MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GÖDEL' İN AKSİYOMATİK SİSTEMLERİN TAM OLMAMASINA DAİR TEOREMİ VE PARADOKSLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TUFAN TAŞKESEN

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Zekeriya GÜNEY

TEMMUZ, 2001

MUĞLA

MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GÖDEL' İN AKSİYOMATİK SİSTEMLERİN TAM OLMAMASINA DAİR TEOREMİ VE PARADOKSLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TUFAN TAŞKESEN

Fen Bilimleri Enstitüsü'nce
"Yüksek Lisans"
Diploması Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir

Tezin Enstitü' ye Verildiği Tarih : 08.06.2001
Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 11.07.2001

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Zekeriya GÜNEY

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Hasan ÖZEKES
Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Ali BEKMEZCİ

Enstitü Müdürü : Doç. Dr. Mustafa IŞILOĞLU

Temmuz, 2001
MUĞLA

TUTANAK

Muğla Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' nün 15/06/2001 tarih ve 128 sayılı toplantısında oluşturulan jüri, Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliği'nin 21. Maddesine göre, Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Öğrencisi Tufan TAŞKESEN' in **"Gödel' in aksiyomatik sistemlerin tam olmamasına dair teoremi ve paradokslar"** adlı tezini incelemiş ve aday 11/07/2001 tarihinde saat 10.00'da jüri önünde tez savunmasına alınmıştır.

Adayın kişisel çalışmaya dayanan tezini savunmasından sonra 30 dakikalık süre içinde gerek tez konusu, gerekse tezin dayanağı olan anabilim dallarından sorulan sorulara verdiği cevaplar değerlendirilerek tezin..kabul olduğuna..oybirliği ile karar verildi.

Tez Danışmanı
Doç. Dr.
Zekeriya GÜNEY

Üye
Prof. Dr.
Hasan ÖZEKES

Üye
Yrd. Doç. Dr.
Ali BEKMEZCİ

YEMİN

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum "Gödel' in aksiyomatik sistemlerin tam olmamasına dair teoremi ve paradokslar" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel olarak ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlandığımı belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

08/06/2001

Tufan TAŞKESEN

YÜKSEK ÖĞRETİM KURULU DÖKÜMANTASYON MERKEZİ
TEZ VERİ GİRİŞ FORMU

YAZARIN

Soyadı : TAŞKESEN

Adı : Tufan **Kayıt No:**

TEZİN ADI

Türkçe : Gödel' in aksiyomatik sistemlerin tam olmamasına dair teoremi ve paradokslar

Y. Dil : Gödel' s axiomatic systems' incompleteness theorem and paradoxes

TEZİN TÜRÜ :

Yüksek Lisans	Doktora	Sanatta Yeterlilik
●	O	O

TEZİN KABUL EDİLDİĞİ

Üniversite : Muğla Üniversitesi

Fakülte : Fen Edebiyat Fakültesi

Enstitü : Fen Bilimleri Enstitüsü

Diğer Kuruluşlar :

Tarih : 2001

TEZ YAYINLANMIŞSA

Yayınlanan

Basım Yeri :

Basım Tarihi :

ISBN :

TEZ YÖNETİCİSİNİN

Soyadı Adı : GÜNEY Zekeriya

Ünvanı : Doç. Dr.

TEZİN YAZILDIĞI DİL : Türkçe	**TEZİN SAYFA SAYISI**: 178

TEZİN KONUSU(KONULARI) :

Gödel' in aksiyomatik sistemlerin tam olmamasına dair teoremi ve paradokslar

TÜRKÇE ANAHTAR KELİMELER

1) Kurt Gödel

2) Aksiyomatik Sistem

3) Paradoks

4) Tamlık

İNGİLİZCE ANAHTAR KELİMELER

1) Kurt Gödel

2) Axiomatic System

3) Paradox

4) Completeness

1) Tezimden fotokopi yapılmasına izin vermiyorum. **O**

2) Tezimden dipnot gösterilmek şartıyla bir bölümünün fotokopisi alınabilir. **O**

3) Kaynak gösterilmek şartıyla tezimin tamamının fotokopisi alınabilir. ●

Tufan TAŞKESEN

Yazarın İmzası: Tarih: 08.06.2001

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖNSÖZ

İnsan yaşamının hemen her kesiminde, imkanlar ve fırsatlar elverdiğince, düşlenen ve gerçekleşmesi için üstün gayretler sarfedilen istek, amaç ve idealler söz konusudur. Doğası gereği toplumsal hayatı temel ilke edinmiş olan insanoğlu için, gayelerini gerçekleştirebilme adına, sürekli ve düzenli ilişkiler içerisinde bulunduğu kişilerden ilgi, destek ve anlayış görmesi, muhtemel başarısının vazgeçilmez şartıdır. Birey, ancak böylesi sağlıklı bir etkileşim sürecinden geçerek yoluna devam edebilir.

Üstelik söz konusu olan, matematik gibi kendine has ciddi bir işleyişe sahip ve büyük bir özen gerektiren hassas yapılardan oluşan bir bilimde yüksek lisans tez çalışması yapmak olduğunda, bu sürecin önemi daha da belirginleşmektedir. İşte elinizdeki bu çalışma, yukarıda sözü edilen sürecin gayet sağlıklı ve umulanın ötesinde olumlu geçmesi sonucunda oluşmuştur.

Bu nedenle, ortaya çıkan tezin temel unsurları niteliğinde olan,

Doç. Dr. Zekeriya GÜNEY' e; 1994 yılından beri öğrencisi olma şerefini bana tattırdığı, lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca her şekilde ve her koşulda yol gösterici olduğu, tez çalışmamız süresince en yoğun olduğu anlarda bile yardımıma koşup büyük bir performans sergilediği ve belki de en önemlisi, tüm öğrencilerine olduğu gibi bana da, idealist ve sorumluluk sahibi bir akademisyen olma yolunda ciddi bir örnek teşkil ettiği için,

Prof. Dr. Hasan ÖZEKES' e; gerek Fen Edebiyat Fakültesi Dekanlığı ve gerekse Matematik Anabilim Dalı Başkanlığı görevlerini başarıyla yürüterek, hem iyi bir idareci ve hem de kaliteli bir matematikçi olmanın mümkün olabileceğini gösterdiği ve geleceğimi etkileyecek önemli kararları vermemde büyük pay sahibi olduğu için,

Çalışma Arkadaşlarıma; Fen Edebiyat Fakültesi ve Muğla Meslek Yüksekokulu' nda öğretim üyesi, öğretim görevlisi ve araştırma görevlisi olarak çeşitli zamanlarda ve değişik yollarla bana yardımcı olup her şekilde destekledikleri için,

Anneme; yaşamının onca yükü ve ağırlığına rağmen her zaman ayakta kalmasını bilip bu bilinçle beni yetiştirdiği, doğruluğu, sabrı, özveriyi, mütevaziliği ve diğer tüm insani değerleri, doğduğum günden beri özenle ve itinayla bana öğrettiği ve bir yaşam biçimi haline gelmesi adına ter döktüğü için,

Babama; yıllar yılı yağmur, çamur demeden benim için büyük emekler sarfettiği, zaman zaman suistimal etmiş olsam da benimle devamlı bir arkadaşlık ilişkisi kurup bu ilişkiyi koruduğu ve hayatımın her alanında, her zaman arkamda olduğunu hissettirdiği için,

Kardeşime; bazen sağlam bir dost, bazen iyi bir sırdaş, bazen açık sözlü bir eleştirmen ama her zaman iyi bir kardeş olduğu, benimle her dönemde gayet sağlıklı ve olumlu ilişkiler içerisinde olduğu ve desteğini eksik etmediği için,

Eşime; hayatıma mutluluk ve düzen getirip beni böylelikle başarı ve sağlığa sürüklediği, tezin uzun geceler boyu süren yazım ve düzenleme çalışmalarında yanımda olup büyük emek harcadığı ve her an anlayışla yaklaşabileceğine inandığım bir hayat arkadaşı olduğu için,

minnet, şükran ve teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

GÖDEL' İN AKSİYOMATİK SİSTEMLERİN TAM OLMAMASINA DAİR TEOREMİ VE PARADOKSLAR

TAŞKESEN, Tufan
Yüksek Lisans Tezi, Matematik
Temmuz, 2001

Bu çalışmada, Kurt Gödel' in, 20. yüzyıl matematiğinin dönüm noktası değerinde olan 1931 tarihli ve *Principia Mathematica ve benzer sistemlerin formel olarak karar verilemeyen önermeleri üzerine* [1] adlı ünlü makalesinin oluşum süreci ve bu makalenin, özet sayılabilecek nitelikteki bir taslağı irdelenmiştir. Gödel' i böyle bir makaleyi yazmaya iten felsefi, mantıksal ve matematiksel süreçlerin hemen hepsine değinilmiş olup, yer yer bu süreçlerin tarihsel arka planları da söz konusu edilmiştir. Zira adı geçen makale, matematiğin kendi içsel sınırlılıklarını ortaya koyması bakımından olduğu kadar, oluşum sürecinin tarihi gelişimi bakımından da renkli, etkileyici ve çarpıcıdır.

ABSTRACT

GÖDEL' S AXIOMATIC SYSTEMS' INCOMPLETENESS THEOREM AND PARADOXES

TAŞKESEN, Tufan
M. Sc. in Mathematics
July, 2001

In this study, the formation process of famous article, which published in 1931 and has the value for turning point of 20. century mathematics' and also named by *On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems* [1] and a model having the quality of that article' s summary had been examined. Almost all philosophical, logical and mathematical processes which encouraged Gödel to write that article had been mentioned and moreover the historical backgrounds of that processes were concerned. Because the article is peculiar, effective and attractive in that it reveals the mathematics' self interior limits and has an interesting historical development of its formation process.

TABLOLAR LİSTESİ

SAYFA

ŞEKİLLER LİSTESİ

SAYFA

BÖLÜM 1

GİRİŞ

İnsanoğlu, ideal formlar olarak bellediği tamlık, kesinlik, doğruluk, çelişmezlik ve tutarlılık gibi kavramları, tarihin hemen her döneminde birçok alanda aramış, ancak yoğunlukla matematikte bulmuştur. Matematiğin kendine özgü yapısı, gerçekliğe uzanan yolu açış sürecindeki başarısı ve sunduğu engin yaratıcılık sahası, söz konusu arayışın neden matematikte sonlandığını büyük oranda açıklamaktadır.

