HAZİRAN 2018

Yüksek Lisans –Matematik Bölümü

ZEYNEP GÜRBÜZ

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

p –GRUPLARI VE OTOMORFİZMLERİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZEYNEP GÜRBÜZ

HAZİRAN 2018

p −Grupları ve Otomorfizmleri

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Dr. Öğretim Üyesi Özge ÖZTEKİN

Zeynep GÜRBÜZ

Haziran 2018

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tezin Adı: p −Grupları Ve Otomorfizmleri

Öğrencinin, Adı Soyadı: Zeynep GÜRBÜZ

Tez Savunma Tarihi: 22/06/2018

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. A. Necmeddin YAZICI

FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Özge ÖZTEKİN

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:	İmzası
Doç. Dr. Necati OLGUN	....
Dr. Öğr. Üyesi Cennet ESKAL	....
Dr. Öğr. Üyesi Özge ÖZTEKİN	....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Zeynep GÜRBÜZ

ABSTRACT

p −GROUPS AND AUTOMORPHİSMS

GÜRBÜZ, Zeynep

M. Sc. Thesis in Mathematics Department

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Özge ÖZTEKİN

June 2018

63 pages

G, ${\mathbb{Z}_p}^2$ and $\mathbb{Z}_p$ are the semi−direct product group of the direct and semi−direct products of p −groups according to φ. $Z(G) = \{g \in G: ag = ga\ each\ a \in G\}$ is a normal subgroup of G, and G is called the center.

If an θ automorphism of G provide the condition $g^{-1}\theta(g) \in Z(G)$ for each $g \in L$, we denote θ is the central automorphism of G and we denote it $Aut_Z(G)$.

In this study, we tried to obtain a form of central automorphisms by obtaining the center for the semi direct and direct products where $p = 3$, $p = 5$ and θ is homomorphism from $\mathbb{Z}_p$ to automorphisms group of ${\mathbb{Z}_p}^2$.

Key words: : p −groups, semi-direct product, central automorphisms of p −groups

ÖZET

p −GRUPLARI VE OTOMORFİZMLERİ

GÜRBÜZ, Zeynep

Yüksek Lisans Tezi, Matematik

Tez Yöneticisi: Dr. Öğr. Üyesi Özge ÖZTEKİN

Haziran 2018

63 sayfa

G, ${\mathbb{Z}_p}^2$ ve $\mathbb{Z}_p$ $p-$gruplarının direkt ve yarı-direkt çarpımlarının $\varphi-$ye göre yarı$-$direkt çarpım grubu olsun. $Z(G) = \{g \in G: ag = ga \; her \; a \in G\}$ kümesi G nin bir normal alt grubudur ve G nin merkezi olarak adlandırılır.

Eğer G nin bir θ otomorfizmi her $g \in L$ için $g^{-1}\theta(g) \in Z(G)$ koşulunu sağlıyorsa, $\theta-$ ya G nin merkezi otomorfizmi diyeceğiz ve $Aut_Z(G)$ ile göstereğiz.

Bu çalışmada ${\mathbb{Z}_p}^2$ ve $\mathbb{Z}_p$ $p-$gruplarının direkt ve yarı-direkt çarpımlarının $p = 3$ ve $p = 5$ durumları için merkezi elde edilerek, merkezi otomorfizmlerinin bir formu elde edilmeye çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: $p-$ grup, yarı $-$ direkt çarpım, $p-$ gruplarının merkezi otomorfizmleri

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her safhasında ilgi, teşvik ve yardımlarını esirgemeyen tez hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Özge ÖZTEKİN’ e teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Lisans ve Lisansüstü eğitimim boyunca yardım bilgi ve tecrübeleri ile bizlere sürekli destek olan Gaziantep Üniversitesi matematik bölümündeki tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Bu çalışma süresince beni hep destekleyen ve güvenen çok sevdiğim aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Page

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\leq$:	Alt grup
$\trianglelefteq$:	Normal altgrup
$Z(G)$:	G nin merkezi
$Aut(G)$:	G nin tüm otomorfizmlerinin grubu
$Aut_Z(G)$:	G nin tüm merkez otomorfizmlerinin grubu
$Inn(G)$:	G nin tüm iç otomorfizmlerinin grubu

1. BÖLÜM
GİRİŞ

Biz bu çalışmamızda, G. S. Stahl, J. Laine ve G. Behm (2010) tarafından yazılan tezden [1] faydalanarak, $p-$grupların direkt ve yarı-direkt çarpımlarının merkezi otomorfizmlerinin formunu elde etmeye çalıştık.

G bir grup olsun. $Z(G) = \{g \in G: ag = ga \; her \; a \in G\}$ kümesi G nin bir normal alt grubudur ve G nin merkezi olarak adlandırılır. Eğer G nin bir θ otomorfizmi her $g \in G$ için $g^{-1}\theta(g) \in Z(G)$ koşulunu sağlıyorsa, $\theta -$ ya G nin merkezi otomorfizmi denir. Özellikle gruplarda merkezi otomorfizmler çok çalışılmıştır. Beisegel [2] bir $p-$grubunun merkezi otomorfizm grubunun p mertebeden hiçbir normal altgrubu olmadığını göstermiştir. Genellikle merkezi otomorfizmlerin $p.$mertebeden olduğu bilinmektedir. Bu C. Hopkins$'$ in çalışmasının [3] bir sonucudur. Hopkins $AutP$ abelyen ise (ki bu durumda tüm otomorfizmler merkezidir.) $AutP$ nin bir $p-$grup olduğunu ispatlamıştır. Sonlu grupların yarı-direkt çarpımının merkezi otomorfizmleri ise H. Mousavi ve A. Shomali tarafından çalışılmıştır. [4] Sonlu $p-$grupların merkezi otomorfizmleri ise M. Sharma ve D. Gumber tarafından çalışılmıştır. [5] p^n mertebeli tüm $p-$gruplarının $n \leq 6$ için ve p nin $n \leq 5$ için asal ve $n = 6$ için tek asal olması durumları için G nin iç otomorfizm grubunun merkezinin, G nin merkezi otomorfizm grubuna eşit olduğu gösterilmiştir. Düşük mertebeden merkezi otomorfizm grupları ile sonlu gruplar M.J. Curran tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada $Aut_Z(G) = Z\big(Inn(G)\big)$ olduğu sonucuna varılmıştır. [6] Sonlu $p-$gruplarının merkezi otomorfizmlerinin merkezi otomorfizm grubu A. R. Jamali ve H. Mousavi tarafından çalışılmıştır. M. Curran and D. McCaughan tarafından sonlu grupların merkezi otomorfizmleri çalışılmıştır. [7]

Biz bu çalışmamızda ${\mathbb{Z}_p}^2$ ve $\mathbb{Z}_p$ $p-$gruplarının direkt ve yarı-direkt çarpımlarının merkezi otomorfizmlerini elde etmeye çalıştık.

Bu tez 5 kısımdan oluşmaktadır. Tezin birinci ve ikinci kısmında çalışmamızın kaynağını oluşturan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü kısımda $p-$grup tanımı ve örnekleri verilmiş olup dördüncü kısımda sonlu abel grupların temel teoremi verilmiş olup, son kısımda ise ${\mathbb{Z}_p}^2$ ve $\mathbb{Z}_p$ p −gruplarının direkt ve yarı-direkt çarpımlarının $p = 3$ ve $p = 5$ durumları için merkezi elde edilerek, merkezi otomorfizmleri bulunmuştur.

2. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Gruplar

Bu bölümde, temel terminoloji ve kullandığımız notasyonlar sunulacaktır.
Bazı temel yapılar tanıtılacaktır.

Tanım 2.1.1: n ≥ 2 olmak üzere $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümeleri verilsin. O zaman;

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A, 1 \leq i \leq n\}$$

kümesine $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nin **kartezyen çarpımı** denir.

Tanım 2.1.2: A boş olmayan bir küme olmak üzere,

$$* : \quad A \times A \to A$$

$$(a, b) \to * (a, b)$$

fonksiyonuna bir ikili işlem denir ve $*(a, b)$ gösterimi yerine $a * b$ gösterimini kullanılacaktır.

Tanım 2.1.3: G boş olmayan bir küme ve $*$, G üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun.

(G_1) Her $a, b \in G$ için $a * b \in G$ (Kapalılık özelliği)

(G_2) Her $a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ (Birleşme özelliği)

(G_3) Her $a \in G$ için $a * e = e * a = e$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır. (Birim eleman özelliği)

(G_4) Her $a \in G$ için $a * x = x * a = e$ olacak şekilde bir $x \in G$ vardır. (Ters eleman özelliği)

(G_5) Her $a, b \in G$ için $a * b = b * a$ dir. (Değişme özelliği)

özelliklerinden (G_1), (G_2), (G_3), (G_4) koşulları sağlanıyorsa G kümesine $*$ ikili işlemi altında bir **grup** denir. Eğer bir G grubu (G_5) özelliğini sağlıyorsa G ye $*$ ikili işlemi altında **değişmeli grup** denir.

Tanım 2.1.4: Bir G grubunun bir H alt kümesi eğer;

$i)$ $H \neq \emptyset$

$ii)$ $xy \in H, \forall x, y \in H$

$iii)$ $x^{-1} \in H, \forall x, y \in H$

özelliklerine sahipse H, G grubunun bir alt grubudur. $H \leq G$ şeklinde gösterilir.

H, G nin alt grubu değilse $H \nleq G$ile gösterilir. G ve $\{e\}$ gruplarına G nin **aşikar** veya **trivial altgrupları** denir.

Tanım 2.1.5: G bir grup ve $N \leq G$ olsun. $\forall g \in G$ için $gNg^{-1} \subseteq N$ ise,

N ye G nin **normal altgrubu** denir ve $N \trianglelefteq G$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6: G bir grup ve K de G nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun.

G nin K yi kapsayan bütün alt gruplarının kesişimine K nin ürettiği alt grup denir ve $\langle K \rangle$ ile gösterilir. K nin elemanlarına da $\langle K \rangle$ grubunun **üreteçleri** denir.

$\langle K \rangle$ grubu K kümesini kapsayan en küçük alt grup olarak da tanımlanabilir.

Tanım 2.1.7: Bir G grubu için $G = \langle K \rangle$ olacak şekilde bir $K \subseteq G$ alt kümesi varsa G ye K ile **üretilmiş grup** denir.

Eğer K kümesi sonlu ise G ye **sonlu üretilmiş grup** denir.

Tanım 2.1.8: Tek bir eleman tarafından üretilen bir gruba **devirli grup** denir ve $G = \langle a \rangle$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.9: G bir grup ve $x \in G$ olsun. x elemanının ürettiği devirli grubun mertebesine x elemanının **mertebesi** denir ve $o(x)$ ile ya da $|x|$ ile gösterilir. Yani $o(x)$ ya da $|x|$, $x^n = e$ koşulunu sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Teorem 2.1.10: (Cauchy Teoremi): p bir asal sayı ve $p|n$ olmak üzere sonlu G grubunun mertebesi n olsun. O zaman G nin mertebesi p olan bir elemanı var ve böylece mertebesi p olan bir alt grubu vardır.

Tanım 2.1.11: G bir grup, H de G nin bir alt grubu olsun. Her $a, b \in G$ için G de

$'' \equiv ''$ bağıntısı $ab^{-1} \in H \Leftrightarrow a \equiv b(modH)$ olarak tanımlansın.

Önerme 2.1.12: Yukarıda tanımlanan$'' \equiv ''$ bağıntısı bir **denklik bağıntısı**dır.

Önerme 2.1.13: Denklik bağıntısına göre $a \in G$ elemanının **denklik sınıfı**

$\bar{a} = aH = \{ah|a \in H\}$ kümesi olup bu kümeye H alt grubunun G deki sol denklik sınıfı (sol koseti) denir.

$Ha = \{ha|a \in H\}$ kümesine ise H alt grubunun G deki sağ denklik sınıfı

(sağ koseti) denir.

Tanım 2.1.14: H nin G deki bütün farklı sağ (sol) kosetlerinin sayısına H nin G deki **indeksi** denir ve $[G:H]$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.15: Herhangi bir sonlu G grubu için

$|G| = \sum|G:\mathbb{Z}(g)|$ dir.

Yani G nin her eşlenik sınıfının birinden bir elemanın toplamıdır.

Lemma 2.1.16: H ve $K, K \leq H \leq G$ ile G grubunun alt grupları olsun. O zaman,

$$|G:K| = |G:H|.|H:K|$$

Teorem 2.1.17 (Lagrange Teoremi, Ana bölüm): G bir sonlu grup ve H, G nin bir alt grubu olsun. O zaman, $|H|\big||G|$ dir.

Sonuç 2.1.18: Lagrange teoremi ile p^{α} mertebeli bir grubun aşikâr olmayan tüm

alt grupları, p^k ye sahiptir. $k \in \{1,2,..,\alpha - 1\}$.

Tanım 2.1.19: G bir grup ve H de G nin bir alt grubu olsun. G nin H alt grubuna göre denklik sınıflarının kümesi G/H ile gösterilir.

Sonuç 2.1.20: G bir grup ve $N \trianglelefteq G$ olsun. O zaman N normal alt grup olduğundan

her sol koset bir sağ koset olup $\frac{G}{N}$ kümesi kosetlerdeki çarpma işlemine göre bir gruptur ve bu gruba **bölüm grubu** denir. G sonlu ise Lagrange teoreminden

$|G/N| = \frac{|G|}{|N|}$ dir.

Örnek 2.1.21: G ve $\{e\}$ grupları G nin **aşikâr normal alt grupları**dır.

Tanım 2.1.22: G bir grup olmak üzere,

$$Z(G) = \{a \in G : \forall x \in G \text{ için } ax = xa\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye G grubunun **merkezi** denir.

Tanım 2.1.23: G bir grup ve $H \leq G$ olsun.

$$N_G(H) = \{g \in G : gH = Hg\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye H nin G içindeki **normalleyeni** denir.

Tanım 2.1.24: G bir grup olmak üzere, G grubunun bazı S alt kümeleri ile üretilmiş grubun elemanları ile $R_1, R_2, \dots, R_n$ bağıntıları arasında herhangi bir ilişki varsa, G nin **sunumu** bağıntılar ve üreteçle şu şekilde gösterilir:

$$G = \langle S : R_1, R_2, \dots, R_n \rangle$$

2.2 Homomorfizma

$(G,\cdot), (H,*)$ iki grup ve $f: G \to H$ fonksiyon olsun. $\forall a, b \in G$ için

$$f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna **grup homomorfizması** denir.

Tanım 2.2.1: $(G,*)$ ve (G', o) iki grup olsun. $\varphi: G \longrightarrow G'$ dönüşümü bir homomorfizma olsun. e_G ve $e_{G'}$ sırasıyla bu grupların birim elemanları olsun. O halde $\{ g \in G | \varphi(g) = e_{G'}\}$ kümesine φ' nin çekirdeği denir ve $Çek\varphi$ ($Ker\varphi$) şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.2: Eğer bir grup homomorfizması birebir ve örten ise **grup izomorfizması** denir.

$f: G \to H$, grup izomorfizması ise o zaman$G$ ve H grupları **izomorftur** denir ve $G \cong H$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.3 (I. İzomorfizma Teoremi): G ve K çarpımsal iki grup, $f: G \to K$ bir

homomorfizma ve $\pi: G \to G/\ker f$ doğal homomorfizma olmak üzere

$G/\ker f \cong Imf$ olur.

