + a_1x + … +a_m x^m ve

q(x) = b_0 + b_1x+ … + b_m x^n

ve $p(x)\,,q(x) \in (< R \cup I > [x])$ ise

$p(x)\,.q(x) = c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_kx^k$, $c_i = a_ib_0+\cdots+a_0b_i$,

burada $I^2 = I$ $kullanılır$

$$p(x) = (3-2I)+(8+5I)x-(10)x^2$$
$$q(x) = (6+I)+(3+7I)x^2+(4+4I)x^3$$

$a_0 = (3-2I)$

$a_1 = (8+5I)$

$a_2 = (-10I)$

$a_3 = a_4 = \cdots = 0$ ve

$b_0 = (6+I)$

b_1= 0

$b_2 = (3+7I)$

$b_3 = (4+4I)$

$b_4 = b_5 = \cdots = 0$

$C_0 = a_0b_0$

$= (3-2I)(6+I)$

$= 18+3I-12I-2I^2$

$= 18-11I$; $I = I^2$

$$C_1 = a_1b_0 + a_0b_1$$
$$= (8+5I)(6+I) + (3-2I)(0)$$
$$= 48 + 8I + 30I + 5I^2$$
$$= 48 + 43I$$

$$C_2 = a_2b_0 + a_1b_{1+}a_0b_2$$
$$= (-10I)(6+I) + (8+5I)(0) + (3-2I)(3+7I)$$
$$= -60I - 10I^2 + 9 + 21I - 6I - 14I^2$$
$$= 9 - 71I$$

$$C_3 = a_3b_0 + a_2b_{1+}a_1b_2 + a_0b_3$$
$$= (0)(6+I) + (-10I)(0) + (8+5I)(3+7I) + (3-2I)(4+4I)$$
$$= 24 + 56I + 15I + 35I^2 + 12 + 12I - 8I - 8I^2$$
$$= 36 + 92I$$

$$C_4 = a_4b_0 + a_3b_{1+}a_2b_2 + a_1b_3 + a_0b_4$$
$$= 0 + 0 + (-10I)(3+7I) + (8+5I)(4+4I) + (3-2I)(0)$$
$$= -30I - 70I^2 + 32 + 32I + 20I + 20I^2$$
$$= 32 - 28I$$

$$C_5 = a_5b_0 + a_4b_{1+}a_3b_2 + a_2b_3 + a_1b_4 + a_0b_5$$
$$= 0 + 0 + 0 + (-10I)(4+4I) + (8+5I)(0)$$
$$= -40I - 40I^2$$
$$= -80I$$

$$C_6 = a_6b_0 + a_5b_{1+}a_4b_2 + a_3b_3 + a_2b_4 + a_1b_5 + a_0b_6$$
$$= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$p(x)q(x) = (18 - 11I) + (48 + 43I)x + (9 - 71I)x^2 + (36 + 92\mathrm{I})x^3 + (32 - 28\mathrm{I})x^4 + (-80\mathrm{I})x^5$$

$(< R \cup I > [x])$ birim elemanlı bir değişmeli Neutrosophic halkadır.

TEOREM 6.1.1: Her Neutrosophic polinomal halka bir polinom halkayı kapsar.

İspat: $(< R \cup I > [x])$ polinom Neutrosophic halka verilsin, R birimli bir değişmeli halka; $< R \cup I >$, R tarafından oluşturulan bir Neutrosophic halka ve I da birimli bir değişmeli halka olsun. $R[x] \subseteq (< R \cup I > [x])$ ve böylece iddia ispat edilir[7].

6.2 Güçlü ve Karışık Neutrosophic Polinom

$(< R \cup I > [x])$ bir Neutrosophic polinom halka olsun. Her bir a_i, $a + bI$ yapısında ve $a, b \in R$, $b \neq 0$ ise $\mathrm{p(x)} = \mathrm{a_0} + \mathrm{a_1 x} + \mathrm{a_2 x^2} + \cdots + \mathrm{a_n x^n}$ polinomu güçlü Neutrosophic polinom olarak adlandırılır. Her bir $b_i \in < R \cup I >$, yani bazı b_i'ler R'den bazı b_j 'ler $c + dI; d \neq 0$ şeklinde ise $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m$ polinomu karışık Neutrosophic polinom olarak adlandırılır.

Bir $t(x) = t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \cdots + t_s x^s$ polinomu, her bir $t_i \in R$ ise polinom olarak adlandırılır[7].

Örnek 6.2.1: $< Z \cup I >$ Neutrosophic tamsayılar halkası, $[< Z \cup I >] [x]$ katsayıları tamsayı olan Neutrosophic polinom halka olsun, diğer deyişle bu Neutrosophic polinom halkadaki katsayılar $a + bI$; a ve b pozitif veya negatif tamsayı olsun yani, $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, $a_i \in < Z \cup I >$ ve $a_i = c_i + d_i I$; $c_i, d_i \in Z$ olsun.

Örnek 6.2.2: Q rasyonel sayılar asal cismi olsun. $< Q \cup I >$ rasyonel sayılar Neutrosophic halkasıdır. $[< Q \cup I >][x]$ Neutrosophic polinom halkasıdır.

Örnek 6.2.3: R gerçel sayılar cismi olsun. $< R \cup I >$ gerçel sayılar Neutrosophic halkası, $[< R \cup I >] [x]$ gerçel sayılar Neutrosophic halkası üzerinde Neutrosophic polinom halkasıdır.

Örnek 6.2.4: C karmaşık sayılar cismi ve $< C \cup I >$ karmaşık sayılar Neutrosophic halkası olsun. $[< C \cup I >] [x]$, katsayıları Neutrosophic karmaşık cisim olan Neutrosophic polinom halkadır.

Örnek olarak verdiğimiz tüm Neutrosophic polinom halkalarının, karakteristiği sıfır olan halkalar olduğunu ve sonsuz sayıda eleman içerdiğini görüyoruz. sonlu karakteristikli Neutrosophic polinom halkalarından örnekler vermeye devam edelim.