Tüm bu yetkinliklerine karşın matematik, tarihsel gelişim süreci boyunca ciddi problemlerle karşı karşıya kalmıştır. İlk bakışta, sorunlarını eninde sonunda çözüme kavuşturan istikrarlı bir bilim gibi görünen matematiğe yakından bakıldığında durumun sanılandan biraz farklı olduğu, görüş ve yaklaşım farklarından doğan ve aşağıdaki gibi sınıflandırılabilen bunalımların matematik dünyasını bir hayli uğraştırdığı anlaşılmaktadır:

1. Antik Yunan' da, irrasyonel sayıların ortaya çıkışıyla başlayıp, negatif (-) ve sanal (i) sayıların bulunuşuyla süren bunalım.

2. Yeniçağ Avrupası' nda, sezgisel ve fiziksel argümanlara dayanılarak ortaya koyulan ve kesinlikle sağlam bir temele oturtulamayan diferensiyel ve integral hesabın yol açtığı bunalım.

3. *Paralel Postülatı* olarak da bilinen Euclide' in V. postülatından kaynaklanan ve Euclide-dışı geometrilerin ortaya çıkmasıyla sonuçlanan bunalım.

4. Cantor' un genel kümeler kuramına ilişkin paradoksların yol açtığı ve Gödel teoremleriyle büyüyen bunalım.

Her biri matematikte ciddi kaoslar yaratan ve matematikçileri uzun yıllar boyu uğraştıran bu bunalımlar, insanoğlunun matematiğe olan güvenini azaltmış ve beklediği kesinliği bir başka yerde aramasına mı yol açmıştır? : Hayır. Çünkü matematik, tüm bu bunalımlardan, büyük oranda ve pozitif yönde etkilenerek çıkmış, içsel sınırlılıklarını özümsemiş, bu bunalımları, yeni ve köklü atılım ve açılımların başlangıç noktası saymıştır.

Çalışmamızın asıl amacı, matematik dünyasının yaşadığı bu bunalımlardan 3. ve 4. maddelerde belirtilenlere ilişkin tarihi, felsefi, mantıksal ve matematiksel bilgileri gün ışığına çıkarmak ve özellikle 4. maddede ifade edilen bunalımı ayrıntılarıyla irdelemektir. Çünkü kümeler teorisi etrafında gelişen süreç, gerek kendine referanslı paradoksların ortaya çıkışları ve gerekse bu paradoksları önlemeye yönelik çalışmaları temellerinden sarsan, 1931 tarihli makale [1] bağlamında büyük yankı uyandırmıştır.

Aslında 3. ve 4. bunalımın temelini oluşturan matematiksel yapı da aynıdır; *aksiyomatik sistem.* Euclide, *Elementler* adlı ünlü eserinde ortaya koyduğu ve bununla bir ilki gerçekleştirdiği aksiyomatik sistemine aldığı bir aksiyom yüzünden; Cantor ise genel küme teorisini oluştururken kurduğu aksiyomatik sistem paradokslar ürettiğinde tenkit konusu olmuştur. Euclide' in bu aksiyomatik sistemini yeniden düzenleme çalışmaları Euclide-dışı geometrileri; Cantor' un sistemine alternatif sistemler oluşturma çabaları da *mantıkçılık* ve *formalizm* gibi yeni iki büyük ekolü doğurmuştur.

Matematiği çelişkisiz ve sağlam bir temele oturtma ya da bu koşulları sağlayan bir temel inşa etme çabalarının en önemlisi ve en ses getireni, şüphesiz David Hilbert' e ait olanıdır. 1900 yılındaki Uluslararası Matematik Konferansı' nda yaptığı tarihi konuşmasında [2] Hilbert, matematik dünyasının o güne değin çözemediği 23 tane büyük problemi olduğunu belirtmiş ve bunların da er ya da geç çözüleceğini savunmuştur. O' na göre matematiksel problemler her zaman var olacaktır, ancak, çözümsüzlük diye bir olgu kabul edilemezdir. Fakat, Hilbert' in bu konuşmayı yapmasını takip eden yıllar, söylediklerinin tersini ortaya koymuştur. Matematik dünyasının değişik yerlerinden gelen ve Cantor' un kümeler kuramına ait olan paradokslar [3] açıklanamamış ve çözülememiştir. Bu sorun karşısında ortaya atılan değişik açıklama ve çözüme ulaştırma çabalarının tümü yetersiz kalmıştır.

1910 ve 1920' li yılar, Hilbert' in *formalizm* adıyla ortaya koyduğu ve matematiğin salt biçimsel aksiyomatik sistemlerden oluşması gerektiğini savunan akımın etkinliğinde geçmiştir. Bu akım, aşağıdaki iki temel üzerine inşa edilmiştir:

1. Matematik ve mantık çalışmalarında kullanılan dilin yapısı, yapılan tanımlar, tüm matematiksel aksiyomlar ve klasik matematiğin uygun şekilde seçilmiş bir alanını geliştirmeye yönelik kullanılan tüm mantık prensipleri, kullanılan dilin objeleri tarafından tam olarak ifade edilmiş olmalıdır (*Formalizasyon*).

2. Kullanılan bir formal sistemde;

a) A ve ~A önermelerinin ispatı olan iki önerme dizisi aynı anda bulunmamalıdır (*Tutarlılık*).

b) A ve ~A önermelerinden bir ve yalnız birinin ispatı olan bir önerme dizisi mutlaka bulunmalıdır (*Tamlık*).

Bu şekilde adeta mekanik hale getirilen ve sezgisellikten tümüyle arındırılan matematik, formalizm yükünü daha fazla taşıyamamıştır. 1931' de, 25 yaşındaki Avusturya' lı matematikçi Kurt Gödel, yazdığı makalede **[1]** kanıtladığı bir teoremle, Hilbert programını temellerinden sarsmıştır. Gödel, makalesinde;

1. Herhangi tutarlı bir aksiyomatik sistemde, önceden karar verilemeyecek (doğruluğu ya da yanlışlığı kanıtlanamayacak) en az bir önerme vardır

2. Herhangi tutarlı bir aksiyomatik sistemin kendi içinde kalınarak, tutarlılık ispatı yapılamaz

savlarını, gayet özgün ve orijinal bir tarzda kanıtlamıştır. Bu savların kanıtlanması, Hilbert' in aksiyomatik sistemler için öngördüğü iki temel nitelik olan *tamlık* ve *tutarlılığın*, neredeyse hiçbir zaman ulaşılamayacak bir ütopya olduğunu ortaya koymuştur.

Bu çalışmada, matematiksel mantık alanında geçen yüzyılda yazılmış en önemli eserlerden biri olan ve yukarıda tanıtılan, *Principia Mathematica ve benzer sistemlerin formel olarak karar verilemeyen önermeleri üzerine* adlı makale **[1]**, dayandığı mantıksal ve matematiksel temellerden yola çıkılarak incelenmiştir. *Temel Kavramlar* başlıklı II. Bölüm' de, Gödel' in çalışmasına altyapı oluşturması bakımından önemli olan *Klasik, Modern ve Simgesel Mantık*' tan söz edilmiş olup, matematiğin temel yapıları olan *Kavram, Terim, Tanım, Benzerlik, Eşitlik, Özdeşlik ve Denklik* hakkında bilgiler verilmiştir. Bu bölümde ayrıca, tüm bilimler için vazgeçilmez bir araç olan *Dil*' e de değinilmiş, *Matematik Dili-Meta Matematik Dili* ayrımı özellikle vurgulanmıştır. III. Bölüm, Gödel kanıtlamasının temel öğelerinden biri olan *Aksiyomatik Sistemler*' e ayrılmıştır. Matematik tarihinin önemli aksiyomatik sistemleri olan *Euclide, Cantor, Zermelo-Fraenkel, Frege ve Principia*

Mathematica yapılarının tümüne değinilmiş olan bu bölümde ayrıca, bir aksiyomatik sistemden beklenen *Tamlık, Tutarlılık ve Bağımsızlık* özellikleri incelenmiştir. III. Bölüm, Hilbert' in 1900 yılında yaptığı ünlü konuşmanın metni **[2]** ve sunduğu 23 problemin ifadeleriyle sona ermiştir. *Paradokslar* adlı IV. Bölüm' de ise, Gödel kanıtlamasında birincil öneme sahip olması bakımından *Paradoks' un Tanımı, Ortaya Çıkış Süreci ve Kapsamı* ile ilgilenilmiştir. V. Bölüm *Gödel Kanıtlaması*' na ayrılmış olup, öncelikle Gödel' in 1929 ve 1930 tarihli iki makalesinde **[4,5]** ortaya koyduğu gerçekler incelenmiş, ardından 1931 tarihli ve asıl konumuzu oluşturan makalede **[1]** yapılan kanıtlama ele alınmıştır. Çalışmamız, tüm elde edilenlerin ışığı altında yapılmış bir değerlendirmeyi ve bundan sonra planlanan çalışmalarımızı içeren *Sonuç* bölümüyle sona ermiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Gödel' in aksiyomatik sistemlerin tam olmamasına dair teoreminin ve bu teoreme ilişkin kanıtlamasının, temel olarak matematiksel mantığa dayanmakta olduğu önceki bölümde belirtilmişti. Bu nedenle, adı geçen teoremi kavrayabilmenin ön şartının, matematiksel mantığa ait bilgilerin gözden geçirilmesi olduğu açıktır.

2. Bölüm' de; Klasik Mantık, Modern Mantık ve Simgesel Mantık' tan genel anlamda söz edilmiş, mantık çalışmalarındaki önemi bakımından kavram, terim, tanım, benzerlik, eşitlik, özdeşlik, denklik ve doğruluk kavramlarına değinilmiştir. Ayrıca bu bölümde, mantıksal doğrulara ulaşmanın değişik yolları araştırılmış, mantıkçılık ve sezgicilik ekolleri üzerinde özellikle durulmuştur.