Sonuç 2.2.4: φ bir grup homomorfizması ise birebirdir ancak ve ancak $Çek\phi = \{e\}$.

İspat: Kabul edelim ki φ, birebir olsun. Eğer $x \in Çek\varphi$ ise o zaman;

$x\varphi = 1 = 1\varphi$ bu yüzden $x = e$ olup birebirdir. Bu yüzden $Çek\varphi = \{e\}$ dir.

Şimdi tersine, kabul edelim ki $Çek\varphi = \{e\}$ olsun. Eğer $x\varphi = y\varphi$ ise o zaman $(xy^{-1})\varphi = (x\varphi)(y\varphi)^{-1} = e$. Bu yüzden $xy^{-1} \in Çek\varphi$. Bu yüzden $xy^{-1} = e$ ve her iki tarafı y ile çarparsak $x = y$ dir. Buradan φ birebirdir.

Tanım 2.2.5: G den G ye izomorfizmaya **otomorfizma** denir.

G nin otomorfizma grubu $\boldsymbol{AutG}$ ile ifade edilir.

2. 3 Dolaysız (Direkt) Çarpımlar

Bilinen gruplardan yeni bir grup oluşturmanın doğal yollarından biri, bunların kartezyen çarpımını düşünmektir.[**5**]

$G_1, G_2, \ldots, G_n$ grupları verilmiş olsun. Her $i = 1,2,\ldots,n$için$i$ $-$inci bileşeni G_i içinde olan sıralı n $-$lilerden oluşan küme $G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_n$ ile gösterilmiştir:

$$G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_n = \{(g_1, g_2, \ldots, g_n): g_i \in G_i, 1 \leq i \leq n\}$$

$G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_n$ nin iki elemanı $(g_1, g_2, \ldots, g_n)\left(g'_1, g'_2, \ldots, g'_n\right)$ için

$(g_1, g_2, \ldots, g_n)(g'_1, g'_2, \ldots, g'_n) = (g_1g'_1, g_2g'_2, \ldots, g_ng'_n)$ şeklinde tanımlanırsa,

$G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_n$ içinde bir ikili işlem elde edilir. Burada $g_1g'_1$ nün, G_i nin ikili işlemine göre hesaplanacağı açıktır. Bu ikili işlemle $G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_n$ bir gruptur.

Tanım 2.3.1: $G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_n$ ye $G_1, G_2, \ldots, G_n$ gruplarının **dış dolaysız çarpımı (veya toplamı)** denir.

Örnek 2.3.2: $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}$. Bu mertebesi 6 olan bir abel grubudur. Bu grup içinde $(1,1)$ in ürettiği alt grup:

$\langle(1,1)\rangle = \{(0,0),(1,1),(0,2),(1,0),(0,1),(1,2)\}$ olup $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ ün tamamıdır. O halde $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ bir devirli gruptur ve $\mathbb{Z}_6$ ya izomorftur.

Tanım 2.3.3: G bir grup $H_1, H_2, \dots, H_n$ onun altgrupları olsun. Aşağıdaki üç koşul sağlanıyorsa, G grubu $H_1, H_2, \dots, H_n$ alt gruplarının **iç dolaysız çarpımıdır** denir ve $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ yazılır:

$i)$ $G = H_1 \dots H_n$

$ii)$ Her $i \neq j, h_i \in H_i, h_j \in H_j$ için $h_i h_j = h_j h_i$ dir.

$iii)$ Her $i = 1,2, \dots, n-1$ için $(H_1 \dots H_i) \cap H_{i+1}, = \{e\}$ dir.

Örnek 2.3.4: $\mathbb{Z}_{24}^* = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$ grubunun

$H_1 = \{1, 5, 13, 17\}$, $H_2 = \{1, 11\}$, $H_3 = \{1, 19\}$ altgrupları verilsin.

$H_1H_2 = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 23\}, H_2H_3 = \{1, 11, 19, 17\}$

$H_1H_2H_3 = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$ olur. Burada;

$H_1 \cap H_2 = H_1H_2 \cap H_3 = \{1\}$ ve $H_1H_2H_3 = \mathbb{Z}_{24}^*$,

Her $i \neq j, h_i \in H_i, h_j \in H_j$ için $h_i\, h_j = h_j h_i$ olduğundan, $\mathbb{Z}_{24}^* = H_1 \times H_2 \times H_3$ tür.

Örnek 2.3.5: $\mathbb{Z}^*/_{15} = \{1,2,4,7,8,11,13,14\}$ kümesi, mertebesi 8 olan bir değişmeli grup belirtir. Bu grup 2 ve 11 elemanlarının ürettiği devirli direkt çarpıma izomorftur.

$H_1 = \langle 2 \rangle = \{1,2,4,8\}$,

$H_2 = \langle 11 \rangle = \{1,11\}$ bütün olası çarpımları $H_1H_2 = \{1, 2,4,8,11,22,44,88\}$

$H_1 \cap H_2 = \{1\}$ sağlanır ve $H_1 \times H_2$ ye izomorftur.

Örnek 2.3.6: S_3 grubu içinde $H_1 = \{1, (1,2)\}$, $H_2 = \{1, (1,3)\}$ ve $H_3 = \{1, (2,3)\}$ altgrupları alınırsa ilk koşul olan $S_3 = H_1H_2H_3$ koşulu sağlanmakla birlikte,

$(1\ 2)(2\ 3) = (1\ 2\ 3)$, $(2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3\ 2)$ den görüldüğü üzere

$(1\ 2)(2\ 3) \neq (2\ 3)(1\ 2)$ olup ikinci koşul sağlanmamaktadır. Bu nedenle,

$S_3 \neq H_1 \times H_2 \times H_3$ tür.

Örnek 2.3.7: Toplamsal grup $\mathbb{C}$ içinde, $H = \{a : a \in \mathbb{R}\}$ ve $K = \{bi : b \in \mathbb{R}\}$ altgruplarını alalım. Yine ilk koşuldan $H + K = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$,

$h \in H, k \in K \Longrightarrow h + k = k + h$ ve $H \cap K = \{0\}$ olduğundan, $\mathbb{C} = H \times K$ dir.

2.4 Yarı Direkt Çarpımlar

Tanım 2.4.1: H ve K sonlu non-trivial gruplar olmak üzere ve $\varphi: K \to Aut(H)$ bir homomorfizma olsun. Şimdi bir $\rtimes_\varphi$ operatörü tanımlayacağız.

$H \rtimes_\varphi K$ kümesi $\{(h, k): h \in H, k \in K\}$ olsun.

$*$ işlemi üzerinde $G \to H \rtimes_\varphi K$

$(h_1, k_1) * (h_2, k_2) = (h_1\varphi(k_1)(h_2), k_1k_2)$ çarpımı H ve K nin yarı direkt çarpımıdır.

Bu homomorfizma grup özelliklerini sağlar.

Yarı direkt çarpım kısaca $H \rtimes K$ şeklinde gösterilecektir.

Teorem 2.4.2: H ve K yukarıdaki gibi tanımlı ise $|G| = |H||K|$ dir.

İspat: $(G,*)$ bir grup olduğundan birleşme özelliğine ve birim elemana sahiptir. Bunun yanı sıra her elemanın tersi de vardır.

$*$ işlemi G de iyi tanımlıdır. Birleşmeli olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
\big((h_1, k_1) * (h_2, k_2)\big) * (h_3, k_3) &= (h_1\varphi(k_1)(h_2), k_1k_2) * (h_3, k_3) \\
&= (h_1\varphi(k_1)(h_2)\varphi(k_1k_2)(h_3), k_1k_2k_3) \\
&= \big(h_1\varphi(k_1)(h_2)\big)(\varphi(k_1)\varphi(k_2)(h_3))k_1k_2k_3) \\
&= \Big(h_1\varphi(k_1)\big(h_2\varphi(k_2)(h_3)\big)\Big), k_1k_2k_3 \\
&= \big((h_1, k_1) * (h_2(\varphi(k_2)(h_3)\big), k_2k_3) \\
&= (h_1, k_1) * \big((h_2, k_2) * (h_3, k_3)\big)
\end{aligned}$$

$e = (1,1)$ G nin birimi trivialdir.

$(h, k) \in G$ için$\big(\varphi(k^{-1})(h^{-1}), (k^{-1})\big)$ ters elemanlarıdır.

$$(h, k) * (\varphi(k^{-1})(h^{-1}), (k^{-1}) = (h\varphi(k)(\varphi(k^{-1})(h^{-1}), kk^{-1})$$

$$= (h\varphi(k) \circ \varphi(k^{-1}))\,(h^{-1}), kk^{-1})$$

$$= (h\varphi(k) \circ \varphi(k)^{-1}(h^{-1}), kk^{-1})$$

$$= (hi_d(h^{-1}), 1)$$

$$= (1,1)$$

Benzer şekilde $(\varphi(k^{-1})(h^{-1}), (k^{-1}) * (h, k) = (1,1)$ dir.

Sonuç olarak grubun mertebesinin $|H||K|$ olduğu açıktır.

Sonuç 2.4.3: Eğer φ trivial homomorfizm ise o zaman yarı-direkt çarpım, direkt çarpım olur.

3. BÖLÜM

p −GRUPLAR

Tanım 3.1: p bir asal sayı olmak üzere bir G grubunun tüm elemanlarının mertebesi p nin bir kuvveti ise G ye $\boldsymbol{p}$ **−grup** denir.

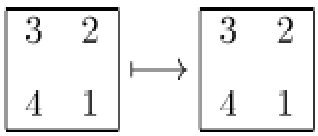
G nin bir H alt grubu p −grup ise H ye G nin $\boldsymbol{p}$ **−alt grubu** denir.

Örnek 3.2: D_8 grubu bir 2 −gruptur görelim:

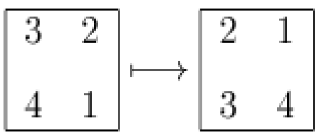
D_8 grubu karenin simetriler grubudur ve D_8 ile veya D_4 ile gösterilir.

x, y düzleminde orijin merkezli, köşelerinde ardışık $1, 2, 3, 4$ numaralı kare alalım.

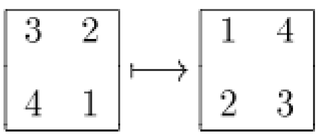
d_0: 0^o lik dönme (ilk konum)



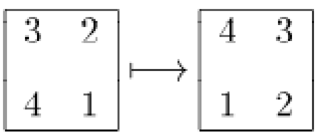
d_1: 90^o lik dönme (saat yönünün tersine) $d_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ )$



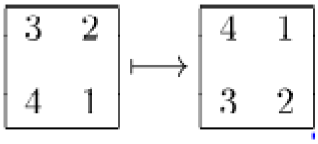
d_2: 180^o lik dönme $d_2 = (1\ 3\ )\ (\ 2\ 4\ )$



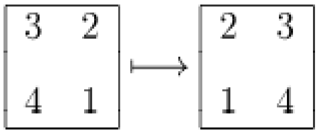
d_3: 270^o lik dönme $d_3 = (1\ 4\ 3\ 2\ )$



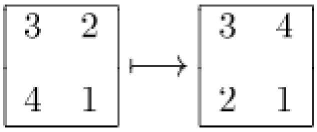
t_1: yatay eksen etrafında 180^o lik dönme $t_1 = (1\ 2\ )\ (\ 3\ 4\ )$



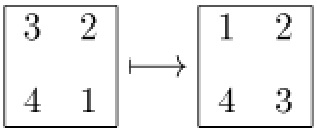
t_2: düşey eksen etrafında 180^o lik dönme $t_2 = (1\ 4\ )\ (\ 2\ 3\ )$



k_1: $1 - 3$ köşegeni etrafında 180^o lik dönme $k_1 = (2\ 4)$



k_2: $2 - 4$ köşegeni etrafında 180^o lik dönme $k_2 = (1\ 3)$



Böylece D_8 grubunun elemanlarını belirlemiş olduk.

$D_8 = \{d_0,\ d_1,\ d_2,\ d_3,\ t_1,\ t_2,\ k_1,\ k_2\ \}$.

Şimdi her elemanın mertebesinin 2 nin kuvveti oluğunu görelim:

$d_0 \in D_8$ elemanı için, $d_0 = e$,

$d_1 \in D_8$ elemanı için, $d_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ ) = {d_1}^{2^2} = e$,

$d_2 \in D_8$ elemanı için, $d_2 = (13)(2\ 4) = {d_2}^2 = e$,

$d_3 \in D_8$ elemanı için, $d_2 = (1\ 4)(\ 3\ 2\ ) = {d_2}^2 = e$,

$t_1 \in D_8$ elemanı için, $t_1 = (1\ 2\ )(\ 3\ 4\ ) = {t_1}^2 = e$,

$t_2 \in D_8$ elemanı için $t_2 = (1\ 4\ )\ \ (\ 2\ 3\ ) = \ {t_2}^2 = e$

$k_1 \in D_8$ elemanı için, $k_1 = (2\ 4) = {k_1}^2 = e$,

$k_2 \in D_8$ elemanı için, $k_2 = (1\ 3) = {k_2}^2 = e$ olup her elemanın mertebesi 2 nin kuvvetidir. Böylece D_8 bir 2 $-$gruptur.

Örnek 3.3: $\mathbb{Z}_5$ grubu bir 5 $-$gruptur.

$\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ elemanlarından oluşur ve $|\mathbb{Z}_5| = 5$ olup, her elemanın mertebesinin 5 in bir kuvveti olduğunu görelim:

$|\bar{0}| = 1 = 5^0$,

$|\bar{1}| = n.1 = 0\ ise\ n = 5$,

$|\bar{2}| = n.2 = 0\ ise\ n = 5$,

$|\bar{3}| = n.3 = 0\ ise\ n = 5$,

$|\bar{4}| = n.4 = 0\ ise\ n = 5$ olup $\mathbb{Z}_5$ in her elemanın mertebesi 5 in bir kuvvetidir. O halde $\mathbb{Z}_5$ grubu bir 5 $-$gruptur.

Örnek 3.4: $\mathbb{Z}_5$ grubu, alt gruplarının iç direkt çarpımı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$\mathbb{Z}_5$ grubu asal olduğundan alt grupları, $H_1 = \{e\}$ ve $H_2 = \{\mathbb{Z}_5\}$ dir. Buradan iç direkt çarpım özelliklerini sağlar:

$i)$ $\mathbb{Z}_5 = H_1.H_2 = e.\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}_5$

$ii)$ $e.\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}_5.e$ olup alt gruplar değişmelidir.

$iii)$ $H_1 = \{e\}, H_2 = \{\mathbb{Z}_5\}$ için $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ olup $\mathbb{Z}_5 = H_1 \times H_2$ dir.

Örnek 3.5: Karenin simetriler grubu ve Klein4 $-$lü grubu 2 $-$gruptur.

Mertebesi p^n olan her grubun, elemanlarının mertebesi, grubun mertebesini böleceğinden, bir p $-$gruptur.

Teorem 3.6: G trivial olmayan bir grup olsun. G nin sonlu p $-$grup olması için gerek ve yeter şart $k \in Z^+$ için $|G| = p^k$ olmasıdır.