Örnek 6.2.5: Z_n, n modülü üzerinde bir tamsayılar halkasıdır. $< Z_n \cup I >$ mod tamsayılarına göre Neutrosophic halka, $[< Z_n \cup I >]$ $[x]$ n karakteristikli polinom Neutrosophic halka, ($n < \infty$) ve n her hangi bir pozitif tamsayısıdır.

Örnek 6.2.6: $Z_2 = \{0 , 1\}$ 2 moduna göre bir tamsayılar halkası olsun.
$\langle Z_2 \cup I \rangle = \{0 , 1 , I , 1 + I\}$. Açıkça $[< Z_2 \cup I >][x]$ katsayıları $< Z_2 \cup I >$'den olan bir Neutrosophic polinom halkasıdır. $[< Z_2 \cup I >][x]$'in karakteristiği 2'dir.

TEOREM 6.2.1: F karakteristiği sıfır olan bir cisim ve $< \mathrm{F} \cup \mathrm{I} >$ Neutrosophic halka olsun. $< \mathrm{F} \cup \mathrm{I} >$'da sıfırın aşikar olmayan bölenleri vardır.

İspat: **:** F karakteristiği sıfır olan bir cisim olarak verilmiş. Dolayısıyla F, Z tamsayılar kümesini kapsar, ayrıca $F \subset < F \cup I >$. ($I^2 = I$) için $x = (7 - 7I)$
ve $y = (3I)$, $x \, . y = (7 - 7I) \, . (3I) = 21I - 21I^2 = 0$ alınsın.
Böylece, R halkası bir cisim veya bir tamlık bölgesi olsa bile $< R \cup I >$ Neutrosophic halkasının sıfır bölenleri vardır.

Örnek 6.2.1.1: $< Z_5 \cup I >$ Neutrosophic halka, $[< Z_5 \cup I >][x]$ Neutrosophic polinom halka olsun.

$$p\,(x) = (4 + 6I\,)x^3$$
$$q\,(x) = (2I)x$$
$$p\,(x).\,q\,(x) = 0$$

alınsın. Z_5 5 karakteristikli asal cisim olmasına rağmen, $[< Z_5 \cup I >][x]$ Neutrosophic polinom halkasının sıfır bölenleri vardır.

TEOREM 6.2.2: R tamlık bölgesi veya cisim olsa bile $(< \mathrm{R} \cup \mathrm{I} > [x])$ Neutrosophic polinom halkası tamlık bölgesi değildir.
İspat okuyucunun incelemesi için bırakılmıştır. Neutrosophic polinom olan herhangi bir $\mathrm{p}(x) = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1 x + \mathrm{a}_2 x^2 + \cdots + \mathrm{a}_\mathrm{n} x^\mathrm{n}$ polinomunun derecesine ilişkin olarak, x; a_0 , a_1 , $\mathrm{a}_2 , \ldots ,$ $\mathrm{a}_\mathrm{n} \in < \mathrm{R} \cup \mathrm{I} >$ için a_n ve n en yüksek derece olmaları koşuluyla $\mathrm{p}(x) =$ n denir.

Sonuç: $\mathrm{f}(x)$ ve $\mathrm{g}(x)$, $(< \mathrm{R} \cup \mathrm{I} > [x])$ içinde herhangi iki Neutrosophic polinom olsun. R bir cisim veya tamlık bölgesidir. Eğer $\mathrm{f}(x)$ ve $\mathrm{g}(x)$, $(< \mathrm{R} \cup \mathrm{I} > [x])$'nın sıfırdan farklı iki polinomu ise,
$\deg\big(\mathrm{f}(x) \bullet \mathrm{g}(x)\big) \leq \deg \mathrm{f}(x) + \deg \mathrm{g}(x)$.

6.3 Neutrosophic Matris Halka

⟨R ∪ I⟩ herhangi bir Neutrosophic halka olsun. Elemanları ⟨R ∪ I⟩'dan alınan n × n boyutlu matrislerin tamamının kümesine Neutrosophic matris halkası denir. Başka bir deyişle, $M_{n\times n}$= $\{M = (a_{ij})|a_{ij}$ ∈ ⟨R ∪ I⟩$\}$. İşlemler, normal matris toplamı ve matris çarpımıdır[1].

Örnek 6.3.1: ⟨Z ∪ I⟩ bir Neutrosophic halka olsun.

$$M_{2\times 2} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b.c.d \in \langle Z \cup I\rangle\right\}$$

Sıfır karakteristikli bir Neutrosophic matris halkasıdır.

Örnek 6.3.2: $\langle Z_2$∪ I⟩ iki karakteristikli bir Neutrosophic halka olsun.

$$M_{2\times 2} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b.c.d \in \langle Z_2 \cup I\rangle\right\}$$

iki karakteristikli bir Neutrosophic matris halkasıdır ve aslında

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & I \end{pmatrix} \text{ ve } y = \begin{pmatrix} 1 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$x \bullet y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & I \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & I \\ 1 + I & I \end{pmatrix}$$

$$y \bullet x = \begin{pmatrix} 1 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} I & 0 \\ 1 & I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$x \bullet y \neq y \bullet x$$

koşuluyla $|M_{2\times 2}| < \infty$ ve $M_{2\times 2}$ değişmeli olmayan sınırlı Neutrosophic halkadır
Bu nedenle $M_{2\times 2}$ değişmeli olmayan Neutrosophic halkadır. Açıkça,

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x \bullet y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ o & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$y \bullet x \ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alındığında $M_{2\times 2}$ bölüm halkası değildir. Böylece, $x \bullet y = (0)$ fakat $y \bullet x \neq (0)$ olduğu görülmektedir. Yani, $x \bullet y$, $M_{2\times 2}$'nin sadece tek taraflı bir sıfır bölenidir.

BÖLÜM 7

7.1 Neutrosophic Polinom Halkalarında Çarpanlara Ayırma

$f(x) \in \langle R \cup I \rangle[x]$ bir Neutrosophic polinom olsun. Bu durumda,

(i) $p(x), q(x) \in \langle R \cup I \rangle[x]$ olmak üzere $f(x) = p(x)q(x)$ şartını sağlayan iki Neutrosophic polinom varsa $f(x)$'e, $\langle R \cup I \rangle[x]$'de Neutrosophic indirgenebilir denir.