2.1 KLASİK MANTIĞIN TEMEL KAVRAMLARI

Mantık, düşünme olgusunun, gerçeği (kesinliği) bulma yolunda, geçerli akıl yürütmeler yapabilmek için disipline edilmesinde gerekli yöntem ve ilkeleri konu eden bir disiplindir; kısaca "düşünme yasalarının bilimidir" **[6]**. *Düşünme*, duyu, zeka, hafıza gibi beyinsel işleyişlerin ürünü olarak, algı, sezgi, tasarı, hayal, anımsama v.s. şeklinde ortaya çıkan karmaşık bir olgudur. *Dil*, düşüncelerin (sözle, yazıyla, işaretle v.s.) ifade edilmesidir. İfadeler tümcelerden oluşur. Tümceler, istek, emir, soru, koşul, yargı v.s. gibi konu ettikleri düşüncelere göre çeşitlidir. *Yargı tümcesi*, bir özelliğin bir kavramda olup olmadığına dair bir düşünceyi ifade eder. Herhangi bir obje hakkında, bir yargı tümcesi olarak ifade edilen düşünce ile, konu edilen objenin uygunluk derecesine, *düşüncenin doğruluk derecesi* veya kısaca *doğruluk* denir; *kesinlik* söz konusu uygunluğun tam olmasıdır; bu durumda düşünceye *doğru düşünce* denir. Düşünce ile obje arasında en az bir bakımdan uygunluk yoksa kesinlik de yoktur ve bu durumda düşünceye, *doğru olmayan* ya da (iki değerli mantıkta) *yanlış düşünce* denir. Mantıkta, yargı tümcelerine *önerme* denir. Önermeler, epistemolojik, yapısallık, nicelik, nitelik v.s. bakımlardan sınıflandırılmışlardır. Epistemolojik bakımdan önermeler, *olgusal* (empirik, a posteriori, sentetik) ve *mantıksal* (a priori, analitik) önermeler diye anılan iki sınıfa ayrılır [7]. Yapısal bakımdan önermeler, özne yüklem ve "dır" eki (kopula) nden oluşan "A, B' dir" şeklindeki *basit önermeler*; ve iki ya da daha çok basit önermenin ve, veya, ise v.s. gibi bağlaçlarla bir araya gelmeleriyle oluşan *bileşik önermeler* diye ayrılır. *Nicelik*, bir önermenin tümel ya da tikel olmasıdır. *Tümel önerme*, öznenin tüm kaplamı ile konu edildiği; *tikel önerme* de öznenin kaplamın (belirsiz) bir kısmı ile ele alındığı önermelerdir. Nitelik yönünden ise önermeler, *olumlu* ve *olumsuz* diye ayrılırlar. Salt mantık açısından önermeleri yapı, nitelik ve nicelik bakımından incelemek gerekli ve yeterlidir. Aşağıda bunların bazılarına örnekler verilmiştir.

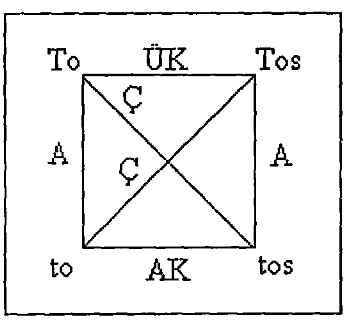
Tümel Olumlu (To) : "Tüm aksiyomatik sistemler tutarlıdır"

Tümel Olumsuz (Tos) : "Tüm aksiyomatik sistemler tutarsızdır"

Tikel Olumlu (to) : "Bazı aksiyomatik sistemler tamdır"

Tikel Olumsuz (tos) : "Bazı aksiyomatik sistemler tam değildir"

To, Tos, to, tos şeklinde simgeleştirdiğimiz bu son dört önerme türü, mantıkta *dört standart form* diye adlandırılır. Bunlar arasındaki ilişkiler, *karşıtlık*, *altıklık* ve *çelişiklik* adlarıyla üç bakımdan incelenir. Nicelik, özne ve yüklemleri aynı fakat nitelikleri farklı olan iki önermeye *karşıt önermeler* denir. Tümel önermelerden karşıt olanlara, *üst karşıt*, tikel önermelerden karşıt durumda olanlara da *alt karşıt önermeler* denir. İki önermenin, nitelik, özne ve yüklemleri aynı fakat nicelikleri farklı ise bunlara *altıklık* denir. Özne ve yüklemi aynı olan iki önerme hem nitelik hem de nicelik olarak farklı ise bunlara *çelişik* denir. *Karşıolum* adı verilen bu ilişkiler "*Aristo Karesi*" denilen aşağıdaki şema ile özetlenebilir [7]:



Şekil 2.1.1 Aristo Karesi

Akıl yürütme (usavurma, reasoning, argümantasyon), öncül (ya da öncüller) denilen bir (ya da daha çok) önerme ile, sonuç denilen başka bir önermeyi ilişkilendirmek için yapılan bir düşünme işlemidir. Eğer öncülün doğru olması, sonucun da zorunlu olarak doğru olmasını gerektiriyorsa, yani sonuç önermesi öncüllerin içeriğinde saklı ise, öncüller sonucu *kanıtlar* denir. Bu durumda, öncüllere *kanıtlayan*, sonuca *kanıtlanan* ve akıl yürütmeye de *geçerli akıl yürütme* denir. Aksi halde, yani öncüllerin sonucu zorunlu kılmaması halinde, akıl yürütmeye *geçersiz akıl yürütme* denir. Bir akıl yürütmenin geçerli olup olmadığını saptama işlemine *denetleme* denir. *Dedüksiyon* (çıkarım), *indüksiyon* ve *analoji* akıl yürütme biçimleridir. Bunlardan dedüksiyon, öncüllerin içeriğinde bulunan sonucu ortaya çıkarma işlemidir ve geçerli olsa bile (sonuç zaten öncüllerin içeriğinde var olduğundan) yeni bir bilgi kazandırmaz. Tüm geçerli akıl yürütmeler dedüksiyondur; ancak geçersiz dedüksiyonlar da yapılabilir. İndüksiyon ve analoji, yeni bilgilere ulaşma bakımından bilimlerin en çok kullandığı akıl yürütme biçimleri olmalarına karşın, ulaştıkları sonuçlara daima şüphe ile bakılır ve bu nedenle geçerlilikleri yoktur. Geçerli dedüksiyonlar birer kanıtlama işlemidir. *Kanıtlama*; kanıt ve kanıtlanan önermelerde geçen ortak terimler ve bunlar arasındaki içlem-kaplam (cins-tür, küme-eleman) ilişkilerinde *Hep* ve *Hiç* kuralları dikkate alınarak gerçekleştirilir. Önermeler ortak terimler içermiyorlarsa veya terimler arasında içlem-kaplam (cins-tür, küme-eleman) ilişkisi kurulamıyorsa mantıksal kanıtlama yapılamaz. Hiç bir ortak terim içermedikleri halde, önermeler arasında, nedensellik denilen bir neden-sonuç ilişkisi de olabilir. Bu tür ilişkiler kurularak yapılan akıl yürütmelere (kanıtlama değil) *tanıtlama* denir. Kanıtlamalar dedüksiyonlarla yapılabildiği halde, tanıtlamalar, indüksiyon veya analoji ile yapılırlar ve geçerli akıl yürütmeler değillerdir; genellikle kesinlik içermezler. Aşağıda yegane geçerli akıl yürütme olabilen dedüksiyonların (çıkarımların) bir tasnifi verilmiştir:

2.1.1 DOĞRUDAN ÇIKARIMLAR [7,8]

Doğrudan çıkarımlar, bir tek öncül içeren dedüksiyonlardır. *Karşıolum* ve *eşdeğerlik* çıkarımları olmak üzere ikiye ayrılırlar. Karşıolum çıkarımları, önermeler arasındaki (daha önce sözü edilen) karşıtlık, altıklık ve çelişki ilişkilerine dayandırılır. Üst karşıt iki önermeden biri doğru ise diğeri yanlış olmak zorundadır.

Fakat biri yanlış ise diğeri doğru da yanlış da olabilir. Alt karşıt önermelerden biri yanlış ise diğeri doğrudur. Fakat biri doğru ise diğeri doğru da olabilir yanlış da. Altıklıkta, tümel olumlu doğru ise tikel olumlu da doğrudur. Tümel olumsuz doğru ise tikel olumsuz da doğrudur. Tikel olumlu doğru ise tümel olumlu doğru da yanlış da olabilir. Tikel olumsuz doğru ise tümel olumsuz doğru da olabilir yanlış da . . . Çelişki çıkarımları, çelişki durumundaki yani nitelik ve nicelikleri farklı olan önerme çiftleri ile yapılan dedüksiyonlardır. Çelişik iki önermeden biri doğru ise diğeri yanlıştır.

2.1.2 EŞDEĞERLİK ÇIKARIMLARI [7,8]

Eşdeğerlik çıkarımları, denk (doğruluk değerleri aynı olan) önermeler arasında yapılır. Dört standart formdaki önermelerden, *evirme*, *çevirme* ve *devirme* denilen bazı dönüştürmeler yapılarak, bunlara denk olabilen yeni önermeler (sonuçlar) elde edilebilir. *Evirme*, nitelik ve niceliği bozmadan önermenin öznesi ile yükleminin yerini değiştirme işlemidir. Bu işlem tümel olumlularda yapılırsa önermenin doğruluk değeri değişir; tümel olumsuz ve tikel olumlularda evirme işlemi, önermenin doğruluk değerini değiştirmez; tikel olumsuzlarda değişebilir de değişmeyebilir de . . . *Çevirme* işleminde önce önermenin niteliği değiştirilir, sonra yüklem yerine onun tümleyeni getirilir. Yüklemin tümleyeninden, yüklem konumundaki kavramın kaplamında olmamayı kastediyoruz. Bir kavram ile onun tümleyeni zıt-anlamlı sözcüklerle ifade edilebilir; *ölümlü-ölümsüz* gibi . . . Çevirme işleminden sonra tüm formlarda, doğruluk değeri değişmez. *Devirme* ise, nitelik ve niceliği bozmadan, öznenin tümleyenini yüklem, yüklemin tümleyenini de özne yapmaktır. Bu işlemle tümel olumlu ve tümel olumsuzlar için geçerli, fakat tikel olumlu ve tikel olumsuz önermeler için geçersiz çıkarımlar yapılır.