İspat: G , sonlu $p-$grup olsun. Bir $g \neq p$ asal sayısı için $g/|G|$ ise Cauchy teoreminden G nin mertebesi g olan alt grubu vardır. Bu ise G nin p −grup olması ile çelişir. Böylece G nin tek asal böleni p dir. Yani $k \in Z^{+}$ için $|G| = p^{k}$ dir.

Tersine Lagrange teoreminden G nin her elemanının mertebesi p nin kuvvetidir.

Tanım 3.7: Bir p −grubu, devirli grupların yarı-direkt çarpımı olarak yazılabilir. Bu da tamamen çarpanlarına ayrılabilirdir.

Bu tanımda p ve p^{2} mertebeli p −grupların tamamen çarpanlarına ayrılabilir olduğu tüm durumlarda yarı-direkt çarpım trivial olduğu için çarpanlarına ayrılabilirdir.

Örnek 3.8: Z_{12} nin 2 −alt grupları $H = \{\bar{0}, \bar{6}\}$ ve $K = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ dur.

3 −alt grubu ise $L = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ dir.

Z_{12} nin $H = \{\bar{0}, \bar{6}\}$ alt grubununun, Z_{12} nin 2 −alt grubu olduğunu görelim.

$|\bar{0}| = 1$,

$|\bar{6}| = n.6 = \bar{0}$ ise $n = 2$ dir. O halde $H \leq Z_{12}$ alt grubunun her elemanın mertebesi 2 nin bir kuvveti olduğundan $H = \{\bar{0}, \bar{6}\}$ alt grubu bir 2 −alt gruptur.

Şimdi, $K = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ alt grubunu ele alalım.

$|\bar{0}| = 1$,

$|\bar{3}| = n.3 = \bar{0}$ ise $n = 4$,

$|\bar{6}| = n.6 = \bar{0}$ ise $n = 2$,

$|\bar{9}| = n.9 = \bar{0}$ ise $n = 4$, olup her elemanın mertebesi 2 nin bir kuvveti olduğundan

$K = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ alt grubu bir 2 −alt gruptur.

Şimdi, $L = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ alt grubunu ele alalım.

$|\bar{0}| = 1$,

$|\bar{4}| = n.4 = \bar{0}$ ise $n = 3$,

$|\bar{8}| = n.8 = \bar{0}$ ise $n = 3$ olup her elemanın mertebesi 3 ün bir kuvveti olduğundan

$L = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ alt grubu bir 3 −alt gruptur.

Örnek 3.9: A_4 grubunun (S_4 ün çift permütasyonlar grubu) $2-$ alt grupları: $\langle(12)(34)\rangle\langle(13)(24)\rangle\langle(14)(23)\rangle$ ve $\{e,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$ tür.

Teorem 3.10: G bir p^n mertebeli bir $p-$grup olmak üzere G nin merkezi

non-trivialdir. Yani $\mathbb{Z}(G)\neq 1$.

İspat: G bir p asal sayısının bir kuvvetinin mertebesi olan sonlu aşikar bir grup olsun. $\mathbb{Z}(G)$ bir elemandan fazlasına sahiptir ancak ve ancak $g\in\mathbb{Z}(G)$ ise

$cl(g)=\{g\}$ dir. (g nin eşleniklerinin sayısı)

Böylece istediğimiz elemanları seçerek sınıf denklemini şu şekilde yazarız:

$$|G|=|\mathbb{Z}(G)|+\sum|G:\mathbb{Z}(g)|$$

Burada toplam sembolü birden fazla elemanı olan bütün eşlenik sınıflarının üzerinde

çalışır. Fakat, $|G:\mathbb{Z}(g)|=|G|/\mathbb{Z}(g)$ dir. Yani$\sum|G:\mathbb{Z}(g)|$ içindeki her eleman $k>1$ iken p^k formuna sahiptir. Bundan dolayı$|G|-\sum|G:\mathbb{Z}(g)|=|\mathbb{Z}(G)|$ olur.

$|G|-\sum|G:\mathbb{Z}(g)|$ burada her terim p ile bölünür. Sonrasında p, $|\mathbb{Z}(G)|$ yi de böler. Dolayısıyla $\mathbb{Z}(G)\neq 1$.

Örnek 3.11: G değişmeli grup, H ve K de altgrupları olsun. $|H|=m,|K|=n$ ve

$d=ekok(m,n)$ olsun. Bu halde G nin $d.$ mertebeden altgrubu vardır.

Çözüm: G grubu değişmeli olduğundan $HK<G$ ve H ve K sonlu olduğundan, HK de sonludur. H ile K , HK nin altgrupları olduğundan $m\big||HK|$ ve $N\big||HK|$ dir. Böylece $D\big||HK|$ dir. Bu halde HK sonlu değişmeli grup ve $d/|HK|$ olduğundan HK nin ve böylece G nin mertebesi d olan alt grubu vardır.

4. BÖLÜM

SONLU ABEL GRUPLARIN TEMEL TEOREMİ

Bu bölümde verilen temel teorem, temel teoremin ikinci ifadesi, tanım ve örnekler [**6**] da çalışılmıştır.

Bu bölümde, bir cebircinin gözüyle, yani izomorfizm farkıyla, tüm sonlu abel grupların yapısını açıklayan bir teorem verilecektir. Bu teorem 1858 de Leopolt Kronocker tarafından ispatlanmıştır.

Teorem (Temel Teorem): Her sonlu abel grubu, her birinin mertebesi bir asal sayının kuvveti olan sonlu sayıda devirli altgrubun iç dolaysız çarpımıdır. Ayrıca bu dolaysız çarpımdaki devirli gruplar, sıralanışları dışında ve izomorfizm farkıyla tek türlü belirlidir.

Ayrıca mertebesi n olan her devirli grubun $\mathbb{Z}_n$ ye izomorf olduğu göz önüne alınırsa, Temel Teorem, her sonlu Abel G grubu için,

$$G \cong \mathbb{Z}_{p_1}^{n_1} \times \mathbb{Z}_{p_2}^{n_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_k}^{n_k}$$

olacak şekilde (farklı olmaları gerekmeyen) asal sayılar, $p_1, \ldots, p_k$ ve pozitif tamsayılar, $n_1, \ldots, n_k$ bulunduğunu gösterir. Buradaki ${p_1}^{n_1}, \ldots, {p_k}^{n_k}$ sayıları G tarafından tek türlü belirlenir. Bir sonlu Abel grubunu bu şekilde ifade etmek, onun izomorfizm sınıfını tamamen belirler.

Temel teorem o kadar güçlüdür ki bu teoremi kullanarak istenilen her mertebeden tüm Abel gruplarını, izomorfizm farkıyla, inşa etmek mümkündür. Örneğin p bir asal sayı olmak üzere, mertebesi p olan her Abel grubu $\mathbb{Z}_p$ ye; mertebesi p^2 olan her Abel grubu, $\mathbb{Z}_{p^2}$ veya $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ den birine; mertebesi p^3 olan her Abel grubu, $\mathbb{Z}_{p^3}$,

$\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ den birine, mertebesi p^4 olan her Abel grubu, $\mathbb{Z}_{p^4}$,

$\mathbb{Z}_{p^3} \times \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{p^2}$ den birine izomorftur.

G bir sonlu Abel grubu ise, G nin Temel Teoremdeki ifadesini aşağıdaki gibi düzenleyebiliriz:

$p_1 > \cdots > p_k$ farklı asal sayılar; her $i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, r$ için $t_{ij} \geq 0$ ve ayrıca $j < v$ için $t_{ij} \geq t_{iv}$olmak üzere :

$$G \cong \mathbb{Z}_{p_1}t_{11} \times \mathbb{Z}_{p_1}t_{12} \times \mathbb{Z}_{p_1}t_{13} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_1}t_{1r} \times$$

$$\mathbb{Z}_{p_2}t_{21} \times \mathbb{Z}_{p_2}t_{22} \times \mathbb{Z}_{p_2}t_{23} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_2}t_{2r} \times$$

$$\ldots$$

$$\mathbb{Z}_{p_k}t_{k1} \times \mathbb{Z}_{p_k}t_{k2} \times \mathbb{Z}_{p_k}t_{k3} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_k}t_{kr} \times$$

yazalım. Bu takdirde, her $j = 1, \ldots, r$ için $m_j = p_1^{t1j} p_1^{t2j} \ldots p_1^{tkj}$

Tanımlarsak, her $j = 2, \ldots, r$ için m_j / m_{j-1} ve

$$G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \ldots \times \mathbb{Z}_{m_r}$$

olur. Böylece elde edilen $m_1, \ldots, m_r$ tam sayıları tek türlü belirlidir.

Gerçekten, eğer her $j = 2, \ldots, s$ için μ_j / μ_{j-1} ve $G \cong \mathbb{Z}_{\mu_1} \times \mathbb{Z}_{\mu_2} \ldots \times \mathbb{Z}_{\mu_r}$ olan $1 < \mu_s \leq \mu_{s-1} \leq \cdots \leq \mu_1$ sayıları varsa, $r = s$ ve her

$j = 1, \ldots, r$ için $\mu_j = m_j$ dir. Bunu görmek için her bir μ_j nin asal çarpanlarına ayrılışı düşünülürse, $u_{ij} \geq 0$ olmak üzere $\mu_j = p_1^{u1j} p_1^{u2j} \ldots p_1^{ukj}$ olduğu ve

$$G(p_i) \cong \mathbb{Z}_{p_i}t_{i1} \times \mathbb{Z}_{p_i}t_{i2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_i}t_{ir} \cong \mathbb{Z}_{p_i}u_{i1} \times \mathbb{Z}_{p_i}u_{i2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_i}u_{is}$$

olduğu görülür. Temel teoremin birinci ifadesinden $r = s$ olduğu, her $j = 1, \ldots, r$

için$p_1^{t_{ij}} = p_1^{u_{ij}}$ve dolayısıyla, $\mu_j = m_j$ olduğu görülür.

4.1 Sonlu Abel Grupların Temel Teoremin İkinci İfadesi

Eğer G bir sonlu Abel grubu ise, öyle tek türlü belirli $m_1, \ldots, m_r$ tam sayıları bulunabilir ki her $j = 2, \ldots, r$ için m_j / m_{j-1} ve $G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \ldots \times \mathbb{Z}_{m_r}$(2) dir.

Örnek 4.1.1: $G = \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ grubunun (2) deki biçimde yazılışı şöyle elde edilir:

Gösterimler yukarıdaki gibi olmak üzere $p_1 = 5,\ p_2 = 3$ alınırsa,

$t_{11} = 1, t_{12} = 1, t_{13} = 1; t_{21} = 1, t_{22} = 0, t_{23} = 0; t_{31} = 2, t_{32} = 1, t_{33} = 0$ ve

$m_1 = 5.3.2^2 = 60, m_2 = 5.2 = 10, m_3 = 5$ elde edilir. Böylece,

$$G \cong \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_5$$

olduğu görülür.

Tanım 4.1.2: Temel Teoremin ilk ifadesinde ortaya çıkan ${p_1}^{n_1}, \dots, {p_k}^{n_k}$ sayılarına G nin **basit çarpanları**, ikinci ifadede ortaya çıkan $m_1, \dots, m_r$ sayılarına da G nin **değişmez çarpanları** denir.

Temel Teorem'in ispatındaki yöntemle, mertebesi p^n (p asal) olan bir G Abel grupların dolaysız çarpımı olarak yazılışı şöyle programlanmıştır:

Önce, G nin mertebesi en büyük olan elemanlarından biri, diyelim ki a_1 alınır,

$G = \langle a_1 \rangle \times K_1, \quad G_1 = \langle a_1 \rangle$

bulunur. Sonra varsa G içinde mertebesi $p^k \leq |G|\big||G_1|$ olan ve her

$j = 0,1, \dots, k-1$ için $a_2^{p^j} \notin G_1$ koşulunu sağlayan elemanları arasında mertebesi maksimum olan biri seçilir,

$G = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times K_2, \quad G_2 = G_1 \times \langle a_2 \rangle$

bulunur. Sonra varsa G içinde mertebesi

$p^t \leq |G|\big||G_2|$ olan ve her $j = 0,1, \dots, t-1$ için $a_3^{p^j} \notin G_2$ koşulunu sağlayan elemanları arasında mertebesi maksimum olan biri seçilir,

$G = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle \times K_3, G_3 = G_2 \times \langle a_3 \rangle$

bulunur ve bu işlem sürdürülür. Bu sürecin sonlu olacağı açıktır.

Örnek 4.1: $\mathbb{Z}_{91}^{*}$ in $G = \{1, 9, 16, 22, 29, 53, 74, 79, 81\}$ altgrubunu ele alalım. Bu grubun elemanlarının mertebeleri aşağıdaki tabloda gösterilmiştir:

Eleman	1	9	16	22	29	53	74	79	81
Mertebe	1	3	3	3	3	3	3	3	3

O halde bu G grubu bir $3-$gruptur.

$a_1 = 9$ seçelim. O zaman, $G_1 = \langle 9 \rangle = \{1,9,81\}$ olur.

$a_2 = 16$ seçersek, $G_2 = \langle 9 \rangle \times \langle 16 \rangle = G$ ve böylece $G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ olduğu görülür.

5. BÖLÜM

$p -$ GRUPLARIN OTOMORFİZMLERİ

5.1 $p -$ Grupların Yarı direkt Çarpımlar Olarak Çarpanlarına Ayrılması

Önerme 5.1.1: G, n mertebeli bir sonlu grup olsun. Eğer $G/Z(G)$ devirli ise o zaman G abelyendir.

İspat: [**1**] $Z(G) = \{1, z_1, z_2, \dots, z_{q-1}\}$ q. mertebedendir. Kabul edelim ki $G/Z(G) = \{x_1\, Z(G), x_2 Z(G), \dots, x_n\, Z(G)\}$ devirlidir. Bu m mertebeli $g \in G$ vardır anlamına gelir öyle ki $m \in Z^+$ ve $m \leq n$ için:

$G/Z(G) = \langle gZ(G) \rangle = \{Z(G), gZ(G), g^2 Z(G), \dots, g^{m-1} Z(G)\}$.

Bu yüzden tüm $k \in \{1,2, \dots, n\}$ için bazı $i \in \{1,2, \dots, m\}$ vardır öyle ki $\{x_k, x_k z_1, \dots, x_k z_{q-1}\} = x_k Z(G) = g^i Z(G) = \{g^i, g^i z_1, g^i z_2, \dots, g^i z_{q-1}\}$

$\Rightarrow x_k \in \{g^i, g^i z_1, g^i z_2, \dots, g^i z_{q-1}\}$

$\Rightarrow x_k = g^i$ veya $x_k = g^i z_j$ ($j \in \{1,2, \dots, q-1\}$.

Böylece tüm $x \in G$ ler için bir $g \in G$ var olduğu sonucuna varıldı.

Bazı $1 \leq i \leq m$ ve bazı $z \in Z(G)$ için $x = g^i z$ dir.

Teorem 5.1.2: G, p^n mertebeli bir p −grup olsun. O zaman;

i) G nin merkezi non-trivialdir.

ii) Her $k \in \{0,1, \dots, n\}$ için G, p^k mertebeli bir normal alt gruba sahiptir.

iii) p^{n-1} mertebeli her alt grup G de normaldir.

Teorem 5.1.3: p bir asal sayı olmak üzere herhangi p mertebeli bir grup, devirli Z_p grubuna izomorfiktir.

Teorem 5.1.4: p asal olmak üzere p^2 mertebeli grup Z_{p^2} ye ya da $Z_p \times Z_p$ ye izomorftur.