(ii) $f(x) = p(x)q(x)$ fakat $p(x)$ veya $q(x)$'den sadece biri $\langle R \cup I \rangle[x]$'de Neutrosophic polinom ise $f(x)$'e yarı Neutrosophic indirgenebilir denir

(iii) $f(x) = p(x)q(x)$ ancak ya $p(x)$ veya $q(x)$ I veya 1'e eşitse $f(x)'$e Neutrosophic indirgenemez denir[7].

Örnek 7.1.1: $[\langle Z_2 \cup \mathrm{I} \rangle]\,[x]$ = {a + b x | a, b ∈ {0, 1, I, 1 + I}} olsun, I + (1 + I) x = p (x), $[\langle Z_2 \cup \mathrm{I}\rangle][\mathrm{x}]$'nin indirgenemez polinomudur. p(x)'in oluşturduğu ideal, $[\langle Z_2 \cup \mathrm{I}\rangle]$ $[x]$'in Neutrosophic asas idealidir.

p(x)'in oluşturduğu ideal, $[\langle Z_2 \cup \mathrm{I}\rangle]\,[x]$'in Neutrosophic esas idealidir.

$$\frac{[\langle Z_2 \cup \mathrm{I}\rangle]\,[x]}{N = <I + (1+I)x>} \cong \{\mathrm{N}, 1 + \mathrm{N}\}.$$

Örnek 7.1.2: Tüm gerçel sayıların $\langle R \cup I \rangle[x]$ Neutrosophic polinom halkasını ele alalım ve $f(x)$ ve $d(x)$, $\langle R \cup I \rangle[x]$'de iki Neutrosophic polinom olsun.

(i) $f(x) = 2Ix^2 - (1 + 7I)x + 6I$ ve $d(x) = x - 3I$ ise $f(x)$'i $d(x)$'e bölerek $q(x) = 2Ix - (1 + I)$ bölümü elde edilir ve kalan $r(x) = 0$ olur ve böylece $f(x) \equiv \big(2Ix - (1 + I)\big)(x - 3I) + 0$.

(ii) $f(x) = x^2 - Ix + (1 + I)$ ve $d(x) = x - (1 - I)$ ise, $q(x) = x + (1 - 2I)$, $r(x) = 2$ ve $f(x) \equiv \big(x + (1 - 2I)\big)\big(x - (1 - I)\big) + 2$.

Yukarıdaki örnekler, incelenen f (x) ve d (x) 'nin Neutrosophic polinom çiftlerinden her biri için $f(x) = q(x)d(x) + r(x)$ ve $\deg r(x) < \deg d(x)$ şartını sağlayan $q(x), r(x) \in \langle R \cup I \rangle[x]$ tek Neutrosophic polinomu olduğunu göstermektedir. Ancak, bu genellikle doğru değildir.

Bunu göstermek için $\langle R \cup I\rangle[x]$ 'deki aşağıdaki Neutrosophic polinom çiftlerini ele alalım:

$$f(x) = 4Ix^2 + (1 + I)x - 2I\,, d(x) = 2Ix + (1 + I);$$
$$f(x) = (-8I)x^2 + (7 + 5I)x + (2 - I), d(x) = Ix + (1 + I).$$

Bu örneklerin hiç birinde aşağıdaki şartı sağlayan $q(x), r(x) \in \langle R \cup I\rangle[x]$ bulmak mümkün değildir;
$f(x) = q(x)d(x) + r(x)$ ve $\deg r(x) < \deg d(x)$.

Teorem 7.1.1 $f(x)$, $\langle R \cup I\rangle[x]$'de bir Neutrosophic monic polinom olsun ve $u \in \langle R \cup I\rangle[x]$ için $d(x) = x - u$ olsun. Bu durumda $f(u)$, $f(x)$'in $d(x)$'e bölümünün kalanıdır. Ayrıca, eğer$f(u) = 0$ ise $d(x)$, $f(x)$'in Neutrosophic çarpanıdır.
İspat: $f(x)$ ve $d(x)$, $\langle R \cup I\rangle[x]$ 'de Neutrosophic monic olduklarından, $\langle R \cup I\rangle[x]$'de $q(x)$ ve $r(x)$ vardır, öyle ki $f(x) = q(x)(x - u) + r(x)$ ve $r(x) = 0$ veya $\deg r(x) < \deg d(x) = 1$.
Bu nedenle $r(x) = r \in \langle R \cup I\rangle$. Şimdi, $\phi_U\big(f(x)\big) = 0 + r(u) = r(u) = r \in \langle R \cup I\rangle$.
Eğer $f(u) = 0$ ise, bunu $r(x) = 0$ takip eder ve nihayetinde, $d(x)$, $f(x)$'in bir Neutrosophic çarpanıdır.

7.2 Neutrosophic Polinomun Neutrosophic Sıfırı

$f(x)$, $\langle R \cup I\rangle[x]$'de $\deg f(x) \geq 1$ olan Neutrosophic bir polinom olsun. Eğer $f(u) = 0$ ise, $u \in \langle R \cup I\rangle$ elemanına, $f(x)$'in bir Neutrosophic sıfırı denir[7].

Örnek 7.2.1 (i) $f(x) = 6x^2 + Ix - 2I \in \langle Q \cup I\rangle[x]$ olsun. Sonra $f(x)$ Neutrosophic indirgenebilir ve $(2x - I)$ ve $(3x + 2I)$, $f(x)$'in Neutrosophic çarpanları olsun. $f\left(\frac{1}{2}I\right) = 0$ ve $f\left(-\frac{2}{3}I\right) =$ 0 olduğundan, $\frac{1}{2}I, -\frac{2}{3}I \in \langle Q \cup I\rangle$, $f(x)$'in Neutrosophic sıfırlarıdır.
$f(x)$'in derecesinin 2 olması ve iki tane sıfırı olması sebebiyle, Cebirin Temel Teoremine uygundur.
(ii) $f(x) = 4Ix^2 + (1 + I)x - 2I \in \langle Q \cup I\rangle[x]$ olsun. $f(x)$ Neutrosophic indirgenebilir ve $p(x) = 2Ix + (1 + I)$ ve $q(x) = (1 + I)x - 1$, $f(x)$ 'in Neutrosophic çarpanları olsun. Ancak I'nın tersi (I^{-1}) olmadığı için
$f(x)$'in $\langle Q \cup I\rangle$ ve hatta $\langle R \cup I\rangle$ ve $\langle C \cup I\rangle$'da Neutrosophic sıfırı yoktur.