2.1.3 DOLAYLI ÇIKARIMLAR (Tasım, kıyas, sillogizm) [7,8]

Dolaylı çıkarımlar, birden çok öncül içeren çıkarımlardır. Öncüllerin tümünün basit önermeler olduğu tasımlara *kategorik tasım*; öncüllerden en az birinin bileşik önerme olduğu tasımlara da *kategorik olmayan tasım* denir. İki öncüllü bir kategorik tasımda (tam tasım), her biri dört standart formdan biri olabilen, (sonuç ile birlikte) üç basit (kategorik) önerme vardır. Ayrıca, ikisi hem öncüllerde hem de sonuçta geçen, biri de yalnızca öncüllerde geçen üç terim vardır. Yalnızca öncüllerde geçen terime *orta terim*; sonuçta geçen terimlerden özne konumunda olanına *küçük terim*, yüklem konumunda olanına da *büyük terim* denir. Büyük terimi içeren öncüle *büyük öncül*, küçük terimi içeren öncüle de *küçük öncül* denir. Önermelerin sıralanışı bakımından 64 farklı tam tasım olabileceği açıktır. Küçük ya da büyük öncüllerde yer alabilecek olan orta terimin, bunların her birinde özne ya da yüklem konumunda bulunabilmesine göre, her bir sıralanış için (orta terimin) dört farklı konumsal durumu vardır. O halde önermelerin sıralanışı ve orta terimin öncüllerdeki konumlarına göre 256 farklı tasım olacaktır. Bunlardan sadece 24 tanesi geçerlidir. Geçerli tasımlar aşağıdaki kriterlere göre saptanır [7]:

1. Orta terim sonuçta bulunmamalıdır.

2. Öncüllerden en az biri tümel olmalıdır.

3. Öncüllerden biri tikel ise sonuç da tikeldir.

4. İki öncül de olumlu ise sonuç da olumludur.

5. Öncüllerden en az biri olumludur.

6. Öncüllerden biri olumsuz ise sonuç da olumsuzdur.

Geçerli olan bu 24 tam tasım, *kuvvetli*, *zayıf*, *mükemmel* diye sınıflandırılmıştır. Aşağıdaki örnek "Aristo'nun dört mükemmel tasımı" için verilmiştir:

1) Tüm Gödel sayıları doğal sayıdır

Tüm (ilk on doğal sayı) (ilk on doğal sayının tümü) Gödel sayısıdır

---

O halde ilk on doğal sayının tümü doğal sayıdır

2) Hiçbir Gödel sayısı irrasyonel değildir

Tüm asallar Gödel sayısıdır

O halde hiçbir asal irrasyonel değildir

3) Tüm Gödel sayıları rasyoneldir

13 bir Gödel sayısıdır

O halde 13 rasyoneldir

4) Hiçbir Gödel sayısı irrasyonel değildir

Bazı doğal sayılar Gödel sayısıdır

O halde bazı doğal sayılar irrasyonel değildir

Zincirleme tasımlar **[9]**, ikiden çok öncülü olan tasımlardır. Bunlardan *yığın zincirleme tasımlar*,

Tüm A_1' ler , A_2' dir

Tüm A_2' ler , A_3' dür

.
.
.

Tüm A_{n-1}' ler , A_n' dir

O halde tüm A_1' ler , A_n' dir

şeklindedir.

Eksik önermeli tasımlar **[9]**, öncüllerden birinin ya da sonuç önermesinin ifade edilmediği, fakat bu ifade edilmeyen önermenin zihinde oluşturulabildiği tam tasımlardır. Geçerlilikleri, ancak saklı tutulan önermenin yerine koyulmasıyla mümkündür.

Hipotetik önermeler **[10]**, iki basit önermenin "ise" bağlacıyla birleştirilmesiyle oluşan, $p \Rightarrow q$ şeklindeki bileşik önermelerdir. *Disjunktif önermeler* ise "ya da" bağlacıyla oluşan bileşik önermelerdir. *Kategorik olmayan tasımlar*, öncülleri arasında hipotetik veya disjunktif önerme bulunan tasımlardır. Eğer öncüllerden en az biri hipotetik önerme ise *hipotetik tasım*, disjunktif ise *disjunktif tasım* denir. Hipotetik tasımlar dört çeşittir **[9-11]**:

1. Ön bileşenin evetlenmesi (Modus Ponens)

p , q ise p , r' dir
p , q' dur

O halde p , r' dir

p , q ise r , s' dir
p , q' dur

O halde r , s' dir

p , q değilse p , r değildir
p , q değildir

O halde p , r değildir

p , q değilse r , s değildir
p , q değildir

O halde r , s değildir

2. Ön bileşenin değillenmesi

p , q ise p , r' dir
p , q değildir

---

p , r değildir..(geçersiz)

p , q ise r , s' dir
p , q değildir

---

r , s değildir..(geçersiz)

p , q değilse p , r değildir
(p , q değildir) yanlıştır

(p , r değildir) yanlıştır..(geçersiz)

p , q değilse r , s değildir
(p , q değildir) yanlıştır

(r , s değildir) yanlıştır..(geçersiz)

3. Art bileşenin evetlenmesi

p , q ise p , r' dir
p , r' dir

---

p , q' dur...(geçersiz)

p , q ise r , s' dir
r , s' dir

---

p , q' dur...(geçersiz)

p , q değilse p , r değildir
p , r değildir

---

p , q değildir...(geçersiz)

p , q değilse r , s değildir
r , s değildir

---

p , q değildir...(geçersiz)

4. Art bileşenin değillenmesi (Modus Tollens)

p , q ise p , r' dir
p , r değildir

---

p , q değildir .... (geçerli)

p , q ise r , s' dir
r , s değildir

---

p , q değildir... (geçerli)

p , q değilse p , r değildir
(p , r değildir) yanlıştır

(p , q değildir) yanlıştır.. (geçerli)

p , q değilse r , s değildir
r , s değildir

(p , q değildir) yanlıştır.. (geçerli)

Disjunktif (ayrık öncüllü) *tasımlar* [7], *bağdaşır seçenekli* ve *bağdaşmaz seçenekli* olmak üzere ikiye ayrılırlar. Bağdaşır seçenekli tasımlarda büyük öncül "veya" bağlacıyla oluşur. Bunlar da dört türlüdür [7,11]:

1. Ön bileşenin evetlenmesi (Modus Ponendo Tollens)

p , q' dur veya p , r' dir
p , q' dur

---

p , r değildir... (geçersiz)

p , q’ dur veya r , s’ dir
p , q’ dur

---

r , s değildir..(geçersiz)

p , q değildir veya p , r değildir
(p , q değildir) yanlıştır

(p , r değildir) yanlıştır..(geçersiz)

p , q değildir veya r , s değildir
(p , q değildir) yanlıştır

(r , s değildir) yanlıştır..(geçersiz)

2. Ön bileşenin değillenmesi (Modus Tollendo Ponens)

p , q’ dur veya p , r’ dir
p , q değildir

---

p , r’ dir..(geçerli)

p , q’ dur veya r , s’ dir
p , q’ dur

---

r , s’ dir..(geçerli)

p , q değildir veya r , s değildir
(p , q değildir) değildir

---

r , s değildir..(geçerli)

p , q değildir veya r , s’ dir
(p , q değildir) değildir

---

r , s değildir..(geçerli)

2. Art bileşenin evetlenmesi (Modus Ponendo Tollens)

p , q' dur veya p , r' dir
p , r' dir

---

p , q değildir...(geçersiz)

p , q' dur veya r , s' dir
r , s' dir

---

p , q değildir...(geçersiz)

p , q değildir veya p , r değildir
p , r değildir

---

p , q değildir...(geçersiz)

p , q değildir veya r , s değildir
r , s değildir

(p , q değildir) değildir...(geçersiz)

4. Art bileşenin değillenmesi (Modus Tollendo Ponens)

p , q' dur veya p , r' dir
p , r değildir

---

p , q' dur...(geçerli)

p , q' dur veya r , s' dir
r , s değildir

---

p , q' dur...(geçerli)

p , q değildir veya p , r değildir
(p , r değildir) değildir

---

p , q değildir..(geçerli)

p , q değildir veya r , s değildir
(r , s değildir) değildir

---

p , r değildir...(geçerli)

2.1.4 BAĞDAŞMAZ SEÇENEKLİ TASIMLAR [12]

p , q' dur veya r' dir
p , q' dur

---

p , r değildir.................... # *Modus ponendo tollens* #...........(geçerli)

p , q' dur veya r' dir
p , r' dir

---

p , q değildir..(geçerli)

p , q' dur veya r' dir
p , q değildir

---

p , r' dir.......................... # *Modus tollendo ponens* #............(geçerli)

p , q' dur veya r' dir
p , r değildir

---

p , q değildir..(geçerli)

2.1.5 İKİLEM (Dilemma) [7,9]

İkilemler, büyük öncülü "ve" bağlacıyla bağlanmış iki hipotetik önermeden oluşan tasımlardır.

1. Basit ikilem : Basit ikilemde büyük öncülün hipotetik önermelerinin birer bileşeni aynı önermedir. *Yapıcı* ve *yıkıcı ikilemler* olmak üzere iki türü vardır.