5.2 p −Gruplarının Otomorfizmleri

Tanım 5.2.1: G grubunun otomorfizm grubu, izomorfiği olan bir H grubu olsun.

Yani, bazı ψ izomorfizmleri için $Aut(G) \cong H$dır.

$$\psi(\varphi) = h$$

$h \in H$ için ψ altındaki bazı $\varphi \in Aut(G)$ otomorfizmlerinin görüntüsüdür. Şunu söyleyebiliriz ki φ ve h izomorfik olmaları bakımından ilişkilidir. Bunu şu şekilde gösteririz: $\varphi \leftrightarrow h$.

5.3 $\mathbb{Z}_{p^n}$ nin Otomorfizm Grubu

[**1**] Bir devirli $p-$ grubunun otomorfizm grubu $\mathbb{Z}_{p^n}$, ${\mathbb{Z}_{p^n}}^*$ çarpım grubuna izomorfiktir**.**

$$Aut(\mathbb{Z}_{p^n}) \cong {\mathbb{Z}_{p^n}}^*$$

$Aut(\mathbb{Z}_{p^n})$ otomorfizm grubunun elemanlarının birleşimine bakalım:

π, σ birim elemandan farklı olmak üzere,

$\pi, \sigma \in Aut(\mathbb{Z}_{p^n})$ alalım. $\pi(1) = g$ ve $\sigma(1) = h$ alalım.

$$\begin{aligned} \pi \circ \sigma(1) = \pi(h) &= \pi(1 + 1 + \cdots + 1) \\ &= \pi(1) + \pi(1) + \cdots + \pi(1) \\ &= h\,\pi(1) = hg \end{aligned}$$

$p^{n-1}(p-1)$ mertebeli devirli bir grup ${\mathbb{Z}_{p^n}}^*$ olduğundan, aslında bir eleman tersinirdir. Ancak ve ancak p ile bölünebilir değildir.

$|{\mathbb{Z}_{p^n}}^*| = p^n - p^{n-1} = p^{n-1}(p-1)$.

5.4 $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ ve $\mathbb{Z}_{p^n}$ nin Otomorfizm Grupları

[**1**] $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ ve $\mathbb{Z}_{p^n}$ nin otomorfizm grubu Gustav Saeden Stahl, Johan Laine, Gustav Behm tarafından şu şekilde çalışılmıştır:

$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ iki eleman tarafından üretilen bir gruptur. Bu grubun üreteçleri olarak $(0,1)$ ve $(1,0)$ i alalım.

$\varphi \in Aut(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p)$ ve $\varphi(1,0) = (a, b)$ ve $\varphi(0,1) = (c, d)$ alalım.

Eğer $(g, h) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ alırsak, $\varphi\big((g, h)\big) = \varphi((g, 0) + \varphi((0, h))$

$$\begin{aligned} &= g\,\varphi(1,0) + h\,\varphi(0,1) \\ &= g(a, b) + h(c, d) \\ &= (ga + hc, gb + hd) \end{aligned}$$

Bu otomorfizmayı matris olarak aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$(g,h).\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ga + hc, gb + hd)$$

$\sigma \in Aut(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p)$ ve $\sigma(1,0) = (c,d)$ ve $\sigma(0,1) = (k,l)$ olsun.

$$\begin{aligned}
\sigma \circ \varphi(g,h) &= \sigma(ga + hc, gb + hd) \\
&= (ga + hc)\,\sigma(1,0) + (gb + hd)\sigma(0,1) \\
&= (ga + hc)(i,j) + (gb + hd)(k,l) \\
&= (gai + hci, gaj + hcj) + (gbk + hdk, gbl + hdl) \\
&= \big(g(ai + bk) + h(ci + dk), g(aj + bl) + h(cj + dl)\big)
\end{aligned}$$

Aynı sonucu aşağıdaki gibi de elde ederiz:

$$(g,h)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} = (g,h)\begin{pmatrix} ai + bk & aj + bl \\ ci + dk & cj + dl \end{pmatrix}$$

$= \big(g(ai + bk) + h(ci + dk), g(aj + bl) + h(cj + dl)\big)$ elde edilir.

Dolayısıyla iki otomorfizmin bileşkesi matris çarpımı ile aynıdır. Gerçekten

$\varphi \in Aut(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p)$ bir izomorfizm olup olmadığını kontrol edelim. Sonlu gruplarla işlem yaptığımızdan birebir olduğunu göstermek yeterlidir.

$(g,h)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (0,0)$ tek çözüme sahiptir.

$(g,h) = (0,0)$ ancak ve ancak matris tersinirdir. Yani

$ad - bc \neq 0$ dır. Görüyoruz ki;

$Aut(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p) \cong \; Gl_2(p)$ dir.

5.5 $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p$ nin Otomorfizm Grubu

$p > 2$ olmak üzere $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p$ nin otomorfizm grubunun sunumu Gustav Sædén Ståhl, Johan Laine, Gustav Behm in çalışmalarında [**1**] şu şekilde verilmektedir:

$$\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p \cong \langle a, b \colon a^{p^2} = 1, b^p = 1, ab = ba \rangle$$

φ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\varphi \colon \mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p$$

$$(a,b) \to (a^i b^j, a^{pm} b^l)$$

$$\varphi: \begin{cases} a \to a^i b^j & i \in \mathbb{Z}_{p^2} \text{ ve i} \not\equiv 0\ (mod\ p) \\ b \to a^k b^l & m, j, l \in \mathbb{Z}_p \text{ve l} \not\equiv 0\ (mod\ p) \end{cases}$$

Grubun mertebesi:

$|Aut(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p)| = (p^3 - p^2)(p^2 - p) = p^3(p-1)^2$ verilmiştir.

Son olarak otomorfizm gruplarında dönüşümün nasıl ifade edildiğine bakalım. Bunun için başka bir otomorfizm σ alınmış ve şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\sigma: \begin{cases} a \to a^{i'} b^{j'} i' \in \mathbb{Z}_{p^2} \text{ve } i' \not\equiv 0\ (mod\ p) \\ b \to a^{pm'} b^{l'} m', j', l' \in \mathbb{Z}_p \text{ve } l' \not\equiv 0\ (mod\ p) \end{cases}$$

Teorem 5.5.1: $\varphi: \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$ otomorfizmleri

$|Aut(\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3)| = 3^3(3-1)^2 = 108$ tanedir. Bu dönüşümleri bulalım:

$$\varphi: (a,b) \to (a^{\mathbb{Z}_9} b^{\mathbb{Z}_3}, a^{3m'} b^{l'})$$

$$\varphi_1: (a,b) \to (a^1 b^0, a^{3m'} b^{l'})$$

$$\varphi_2: (a,b) \to (a^1 b^1, a^{3m'} b^{l'})$$

$$\varphi_3: (a,b) \to (a^1 b^2, a^{3m'} b^{l'})$$

$$\varphi_4: (a,b) \to (a^2 b^0, a^{3m'} b^{l'})$$

$$\varphi_5: (a,b) \to (a^2 b^1, a^{3m'} b^{l'})$$

$$\varphi_6: (a,b) \to (a^2 b^2, a^{3m'} b^{l'})$$

$$\varphi_7: (a,b) \to (a^4 b^0, a^{3m'} b^{l'})$$

$$\varphi_8: (a,b) \to (a^4 b^1, a^{3m'} b^{l'})$$

$$\varphi_9: (a,b) \to (a^4 b^2, a^{3m'} b^{l'})$$

$$\varphi_{10}: (a,b) \to (a^5 b^0, a^{3m'} b^{l'})$$

$$\varphi_{11}: (a,b) \to (a^5 b^1, a^{3m'} b^{l'})$$

$$\varphi_{12}: (a,b) \to (a^5 b^2, a^{3m'} b^{l'})$$

$$\varphi_{13}: (a,b) \to (a^7 b^0, a^{3m'} b^{l'})$$

$$\varphi_{14}: (a,b) \to \left(a^7 b^1, a^{3m'} b^{l'}\right)$$

$$\varphi_{15}: (a,b) \to \left(a^7 b^2, a^{3m'} b^{l'}\right)$$

$$\varphi_{16}: (a,b) \to \left(a^8 b^0, a^{3m'} b^{l'}\right)$$

$$\varphi_{17}: (a,b) \to \left(a^8 b^1, a^{3m'} b^{l'}\right)$$

$$\varphi_{18}: (a,b) \to \left(a^8 b^2, a^{3m'} b^{l'}\right)$$

m' ve l' nün değerlerini yerine yazarsak bu 108 otomorfizma şunlardır:

$m' = 0$ ve $l' = 0$ için:

$$\varphi: (a,b) \to (a^{\mathbb{Z}_9} b^{\mathbb{Z}_3}, a^0 b^0)$$

$\varphi_1: (a,b) \to (a^1 b^0, a^0 b^0)$ $\qquad$ $\varphi_{10}: (a,b) \to (a^5 b^0, a^0 b^0)$

$\varphi_2: (a,b) \to (a^1 b^1, a^0 b^0)$ $\qquad$ $\varphi_{11}: (a,b) \to (a^5 b^1, a^0 b^0)$

$\varphi_3: (a,b) \to (a^1 b^2, a^0 b^0)$ $\qquad$ $\varphi_{12}: (a,b) \to (a^5 b^2, a^0 b^0)$

$\varphi_4: (a,b) \to (a^2 b^0, a^0 b^0)$ $\qquad$ $\varphi_{13}: (a,b) \to (a^7 b^0, a^0 b^0)$

$\varphi_5: (a,b) \to (a^2 b^1, a^0 b^0)$ $\qquad$ $\varphi_{14}: (a,b) \to (a^7 b^1, a^0 b^0)$

$\varphi_6: (a,b) \to (a^2 b^2, a^0 b^0)$ $\qquad$ $\varphi_{15}: (a,b) \to (a^7 b^2, a^0 b^0)$

$\varphi_7: (a,b) \to (a^4 b^0, a^0 b^0)$ $\qquad$ $\varphi_{16}: (a,b) \to (a^8 b^0, a^0 b^0)$

$\varphi_8: (a,b) \to (a^4 b^1, a^0 b^0)$ $\qquad$ $\varphi_{17}: (a,b) \to (a^8 b^1, a^0 b^0)$

$\varphi_9: (a,b) \to (a^4 b^2, a^0 b^0)$ $\qquad$ $\varphi_{18}: (a,b) \to (a^8 b^2, a^0 b^0)$

$m' = 1$ ve $l' = 0$ için:

$$\rho: (a,b) \to (a^{\mathbb{Z}_9} b^{\mathbb{Z}_3}, a^3 b^0)$$

$\rho_1: (a,b) \to (a^1 b^0, a^3 b^0)$ $\qquad$ $\rho_{10}: (a,b) \to (a^5 b^0, a^3 b^0)$

$\rho_2: (a,b) \to (a^1 b^1, a^3 b^0)$ $\qquad$ $\rho_{11}: (a,b) \to (a^5 b^1, a^3 b^0)$

$\rho_3: (a,b) \to (a^1 b^2, a^3 b^0)$ $\qquad$ $\rho_{12}: (a,b) \to (a^5 b^2, a^3 b^0)$

$\rho_4: (a,b) \to (a^2 b^0, a^3 b^0)$ $\qquad$ $\rho_{13}: (a,b) \to (a^7 b^0, a^3 b^0)$

$\rho_5: (a,b) \to (a^2 b^1, a^3 b^0)$ $\qquad$ $\rho_{14}: (a,b) \to (a^7 b^1, a^3 b^0)$

$\rho_6: (a,b) \rightarrow (a^2b^2, a^3b^0)$

$\rho_7: (a,b) \rightarrow (a^4b^0, a^3b^0)$

$\rho_8: (a,b) \rightarrow (a^4b^1, a^3b^0)$

$\rho_9: (a,b) \rightarrow (a^4b^2, a^3b^0)$

$\rho_{15}: (a,b) \rightarrow (a^7b^2, a^3b^0)$

$\rho_{16}: (a,b) \rightarrow (a^8b^0, a^3b^0)$

$\rho_{17}: (a,b) \rightarrow (a^8b^1, a^3b^0)$

$\rho_{18}: (a,b) \rightarrow (a^8b^2, a^3b^0)$

$m' = 2$ ve $l' = 0$ için:

$$(a,b) \rightarrow (a^{\mathbb{Z}_9}b^{\mathbb{Z}_3}, a^6b^0)$$

$\tau_1: (a,b) \rightarrow (a^1b^0, a^6b^0)$

$\tau_2: (a,b) \rightarrow (a^1b^1, a^6b^0)$

$\tau_3: (a,b) \rightarrow (a^1b^2, a^6b^0)$

$\tau_4: (a,b) \rightarrow (a^2b^0, a^6b^0)$

$\tau_5: (a,b) \rightarrow (a^2b^1, a^6b^0)$

$\tau_6: (a,b) \rightarrow (a^2b^2, a^6b^0)$

$\tau_7: (a,b) \rightarrow (a^4b^0, a^6b^0)$

$\tau_8: (a,b) \rightarrow (a^4b^1, a^6b^0)$

$\tau_9: (a,b) \rightarrow (a^4b^2, a^6b^0)$

$\tau_{10}: (a,b) \rightarrow (a^5b^0, a^6b^0)$

$\tau_{11}: (a,b) \rightarrow (a^5b^1, a^6b^0)$

$\tau_{12}: (a,b) \rightarrow (a^5b^2, a^6b^0)$

$\tau_{13}: (a,b) \rightarrow (a^7b^0, a^6b^0)$

$\tau_{14}: (a,b) \rightarrow (a^7b^1, a^6b^0)$

$\tau_{15}: (a,b) \rightarrow (a^7b^2, a^6b^0)$

$\tau_{16}: (a,b) \rightarrow (a^8b^0, a^6b^0)$

$\tau_{17}: (a,b) \rightarrow (a^8b^1, a^6b^0)$

$\tau_{18}: (a,b) \rightarrow (a^8b^2, a^6b^0)$

$m' = 0$ ve $l' = 1$ için:

$$(a,b) \rightarrow (a^{\mathbb{Z}_9}b^{\mathbb{Z}_3}, a^0b^1)$$

$\alpha_1: (a,b) \rightarrow (a^1b^0, a^0b^1)$

$\alpha_2: (a,b) \rightarrow (a^1b^1, a^0b^1)$

$\alpha_3: (a,b) \rightarrow (a^1b^2, a^0b^1)$

$\alpha_4: (a,b) \rightarrow (a^2b^0, a^0b^1)$

$\alpha_5: (a,b) \rightarrow (a^2b^1, a^0b^1)$

$\alpha_6: (a,b) \rightarrow (a^2b^2, a^0b^1)$

$\alpha_7: (a,b) \rightarrow (a^4b^0, a^0b^1)$

$\alpha_8: (a,b) \rightarrow (a^4b^1, a^0b^1)$

$\alpha_{10}: (a,b) \rightarrow (a^5b^0, a^0b^1)$

$\alpha_{11}: (a,b) \rightarrow (a^5b^1, a^0b^1)$

$\alpha_{12}: (a,b) \rightarrow (a^5b^2, a^0b^1)$

$\alpha_{13}: (a,b) \rightarrow (a^7b^0, a^0b^1)$

$\alpha_{14}: (a,b) \rightarrow (a^7b^1, a^0b^1)$

$\alpha_{15}: (a,b) \rightarrow (a^7b^2, a^0b^1)$

$\alpha_{16}: (a,b) \rightarrow (a^8b^0, a^0b^1)$

$\alpha_{17}: (a,b) \rightarrow (a^8b^1, a^0b^1)$

$\alpha_9: (a, b) \to (a^4 b^2, a^0 b^1)$ $\alpha_{18}: (a, b) \to (a^8 b^2, a^0 b^1)$