(iii) $Ix^2 - 2 = (Ix - \sqrt{2})(Ix + \sqrt{2})$ olduğu için $Ix^2 - 2$, $\langle Q \cup I \rangle[x]$'de Neutrosophic indirgenemez ancak $\langle R \cup I \rangle[x]$'de indirgenebilirdir. Ancak $\langle R \cup I \rangle$ bir cisim olmadığından, $Ix^2 - 2$'nin $\langle R \cup I \rangle$'de hiç Neutrosophic sıfırı yoktur.

Teorem 7.2.1 $f(x)$, $\langle R \cup I \rangle[x]$ Neutrosophic polinom halkasında $derecesi > 1$ olan bir Neutrosophic polinom olsun. $f(x)$'in $\langle R \cup I \rangle[x]$'de Neutrosophic sıfırı varsa, $f(x)$, $\langle R \cup I \rangle[x]$'de Neutrosophic indirgenebilirdir ve bunun tersi doğru değildir[7].

Teorem 7.2.2 $f(x)$, $\langle R \cup I \rangle[x]$ Neutrosophic polinom olsun. $f(x)$'in $\langle R \cup I \rangle[x]$ üzerinde çarpanlarına ayrılması mümkünse tek değildir.
İspat: $f(x) = 2Ix^2 + (1 + I)x + 2I$, $\langle Z_3 \cup I \rangle[x]$ Neutrosophic polinomlar halkası içinde bir Neutrosophic polinom olsun. $f(I) = 0$ ve Teorem 7.2.1'den $f(x)$, $\langle Z_3 \cup I \rangle[x]$'de Neutrosophic indirgenebilirdir ve böylece $f(x)$, $f(x) = (2Ix + 1)(x - 1) = (2Ix + 1)(x + 2I)$ şeklinde ifade edilebilir. Ancak, $f(x)$ ayrıca $f(x) = [(1 + I)x + I][Ix\ 4\ (1 + I)]$ şeklinde de ifade edilebilir.
Bu $f(x)$'in $\langle Z_3 \cup I \rangle[x]$'de çarpanlara ayrılmasının tek olduğunu gösterir. Bunun, ilk çarpanlara ayırmada $f(x)$'in $I \in \langle Z_3 \cup I \rangle$ Neutrosophic sıfırı olduğu ancak ikinci çarpanlara ayırmada $f(x)$'in $\langle Z_3 \cup I \rangle$'de hiç Neutrosophic sıfırının olmadığını gösterdiğini belirtmek gerekir. Bu klasik polinom halkalarında elde edilenlerden farklı bir durumdur[7].

7.3 Neutrosophic Polinom Halkalarında Neutrosophic Ideal

7.3.1 Neutrosophic Esas İdeal

$\langle R \cup I \rangle[x]$ bir Neutrosophic polinomlar halkası olsun. $\langle R \cup I \rangle[x]$'in bir j ideali, $\langle R \cup I \rangle[x]$ içindeki bir $f(x)$ indirgenemez Neutrosophic polinomu tarafından oluşturulabilirse, Neutrosophic esas ideal olarak adlandırılır[1].

7.3.2 Neutrosophic Asal İdeal

$\langle R \cup I \rangle[x]$ Neutrosophic polinomlar halkasının bir Neutrosophic ideali olan P,
$f(x)g(x) \in P$ ise, $f(x) \in P$ veya $g(x) \in P$ ve $f(x)$ ve $g(x)$, $\langle R \cup I \rangle[x]$'de Neutrosophic polinom şartları sağlanıyorsa Neutrosophic asal ideal olarak adlandırılır[1].

7.3.3 Neutrosophic Maksimal İdeal

$\langle R \cup I \rangle[x]$ Neutrosophic polinomlar halkasının bir M Neutrosophic ideali, $M \neq \langle R \cup I \rangle[x]$ ve $\langle R \cup I \rangle[x]$'in hiç bir N uygun Neutrosophic ideali uygun olarak M'yi kapsamaz, yani $M \subseteq N \subseteq \langle R \cup I \rangle[x]$ ve $M = N$ veya $N = \langle R \cup I \rangle[x]$ ise $\langle R \cup I \rangle[x]$'in Neutrosophic maksimal ideali olarak adlandırılır[1].

Örnek 7.3.1 $\langle Z_2 \cup I \rangle[x] = \{ax^2 + bx + c | a, b, c \in \langle Z_2 \cup I \rangle\}$ olsun ve $f(x) = Ix^2 + Ix + (1 + I) \in \langle Z_2 \cup I \rangle[x]$ olarak alınsın. $f(x)$ tarafından oluşturulan $J = \langle f(x) \rangle$ Neutrosophic ideali $\langle Z_2 \cup I \rangle[x]$'in ne Neutrosophic esas ideali ne de Neutrosophic asal idealidir. Bu şekildedir çünkü, $\langle Z_2 \cup I \rangle[x]$'de sıfırı olmasa bile $f(x)$ $\langle Z_2 \cup I \rangle[x]$'de Neutrosophic indirgenebilirdir. Ayrıca, $(Ix + (1 + I)(Ix + 1) \in J$ fakat $(Ix + (1 + I) \notin J$ ve $(Ix + 1) \notin J$. Bu nedenle J, $\langle Z_2 \cup I \rangle[x]$'in bir Neutrosophic asal ideali değildir. Buna rağmen, $\langle Z_2 \cup I \rangle[x]$'nin tek Neutrosophic asal ideali < 0 >'dır, bu da Neutrosophic maksimal ideal değildir.

Teorem 7.3.1 $\langle R \cup I \rangle[x]$ bir Neutrosophic polinomlar halkası olsun. $\langle R \cup I \rangle[x]$'in her Neutrosophic esas ideali asal değildir[1].