1_1. Basit yapıcı ikilem :

p , q' dur ve r , q' dur
p' dir ya da r' dir

---

q' dur

1_2. Basit yıkıcı ikilem :

p , q' dur ve p , r' dir
q değildir ve r değildir

---

p değildir

2. Karmaşık ikilem

2_1. Karmaşık yapıcı ikilem :

p , q' dur ve r , s' dir
p' dir ve r' dir

---

q' dur ve s' dir

2_2. Karmaşık yıkıcı ikilem :

p , q' dur ve r , s' dir
q' da değildir r' de değildir

---

p' de değildir r' de değildir

2.2 MODERN MANTIĞA GEÇİŞ SÜRECİ

Mantık, düşünce biçimleri ve düşünce yasaları bilimidir. Doğru düşünme kuralları Aristoteles (M.Ö. 384-322) tarafından "analitik düşünme" adı altında disipline edilmiştir. Stoacılar bu disipline *mantık* (logos) adını vermiş ve Aristo' nun görüşlerini *Organon* adlı eserde toplamışlardır [7]. Daha sonra Porphgros ve Buethius (M.S. 6.yy), özellikle tasım mantığını ön plana çıkararak mantığı geliştirmişlerdir. Gerçeğe ulaşmak için zihnin uymak zorunda olduğu genel düşünce yasaları, kavramları temel almıştır. Kavramlar ise *içlem* (kavramı başka konulardan ayıran niteliklerin tümü) ve *kaplam* (aynı niteliklere sahip-aynı kavram altında toplanan-objelerin tümü) bakımlarından ele alınmışlardır. İlk çağlarda varlıkları ve varlıklar arasındaki ilişkileri dedüktif akıl yürütmelerle anlayabilmek ve kavrayabilmek mümkün görülüyordu. Ancak sonraları, tümdengelimsel düşüncenin yeni bir gerçeği ortaya çıkaramayacağı ve doğa yasalarının ancak *empirik* (deneysel) yoldan, tümevarımsal yöntemlerle, neden-sonuç ilişkileri kurularak ortaya koyulabileceği savunulmaya başlandı. Fakat elde edilen sonuçların matematiğin denetiminden de geçmesi gerekiyordu. Yeni çağın başlarında "bilimler, matematiği kullandıkları oranda kesin ve güvenilirdir" [13] anlayışının su yüzüne çıkmasıyla matematikçiler, ellerindeki bu güçlü aracı daha da güçlendirmek ve mevcut yapı içindeki çözemedikleri bazı problemlerini de çözebilmek umuduyla matematiğin mantıkla da desteklenmesi gereğini düşünmüşlerdir. Ancak mantığa yöneldiklerinde onun, özellikle felsefecilerin elinde, Aristo' nun salt biçimsel mantığı olmaktan çıkıp ontolojik, epistemolojik, metodolojik ve metafiziksel konular arasında bir karmaşaya ve adeta bir mantıksızlık ve paradokslar çukuruna dönüştüğünü görünce, matematiğin mantıksallaşmasının ancak, önce mantığın matematikselleştirilmesi ve mantık dışı konulardan arındırılmasıyla gerçekleşebileceğine inanmışlardır. Mantığın bilimde ve matematikte kullanılabilir hale getirilmesine Bacon ve Descartes öncülük etmiştir. Modern mantık, sembolik mantık, matematiksel mantık, lojistik gibi adlarla (ve kayda değer olmayan farklılıklarla) ortaya çıkan yeni mantık anlayışları, *biçimsel mantık* denilen eski mantığa alternatif olarak ortaya çıkmışlardır.

Modern denilen tüm mantık disiplinlerinde bir sentaks sistemi vardır ve sistemde objelerin içeriği değil biçimi ele alınır; buna *biçimselleştirme* (formalizasyon) [14] denir. Sistemi yorumlama sistemin dışında bir faaliyettir.

Sistemin kendine özgü sembolleri olup kullanılan dil (nesnel-dil, obje-dil v.s.) ile bu dil hakkında konuşulan dil (dil ötesi, meta-dil v.s.) arasında kesin bir ayırım yapılmıştır.

Lojistik, mantığın bir *kalkülüs* haline getirilmesini hedefler ve mantığın sembolleşmesi ile oluşmuştur. Bu nedenle lojistiğe, sembolik mantık ya da matematiksel mantık da denir. Latince, *çakıl taşı* anlamına gelen (muhtemelen, ilk çağlarda hesap yapmakta çakıl taşlarından yararlanılmış olmasından dolayı) *calculus* sözcüğü matematikte, belirlenmiş sembollerle, belirlenmiş kurallara uyularak hesap yapma ve yeni sonuçlar elde etme disiplini anlamında kullanılır (Özellikle, üniversitelerin fen bilimleri ve matematik bölümlerinin ilk sınıflarında verilen ve diferensiyel-integral ağırlıklı olan dersler de bu adla anılır). Sembollerle hesap yapmanın (günümüzdekine yakın şekliyle) ilk örneği, Türk matematikçi Harezmi' nin kurduğu cebirsel kalkülüstür. Gerçekte ilk sembol kullanımı, Aristo' nun kategorik önermeler teorisinde görülür. Ortaçağda Türk bilginlerinden Farabi öncüller ve kanıtlama kavramlarını, İbni Sina ise kipli önermeleri ele alarak, Aristo' nun biçimsel mantığına önemli katkılarda bulunmuşlardır **[8]**.

Bir kalkülüs geliştirildikten sonra artık, ele alınan disiplin içindeki konuları matematiksel bir dakiklikle ele almak ve denetlemek imkanı elde edilmiş olur. Bir mantık kalkülüsü (lojistikte mantığın temel birimi olarak alınan), önermeler ve önermeler arasındaki ilişkiler için bir kurallar ve semboller listesi içerir; önermeleri içeriksel değil ama anlamlarından arındırılmış olarak sembollerle gösterirken, önermeler arasındaki ilişkileri de yine sembollerle ve belli kurallarla formüle eder. Bu formelleştirme, içeriksiz önermeler arasındaki ilişkileri bir cebirsel hesap gibi ele alıp, onları kesin olarak denetleyebilmeyi sağlar. Böylece, önermelerin anlamlarından bağımsız ve tamamen biçimsel olarak ele alınmalarıyla, mantığın *salt*lığı gerçekleşir; belirsizlikler ve çok anlamlılıklar ortadan kalkar. Sistem içinde, gizli, anlamlı hiçbir işaret, sözcük, terim v.s. bulunmaz ve bulunan her şey önceden tanımlanır. Aksiyomlar ve teoremler, temel simgelerin bir araya gelmeleriyle oluşan anlamsız ve sonlu zincirlerdir. Aksiyomlardan hareketle teoremlerin kanıtlanması, önceden belirlenmiş mekanik kurallara dayandırılarak yapılır ve böylece bir simgeler zinciri, başka bir simgeler zincirine dönüştürülmüş olur. Önceden saptanmış ve açıkça belirtilmiş akıl yürütme ilkelerine sadık kalınır. Sezgiye yer verilmez. Sonuçta yapının oluşumu, bir cihazın çalışma modeli gibi apaçık ortaya konur ve çeşitli içeriksiz simge zincirlerinin birbirleriyle nasıl bir bağlantı içinde oldukları açıkça görülür.

Bilinen ilk kalkülüs Euclide geometrisidir; Harezmi' nin cebir kalkülüsü, Descartes' ın Euclide geometrisini cebir kalkülüsü aracılığıyla analitik geometriye dönüştürmesi ve doğa bilimcilerinin, doğa yasalarını matematiksel dil ile formüle etme çabaları diğer tarihsel örneklerdir. Raymond Lulle (1235-1315), sembolik mantığın ilk öncülerindendir. İlk mantık kalkülüsünün ise, Lulle' den etkilenen Leibniz tarafından oluşturulduğu söylenebilir. Leibniz, mantığı tek ve evrensel bir "calculus rationis" **[15]** haline getirmeyi düşledi; *Characteristicia Universalis* (evrensel karakterler-sembolik dil-) ve *Matheis Universalis* (bu dile dayanan evrensel matematik) tasarımlarıyla modern mantığın öncüsü olmuştur. O, felsefenin bile matematiksel bir modelinin oluşturulabileceğine inanıyordu. De Morgan 1847' de, mantığın matematikselleştirilmesi yolunda ilk örnekleri verdi; daha sonra çalışmaları C. S. Pierce tarafından geliştirildi. G. Boole, Schröder, Venn ve G. Frege modern mantığı gerçek anlamda kurmuşlardır. Frege, matematiğin mantıktan türetilebileceğini savunmuş ve *Kavram Yazıları* adlı kitabı lojistiğin öncüsü olmuştur. Whitehead ve Russell ise *Principia Mathematica*' da, önceki çalışmaları toparlamışlar ve matematiği bu yeni mantıkla donatmışlardır.

Ne var ki 1889' da Peano, *Principia Mathematica*' daki görüşleri büyük ölçüde dile getirmiştir. K. Gödel ise 1930' da, tekli ve çoklu yüklemler mantığında geçerlilik kanıtlamasının sonlu sayıda adımla yapılabileceğini ve daha önemlisi, aritmetiği kapsayan hiçbir matematiksel dizgenin tüm doğru önermelerini kanıtlayabilecek tamlıkta bir aksiyom sisteminin olamayacağını kanıtlamıştır. A. Tarski 1934' de, "doğruluk" ve "geçerlilik" tanımlarını vermiş, "doğrulayıcı yorumlama" **[14]** kavramını geliştirmiştir. A. Church' de 1936' daki çalışmalarıyla, çoklu yüklemler mantığında geçerliliği sonlu sayıda adımla ortaya koyabilecek bir yöntemin bulunamayacağını kanıtlamıştır. Hilbert, Bernays, Neumann, Brouwer, Heyting, Weyt, Gentzen, Lorenzen, Reichenbach, Quine, Menne, Zermelo, Buckensky, Beth, Smulyan diğer önemli modern mantıkçılardır. Ayrıca Wittgenstein, Post, Carnap ve Cohen semantik, Shönfinkel, Curry ve Rosser' da sentaks alanında önemli çalışmalar yapmışlardır.

Sembolleştirme çeşitli biçimlerde yapılabildiği için, çok sayıda değişik lojistik kalkülüsler ortaya koyulmuştur. Ancak bunlardan, özellikle Anglo-Sakson ülkelerinde genel olarak benimsenmiş olanı Frege, Russell, Whitehead ve Wittgenstein' ın lojistikleridir.