$m' = 1$ ve $l' = 1$ için:

$$(a, b) \to (a^{\mathbb{Z}_9} b^{\mathbb{Z}_3}, a^3 b^1)$$

$\beta_1: (a, b) \to (a^1 b^0, a^3 b^1)$ $\beta_{10}: (a, b) \to (a^5 b^0, a^3 b^1)$

$\beta_2: (a, b) \to (a^1 b^1, a^3 b^1)$ $\beta_{11}: (a, b) \to (a^5 b^1, a^3 b^1)$

$\beta_3: (a, b) \to (a^1 b^2, a^3 b^1)$ $\beta_{12}: (a, b) \to (a^5 b^2, a^3 b^1)$

$\beta_4: (a, b) \to (a^2 b^0, a^3 b^1)$ $\beta_{13}: (a, b) \to (a^7 b^0, a^3 b^1)$

$\beta_5: (a, b) \to (a^2 b^1, a^3 b^1)$ $\beta_{14}: (a, b) \to (a^7 b^1, a^3 b^1)$

$\beta_6: (a, b) \to (a^2 b^2, a^3 b^1)$ $\beta_{15}: (a, b) \to (a^7 b^2, a^3 b^1)$

$\beta_7: (a, b) \to (a^4 b^0, a^3 b^1)$ $\beta_{16}: (a, b) \to (a^8 b^0, a^3 b^1)$

$\beta_8: (a, b) \to (a^4 b^1, a^3 b^1)$ $\beta_{17}: (a, b) \to (a^8 b^1, a^3 b^1)$

$\beta_9: (a, b) \to (a^4 b^2, a^3 b^1)$ $\beta_{18}: (a, b) \to (a^8 b^2, a^3 b^1)$

$m' = 2$ ve $l' = 1$ için:

$$(a, b) \to (a^{\mathbb{Z}_9} b^{\mathbb{Z}_3}, a^6 b^1)$$

$\varepsilon_1: (a, b) \to (a^1 b^0, a^6 b^1)$ $\varepsilon_{10}: (a, b) \to (a^5 b^0, a^6 b^1)$

$\varepsilon_2: (a, b) \to (a^1 b^1, a^6 b^1)$ $\varepsilon_{11}: (a, b) \to (a^5 b^1, a^6 b^1)$

$\varepsilon_3: (a, b) \to (a^1 b^2, a^6 b^1)$ $\varepsilon_{12}: (a, b) \to (a^5 b^2, a^6 b^1)$

$\varepsilon_4: (a, b) \to (a^2 b^0, a^6 b^1)$ $\varepsilon_{13}: (a, b) \to (a^7 b^0, a^6 b^1)$

$\varepsilon_5: (a, b) \to (a^2 b^1, a^6 b^1)$ $\varepsilon_{14}: (a, b) \to (a^7 b^1, a^6 b^1)$

$\varepsilon_6: (a, b) \to (a^2 b^2, a^6 b^1)$ $\varepsilon_{15}: (a, b) \to (a^7 b^2, a^6 b^1)$

$\varepsilon_7: (a, b) \to (a^4 b^0, a^6 b^1)$ $\varepsilon_{16}: (a, b) \to (a^8 b^0, a^6 b^1)$

$\varepsilon_8: (a, b) \to (a^4 b^1, a^6 b^1)$ $\varepsilon_{17}: (a, b) \to (a^8 b^1, a^6 b^1)$

$\varepsilon_9: (a, b) \to (a^4 b^2, a^6 b^1)$ $\varepsilon_{18}: (a, b) \to (a^8 b^2, a^6 b^1)$

5.6 Direkt Çarpımların Merkezi ve Merkezi Otomorfizmleri

Teorem 5.6.1: φ: $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$ grubunun merkez elemanlarını bulalım.

$\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$ grubunun elemanları :
$\{(0,0),(0,1),(0,2)(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2),(4,0),(4,1),$

$(4,2),(5,0),(5,1),(5,2),(6,0),(6,1),(6,2),(7,0),(7,1),(7,2),(8,0),(8,1),(8,2)\}$
dir.

Toplama işlemine göre $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$ grubunun tüm elemanları merkezdir.

$\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$ grubunun merkez elemanlarının kümesini $Z(K)$ ile gösterelim. O halde
$Z(K) = \{(0,0),(0,1),(0,2)(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2),$

$(4,0),(4,1),(4,2),(5,0),(5,1),(5,2),(6,0),(6,1),(6,2),(7,0),(7,1),(7,2),(8,0),(8,1),(8,2)\}$

olur. O halde 27 tane merkez elemanı vardır.

$$\varphi: \mathbb{Z}_{3^2} \times \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_{3^2} \times \mathbb{Z}_3$$

$$(a,b) \to \left(a^i b^j, a^{3m} b^l\right)$$

$g = (0,0) \in \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$ için g^{-1} i bulalım:

$$(0,0) + (a',b') = (0,0)$$

$$g^{-1} = (a',b') = (0,0)$$

Merkezi otomorfizm olması için $g^{-1} + \varphi(g) \in Z(K)$ olmalıdır.

$(0,0) + (0,0) = (0,0) \in Z(K)$ olup merkezdir.

$g = (0,1) \in \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$ için g^{-1}i bulalım:

$$(0,1) + (a',b') = (0,0)$$

$$g^{-1} = (a',b') = (0,2)$$

Merkezi otomorfizm olması için $g^{-1} + \varphi(g) \in Z(K)$ olmalıdır.

$(0,2) + (0,1) = (0,0) \in Z(K)$ olup merkezdir.

$g = (8,2) \in \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$ içing^{-1}i bulalım:

$$(8,2) + (a',b') = (0,0)$$

$$g^{-1} = (a',b') = (1,1)$$

Merkezi otomorfizm olması için $g^{-1}+\varphi(g)\in Z(K)$ olmalıdır.

$(1,1)+(8,2)=(0,0)\in Z(K)$ olup merkezdir.

O halde $\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_3$ grubunun bütün elemanları için,

$g^{-1}+\varphi(g)=(0,0)\in Z(K)$ olup bütün elemanları merkezi otomorfizm olup 27 tanedir.

Örnek 5.6.2: [**1**] $\mathbb{Z}_{p^2}\rtimes\mathbb{Z}_p$, * operatörü ile şu şekilde ifade edilmiştir:

$$(a,b)*(c,d)=(a+\varphi(b)(c),b+d)=(a+(1+pb).c,b+d)$$

Burada $\varphi(b),(1+pb)$ çarpımını ifade eder. Ve merkez de:

$\mathbb{Z}(G)=\left\{\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}: n\in\mathbb{Z}_{p^2} ve\ p/n\right\}\cong\left\{(n,0): n\in\mathbb{Z}_{p^2} ve\ p/n\right\}$ şeklinde ifade edilir.

5.7 $\mathbb{Z}_{p^2}\rtimes\mathbb{Z}_p$ nin Otomorfizm Grubu

$\mathbb{Z}_{p^2}\rtimes\mathbb{Z}_p$ nin otomorfizm grubu Gustav Saeden Stahl, Johan Laine, Gustav Behm in çalışmalarında [**1**] şu şekilde verilmektedir:

Bu grubun iki üreteci vardır. Bunlar $a=(1,0)$ ve $b=(0,1)$ ve $ba=a^{1+p}b$ dir.

Bu grubun sunumu şu şekildedir:

$$\mathbb{Z}_{p^2}\rtimes\mathbb{Z}_p\cong\langle a,b: p^2a=0, pb=0\ ba=a^{1+p}b\rangle$$

Bir $\varphi\in Aut(\mathbb{Z}_{p^2}\rtimes\mathbb{Z}_p)$ otomorfizmi alınmış ve şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\varphi:\begin{cases} a\to a^ib^j & i\in\mathbb{Z}_{p^2} ve\ i\not\equiv 0(modp)\\ b\to a^{pm}b & j,m\in\mathbb{Z}_p\end{cases}$$

Otomorfizm grubunun mertebesi,

$\left|Aut(\mathbb{Z}_{p^2}\rtimes\mathbb{Z}_p)\right|=p^3(p-1)$ dir.

Teorem 5.7.1: $\mathbb{Z}_9\rtimes\mathbb{Z}_3$ ün otomorfizm grupları,

$\left|Aut(\mathbb{Z}_{3^2}\rtimes\mathbb{Z}_3)\right|=3^3(3-1)=54$ tanedir. Bu dönüşümleri bulalım:

$\varphi\in Aut(\mathbb{Z}_9\rtimes\mathbb{Z}_3)$ alalım.

$$\varphi:\begin{cases} a\to a^ib^j & i\in\mathbb{Z}_{3^2} ve\ i\not\equiv 0(mod3)\\ b\to a^{3m}b & j,m\in\mathbb{Z}_3\end{cases}$$

$\rtimes$ işlemi ile:

$$(a,b)*(c,d)=(a+\varphi(b)(c),b+d)=(a+(1+pb).c,b+d)$$

$$\varphi:\mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$(a,b)\to(a^{\mathbb{Z}_9}b^{\mathbb{Z}_3},a^{3m}b)$$

$m=0$ için;

$\varphi_1 \to (a^1b^0,a^0b)$ $\varphi_{10} \to (a^5b^0,a^0b)$

$\varphi_2 \to (a^1b^1,a^0b)$ $\varphi_{11} \to (a^5b^1,a^0b)$

$\varphi_3 \to (a^1b^2,a^0b)$ $\varphi_{12} \to (a^5b^2,a^0b)$

$\varphi_4 \to (a^2b^0,a^0b)$ $\varphi_{13} \to (a^7b^0,a^0b)$

$\varphi_5 \to (a^2b^1,a^0b)$ $\varphi_{14} \to (a^7b^1,a^0b)$

$\varphi_6 \to (a^2b^2,a^0b)$ $\varphi_{15} \to (a^7b^2,a^0b)$

$\varphi_7 \to (a^4b^0,a^0b)$ $\varphi_{16} \to (a^8b^0,a^0b)$

$\varphi_8 \to (a^4b^1,a^0b)$ $\varphi_{17} \to (a^8b^1,a^0b)$

$\varphi_9 \to (a^4b^2,a^0b)$ $\varphi_{18} \to (a^8b^2,a^0b)$

$m=1$ için;

$\delta_1 \to (a^1b^0,a^3b)$ $\delta_{10} \to (a^5b^0,a^3b)$

$\delta_2 \to (a^1b^1,a^3b)$ $\delta_{11} \to (a^5b^1,a^3b)$

$\delta_3 \to (a^1b^2,a^3b)$ $\delta_{12} \to (a^5b^2,a^3b)$

$\delta_4 \to (a^2b^0,a^3b)$ $\delta_{13} \to (a^7b^0,a^3b)$

$\delta_5 \to (a^2b^1,a^3b)$ $\delta_{14} \to (a^7b^1,a^3b)$

$\delta_6 \to (a^2b^2,a^3b)$ $\delta_{15} \to (a^7b^2,a^3b)$

$\delta_7 \to (a^4b^0,a^3b)$ $\delta_{16} \to (a^8b^0,a^3b)$

$\delta_8 \to (a^4b^1,a^3b)$ $\delta_{17} \to (a^8b^1,a^3b)$

$\delta_9 \to (a^4b^2,a^3b)$ $\delta_{18} \to (a^8b^2,a^3b)$

$m=2$ için;

$\gamma_1 \to (a^1b^0,a^6b)$ $\gamma_{10} \to (a^5b^0,a^6b)$

$\gamma_2 \to (a^1b^1,a^6b)$ $\gamma_{11} \to (a^5b^1,a^6b)$

$\gamma_3 \to (a^1b^2,a^6b)$ $\gamma_{12} \to (a^5b^2,a^6b)$

$\gamma_4 \to (a^2b^0, a^6b)$	$\gamma_{13} \to (a^7b^0, a^6b)$
$\gamma_5 \to (a^2b^1, a^6b)$	$\gamma_{14} \to (a^7b^1, a^6b)$
$\gamma_6 \to (a^2b^2, a^6b)$	$\gamma_{15} \to (a^7b^2, a^6b)$
$\gamma_7 \to (a^4b^0, a^6b)$	$\gamma_{16} \to (a^8b^0, a^6b)$
$\gamma_8 \to (a^4b^1, a^6b)$	$\gamma_{17} \to (a^8b^1, a^6b)$
$\gamma_9 \to (a^4b^2, a^6b)$	$\gamma_{18} \to (a^8b^2, a^6b)$

Bu 54 dönüşüm otomorfizmadır.

5.8 Yarı Direkt Çarpımların Merkezi ve Merkezi Otomorfizmleri

Teorem 5.8.1: θ, $\mathbb{Z}_{p^2} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_p$ nin bir otomorfizmi olsun (p tek asal). Gustav Saeden Stahl, Johan Laine, Gustav Behm in çalışmalarında [**1**] şu şekilde verilmektedir:

$\varphi: \mathbb{Z}_p \to Aut(\mathbb{Z}_{p^2})$ ve $\varphi(b) = (1 + pb)$ ile verilmiş olsun. O zaman θ şu şekilde tanımlanır:

$$\theta(a, b) = \left(a \to a^i b^j, a^{pm} b\right)$$

ki burada $i \in \mathbb{Z}_{p^2}, j, m \in \mathbb{Z}_p$ ve $i \not\equiv 0 (mod p)$.

$\mathbb{Z}(G) = \{(n, 0): n \in \mathbb{Z}_{p^2} ve\ p/n\}$ şeklinde ifade edilmiştir.

Örnek 5.8.2: $\varphi: \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$ dönüşümünün merkez elemanlarını ve merkezi otomorfizmlerini bulalım. Burada $p = 3$ olup merkez

$\{(n, 0): n \in \mathbb{Z}_9$ ve $3/n\}$ olup n buradan sadece 0,3 ve 6 elemanları olur.

$\mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$ grubunun merkez elemanlarının kümesini $Z(L)$ ile gösterelim.

$Z(L) = \{(0,0), (3,0), (6,0)\}$ dır. Görelim:

$(a, b) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$ ise o zaman her $(c, d) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$ olur.

$(a, b) * (c, d) = (c, d) * (a, b)$ olduğundan,

$(a + (1 + 3b)\, c, b + d) = (c + (1 + 3d)\, a, d + b)$ olur ve $a = 0{,}3$ ve 6 ve b de 0 olmalıdır. Bu yüzden $Z(L) = \{(a, 0) | a = 0, 3, 6)\}$ olur.

Merkezi otomorfizmine bakalım:

$$\varphi: \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$(a, b) \to \left(a^i b^j, a^{pm} b\right)$$

$$g = (a, 0) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

g^{-1}i bulalım:

$$(a, 0) * (a', b') = (0,0)$$

$$(a + (1 + 3.0)a', b') = (0,0)$$

$$(a + a', b') = (0,0)$$

$$a + a' = 0 \Rightarrow a' = 9 - a$$

$$b' = 0$$

$$g^{-1} = (9 - a, 0)$$

$$g^{-1} * \varphi(g) \in Z(L) = \{(0,0), (3,0), (6,0)\}$$

$(9 - a, 0) * \varphi(a, 0) \in Z(L)$ olması için

$\Rightarrow (9 - a, 0) * (ia, 0) \in Z(L)$

$\Rightarrow (9 - a + (1 + 3.0)(ia), 0)$

$\Rightarrow (9 - a + ia, 0) \in Z(L)$ olması için;

$9 - a + ia \equiv -a + ia (mod 9)$,

$-a + ia = 0$,

$-a + ia = 3$,

$veya - a + ia = 6$ olmalıdır.