İspat: $\langle Z_3 \cup I \rangle[x] = \{x^3 + ax + b | a, b \in \langle Z_3 \cup I \rangle\}$ Neutrosophic polinom halkası ele alınsın ve $f(x) = x^3 + Ix + (1 + I)$ olsun. $f(x)$'in $\langle Z_3 \cup I \rangle[x]$'de Neutrosophic indirgenemez olduğu gösterilebilir ve böylece $f(x)$ tarafından oluşturulan $< f(x) >$ Neutrosophic ideali esas idealdir ancak asal ideal değildir.

7.4 Neutrosophic Halkanın Elemanının Normalizeri

$\langle R \cup I \rangle$ neutrosophic halka ve $r, \langle R \cup I \rangle'$nin bir elemanı olsun.

$$N(r) = \{x \in \langle R \cup I \rangle : xr = rx\}$$

kümeye $\langle R \cup I \rangle$ de r'nin normalizeri denir[12].

Örnek 7.4.1: $M = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} a, b \in \langle Z_2 \cup I \rangle\}$ bir neutrosophic halka olsun, açıkça M'nin 16 elemanı vardır.

(1) M' de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}'$ nın normalizeri bu şekilde tanılıyor:

$$N\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

(2) M' de $\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}'$ nın normalizeri bu şekilde tanılıyor:

$$N\left(\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+I & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+I & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+I & 1+I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Açıkça $N\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ ve $N\left(\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ M'nin pseudo neutrosophic alt halka ve pseudo neutrosophic idealıdır.

Önerme 7.4.1: $\langle R \cup I \rangle$ neutrosophic halka olsun. $r \in \langle R \cup I \rangle$ ve $N(r)$, $\langle R \cup I \rangle'$de r'nin normalizeri, o zaman

(1) $N(r)$, $\langle R \cup I \rangle'$nin pseudo neutrosophic alt halkasıdır.

(2) $N(r)$, $\langle R \cup I \rangle'$nin pseudo neutrosophic idealidir[12].

7.5 Neutrosophic Halkanın Alt Kümesinin Sıfırlayıcısı (Annihilatoru)

$\langle R \cup I \rangle$ neutrosophic halka ve $P, \langle R \cup I \rangle'$nin alt kümesi olsun. O zaman

(1) $Ann_l(P) = \{x \in \langle R \cup I \rangle,\ \ xp = 0\ \ \forall p \in P\}$ kümeye P'nin left(sol) sıfırlayıcısı denir.

(2) $Ann_r(P) = \{y \in \langle R \cup I \rangle,\ \ yp = 0\ \ \forall p \in P\}$ kümeye P'nin right(sağ) sıfırlayıcısı denir[12].

$\langle R \cup I \rangle$ değişmeli bir neutrosophic halka oluyorsa bu durumda $Ann_l(P) = Ann_r(P)$ ve $Ann(P)$ ile ifade edebilir.

Örnek7.5.1: $M = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ a, b \in \langle Z_2 \cup I \rangle\}$ bir neutrosophic halka olsun.

$$P = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+I & 1+I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

O zaman

$Ann_l(P) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ P'nin left(sol) sıfırlayıcısıdır.

Önerme 7.5.1: $\langle R \cup I \rangle$ neutrosophic halka ve $P, \langle R \cup I \rangle'$nin alt kümesi olsun. O zaman P'nin sağ(sol) sıfırlayıcısı $\langle R \cup I \rangle'$nin pseudo neutrosophic idealidir.

Örnek 7.5.2: $\langle Z_2 \cup I \rangle = \{0, 1, I, 1+I\}$ mod 2'ye göre bir neutrosophic halka, eğer $P = \{0, 1+I\}$ o zaman $Ann(P) = \{0, I\}$.

Örnek 7.5.3: $\langle Z_3 \cup I \rangle = \{0, 1, 2, I, 2I, 1 + I, 1 + 2I, 2 + I, 2 + 2I\}$ mod 3'e göre bir neutrosophic halka, eğer $P = \{0, I + 2I\}$ o zaman $Ann(P) = \{0,1 + 2I, 2 + I\}$ pseudo neutrosophic alt halka aynı zamanda$\langle Z_3 \cup I \rangle'$nin pseudo neutrosophic idealidir.

Önerme 7.5.2: $\langle R \cup I \rangle$ değişmeli bir neutrosophic halka ve $P, \langle R \cup I \rangle'$nin alt kümesi olsun. Bu durumda $Ann(P)$, $\langle R \cup I \rangle'$nin pseudo neutrosophic idealidir.

7.6 Modüller

7.6.1 Sol R_Modül:

$\langle M \cup I \rangle$ toplamsal değişmeli bir neutosophic grup, R birimli bir halka olmak üzere

$$\bullet: \mathrm{R} \times \langle M \cup I \rangle \rightarrow \langle M \cup I \rangle$$
$$(r, a) \rightarrow r \bullet a$$

İle tanımlanan dış işlem, her $r, s \in R$ ve $m, n \in \langle M \cup I \rangle$ için:

(i) $r.(m + n) = r.m + r.n$

(ii) $(r + s).m = r.m + s.m$

(iii) (r.s).m= $r.(s.m)$

(iv) $1.m = m$

Koşullarını sağılıyorsa $\langle M \cup I \rangle'$ye sol R_modül denir[12].

7.6.2 Sağ R_Modül:

R birimli bir halka ve $\langle M \cup I \rangle$ toplamsal değişmeli bir neutosophic grup olmak üzere

$$\bullet: \langle M \cup I \rangle \times \mathrm{R} \rightarrow \langle M \cup I \rangle$$
$$(a, r) \rightarrow a \bullet r$$

İle tanımlanan dış işlem, her $r, s \in R$ ve $m, n \in \langle M \cup I \rangle$ için:

(i) $(m + n).r = m.r + n.r$

(ii) $m.1 = m$

(iii) $m.(r + s) = m.r + m.s$

(iv) $m.(r.s) = (m.r).s$

Koşullarını sağılıyorsa $\langle M \cup I \rangle'$ye sağ R_modül denir[12].
R değişmeli bir halka oluyorsa $\langle M \cup I \rangle$ sol R_modül ise aynı zamanda sağ R_modül olur ve $\langle M \cup I \rangle$ R_modül olarak da isimlendirilebilir.