Ülkemizde mantığa dair, Molla Fenari (15.yy)' nin *İsagoli Şerhi* ve İsmail Gelenbevi (18.yy)' nin *Burhan* adlı eserleri ve klasik mantık çerçevesinde verilmiş birçok eser sayılabilir [7]. Yazarı bilinmeyen, 1860 tarihli *Mittah-ul Fünun* adlı eser, modern anlayıştaki bilinen ilk mantık kitabıdır. Ahmet Cevdet Paşa, yazdığı mantık kitabına, oğluna atfen *Miyar-ı Sedat* (Sedat' ın Ölçüsü) adını vermiştir. Oğlu Ali Sedat (1857-1900) ise babasının iltifatına karşılık olarak, *Mizan-ul Ukul fi'l Mantık ve'l Usul* adlı mantık kitabını yazmıştır. Bu kitapta Hamilton, Bacon ve Spencer' ın görüşleri tartışılmış ve Boole' un cebirsel mantığı ele alınmıştır. Ali Sedat' a göre, cebir kurallarından daha genel olan düşünce kurallarının cebire uygulanmasında bir sınırlama ve zorlama olduğundan Boole' un yöntemi çıkar yol değildir. Gerçekten, Boole' un yöntemini benimseyen 19. yüzyıl mantıkçılarının, mantığı, ondan daha az genel olan matematikle açıklamaya kalkıştıklarını, fakat yeni mantıkçıların, Boole' un görüşünün aksine, matematiği temellendirmek için yeni bir mantık kurma çabasında olduklarını biliyoruz.

Mantıkla ilgili çalışmalar yapan bilim adamlarımız arasında M. Fazıl, Tezer Ağaoğlu, Salih Zeki, Nusret Şükrü, Hasan Ali Yücel, Hatemi Sinih Sarp, Nurettin Topçu ve Nezahat Kulin sayılabilir. Vehbi Eralp 1939' da, Reichenbach' dan *Lojistik* adlı eseri dilimize çevirmiştir. Hilmi Ziya Ülgen' in *Mantık Tarihi* ve A. Reymond' dan çevirdiği *Lojik Prensipleri ve Muasır Tenkit* adlı çalışmaları, 1942' de verilmiş önemli temel eserlerdendir.

2.3 LOJİSTİK (SİMGESEL MANTIK)

Herhangi bir alanda bir hüküm bildiren ve doğru ya da yanlış olabilen ifadelere *önerme* denir. "Gödel bir matematik ustasıdır" gibi, daha basit başka önermeler cinsinden herhangi bir şekilde yazılamayan önermelere *primitif* (veya basit) önermeler denir. Bunlar p, q, r, ... gibi harflerle adlandırılır. Önermeler mantığı (Propositional logic), keyfi önermeler yerine geçen (p, q, r, ... gibi) değişkenlerin çeşitli kombinezonları ile ilgilenir. Bu değişkenlere *mantıksal* değişkenler denir ve bunların her biri varsayımsal (hipotetik) bir önermeye karşılık gelir **[11]**. Önermeler mantığı, verilmiş bir takım mantıksal değişkenlere karşılık gelebilecek basit önermelerin iç yapısı ile değil, bunların çeşitli fonksiyonları olarak oluşturulabilen mantıksal fonksiyonlarla ilgilenir. p_1, p_2, ..., p_n gibi n tane önerme değişkeni verildiğinde, yeni bir önerme değişkeni, bunların doğruluk değerlerinin her bir kombinezonu için, yeni önermeye özel bir doğruluk değeri veren bir fonksiyon olarak tanımlanabilir. n önerme 2^n olası doğruluk değeri alabileceğinden, bu n önermeden 2^{2^n} olası mantıksal fonksiyon tanımlanabilir **[9]**.

Örnek olarak 2 değişkenli tüm mantıksal fonksiyonlar 16 tanedir. Bunlar, adlandırmaları ve gösterimleriyle birlikte aşağıda listelenmiştir. Bu listeleme sırasında mantıksal fonksiyonlar;

$i \in \{1, 2, \ldots, 16\}$ olmak üzere

$f_i : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$

$f_i\,(p,q) \in \{0,1\}$

şeklinde ifade edilmiş olup,

$$\text{p' nin doğruluk değeri} = \begin{cases} 0 \;, & \text{p yanlış ise} \\ 1 \;, & \text{p doğru ise} \end{cases}$$

alınmıştır.

f_i	$f_i(p,q)$	İndirgenmiş form	İsim
$f_1=\{((1,1),0),((0,1),0),((1,0),0),((0,0),0)\}$	$f_1(p,q) = 0$	$p \wedge \bar{p}$	Zero function, Falsum
$f_2=\{((1,1),0),((0,1),0),((1,0),0),((0,0),1)\}$	$f_2(p,q) = p \not\vee q$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	Nor, Pierce
$f_3=\{((1,1),0),((0,1),0),((1,0),1),((0,0),0)\}$	$f_3(p,q) = p \mapsfrom q$	$p \wedge \bar{q}$	İnhibition, Proper inequality
$f_4=\{((1,1),0),((0,1),0),((1,0),1),((0,0),1)\}$	$f_4(p,q) = \bar{q}$	$\bar{q}$	Negation, Complement
$f_5=\{((1,1),0),((0,1),1),((1,0),0),((0,0),0)\}$	$f_5(p,q) = p \mapsto q$	$q \wedge \bar{p}$	İnhibition
$f_6=\{((1,1),0),((0,1),1),((1,0),0),((0,0),1)\}$	$f_6(p,q) = \bar{p}$	$\bar{p}$	Negation
$f_7=\{((1,1),0),((0,1),1),((1,0),1),((0,0),0)\}$	$f_7(p,q) = p \circledvee q$	$p\bar{q} \vee q\bar{p}$	Exclusive, Nonequivalance
$f_8=\{((1,1),0),((0,1),1),((1,0),1),((0,0),1)\}$	$f_8(p,q) = p \not\wedge q$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	Nund, Shefferstroke
$f_9=\{((1,1),1),((0,1),0),((1,0),0),((0,0),0)\}$	$f_9(p,q) = p \wedge q$	$p \wedge q$	Conjunction, And function
$f_{10}=\{((1,1),1),((0,1),0),((1,0),0),((0,0),1)\}$	$f_{10}(p,q) = p \leftrightarrow q$	$pq \vee \bar{p}\,\bar{q}$	Biconditional, Equivalance
$f_{11}=\{((1,1),1),((0,1),0),((1,0),1),((0,0),0)\}$	$f_{11}(p,q) = p$	p	Assertion, Identity
$f_{12}=\{((1,1),1),((0,1),0),((1,0),1),((0,0),1)\}$	$f_{12}(p,q) = p \leftarrow q$	$p \vee \bar{q}$	Implication, Conditional inequality
$f_{13}=\{((1,1),1),((0,1),1),((1,0),0),((0,0),0)\}$	$f_{13}(p,q) = q$	q	Assertion, Identity
$f_{14}=\{((1,1),1),((0,1),1),((1,0),0),((0,0),1)\}$	$f_{14}(p,q) = p \rightarrow q$	$\bar{p} \vee q$	Implication
$f_{15}=\{((1,1),1),((0,1),1),((1,0),1),((0,0),0)\}$	$f_{15}(p,q) = p \vee q$	$p \vee q$	Disjunction, Or function
$f_{16}=\{((1,1),1),((0,1),1),((1,0),1),((0,0),1)\}$	$f_{16}(p,q) = 1$	$p \vee \bar{p}$	One function, Velrum

Tablo 2.3.1 İki değişkenli tüm mantıksal fonksiyonlar **[16]**

Önermeler mantığının başlıca konularından biri, n büyüdükçe, büyük bir hızla artan sayıdaki n değişkenli tüm mantıksal fonksiyonları, olabildiğince az sayıda basit fonksiyonlarla ifade edebilmektir. Bu basit fonksiyonlar *mantık asalları* denilen 1 veya 2 değişkenli fonksiyonlardır. Herhangi bir sonlu n değeri için P_1, P_2, ..., P_n değişkenlerinin mantıksal fonksiyonu, mantık asallarının bir kümesinin sonlu sayıda bazı elemanları ile oluşturulabilirse, bu mantık asallarının kümesine *tam* denir. Birçok tam asallar kümesi bulunabilir; bunlardan en yaygın ikisi:

{Negation, Conjunction, Disjunction} ve {Negation, Implication}

kümeleridir **[17]**. Herhangi bir tam kümenin elemanları çeşitli uygun şekillerde birleştirilerek, elde edilebilecek mantıksal fonksiyonların kural formlarına *mantık formülleri* denir. Tam asal küme olarak yukarıdakilerden ilkini alırsak, oluşan mantık formülleri ardışık olarak şöyle sıralanabilir:

1. 0 ve 1 doğruluk değerleri mantık formülleridir

2. p bir mantıksal değişken ise p ve $\overline{p}$ mantık formülleridir

3. $\underline{p}$ ve $\underline{q}$ mantık formülleri ise $\underline{p} \wedge \underline{q}$ ve $\underline{p} \vee \underline{q}$ ' da mantık formülleridir

4. Tüm mantıksal formüller 1., 2. ve 3.' de tanımlananlardan ibarettir

Yukarıda tanımlanan tipten her mantık formülü, kendisini oluşturan üç asal fonksiyonun yeni bir fonksiyonunun kuralını tanımlar. Farklı formüller aynı fonksiyonu tanımlayabilir. Bu durumda bu formüllere *denk* denir. Örneğin;

$$(\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge \overline{r}) \vee (q \wedge r) = (\overline{q} \wedge \overline{r}) \vee (\overline{p} \wedge r) \vee (p \wedge q)$$

Bir mantık formülünü temsil eden bir değişken eğer formülde geçen değişkenlerin aldığı doğruluk değerleri ne olursa olsun doğru oluyorsa buna bir *totoloji*, yanlış oluyorsa buna da bir *çelişki* denir. Aşağıda iki değişkenli mantıksal fonksiyonların, yukarıda verilen tam asallar cinsinden ifade edilmiş bazı formülleri verilmiştir **[12]**:

$$0 = p \wedge \overline{p} \;,\; p \overline{\vee} q = \overline{p} \wedge \overline{q} \;,\; p \Leftarrow q = p \vee \overline{q} \;,\; \overline{q} \;,\; p \Rightarrow q = \overline{p} \vee q \;,\; \overline{p}$$

$$p \circledvee q = p\overline{q} \vee q\overline{p} \;,\; p \overline{\wedge} q = \overline{p} \vee \overline{q} \;,\; p \wedge q \;,\; p \Leftrightarrow q = pq \vee \overline{p}\,\overline{q} \;,\; p \;,\; q$$

p, q gibi iki önermenin (bileşik önerme, formül, ifade v.s.) eşitliğinden yukarıda söz ettik. p ve q önermelerinin her bir durum için aynı doğruluk değerlerini almaları halinde $p \leftrightarrow q$ çift gerektirmesi bir totoloji olur; bu durumda p = q yerine

$p \Leftrightarrow q$ notasyonu da kullanılır ve p, q önermelerine mantıksal olarak birbirlerini *gerektirirler* (ya da mantıksal olarak denktirler) denir. Aksi halde $p \not\Leftrightarrow q$ yazılır. Benzer şekilde $p \rightarrow q$ gerektirmesi bir totoloji ise $p \Rightarrow q$ yazılır ve p, q' yu mantıksal olarak *gerektirir* denir ($p \rightarrow q$ ve $p \Rightarrow q$ arasında bir ayırım gözetmeyip $p \rightarrow q$ yerine $p \Rightarrow q$ notasyonunu kullanan matematikçiler de vardır).