$i = 0$ durumu otomorfizm koşuluna uymadığından incelemeye gerek yoktur.

$i = 1$ için φ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$-a + ia = -a + a = 0 \equiv 0(mod 9) \in Z(L)$$

$i = 2$ içinφ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$-a + ia = -a + 2a = a \equiv a(mod 9) \in Z(L)$$

$a = 0$ için $a = 0(mod 9) \in Z(L)$

$a = 1$ için $a = 1(mod 9) \notin Z(L)$

$a = 2$ için $a = 2(mod 9) \notin Z(L)$

$a = 3$ için $a = 3(mod9) \in Z(L)$

$a = 4$ için $a = 4(mod9) \notin Z(L)$

$a = 5$ için $a = 5(mod9) \notin Z(L)$

$a = 6$ için $a = 6(mod9) \in Z(L)$

$a = 7$ için $a = 7(mod9) \notin Z(L)$

$a = 8$ için $a = 8(mod9) \notin Z(L)$

a nın değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir.

$i = 3$ durumu otomorfizm koşuluna uymadığından incelemeye gerek yoktur.

$i = 4$ için φ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$-a + ia = -a + 4a = 3a \equiv 3a(mod9) \in Z(L)$$

$a = 0$ için $3a = 0(mod9) \in Z(L)$

$a = 1$ için $3a = 3(mod9) \in Z(L)$

$a = 2$ için $3a = 6(mod9) \in Z(L)$

$a = 3$ için $3a \equiv 0(mod9) \in Z(L)$

$a = 4$ için $3a \equiv 3(mod9) \in Z(L)$

$a = 5$ için $3a \equiv 6(mod9) \in Z(L)$

$a = 6$ için $3a \equiv 0(mod9) \in Z(L)$

$a = 7$ için $3a \equiv 3(mod9) \in Z(L)$

$a = 8$ için $3a \equiv 6(mod9) \in Z(L)$

$i = 5$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$-a + ia = -a + 5a = 4a \equiv 4a(mod9) \in Z(L)$$

$a = 0$ için $4a = 0(mod9) \in Z(L)$

$a = 1$ için $4a = 4(mod9) \notin Z(L)$

$a = 2$ için $4a = 8(mod9) \notin Z(L)$

$a = 3$ için $4a \equiv 3(mod9) \in Z(L)$

$a = 4$ için $4a \equiv 7(mod9) \notin Z(L)$

$a = 5$ için $4a \equiv 2(mod9) \notin Z(L)$

$a = 6$ için $4a \equiv 6(mod9) \in Z(L)$

$a = 7$ için $4a \equiv 1(mod9) \notin Z(L)$

$a = 8$ için $4a \equiv 5(mod9) \notin Z(L)$

a nın değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir.

$i = 6$ durumu otomorfizm koşuluna uymadığından incelemeye gerek yoktur.

$i = 7$ için φ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$-a + ia = -a + 7a = 6a \equiv 6a(mod9) \in Z(L)$$

$a = 0$ için $6a \equiv 0(mod9) \in Z(L)$

$a = 1$ için $6a \equiv 6(mod9) \in Z(L)$

$a = 2$ için $6a \equiv 3(mod9) \in Z(L)$

$a = 3$ için $6a \equiv 0(mod9) \in Z(L)$

$a = 4$ için $6a \equiv 6(mod9) \in Z(L)$

$a = 5$ için $6a \equiv 3(mod9) \in Z(L)$

$a = 6$ için $6a \equiv 0(mod9) \in Z(L)$

$a = 7$ için $6a \equiv 6(mod9) \in Z(L)$

$a = 8$ için $6a \equiv 3(mod9) \in Z(L)$

$i = 8$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$-a + ia = -a + 8a = 7a \equiv 7a(mod9) \in Z(L)$$

$a = 0$ için $7a \equiv 0(mod9) \in Z(L)$

$a = 1$ için $7a \equiv 7(mod9) \notin Z(L)$

$a = 2$ için $7a \equiv 5(mod9) \notin Z(L)$

$a = 3$ için $7a \equiv 3(mod9) \in Z(L)$

$a = 4$ için $7a \equiv 1(mod9) \notin Z(L)$

$a = 5$ için $7a \equiv 8(mod9) \notin Z(L)$

$a = 6$ için $7a \equiv 6(mod9) \in Z(L)$

$a = 7$ için $7a \equiv 4(mod9) \notin Z(L)$

$a = 8$ için $7a \equiv 2(mod9) \notin Z(L)$

ve $j \in \mathbb{Z}_3$ olup, merkez olabilecek otomorfizmlerin sayısı 9 tanedir. Şimdi $g = (a, 1) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$ için merkezi otomorfizm olabilecek elemanları bulalım.

$g = (a, 1) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$ için g^{-1} i bulalım:

$$(a, 1) * (a', b') = (0,0)$$

$$(a + (1 + 3.1)a', 1 + b') = (0,0)$$

$$(a + 4a', 1 + b') = (0,0)$$

$$g^{-1} = (2a, 2)$$
$$g^{-1} * \varphi(g) \in Z(L) = \{(0,0), (3,0), (6,0)\}$$

$(2a, 2) * \varphi(a, 1) \in Z(L)$ olması için;

$\Rightarrow (2a, 2) * (ia + j.1,1) \in Z(L)$

$\Rightarrow (2a + (1 + 3.2)(ia + j), 0)$

$\Rightarrow 2a + 7ia + 7j \in Z(L)$ olması için;

$2a + 7ia + 7j = 0,$

$2a + 7ia + 7j = 3$ veya

$2a + 7ia + 7j = 6$ olmalıdır.

$i = 1$ için φ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a, 1) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$2a + 7ia + 7j = 9a + 7j \equiv 7j(mod9) \in Z(L)$$

Şimdi $7j$ yi j nin değerlerine göre inceleyelim:

$j = 0$ için $7j = 0(mod9) \in Z(L)$

$j = 1$ için$7j = 7(mod9) \notin Z(L)$

$j = 2$ için$7j = 5(mod9) \notin Z(L)$

O halde $i = 1$ ve $j = 0$ durumunda merkezi otomorfizmdir. $j = 1$ ve $j = 2$ iken merkezi otomorfizm değildir.

$i = 2$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 1) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$2a + 7ia + 7j = 16a + 7j \equiv 7a + 7j(mod9) \in Z(L)$$

$j = 0$ için $7a$ yı a nın değerlerine göre inceleyelim:

$a = 0$ için $7a = 0(mod9) \in Z(L)$

$a = 1$ için $7a = 7(mod9) \notin Z(L)$

$a = 2$ için $7a \equiv 5(mod9) \notin Z(L)$

$a = 3$ için $7a \equiv 3(mod9) \in Z(L)$

$a = 4$ için $7a = 1(mod9) \notin Z(L)$

$a = 5$ için $7a = 8(mod9) \notin Z(L)$

$a = 6$ için $7a = 6(mod9) \in Z(L)$

$a = 7$ için $7a = 4(mod9) \notin Z(L)$

$a = 8$ için $7a = 2(mod9) \notin Z(L)$

a nın değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. O halde $j = 1$ ve $j = 2$ değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 4$ için φ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a, 1) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$2a + 7ia + 7j = 30a + 7j \equiv 3a + 7j(mod9) \in Z(L)$$

$j = 0$ için $3a$ yı a nın değerlerine göre inceleyelim:

$a = 0$ için $3a = 0(mod9) \in Z(L)$

$a = 1$ için $3a = 3(mod9) \in Z(L)$

$a = 2$ için $3a \equiv 6(mod9) \in Z(L)$

$a = 3$ için $3a \equiv 0(mod9) \in Z(L)$

$a = 4$ için $3a = 3(mod9) \in Z(L)$

$a = 5$ için $3a = 6(mod9) \in Z(L)$

$a = 6$ için $3a = 0(mod9) \in Z(L)$

$a = 7$ için $3a = 3(mod9) \in Z(L)$

$a = 8$ için $3a = 6(mod9) \in Z(L)$

$i = 5$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 1) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$2a + 7ia + 7j = 37a + 7j \equiv a + 7j(mod9) \in Z(L)$$

$j = 0$ için a yı değerlerine göre inceleyelim:

$a = 0$ için $a = 0(mod9) \in Z(L)$

$a = 1$ için $a = 1(mod9) \notin Z(L)$

$a = 2$ için $a \equiv 2(mod9) \notin Z(L)$

$a = 3$ için $a \equiv 3(mod9) \in Z(L)$

$a = 4$ için $a = 4(mod9) \notin Z(L)$

$a = 5$ için $a = 5(mod9) \notin Z(L)$

$a = 6$ için $a = 6(mod9) \in Z(L)$

$a = 7$ için $a = 7(mod9) \notin Z(L)$

$a = 8$ için $a = 8(mod9) \notin Z(L)$

a nın değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. O halde $j = 1$ ve $j = 2$ değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 7$ için φ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a, 1) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$2a + 7ia + 7j = 51a + 7j \equiv 6a + 7j(mod9) \in Z(L)$$

$j = 0$ için $6a$ yı a nın değerlerine göre inceleyelim:

$a = 0$ için $6a = 0(mod9) \in Z(L)$

$a = 1$ için $6a = 6(mod9) \in Z(L)$

$a = 2$ için $6a \equiv 3(mod9) \in Z(L)$

$a = 3$ için $6a \equiv 0(mod9) \in Z(L)$

$a = 4$ için $6a = 6(mod9) \in Z(L)$

$a = 5$ için $6a = 3(mod9) \in Z(L)$

$a = 6$ için $6a = 0(mod9) \in Z(L)$

$a = 7$ için $6a = 6(mod9) \in Z(L)$

$a = 8$ için $6a = 3(mod9) \in Z(L)$

$i = 8$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 1) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$2a + 7ia + 7j = 58a + 7j \equiv 4a + 7j(mod9)$$

$j = 0$ için $4a$ yı a nın değerlerine göre inceleyelim:

$a = 0$ için $4a = 0(mod9) \in Z(L)$

$a = 1$ için $4a = 4(mod9) \notin Z(L)$

$a = 2$ için $4a \equiv 8(mod9) \notin Z(L)$

$a = 3$ için $4a \equiv 3(mod9) \in Z(L)$

$a = 4$ için $4a = 7(mod9) \notin Z(L)$

$a = 5$ için $4a = 2(mod9) \notin Z(L)$

$a = 6$ için $4a = 6(mod9) \in Z(L)$

$a = 7$ için $4a = 1(mod9) \notin Z(L)$

$a = 8$ için $4a = 5(mod9) \notin Z(L)$

a nın değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. O halde $j = 1$ ve $j = 2$ değerleri için incelemeye gerek yoktur.

O halde $i = 1$, $i = 4$ ve $i = 7$ ve $j = 0$ değerleri için merkezi otomorfizm bulundu.

Şimdi $g = (a, 2) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$ için g^{-1} i bulalım:

$$(a, b) * (a', b') = (a', b') * (a, b) = (0,0)$$

$$(a + (1 + 3.b)a', b + b') = (a' + (1 + 3b')a, b' + b) = (0,0)$$

$$(a + a' + 3ba', 2 + b') = (a' + a + 3b'a, b' + 2) = (0,0)$$

$$a + a' + 3ba' = a' + a + 3b'a$$

$$3ba' = 3b'a$$

$$ba' = b'a$$

bulunur. Buradan

$$g^{-1} = (b', 1)\text{olur öyle ki } 2b' = a(mod9) \tag{1}$$

$(b, 1) * \varphi(a, 2) \in Z(L)$ olması için;

$\Rightarrow (b', 1) * (ia + 2j, 2) \in Z(L)$

$\Rightarrow (b' + (1 + 3.1)(ia + 2j), 0)$

$\Rightarrow b' + 4ia + 8j \in Z(L)$ olması için;

$b' + 4ia + 8j = 0,$

$b' + 4ia + 8j = 3$ veya

$b' + 4ia + 8j = 6$ olmalıdır. (1) eşitliğinden

$b' + 8b'i + 8j \in Z(L)$ olmalıdır. $j = 0$ olduğundan

$$b' + 8b'i \in Z(L)$$

olması için

$$b' + 8b'i = 0{,}3 \text{ veya } 6 \text{ olmalıdır.}$$

$i = 0$ durumu otomorfizm olma koşuluna uymadığından incelemeye gerek yoktur.

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$b' + 8b'i$$

$i = 1$ için φ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$b' + 8b'i$$

$i = 1$ için $9b'$, b' nin tüm değerleri için $0(mod9) \in Z(L)$ olur.

$i = 2$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$b' + 8b'i = 17b' \equiv 8b'(mod9)$$

$i = 2$ için $8b'$ yü alacağı değerlere göre inceleyelim:

$b' = 0$ için $8b' \equiv 0(mod9) \in Z(L)$

$b' = 1$ için $8b' \equiv 8(mod9) \notin Z(L)$

$b' = 2$ için $8b' \equiv 7(mod9) \notin Z(L)$

$b' = 3$ için $8b' \equiv 6(mod9) \in Z(L)$

$b' = 4$ için $8b' \equiv 5(mod9) \notin Z(L)$

$b' = 5$ için $8b' \equiv 4(mod9) \notin Z(L)$

$b' = 6$ için $8b' \equiv 3(mod9) \in Z(L)$

$b' = 7$ için $8b' \equiv 2(mod9) \notin Z(L)$

$b' = 8$ için $8b' \equiv 1(mod9) \notin Z(L)$

$i = 3$ durumu otomorfizm olma koşuluna uymadığından incelemeye gerek yoktur.

$i = 4$ için φ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$b' + 8b'i = 33b' \equiv 6b'(mod9)$$

$i = 4$ için $6b'$ yi alacağı değerlere göre inceleyelim:

$b' = 0$ için $6b' \equiv 0(mod9) \in Z(L)$

$b' = 1$ için $6b' \equiv 6(mod9) \in Z(L)$

$b' = 2$ için $6b' \equiv 3(mod9) \in Z(L)$

$b' = 3$ için $6b' \equiv 0(mod9) \in Z(L)$

$b' = 4$ için $6b' \equiv 6(mod9) \in Z(L)$

$b' = 5$ için $6b' \equiv 3(mod9) \in Z(L)$

$b' = 6$ için $6b' \equiv 0(mod9) \in Z(L)$

$b' = 7$ için $6b' \equiv 6(mod9) \in Z(L)$

$b' = 8$ için $6b' \equiv 3(mod9) \in Z(L)$

$i = 5$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$b' + 8b'i = 41b' \equiv 5b'(mod9)$$

$i = 5$ için $5b'$ yi alacağı değerlere göre inceleyelim:

$b' = 0$ için $5b' \equiv 0(mod9) \in Z(L)$

$b' = 1$ için $5b' \equiv 5(mod9) \notin Z(L)$

$b' = 2$ için $5b' \equiv 1(mod9) \notin Z(L)$

$b' = 3$ için $5b' \equiv 6(mod9) \in Z(L)$

$b' = 4$ için $5b' \equiv 2(mod9) \notin Z(L)$

$b' = 5$ için $5b' \equiv 7(mod9) \notin Z(L)$

$b' = 6$ için $5b' \equiv 3(mod9) \in Z(L)$

$b' = 7$ için $5b' \equiv 8(mod9) \notin Z(L)$

$b' = 8$ için $5b' \equiv 4(mod9) \notin Z(L)$

$i = 6$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$b' + 8b'i = 49b' \equiv 4b'(mod9)$$

$i = 6$ durumu otomorfizm olma koşuluna uymadığından incelemeye gerek yoktur.