Örnek 7.6.1: $(\langle M \cup I \rangle, +)$ neutrosophic değişmeli grup ve Z tamsayılar halka olsun. $\forall\, n \in Z\ ve\ m \in \langle M \cup I \rangle$ için

$$f: Z \times \langle M \cup I \rangle \rightarrow \langle M \cup I \rangle$$
$$f(n, m) = nm$$

Tanımlıyorsa o zaman $\langle M \cup I \rangle$ neutrosophic Z_modüldür.

Örnek 7.6.2: R birimli ve değişmeli bir halka ve $\langle R \cup I\rangle[x]$ neutrosophic polinom halka olsun, Belli ki $(\langle R \cup I\rangle[x], +)$ değişmeli neutrosophic grup.

$$\bullet: R \times \langle R \cup I\rangle[x] \to \langle R \cup I\rangle[x]$$

tanımlıyorsa o zaman $\langle R \cup I\rangle[x]$ neutrosophic R_modüldür.

7.7 Neutrosophic İkili Halka

$(BN(R),*,\circ)$ $'*'$ve $'\circ'$ işlemlerine göre boş kümeden farklı bir küme, $(R_1,*,\circ)$ve $(R_2,*,\circ)$, $BN(R)$'nin alt kümeler olsun. Eğer R_1, R_2 ikisenden sadece biri bir neutrosophic halka oluyorsa ve $BN(R) = R_1 \cup R_2$ ise bu durumda $BN(R)'$ye neutrosophic ikili halka denir[1].

Örnek 7.7.1: $(R_1,*,\circ) = (\langle Z \cup I\rangle, +,\times)$ ve $(R_2,*,\circ) = (Q, +,\times)$olsun. açıkça $(\langle Z \cup I\rangle, +,\times)$ toplama ve çarpma işlemlerine göre neutrosophic halka ve $(Q, +,\times)$ Sadece bir halkadır. O zaman $(BN(R) = R_1 \cup R_2 ,*,\circ)$ neutrosophic çift halkadır.

Theorem 7.7.1: $BN(R)$ neutrosophic çift halka ise $BN(R)$ çift halkadır.

7.8 Değişmeli İkili Halka

$BN(R) = (R_1,*,\circ) \cup (R_2,*,\circ)$ neutrosophic ikili halka olsun. Eğer $(R_1,*,\circ)$ ve $(R_2,*,\circ)$ değişmeli halkalar ise o zaman $BN(R)'$ye değişmeli neutrosophic ikili halka denir[1].

Örnek 7.8.1: $(R_1,*,\circ) = (\langle Z_2 \cup I\rangle, +,\times)$ ve $(R_2,*,\circ) = (Z_3, +,\times)$ için $BN(R) = (R_1,*,\circ) \cup (R_2,*,\circ)$ neutrosophic ikili halkadır. Açıkça $(Z_3, +,\times)$ değişmeli neutrosophic halka ve $(\langle Z_2 \cup I\rangle, +,\times)$ değişmeli bir halkadır.
O zaman $(BN(R) = R_1 \cup R_2 ,*,\circ)$ değişmeli neutrosophic ikili halkadır.

7.9 Pseudo Neutrosophic İkili Halka

$BN(R) = (R_1,*,\circ) \cup (R_2,*,\circ)$ neutrosophic ikili halka olsun. Eğer $(R_1,*,\circ)$ ve $(R_2,*,\circ)$ pseudo neutrosophic halkalar oluyorsa o zaman $BN(R)'$ye pseudo neutrosophic ikili halka denir[1].

Örnek7.9.1: $(\mathrm{R}_1, +,\times) = \{0, \mp 2\mathrm{I}, \mp 4\mathrm{I}, \mp 6\mathrm{I}, \mp 8\mathrm{I}, \dots, \infty\}$ pseudo neutrosophic halka ve $(\mathrm{R}_2, +,\times) = \{0, 2\mathrm{I}, 4\mathrm{I}, 6\mathrm{I}, 8\mathrm{I}, 10\mathrm{I}\}$ mod 12 'ye göre toplama işlemine ve genel çarpma işlemine göre pseudo neutrosophic halka olsun.
O zaman $BN(R) = (R_1, +,\times) \cup (R_2, +,\times)$ pseudo neutrosophic ikili halkadır.

7.10 Neutrosophic İkili Halka'nın Neutrosophic Alt İkili Halkası

$BN(R) = (R_1,*,\circ) \cup (R_2,*,\circ)$ neutrosophic ikili halka ve $(T,*,\circ)$, $BN(R)'$nin uygun bir alt kümesi olsun.

Aşağıdaki koşulları saglınıyorsa o zaman $(T,*,\circ)$'ye, $BN(R)'$nin neutrosophic alt ikili halka denir.

1. $T_1 = R_1 \cap T$ ve $T_2 = R_2 \cap T$ için $T = T_1 \cup T_2$
2. $(T_1,*,\circ)$ ya da $(T_2,*,\circ)$ ikisinden en az neutrosophic halka olan biri vardır[1].

Örnek 7.10.1: $(R_1,*,\circ) = (\langle R \cup I\rangle, +,\times)$ ve $(R_2,*,\circ) = (C, +,\times)$ için $BN(R) = (R_1,*,\circ) \cup (R_2,*,\circ)$ neutrosophic ikili halka, $P_1 = (Q, +,\times)$ ve $P_2 = (R, +,\times)$için $P = P_1 \cup P_2$, $BN(R)'$nin bir alt kümesi olsun.
O zaman ($P = P_1 \cup P_2, +,\times)$, $BN(R)'$nin neutrosophic alt ikili halkadır.

7.11 Güçlü Neutrosophic İkili Halka

$BN(R) = (R_1,*,\circ) \cup (R_2,*,\circ)$ neutrosophic ikili halka olsun. Eğer hem $(R_1,*,\circ)$ hem de $(R_2,*,\circ)$ neutrosophic halka oluyorsa o zaman $BN(R)'$ye güçlü neutrosophic ikili halka denir[1].