Mantıksal denklik, totoloji, çelişki ve tanımladığımız diğer kavramlardan hareketle aşağıdaki, mantığın temel çift gerektirmeleri kanıtlanabilir **[6]**:

1. $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$	(Law of double negation)	Çifte değilleme yasası
2. $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$	(De Morgan' s Laws)	De Morgan yasaları
$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$		
3. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	(Commutative Laws)	Değişme yasaları
$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$		
4. $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	(Associative Laws)	Birleşme yasaları
$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$		
5. $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	(Distributive Laws)	Dağılma yasaları
$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$		
6. $p \vee p \Leftrightarrow p$	(Idempotent Laws)	Tek kuvvet yasası
$p \wedge p \Leftrightarrow p$		
7. $p \vee 0 \Leftrightarrow p$	(Identity Laws)	Birimsel yasalar
$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$		
8. $p \vee \overline{p} \Leftrightarrow 1$	(Inverse Laws)	İnvers yasaları
$p \wedge \overline{p} \Leftrightarrow 0$		
9. $p \vee 1 \Leftrightarrow 1$	(Domination Laws)	Baskınlık yasaları
$p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$		
10. $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	(Absorbtion Laws)	Soğurma yasaları
$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$		

Bu gerektirmelere,

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \bar{p} \vee q$$

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee p)$$

indirgeme yasalarını da ekleyebiliriz. İndirgeme yasalarından yararlanarak içinde $\rightarrow$ ve $\leftrightarrow$ bağlaçları bulunan bir önerme bu bağlaçlardan arındırılabilir. Bu yapıldıktan sonra ortaya çıkan ve ilkine denk olan önermeye *indirgenmiş formda* denir. İndirgenmiş bir önermede değilleme eklemi hiç geçmiyorsa ya da tek tek basit bileşenlerde ve (bir bileşende) sadece bir kere geçiyorsa böyle bir önermeye *tam indirgenmiş* önerme denir. İndirgenmiş önermeleri tam indirgemek için, önermeler mantığının *genel değilleme* yasası ya da *Shannon Yasası* **[17]** denilen yasadan yararlanılır. Shannon Yasası formel olarak,

$$\overline{P(P_1, \ldots, P_n, -, \vee, \wedge)} \equiv P(\bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_n, -, \wedge, \vee)$$

şeklinde ifade edilebilir. Pratik olarak, bir basit önerme veya $\wedge, \vee$ bağlaçlarının üzerinde çift sayıda değil eklemi varsa önerme (ve bağlaçlar) aynen bırakılır; tek sayıda değil eklemi varsa, önermenin değili, $\wedge$ yerine $\vee$, $\vee$ yerine $\wedge$ yazılır. Örneğin:

$$\overline{p\bar{q} \vee \overline{(p \vee \bar{q}r)} \vee \bar{p}qr} \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q)(p \vee \bar{q}r)(p \vee \bar{q} \vee r)$$

(Burada $\wedge$ bağlacı yerine kısalık için hiçbir simge yazılmamıştır.)

Bir p önermesinin normal formu

$$p = (p_1 p_2 \ldots p_{n_1}) \vee (q_1 q_2 \ldots q_{n_2}) \vee \ldots (r_1 r_2 \ldots r_{n_m})$$

şeklindedir. Burada, $\vee$ bağlacı ile birbirine bağlı temel bileşenler (parantezli alt önermeler) birbirinden farklıdır ve her temel bileşen $\wedge$ bağlacıyla birbirine bağlı ve her biri farklı önermelerden oluşmaktadır. Her temel bileşeni aynı önerme harflerinden oluşan bir normal forma da *tam normal form* **[17]** denir. $\{-, \wedge, \vee\}$ sisteminin tamlığı gereğince, tutarlı her bileşik önermenin bir tam normal formu vardır. Örnek olarak p, q, r basit önermelerinden oluşan üç değişkenli bir bileşik önermenin (Boole polinomunun) tam normal formunda, (ancak ve ancak) pqr, $pq\bar{r}$,

$p\bar{q}r$, $p\bar{q}\bar{r}$, $\bar{p}qr$, $\bar{p}q\bar{r}$, $\bar{p}\bar{q}r$, $\bar{p}\bar{q}\bar{r}$ temel bileşenlerinden bazıları bulunur. Eğer tümü de varsa önerme totolojidir. Hiçbiri yoksa çelişme söz konusudur. Bundan yararlanarak tam normal formu verilen bir önermenin doğruluk tablosu hemen yapılabilir. Bunun için, yukarıdaki bileşenlere sıra ile 111, 110, 101, 100, 011, 010, 001, 000 yorumları karşılık getirilirse, önermede herhangi bir yoruma karşılık gelen temel bileşen varsa bu yorum için bileşik önermenin doğruluk değeri 1, aksi halde 0 yazmak yeter.

Yalnızca $\{-, \wedge, \vee\}$ içeren bir p önermesinin *duali* diye, bunların önermede geçtiği her yerde $\wedge$ yerine $\vee$, $\vee$ yerine $\wedge$ ve 1 yerine 0, 0 yerine 1 koyularak elde edilen önermeye denir ve p^d ile gösterilir. Dualite ilkesi denilen aşağıdaki teorem kanıtlanabilir;

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p^d \Leftrightarrow q^d)$$

Substitution (yerine koyma) kuralları ise **[10,11]**:

1. P, totoloji olan bir bileşik önerme (veya ifade) ise, P' de bulunan her P (ifadesi) yerine Q (ifadesi) koyarak elde edilen R bileşik önermesi de totolojidir

2. P bir bileşik önerme, p bu önermede geçen bir bileşik önerme ve $p \Leftrightarrow q$ ise, P' de p yerine q koyularak elde edilen P önermesi P' ye denktir

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem kavramı, totoloji ve gerektirme kavramlarından hareketle tanımlanabilir. Genel anlamıyla, doğru olduğu bir ispat yapılarak gösterilebilen bir önermeye *teorem* denir. Bir teorem genel olarak,

$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$..*

şeklinde bir gerektirmedir; öyle ki, *öncüller* (ya da hipotezler) denilen $p_1, \ldots, p_n$ önermelerinin tümü doğru iken, sonuç (ya da hüküm) denilen q' da doğru olmalıdır. Eğer öncüllerden en az biri yanlış ise, $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$ de yanlış olacağından ve bu durumda q doğru da yanlış da olsa * gerektirmesi doğru olacağından, iddianın doğruluğu kendiliğinden kanıtlanmış demektir. Örnek olarak, "boş kümenin her elemanı 9' a eşittir" önermesi formel olarak,

$$(x \in \varnothing) \Rightarrow (x = 9)$$

şeklinde yazılabilir. Her x objesi için $x \notin \varnothing$ olduğundan $x \in \varnothing$ öncülü yanlış olup, hüküm doğru da yanlış da olsa iddia doğrudur ve o halde yukarıdaki önerme bir teoremdir.

Şunu belirtelim ki verilen bir (hüküm bildiren) ifadenin bir teorem olup olmadığının anlaşılmasını sağlayan, önceden verilmiş bir kurallar listesi yoktur. Bir ispat yapabilmek, çeşitli (daha önce yapılmış) ispat biçimlerinin dikkatlice incelenmesi ve bu konuda çalışmakla kazanılabilecek bir ustalık gerektirir. * ifadesinde geçen ve hipotezler (ya da öncüller) dediğimiz $p_1, \ldots, p_n$ ifadeleri;

1. Çalışılan konu alanına ilişkin tanımlar

2. Aksiyomlar (veya postülatlar)

3. Daha önce kanıtlanmış olan teoremler

olabilir **[8]**. Teoremi kanıtlamak, * ifadesinin bir totoloji olduğunu kanıtlamak ile eşdeğerdir. Örnek olarak;

p_1 : Eğer Hilbert paradokslar üzerinde yeterince dursaydı, Gödel Teoremlerini daha önce kanıtlardı

p_2 : Eğer Hilbert matematiğin birçok alanları üzerinde de çalışmasa, paradokslar üzerinde yeterince dururdu

p_3 : Hilbert, Gödel Teoremlerini daha önce kanıtlayamadı

q : Hilbert, matematiğin birçok alanlarında çalışmıştır

r : Hilbert, Gödel Teoremlerini kanıtlamadı

s : Hilbert, paradokslar üzerinde yeterince çalıştı

önermelerini alalım. $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \Leftrightarrow (s \rightarrow \bar{r}) \wedge (\bar{q} \rightarrow s) \wedge r$ olduğundan, aşağıdaki doğruluk tablosu gereğince

q	r	s	$\bar{r}$	$\bar{q}$	$s \rightarrow \bar{r}$	$\bar{q} \rightarrow s$	$[(s \rightarrow \bar{r}) \wedge (\bar{q} \rightarrow s) \wedge r]$	$[(s \rightarrow \bar{r}) \wedge (\bar{q} \rightarrow s) \wedge r] \rightarrow q$
1	1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1

Tablo 2.3.2 $[(s \rightarrow \bar{r}) \wedge (\bar{q} \rightarrow s) \wedge r] \rightarrow q$ önermesinin doğruluk tablosu

$$[(s \rightarrow \bar{r}) \wedge (\bar{q} \rightarrow s) \wedge r] \rightarrow q$$

bir totoloji ve

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \Rightarrow q$$

bir gerektirme, yani

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \rightarrow q$$

bir teoremdir.