$i = 7$ için φ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$b' + 8b'i = 57b' \equiv 3b'(mod9)$$

$i = 7$ için $3b'$ yi alacağı değerlere göre inceleyelim:

$b' = 0$ için $3b' \equiv 0(mod9) \in Z(L)$

$b' = 1$ için $3b' \equiv 3(mod9) \in Z(L)$

$b' = 2$ için $3b' \equiv 6(mod9) \in Z(L)$

$b' = 3$ için $3b' \equiv 0(mod9) \in Z(L)$

$b' = 4$ için $3b' \equiv 3(mod9) \in Z(L)$

$b' = 5$ için $3b' \equiv 6(mod9) \in Z(L)$

$b' = 6$ için $3b' \equiv 0(mod9) \in Z(L)$

$b' = 7$ için $3b' \equiv 3(mod9) \in Z(L)$

$b' = 8$ için $3b' \equiv 6(mod9) \in Z(L)$

$i = 8$ için φ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$b' + 8b'i = 65b' \equiv 2b'(mod9)$$

$i = 8$ için $2b'$ yi alacağı değerlere göre inceleyelim:

$b' = 0$ için $2b' \equiv 0(mod9) \in Z(L)$

$b' = 1$ için $2b' \equiv 2(mod9) \notin Z(L)$

$b' = 2$ için $2b' \equiv 4(mod9) \notin Z(L)$

$b' = 3$ için $2b' \equiv 6(mod9) \in Z(L)$

$b' = 4$ için $2b' \equiv 8(mod9) \notin Z(L)$

$b' = 5$ için $2b' \equiv 1(mod9) \notin Z(L)$

$b' = 6$ için $2b' \equiv 3(mod9) \in Z(L)$

$b' = 7$ için $2b' \equiv 5(mod9) \notin Z(L)$

$b' = 8$ için $2b' \equiv 7(mod9) \notin Z(L)$

O halde $i = 1, i = 4$ ve $i = 7$ ve $j = 0$ olur.

Buradan, $\varphi: \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$ dönüşümünün 3 tane merkezi otomorfizmi bulundu.

Teorem 5.8.3: $\theta, \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$ ün bir otomorfizmi olsun. Eğer θ merkez ise aşağıdaki formdadır:

$$\theta(a, b) = (a \to a^{3k+1}, a^{3m}b)$$

ki burada $k, m \in \mathbb{Z}_3$.

İspat: θ, $\mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$ ün bir otomorfizmi olsun. O zaman şu formdadır:

$$\theta(a, b) = \left(a \to a^i b^j, a^{3m}b\right) \qquad (2)$$

ki burada $i \in \mathbb{Z}_9, j, m \in \mathbb{Z}_3$ve $i \not\equiv 0(mod3)$

Eğer $\theta \in Aut_Z(\mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3)$ ise o zaman tüm $g = (a, b) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_3, \theta$

şu şekildedir:

$$g^{-1} * \theta(g) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_3$$

$*$ işleminin kuralı kullanılarak:

$$g = (a, 0) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$g^{-1} = (9 - a, 0)$$

$g^{-1} * \theta(g) = (9 - a, 0) * \varphi(a, b) \in Z(L)$ olması için;

$$\Rightarrow (9-a,0) * (ia,0) \in Z(L)$$

$$\Rightarrow (9-a+(1+3.0)(ia),0)$$

$$\Rightarrow (9-a+ia,0) \equiv (-a+ia,0)(mod9)$$

$$-a+ia \equiv 0,3,6(mod9) \text{ olmalıdır.} \qquad (3)$$

$$g=(a,1) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$g^{-1}=(2a,2)$$

$g^{-1} * \theta(g) = (2a,2) * \varphi(a,1) \in Z(L)$ olması için;

$$\Rightarrow (2a,2) * (ia+j,1) \in Z(L)$$

$$\Rightarrow (2a+(1+3.2)(ia+j),0)$$

$$\Rightarrow (2a+7ia+7j,0)$$

$2a+7ia+7j \equiv 0,3,6(mod9)$ olmalıdır. (4)

$$g=(a,2) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

$$g^{-1}=(b',1)$$

$g^{-1} * \theta(g) = (b',1) * \varphi(a,2) \in Z(L)$ olması için;

$$\Rightarrow (b',1) * (ia+2j,2) \in Z(L)$$

$$\Rightarrow (b'+(1+3.1)(ia+2j),0)$$

$$\Rightarrow b'+4ai+8j \ \text{(1) ve (2) eşitliklerinden}$$

$$= b'+8bi \equiv 0,3,6(mod9) \text{ olmalıdır.} \qquad (5)$$

Bu yüzden (3),(4) ve (5) koşulları tüm g ler için $i=1,4,7$ ve $j=0$ koşullarında sağlanır.(2) de bu koşulu yerine koyduğumuzda merkezi otomorfizmlerinin genel formunu aşağıdaki şekilde elde ederiz:

$$\theta(a,b)=(a^{3k+1},a^{3m}b)$$

Örnek 5.8.4: Benzer şekilde $\varphi: \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$ dönüşümünün merkez elemanlarını ve merkezi otomorfizmlerini bulalım. Burada $p=5$ olup merkez:

$\{(n,0): n \in \mathbb{Z}_{25} \text{ve } 5/n\}$ olup n buradan sadece 0,5,10,15 ve 20 elemanları olur.

φ dönüşümünün merkez elemanları $(0,0),(5,0),(10,0),(15,0),(20,0)$ dır. Görelim:

$(a,b) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$ ise o zaman her $(c,d) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$ olur.

$(a,b) * (c,d) = (c,d) * (a,b)$ olduğundan,

$(a + (1 + 5b)\, c, b + d) = (c + (1 + 5d)\, a, d + b)$ olur ve $a = 0,5,10,15$ ve 20 ve b de 0 olmalıdır. Bu yüzden $Z(\mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5) = \{(a, 0)|a = 0,5,10,15,20)\}$ olur. $\mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$ grubunu M ile gösterirsek, merkez elemanlarının kümesi;

$Z(M) = \{(a, 0)|a = 0, 5,10,15,20)\}$ olur.

Merkezi otomorfizmine bakalım:

$$\varphi: \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$(a, b) \to \left(a^i b^j, a^{5m} b\right)$$

$$g = (a, 0) \in \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$$

g^{-1}i bulalım:

$$(a, 0) * (a', b') = (0,0)$$

$$(a + (1 + 3.0)a', b') = (0,0)$$

$$(a + a', b') = (0,0)$$

$$a + a' = 0 \Rightarrow a' = 25 - a$$

$$b' = 0$$

$$g^{-1} = (25 - a, 0)$$

$$g^{-1} * \varphi(g) \in Z(L) = \{(0,0), (5,0), (10,0), (15,0), (20,0)\}$$

$(25 - a, 0) * \varphi(a, 0) \in Z(M)$ olması için

$$\Rightarrow (25 - a, 0) * (ia, 0) \in Z(M)$$

$$\Rightarrow (25 - a + (1 + 3.0)(ia), 0)$$

$\Rightarrow (25 - a + ia, 0) \in Z(M)$ olması için;

$$25 - a + ia \equiv -a + ia (mod 25),$$

$$-a + ia = 0,$$

$$-a + ia = 5,$$

$$-a + ia = 10,$$

$$-a + ia = 15,$$

veya $-a + ia = 20$ olmalıdır.

$i = 0$ durumu otomorfizm koşuluna uymadığından incelemeye gerek yoktur.

$i = 1$ için φ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$-a + ia = -a + a = 0 \equiv 0(mod25)$$

$i = 2$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$-a + ia = -a + 2a = a \equiv a(mod25)$$

$a = 0$ için $a = 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $a = 1(mod25) \notin Z(M)$

$a = 2$ için $a = 2(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 3$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$-a + ia = -a + 3a = 2a \equiv 2a(mod25)$$

$a = 0$ için $2a = 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $2a = 2(mod25) \notin Z(M)$

$a = 2$ için $2a = 4(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 4$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$-a + ia = -a + 4a = 3a \equiv 3a(mod25)$$

$a = 0$ için$3a = 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $3a = 3(mod25) \notin Z(M)$

$a = 2$ için $3a = 6(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 5$ durumu otomorfizm koşuluna uymadığından incelemeye gerek yoktur.

$i = 6$ için φ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_{5}$$

$$-a + ia = -a + 6a = 5a \equiv 5a(mod25)$$

a nın alacağı bütün değerler için $5a(mod25) \in Z(M)$ olur.

$i = 7$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_{5}$$

$$-a + ia = -a + 7a = 6a \equiv 6a(mod25)$$

$a = 0$ için $6a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $6a \equiv 6(mod25) \notin Z(M)$

$a = 2$ için $6a \equiv 3(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 8$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_{5}$$

$$-a + ia = -a + 8a = 7a \equiv 7a(mod25) \in Z(M)$$

$a = 0$ için $7a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $7a \equiv 7(mod25) \notin Z(M)$

$a = 2$ için $7a \equiv 5(mod25) \in Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 9$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_{5}$$

$$-a + ia = -a + 9a = 8a \equiv 8a(mod25)$$

$a = 0$ için $8a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $8a \equiv 8(mod25) \notin Z(M)$

$a = 2$ için $8a \equiv 16(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 10$ durumu otomorfizm olma koşuluna uymadığından incelemeye gerek yoktur.

$i = 11$ için φ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$-a + ia = -a + 11a = 10a \equiv 10a(mod25)$$

a nın alacağı tüm değerler için $10a(mod25) \in Z(M)$ olur.

$i = 12$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$-a + ia = -a + 12a = 11a \equiv 11a(mod25)$$

$a = 0$ için $11a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $11a \equiv 11(mod25) \notin Z(M)$

$a = 2$ için $11a \equiv 22(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir.a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 13$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$-a + ia = -a + 13a = 12a \equiv 12a(mod25)$$

$a = 0$ için $12a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $12a \equiv 12(mod25) \notin Z(M)$

$a = 2$ için $12a \equiv 24(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir.a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 14$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$-a + ia = -a + 14a = 13a \equiv 13a(mod25)$$

$a = 0$ için $13a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $13a \equiv 13(mod25) \notin Z(M)$

$a = 2$ için $13a \equiv 1(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir.a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 15$ durumu otomorfizm olma koşulunu sağlamadığından incelemeye gerek yoktur.

$i = 16$ için φ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$-a + ia = -a + 16a = 15a \equiv 15a(mod25)$$

a nın alacağı tüm değerler için $15a(mod25) \in Z(M)$ dir.

$i = 17$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$-a + ia = -a + 17a = 16a \equiv 16a(mod25)$$

$a = 0$ için $16a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $16a \equiv 16(mod25) \notin Z(M)$

$a = 2$ için $16a \equiv 7(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 18$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$-a + ia = -a + 18a = 17a \equiv 17a(mod25)$$

$a = 0$ için $17a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $17a \equiv 17(mod25) \notin Z(M)$

$a = 2$ için $17a \equiv 9(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir.a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 19$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$-a + ia = -a + 19a = 18a \equiv 18a(mod25)$$

$a = 0$ için $18a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $18a \equiv 18(mod25) \notin Z(M)$

$a = 2$ için $18a \equiv 11(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir.a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 20$ durumu otomorfizm olma koşulunu sağlamadığından incelemeye gerek yoktur.

$i = 21$ için φ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$-a + ia = -a + 21a = 20a \equiv 20a(mod25)$$

a nın alacağı tüm değerler için $20a(mod25) \in Z(M)$ dir.

$i = 22$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$-a + ia = -a + 22a = 21a \equiv 21a(mod25)$$

$a = 0$ için $21a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $21a \equiv 21(mod25) \notin Z(M)$

$a = 2$ için $16a \equiv 17(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 23$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$-a + ia = -a + 23a = 22a \equiv 22a(mod25)$$

$a = 0$ için $22a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $22a \equiv 22(mod25) \notin Z(M)$

$a = 2$ için $22a \equiv 19(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 24$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 0) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$-a + ia = -a + 24a = 23a \equiv 22a(mod25)$$

$a = 0$ için $23a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $23a \equiv 23(mod25) \notin Z(M)$

$a = 2$ için $23a \equiv 21(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

ve $j \in \mathbb{Z}_5$ olup, merkez olabilecek otomorfizmlerin sayısı 25 tanedir. Şimdi $g = (a, 1) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$ için merkezi otomorfizm olabilecek elemanları bulalım.

$g = (a, 1) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$ için

g^{-1}i bulalım:

$$(a, 1) * (a', b') = (0,0)$$

$$(a + (1 + 5.1)a', 1 + b') = (0,0)$$

$$(a + 6a', 1 + b') = (0,0)$$

$$g^{-1} = (4a, 4)$$

$$g^{-1} * \varphi(g) \in Z(L) = \{(0,0), (5,0), (10,0), (15,0), (20,0)\}$$

$(4a, 4) * \varphi(a, 1) \in Z(M)$ olması için;

$$\Rightarrow (4a, 4) * (ia + j.1,1) \in Z(M)$$

$$\Rightarrow (4a + (1 + 5.4)(ia + j), 0)$$

$\Rightarrow 4a + 21ia + 21j \in Z(M)$ olması için;

$$4a + 21ia + 21j = 0,$$

$$4a + 21ia + 21j = 5$$

$$4a + 21ia + 21j = 10$$

$$4a + 21ia + 21j = 15$$

veya $4a + 21ia + 21j = 20$ olmalıdır.

$i = 0$ durumu otomorfizm olma koşuluna uymadığından incelemeye gerek yoktur.

$i = 1$ için φ dönüşümü inceleyelim:

$$(a,1) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$4a + 21ia + 21j = 25a + 21j \equiv 21j(mod25)$$

Şimdi $21j$ yi, j nin değerlerine göre inceleyelim:

$j = 0$ için $21j = 0 \in Z(M)$

$j = 1$ için $21j = 21(mod25) \notin Z(M)$

$j = 2$ için $21j = 17(mod25) \notin Z(M)$

$i = 2$ için φ dönüşümünü inceleyelim:

$$(a,1) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$4a + 21ia + 21j = 46a + 21j \equiv 21a + 21j(mod25)$$

$j = 0$ için $21a$ yı, a nın değerlerine göre inceleyelim:

$a = 0$ için $2a + 21 = 21(mod25) \notin Z(M)$

$a = 1$ için $2a + 21 = 23(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 3$ için φ dönüşümünü inceleyelim:

$$(a,1) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$4a + 21ia + 21j = 67a + 21j \equiv 17a + 21j(mod25)$$

$j = 0$ için $17a$ yı, a nın değerlerine göre inceleyelim:

$a = 0$ için $17a = 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $17a = 17(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 4$ için φ dönüşümünü inceleyelim:

$$(a,1) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$4a + 21ia + 21j = 88a + 21j \equiv 13a + 21j(mod25)$$

$j = 0$ için $13a$ yı, a nın değerlerine göre inceleyelim:

$a = 0$ için $17a = 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $17a = 17(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 5$ durumu otomorfizm olma koşuluna uymadığından incelemeye gerek yoktur.