Örnek 7.11.1: $(R_1,*,\circ) = (\langle Z_2 \cup I\rangle, +,\times)$ ve $(R_2,*,\circ) = (\langle Q \cup I\rangle, +,\times)$ olsun. Açıkça R_1ve R_2 toplama ve çarpma işlemlerine göre neutrosophic halkalardır, bu durumda $BN(R) = (R_1,*,\circ) \cup (R_2,*,\circ)$ güçlü neutrosophic ikili halkadır.

Örnek 7.11.2: $(R_1,*,\circ) = (\langle Z_4 \cup I\rangle, +,\times)$ neutrosophic halka ve $(R_2,*,\circ) = (Q, +,\times)$ rasyonel halka olsun. bu durumda $BN(R) = (R_1,*,\circ) \cup (R_2,*,\circ)$ neutrosophic ikili halkadır. fakat güçlü neutrosophic çift halka değildir.

7.12 Neutrosophic İkili Halka'nın Neutrosophic İkili İdeali

$BN(R) = (R_1,*,\circ) \cup (R_2,*,\circ)$ neutrosophic ikli halka ve $(T,*,\circ)$, $BN(R)'$nin neutrosophic alt ikili halka olsun.
Aşağıdaki koşulları saglınıyorsa o zaman $(T,*,\circ)$'ye, $BN(R)'$nin neutrosophic ikili ideali denir.

1. $T_1 = R_1 \cap T$ ve $T_2 = R_2 \cap T$ için $T = T_1 \cup T_2$
2. $(T_1,*,\circ)$ ya da $(T_2,*,\circ)$ ikisinden en az neutrosophic ideali olan biri vardır.

$(T_1,*,\circ)$ ve $(T_2,*,\circ)$ ikisi neutrosophic ideal ise o zaman $(T,*,\circ)$'ye, $BN(R)'$nin güçlü neutrosophic ikiliideali denir[1].

Örnek 7.12.1: $(R_1,*,\circ) = (\langle Z_{12} \cup I\rangle, +,\times) = \{0, 1, 2, \dots, 11, I, 2I, \dots, 11I, 1 + I, 2 + I, \dots, 11 + I, 1 + 2I, \dots, 11 + 2I, 1 + 3I, \dots, 11 + 3I, \dots, 11 + 11I\}$ ve $(R_2,*,\circ) = (Z_{16}, +,\times) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ için $BN(R) = (R_1,*,\circ) \cup (R_2,*,\circ)$ neutrosophic çift halka ve $P_1 = \{0, 6, 2I, 4I, 6I, 8I, 10I, 6 + 2I, 6 + 3I, 6 + 4I, 6 + 5I, 6 + 6I, 6 + 7I, 6 + 8I, 6 + 9I, 6 + 10I\}$, $P_2 =$

$\{0, 2I, 4I, 6I, 8I, 10I, 12I, 14I\}$ için $P = P_1 \cup P_2$, $BN(R)'$nin neutrosophic alt halkadır. Açıkça ($P = P_1 \cup P_2, +, \times)$, $BN(R)'$nin neutrosophic çift idealidir.

7.13 Neutrosophic N_halka

$\{N(R), *_1, \dots, *_N, \circ_1, \dots, \circ_N\}$ iki N_ikili işlemlerine göre boş kümeden farklı bir küme olsun. $N(R)$ aşağıdaki koşulları sağılıyorsa o zaman $N(R)'$ye bir neutrosophic N_halka denir.

1. R_i, $N(R)'$nin uygun alt kümeler için $N(R) = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_N$.
($i \neq j$ için $R_i \not\subset R_j \; ya \; da \; R_j \not\subset R_i$)
2. $i = 1, 2, \dots, N$ için $(R_i, *_i, \circ_i)$ ya neutrosophic halka ya da bir halka olmaktadır[2].

Örnek 7.13.1: $(R_1, *, \circ) = (\langle Z \cup I \rangle, +, \times)$, $(R_2, *, \circ) = (Q, +, \times)$ ve $(R_3, *, \circ) = (Z_{12}, +, \times)$ için $N(R) = (R_1, *, \circ) \cup (R_2, *, \circ) \cup (R_3, *, \circ)$ neutrosophic N_halkadır.

Sonuçlar:

$\{N(R), *_1, \dots, *_N, \circ_1, \dots, \circ_N\}$ neutrosophic N_halka olsun. Bu durumda:

- $i = 1, 2, \dots, N$ için tüm $(R_i, *_i, \circ_i)$ pseudo neutrosophic halka ise $N(R)'$ye pseudo neutrosophic N_halkadır.

- $i = 1, 2, \dots, N$ için tüm $(R_i, *_i, \circ_i)$ neutrosophic halka ise $N(R)'$ye güçlü neutrosophic N_halkadır.

7.14 Neutrosophic Grup Halka

$\langle G \cup I \rangle$ neutrosophic bir grup ve R birimli ve değişmeli bir halka olsun. $R(\langle G \cup I \rangle)'$ ye neutrosophic grup halka denir.

$R(\langle G \cup I \rangle)$ aşağıdaki özellikleri sağılınıyor:

(1) $R(\langle G \cup I \rangle)'$nin tüm elemanı $\alpha = \sum_{i=1}^{n} r_i g_i$ $n < \infty, r_i \in R$ ve $g_i \in \langle G \cup I \rangle$ bu şekil ile ifade edilir.

(2) $\alpha = \sum_{i=1}^{n} r_i g_i$ ve $\beta = \sum_{i=1}^{m} s_i g_i$ $R(\langle G \cup I \rangle)'$nin iki elemanı olsun. Eğer $r_i = s_i$ ve $n = m$ ise o zaman $\alpha = \beta$ dır.

(3) $\forall\, r_i,\ s_i \in R,\ g_i \in \langle G \cup I \rangle$ ve $\alpha = \sum_{i=1}^{n} r_i g_i\,,\ \beta = \sum_{i=1}^{m} s_i g_i$ için $\alpha + \beta = \sum_{i=1}^{n} (r_i + s_i) g_i \in R(\langle G \cup I \rangle)$ olur.

(4) $\sum_{i=1}^{n} r_i g_i = 0$ ise o zaman $r_i = 0$ dır.

(5) $\alpha = \sum_{i=1}^{n} r_i g_i$ $R(\langle G \cup I \rangle)'$nin bir elemanı olsun. O zaman$-\alpha = \sum_{i=1}^{n}(-r_i)g_i$

$$\alpha + (-\alpha) = 0$$

$=\sum_{i=1}^{n}(r_i + (-r_i))g_i$

$=\sum_{i=1}^{n} (0)g_i.$

Yükardaki özelliklerinden $R(\langle G \cup I \rangle)$, '+' ikili işleme göre değişmeli bir grup bulununurdur.

(6) α ve β, $R(\langle G \cup I \rangle)'$nin iki elemanı olsun.

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} r_i g_i \text{ ve } \beta = \sum_{j=1}^{m} s_j h_j$$

$$\alpha.\beta = \sum_{i=1}^{n}(r_i \,.\, s_j)g_i.\, h_j$$

$$= \sum_k \gamma_k t_k$$

Öyleki $g_i h_j = t_k,\ t_k \in \langle G \cup I \rangle$ ve $\gamma_k \in R$, açıkça $\alpha.\beta \in R(\langle G \cup I \rangle)$.

(7) $\alpha, \beta, \gamma \in R(\langle G \cup I \rangle)$ için $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ ve $(\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$. Açıkça '+' ve '.' İşlemlerine göre $R(\langle G \cup I \rangle)$ bir halkadır[1].

Sonuçlar:

(1) $\langle G \cup I \rangle$ değişmeli neutrosophic grup ise o zaman $R(\langle G \cup I \rangle)$ değişmeli neutrosophic grup halkadır.

(2) R halkasının ve $\langle G \cup I \rangle$ neutrosophic grubunun sonlu elemanları varsa o zaman $R(\langle G \cup I \rangle)$ neutrosophic grup halkasının sonlu elemanı vardır.

Eğer R halkası solu değilse yada $\langle G \cup I \rangle$ neutrosophic grubu sonlu değilse o zaman $R(\langle G \cup I \rangle)$ sonlu olmayan neutrosophic grup halkadır.

Örnek 7.14.1: $Z_2 = \{0, 1\}$ 2 moduna göre tamsayılar halkası olsun. $\langle G \cup I \rangle = \{1, g, I, gI \quad / g^2 = 1 \text{ ve } I^2 = I\}$.

$$Z_2\langle G \cup I \rangle = \{0, 1, g, I, gI, 1 + g, 1 + g + I, 1 + gI + I, 1 + I, g + gI, +I, I + gI, g + I, g + gI, 1 + gI, 1 + g + gI, 1 + g + I + gI\ \}$$

$Z_2\langle G \cup I \rangle$ sonlu değişmeli bir neutrosophic grup halkadır.

Örnek7.14.2: $Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 6 moduna göre tamsayılar ve $\langle G \cup I \rangle = \{1, P_1, P_2, I, P_1I, P_2I\}$ olsun.

Öyleki $1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$Z_6\langle G \cup I \rangle = \{0, 1, P_1, P_2, I, P_1I, P_2I, 2, 2P_1 + 2P_2, \dots, 2P_2I, \dots, 5\,P_2I, 1 + P_1, 1 + P_1 + P_2, 1 + P_2 + I, 1 + P_1 + I, \dots, 1 + P_1 + P_2 + I + P_1I + P_2I\}$$

Açıkça $Z_6\langle G \cup I \rangle$ değişmeli olmayan neutrosophic grup halkadır.

BÖLÜM 8

SONUÇLAR

Bu çalışmada Neutrosophic halka , karakteristik sıfır Neutrosophic halka , değişmeli nötrosofic halka ve Neutrosophic althalkası kavramını tanımladık.bundan sonra pseudo Neutrosophic halka , Neutrosophic halka ideallerinin kavramlarını bazı sonuçları ile birlikte sunduk ve Neutrosophic idempotent elemanı, Neutrosophic sıfır bölen ve bölüm Neutrosophic halkası sunduk. Neutrosophic halka homomorfizması kavramını bazı örnekleri ile açıkladık. Son olarak Neutrosophic polinomlar halkası, Neutrosophic grup halka, neutrosophic çift halka ve neutrosophik N_halka kavramlarını sunduk.

KAYNAKLAR

[1] Kandasamy W.B. Vasantha, Smarandache Florentin. 2006. Neutrosophic Rings. Hexis, Phoenix, Arizona. http://fs.gallup.unm.edu/NeutrosophicRings.pdf. (Accessed by 2.4.2017)

[2] Agboola, A. A. A., Aklinleye, S.A. (2014). Neutrosophic Vector spaces. *Int. J. Math. Comb*. **4.**

[3] Agboola, A. A. A., Akwu, A. O., Oyebo, Y. T. (2012). Neutrosophic Groups and Neutrosophic Subgroups. *Int. J. Math. Comb*. **3**, 1-9.

[4] Hayes, Allan. (1969). A characterization of f-ring without non-zero nilpotents. *J. of London Math*. Soc. **39**, 706-707.

[5] Kandasamy W.B. Vasantha. 2002. On Smarandache pseudo ideals in rings. http://www.gallup.unm.edu/~smaranandache/pseudoideals.pdf.

[6] Kandasamy W.B. Vasantha. 2002. Smarandache Zero divisors. http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/ZeroDivisor.pdf

[7] Kandasamy W.B. Vasantha. 1997. Gaussian polynomial rings. Octogon.**5**, 58-59.

[8] Kandasamy W.B. Vasantha. 2001. On locally semi unitary rings.Octogon .**9**, 260-262.

[9] Wang H.A., Smarandache F.L., Zhang Y.A., Sunderraman R.A. 2014. Single Valued Neutrosophic Sets.**11-13**. https://www.researchgate.net/publication/262047656 (Accessed by 10.4.2017).

[10] Smarandache Florentin. 2015. (t, i, f)-Neutrosophic Structures & I-Neutrosophic Structures, **8.8,** P3. https://www.researchgate.net/publication/277076209. (Accessed by 17.5.2017).

[11] Zadeh LA. 1965. Fuzzy sets. Inform Control. **8**,338 – 340.

[12] Agboola, A. A. A., Adeleke, E. O., Akinleye, S. A. (2012). Neutrosophic Rings II, *Int. J. Math. Comb*. **2,**1-8.