$i = 6$ için φ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a, 1) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$4a + 21ia + 21j = 130a + 21j \equiv 5a + 21j(mod25)$$

$j = 0$ için $5a$, a nın tüm değerleri için $Z(M)$ nin elemanı olur.

$i = 7$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 1) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$4a + 21ia + 21j = 151a + 21j \equiv a + 21j(mod25)$$

$j = 0$ için a yı, alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $a = 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $a = 1(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 8$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 1) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$4a + 21ia + 21j = 172a + 21j \equiv 22a + 21j(mod25)$$

$j = 0$ için $22a$ yı, alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $22a = 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $22a = 22(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 9$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 1) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$4a + 21ia + 21j = 193a + 21j \equiv 18a + 21j(mod25)$$

$j = 0$ için $18a$ yı, alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $18a = 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $18a = 18(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 10$ durumu otomorfizm olma koşuluna uymadığından incelemeye gerek yoktur.

$i = 11$ için φ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a, 1) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$4a + 21ia + 21j = 235a + 21j \equiv 10a + 21j(mod25)$$

$j = 0$ için $10a$, a nın tüm değerleri için $Z(M)$ nin elemanı olur.

$i = 12$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 1) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$4a + 21ia + 21j = 256a + 21j \equiv 6a + 21j(mod25)$$

$j = 0$ için $6a$ yı, alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $6a = 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $6a = 6(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 13$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 1) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$4a + 21ia + 21j = 277a + 21j \equiv 2a + 21j(mod25)$$

$j = 0$ için $2a$ yı, alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $2a = 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $2a = 2(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 14$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 1) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$4a + 21ia + 21j = 298a + 21j \equiv 23a + 21j(mod25)$$

$j = 0$ için $23a$ yı, alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $23a = 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $23a = 23(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 15$ durumu otomorfizm olma koşuluna uymadığından incelemeye gerek yoktur.

$i = 16$ için φ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a, 1) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$4a + 21ia + 21j = 340a + 21j \equiv 15a + 21j(mod25)$$

$j = 0$ için $15a, a$ nın alacağı tüm değerler için $Z(M)$ nin elemanı olur.

$i = 17$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 1) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$4a + 21ia + 21j = 361a + 21j \equiv 11a + 21j(mod25)$$

$j = 0$ için $11a$ yı, alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $11a = 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $11a = 11(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 18$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 1) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$4a + 21ia + 21j = 361a + 21j \equiv 11a + 21j(mod25)$$

$j = 0$ için $11a$ yı, alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $11a = 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $11a = 11(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 19$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 1) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$4a + 21ia + 21j = 403a + 21j \equiv 3a + 21j(mod25)$$

$j = 0$ için $3a$ yı, alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $3a = 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $3a = 3(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 20$ durumu otomorfizm olma koşuluna uymadığından incelemeye gerek yoktur.

$i = 21$ için φ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a, 1) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$4a + 21ia + 21j = 445a + 21j \equiv 5a + 21j(mod25)$$

$j = 0$ için $5a, a$ nın alacağı tüm değerler için $Z(M)$ nin elemanı olur.

$i = 22$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 1) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$4a + 21ia + 21j = 466a + 21j \equiv 16a + 21j(mod25)$$

$j = 0$ için $16a$ yı, alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $16a = 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $16a = 16(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 23$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 1) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$4a + 21ia + 21j = 487a + 21j \equiv 12a + 21j(mod25)$$

$j = 0$ için $12a$ yı, alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $12a = 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $12a = 12(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 24$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a,1) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$4a + 21ia + 21j = 508a + 21j \equiv 8a + 21j(mod25)$$

$j = 0$ için $8a$ yı, alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $8a = 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $8a = 8(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 1,6,11,16,21$ ve $j \in 0$ olup, merkez olabilecek otomorfizmlerin sayısı 5 tanedir.

Şimdi $g = (a,2) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$ için g^{-1} i bulalım:

$$(a,b) * (a',b') = (a',b') * (a,b) = (0,0)$$

$$(a + (1 + 5.b)a', b + b') = (a' + (1 + 5b')a, b' + b) = (0,0)$$

$$(a + a' + 5ba', 2 + b') = (a' + a + 5b'a, b' + 2) = (0,0)$$

$$a + a' + 5ba' = a' + a + 5b'a$$

$$5ba' = 5b'a$$

$$ba' = b'a$$

eşitliğinden,

$g^{-1} = (b',3)$oluröyle ki $2b' = 3a(mod25)$ (6)

$(b',3) * \varphi(a,2) \in Z(L)$ olması için;

$\Rightarrow (b',3) * (ia + 2j, 2) \in Z(M)$

$\Rightarrow (b' + (1 + 5.3)(ia + 2j), 0)$

$\Rightarrow b' + 16ia + 32j \equiv b' + 16ia + 7j \in Z(M)$ olması için;

$b' + 16ia + 7j = 0,$

$b' + 16ia + 7j = 5$

$b' + 16ia + 7j = 10$

$b' + 16ia + 7j = 15$

veya $b' + 16ia + 7j = 20$

olmalıdır. $b' + 16ia + 7j$ denkleminin2 katını aldığımızda

$2b' + 32ia + 14j \equiv 2b' + 7ia + 14j$ olmalıdır. $j = 0$ olduğundan

$2b' + 7ia$ ve (6) dan $3a + 7ia \in Z(M)$

olması için

$$3a + 7ia = 0{,}5{,}10{,}15 \text{ veya } 20 \text{ olmalıdır.}$$

$i = 0$ durumu otomorfizm olma koşuluna uymadığından incelemeye gerek yoktur.

$i = 1$ için φ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$3a + 7ia$$

$i = 1$ için $10a$, a nın tüm değerleri için $Z(M)$ nin elemanıdır.

$i = 2$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$3a + 7ia = 17a(mod25)$$

$i = 2$ için $17a$ yı a nın alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $17a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $17a \equiv 17(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 3$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$3a + 7ia = 24a(mod25)$$

$i = 3$ için $24a$ yı a nın alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $24a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $24a \equiv 24(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 4$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$3a + 7ia = 31a \equiv 6a(mod25)$$

$i = 4$ için $6a$ yı a nın alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $6a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $6a \equiv 6(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 5$ durumu otomorfizm olma koşuluna uymadığından incelemeye gerek yoktur.

$i = 6$ için φ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$3a + 7ia = 45a \equiv 20a(mod25)$$

$i = 6$ için $20a$, a nın tüm değerleri için $Z(M)$ nin elemanıdır.

$i = 7$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$3a + 7ia = 52a \equiv 2a(mod25)$$

$i = 7$ için $2a$ yı a nın alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $2a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $2a \equiv 2(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 8$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$3a + 7ia = 59a \equiv 9a(mod25)$$

$i = 8$ için $9a$ yı a nın alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $9a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $9a \equiv 9(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 9$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$3a + 7ia = 66a \equiv 16a(mod25)$$

$i = 9$ için$16a$ yı a nın alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $16a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $16a \equiv 16(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 10$ durumu otomorfizm olma koşuluna uymadığından incelemeye gerek yoktur.

$i = 11$ için φ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$3a + 7ia = 80a \equiv 5a(mod25)$$

$i = 11$ için $5a$, a nın tüm değerleri için $Z(M)$ nin elemanıdır.

$i = 12$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$3a + 7ia = 87a \equiv 12a(mod25)$$

$i = 12$ için $12a$ yı, a nın alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $12a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $12a \equiv 12(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 13$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$3a + 7ia = 94a \equiv 19a(mod25)$$

$i = 13$ için $19a$ yı, a nın alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $19a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $19a \equiv 19(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 14$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a,2) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$3a + 7ia = 101a \equiv a(mod25)$$

$i = 14$ için a yı, alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $a \equiv 1(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 15$ durumu otomorfizm olma koşuluna uymadığından incelemeye gerek yoktur.

$i = 16$ içinφ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a,2) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$3a + 7ia = 115a \equiv 15a(mod25)$$

$i = 16$ için $15a$, a nın tüm değerleri için $Z(M)$ nin elemanıdır.

$i = 17$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a,2) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$3a + 7ia = 122a \equiv 22a(mod25)$$

$i = 17$ için $22a$ yı, alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $22a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $22a \equiv 22(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 18$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a,2) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$3a + 7ia = 129a \equiv 4a(mod25)$$

$i = 18$ için $4a$ yı, alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $4a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $4a \equiv 4(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 19$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$3a + 7ia = 136a \equiv 11a(mod25)$$

$i = 19$ için $11a$ yı, alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $11a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $11a \equiv 11(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 20$ durumu otomorfizm olma koşuluna uymadığından incelemeye gerek yoktur.

$i = 21$ için φ dönüşümü merkezdir. Görelim:

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$3a + 7ia = 150a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$$

$i = 22$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$3a + 7ia = 157a \equiv 7a(mod25)$$

$i = 22$ için $7a$ yı, alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $7a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $7a \equiv 7(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 23$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$3a + 7ia = 164a \equiv 14a(mod25)$$

$i = 23$ için $14a$ yı, alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $14a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $14a \equiv 14(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 24$ için φ dönüşümü merkez değildir. Görelim:

$$(a, 2) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$3a + 7ia = 171a \equiv 21a(mod25)$$

$i = 24$ için $21a$ yı, alacağı değerlere göre inceleyelim:

$a = 0$ için $21a \equiv 0(mod25) \in Z(M)$

$a = 1$ için $21a \equiv 21(mod25) \notin Z(M)$

a nın yukarıda verdiğimiz değerlerine karşılık merkez olmayan elemanlar bulunduğu için dönüşüm, merkez değildir. a nın diğer değerleri için incelemeye gerek yoktur.

$i = 1,6,11,16,21$ ve $j \in 0$ olup, merkez olabilecek otomorfizmlerin sayısı 5 tanedir.

Buradan, $\varphi: \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$ dönüşümünün 5 tane merkezi otomorfizmi bulundu.

Teorem 5.8.5: θ, $\mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$ in bir otomorfizmi olsun. Eğer θ merkez ise aşağıdaki formdadır:

$$\theta(a, b) = (a \to a^{5k+1}, a^{5m}b)$$

ki burada $k, m \in \mathbb{Z}_5$.

İspat: θ, $\mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$ in bir otomorfizmi olsun. O zaman şu formdadır:

$$\theta(a, b) = \left(a \to a^i b^j, a^{5m}b\right) \tag{7}$$

ki burada $i \in \mathbb{Z}_{25}, j, m \in \mathbb{Z}_5$ ve $i \not\equiv 0(mod5)$

Eğer $\theta \in Aut_Z(\mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5)$ ise o zaman tüm $g = (a, b) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_5$, θ

şu şekildedir:

$$g^{-1} * \theta(g) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_5$$

$*$ işleminin kuralı kullanılarak:

$$g = (a, 0) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$g^{-1} = (25 - a, 0)$$

$g^{-1} * \theta(g) = (25 - a, 0) * \varphi(a, b) \in Z(M)$ olması için;

$$\Rightarrow (25 - a, 0) * (ia, 0) \in Z(M)$$

$$\Rightarrow (25 - a + (1 + 5.0)(ia), 0)$$

$$\Rightarrow (25 - a + ia, 0) \equiv (-a + ia, 0)(mod25)$$

$-a+ia \equiv 0,5,10,15,20(mod25)$ olmalıdır. (8)

$$g=(a,1) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$$g^{-1}=(4a,4)$$

$g^{-1} * \theta(g)=(4a,4) * \varphi(a,1) \in Z(M)$ olması için;

$$\Rightarrow (4a,4) * (ia+j,1) \in Z(M)$$

$$\Rightarrow (4a+(1+5.4)(ia+j),0)$$

$$\Rightarrow (4a+21ia+21j,0)$$

$4a+21ia+21j \equiv 0,5,10,15,20(mod25)$ (9)

olmalıdır.

$$g=(a,2) \in \mathbb{Z}_{25} \rtimes \mathbb{Z}_5$$

$g^{-1}=(b',3)$olur öyle ki $2b'=3a(mod25)$

$(b',3) * \varphi(a,2) \in Z(M)$ olması için;

$$\Rightarrow (b',3) * (ia+2j,2) \in Z(M)$$

$$\Rightarrow (b'+(1+5.3)(ia+2j),0)$$

$\Rightarrow b'+16ia+32j \equiv b'+16ia+7j \in Z(M)$ olması için;

$$b'+16ia+7j=0,$$

$$b'+16ia+7j=5$$

$$b'+16ia+7j=10$$

$$b'+16ia+7j=15$$

veya $b'+16ia+7j=20$

olmalıdır. $b'+16ia+7j$ denkleminin 2 katını aldığımızda

$2b'+32ia+14j \equiv 2b'+7ia+14j$ olmalıdır. $j=0$ olduğundan $2b'+7ia$ ve (6) dan $3a+7ia \in Z(L)$ olması için $3a+7ia=0,5,10,15$ veya 20 olmalıdır. (10)

Bu yüzden (8), (9), (10) koşulları tüm g ler için $i=1,6,11,16,21$ ve $j=0$ koşullarında sağlanır. (7) de bu koşulu yerine koyduğumuzda merkezi otomorfizmlerinin genel formunu aşağıdaki şekilde elde ederiz:

$$\theta(a,b)=(a^{5k+1},a^{5m}b)$$

KAYNAKLAR

[1] Ståhl G. S., Laine J., Behm G. (2010) On p −groups of low power order, Bachelor's thesis, KTH Royal Institute of Technology

[2] Beisiegel B, (1978), Finite p −groups with non-trivial p' −automorphisms. *Arch. Math. (Basel)*,**31** 209 − 216.

[3] Hopkins C., (1927/28) Non-abelian groups whose groups of isomorphisms are abelian. *Ann. of Math.***29**, 508 − 520.

[4] Mousavi H. and Shomali A. 1388 (*Apr*. 22 − 23, 2009) Central automorphisms of semidirect product of finite groups. Tarbiat Moallem University, 20th Seminar on Algebra 2 − 3 Ordibehesht, *pp* 139 − 140

[5] Gumber D. and Sharma M., On central automorphisms of finite *p*-groups, *Comm. Algebra*, **41** (2013), 1117–1122.

[6] Curran M.J., Finite groups with Central automorphism group of minimal order, *Math. Proc. Royal Irish Acad*., **104** A(2) (2004), 223-229.

[7] Jamali A. R. and Mousavi H., On the central automorphism group of finite groups, *Algebra Colloquium* **9** (2002), 7-14.

[8] Curran M. and McCaughan D., Central automorphisms of finite groups, Bull. *Austral. Math. Soc.* **34** (1986), 191-198.

[9] Türkiye Bilimler Akademisi Ulusal Açık Ders Malzemeleri (TÜBA) http://www.acikders.org.tr/pluginfile.php/244/mod_resource/content/0/DersNotlari/AD10PDF/bolum10, 01.03.2018.

[10] Türkiye Bilimler Akademisi Ulusal Açık Ders Malzemeleri (TÜBA) http://www.acikders.org.tr/pluginfile.php/244/mod_resource/content/0/DersNotlari/AD10PDF/bolum11, 01.03.2018.