Bir teoremin kanıtı, yukarıdaki önermede olduğu gibi, ona karşılık gelen gerektirmenin doğruluk tablosu yapılarak ya da temel denkliklerden yararlanarak yapılabilir. Ancak özellikle çok sayıda önerme değişkeni içeren gerektirmelerin tablosunu oluşturmak zor olabilir. Bu durumlarda *sonuç çıkarım kuralları* (rules of inference) denilen tekniklerden yararlanılır. Bu teknikler, tüm hipotezlerin doğru olduğu durumlarda kullanılır. Böylece doğruluk tablolarında sadece, tüm hipotezlerin doğru olduğu durumlar ele alınır. Sonuç çıkarım kuralları, * gerektirmesindeki $p_1, \ldots, p_n$ hipotezlerinden q sonucunun nasıl çıktığını gösteren adım adım yapılmış bir ispatın gelişiminde temel rol oynarlar. Bu gelişim, ispatın (ya da argümanın) geçerliliğini ortaya koyar. Her çıkarım kuralı bir mantıksal denklik veya mantıksal gerektirme olarak ortaya çıkar. Daha önce, klasik mantıkta ele aldığımız bu çıkarım kurallarının bir listesi aşağıda verilmiştir. Burada

$$\begin{array}{c} p \\ \underline{\quad q \quad} \\ \therefore\ r \end{array}$$

yazılışı, $pq \Rightarrow r$ mantıksal gerektirmesine karşılık gelmektedir.

$\overline{\qquad\qquad}$

$\therefore$ notasyonları, "sonuç olarak" anlamındadır.

Çıkarım kuralı	Karşılık gelen mantıksal gerektirme (veya denklik)	Kuralın ismi	
p $p\to q$ $\therefore q$	$p\,(p\to q)\Rightarrow q$	Rule of detachment Modus ponens	Ayırma kuralı
$p\to q$ $q\to r$ $\therefore p\to r$	$(p\to q)(q\to r)\Rightarrow p\to r$	Law of the syllogism	Kıyas kuralı
$p\to q$ $\bar{q}$ $\therefore \bar{p}$	$(p\to q)\bar{q}\Rightarrow \bar{p}$	Modus tollens	Ardbileşenin değillenmesi kuralı
p q $\therefore pq$	$pq\Rightarrow pq$	Rule of conjunction	Bağlama kuralı
$\bar{p}\Rightarrow 0$ $\therefore p$	$(\bar{p}\Rightarrow 0)\Rightarrow(p\Leftrightarrow 1)$	Proof by contradiction Reductio ad absurdum *	Olmayana ergi kuralı
$p\bar{q}\Rightarrow 0$ $\therefore p\Rightarrow q$	$(p\bar{q}\Rightarrow 0)\Rightarrow(p\Rightarrow q)$	A special case of *	*' ın özel bir hali
$p\wedge q$ $\therefore p$	$pq\Rightarrow p$	Rule of conjunctive simplification	Bağlamanın daraltılması kuralı
p $\therefore p\vee q$	$p\Rightarrow p\vee q$	Rule of disjunctive amplification	Birleşmeye genişletme kuralı
$p\vee q$ $\bar{p}$ $\therefore q$	$(p\vee q)\,\bar{p}\Rightarrow q$	Rule of disjunctive syllogism	Birleşmeli kıyas kuralı
pq $p\to(q\to r)$ $\therefore r$	$pq[p\to(q\to r)]\Rightarrow r$ $[p\to(q\to r)]\Leftrightarrow(pq\to r)$	Rule of conditional proof	Şartlı ispat kuralı
$p\to q$ $q\to r$ $\therefore p\vee q\to r$	$(p\to q)(q\to r)\Rightarrow[(p\vee q)\to r]$	Rule for proof by cases	Durumlar yoluyla ispat kuralı
$p\to q$ $r\to s$ $p\vee r$ $\therefore q\vee s$	$(p\to q)(r\to s)(p\vee r)\Rightarrow q\vee s$	Rule of the constructive dilemma	Yapıcı ikilem kuralı
$p\to q$ $r\to s$ $\bar{q}\vee\bar{s}$ $\therefore \bar{p}\vee\bar{r}$	$(p\to q)(r\to s)(\bar{q}\vee\bar{s})\Rightarrow\bar{p}\vee\bar{r}$	Rule of the destructive dilemma	Yıkıcı ikilem kuralı

Tablo 2.3.3 Klasik mantığın çıkarım kuralları **[18]**

Önermeler mantığının, basit önermelerin iç yapıları ile değil, onların çeşitli bağlaçlarla bir araya getirilmeleriyle oluşan mantıksal bağıntılarla ilgilendiğini daha önce belirtmiştik. Önermelerin iç yapılarının da analiz edilmesini gerektiren bazı dedüktif akıl yürütmeler vardır. Herhangi bir dil ile ifade edilmiş önermeler bu dilin hüküm bildiren (dekleratif) cümleleridir. Bir basit önerme olan cümleler, gramer olarak bir özne ve bir yüklem içerir. Bir basit önerme genel olarak, x bir özne, P' de yüklem sembolleri olmak üzere, "x, P' dir" şeklinde formüle edilebilir. x yerine konu ile ilgili objelerden oluşan ve *konu evreni* dediğimiz belirli bir E kümesinden objeler gelebilir. Bu durumda P yüklemi E üzerinde tanımlanmış ve her bir x objesine karşılık bir önerme elde edilen bir fonksiyon olarak ele alınabilir. Kuralı P(x) şeklinde yazılan bu P fonksiyonuna bir *yüklemsel fonksiyon*, P(x) kuralına da bir *açık önerme* denir. Yüklemsel fonksiyonlar (ve dolayısıyla açık önermeler) çok değişkenli fonksiyonlara da genelleştirilebilir. $E_1, ..., E_n$ konu evrenleri ve

$$(x_1, ..., x_n)$$

olmak üzere, n değişkenli bir P yüklemsel fonksiyonuna ilişkin açık önerme

$$P (x_1, ..., x_n)$$

olur. Örnek olarak, "x_1' in mesleği x_2' dir" açık önermesi, konu evrenleri E_1 (insanlar), E_2 (meslekler) ve $(x_1,x_2) \in E_1 \times E_2$ olmak üzere, P (mesleğin sahibi olmak) yüklemsel fonksiyonunun, $P(x_1,x_2)$ şeklinde sembolleştirilen kuralıdır. Kısaca, hüküm bildiren bir ifadede eğer bir ya da daha çok değişken geçiyorsa ve ifadenin doğru ya da yanlış oluşu, ancak değişken (ya da değişkenler) yerine konu evreni denilen önceden belirlenmiş bir objeler kümesinden elemanların gelmesi halinde belirlenebiliyorsa, bu ifadelere *açık önermeler* denir.

$$(P(x) \text{ açık önerme }) \Leftrightarrow (a \in E \Rightarrow P(a) \text{ önerme })$$

Önermeler mantığındaki anlamı ile bir *basit önerme*, bir n' li yüklemsel fonksiyonun $n = 0$ hali olarak tanımlanır.

Bir P(x) açık önermesinin başına, *varlık niceleyicisi* ve *evrensel niceleyici* denilen ve $\exists$ (en az bir), $\forall$ (her) ile gösterilen simgeler geldiğinde P(x) bir önerme olur. Böylece ortaya çıkan önermeler $\exists x$, P(x) ve $\forall x$, P(x) şeklinde ifade edilir. $\exists x$, P(x) önermesi, P(x) açık önermesinin evrenin en az bir elemanı için doğru olduğunu, $\forall x$, P(x) önermesi de P(x)' in, evrenin her elemanı için doğru olduğunu iddia eder. Buna göre aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\exists x \; P(x) = \bigvee_{x \in E} P(x)$$

$$\forall x \, P(x) = \bigwedge_{x \in E} P(x)$$

Birçok tanım, aksiyom ve teoremler, bu türden niceliksel önermeler içerirler. Tek değişkenli niceliksel önermeler için, tanımlardan hareketle kolayca ispatları yapılabilecek olan bazı teoremler aşağıda listelenmiştir **[7-9]**:

1. $\exists x \, [\, p(x) \wedge q(x)\,] \Rightarrow [\, \exists x \, p(x) \wedge \exists x \, q(x)\,]$

2. $\exists x \, [\, p(x) \vee q(x)\,] \Rightarrow [\, \exists x \, p(x) \vee \exists x \, q(x)\,]$

3. $\forall x \, [\, p(x) \wedge q(x)\,] \Leftrightarrow [\, \forall x \, p(x) \wedge \forall x \, q(x)\,]$

4. $[\forall x \;\, p(x) \vee \forall x \;\, q(x)] \Rightarrow \forall x \, [\, p(x) \vee q(x)\,]$

5. $\overline{\forall x \;\, p(x)} \Leftrightarrow \exists x \; \overline{p(x)}$

6. $\overline{\exists x \;\, p(x)} \Leftrightarrow \forall x \; \overline{p(x)}$

n' li yüklemsel fonksiyonları (n değişkenli açık önermeleri) bir önermeye dönüştürmek için n tane $\exists, \forall$ niceleyicisi kullanılır. Örnek olarak, E_1, E_2, E_3 evrenlerine ilişkin

$\exists x_1 \; \forall x_2 \; \exists x_3 \;\; P(x_1, x_2, x_3)$..**

önermesi, "E_1' de en az bir x_1 vardır öyle ki, E_2' nin her x_2 elemanı için E_3' de en az bir x_3 vardır" iddiasındadır. $P(x_1,\ x_2,\ x_3) \equiv\ x_1 \leq\ x_2 \leq\ x_3$ alınırsa ** önermesi, E_1=E_2=E_3=R için yanlış, E_1=E_2=R, E_3=(0,1] için doğru olmaktadır.

Bir E evrenindeki bir P(x) açık önermesine uygulanan niceleyiciler, E' nin $|E|$ kardinalitesine bağlı olarak, N doğal sayılar kümesinde,

$$\{\, (\alpha,\beta) \mid \alpha + \beta = |E| \,\}$$

bağıntısının bir γ alt bağıntısı olarak genelleştirilebilir. Burada $\alpha = |\, \{x \mid P(x) \text{ doğru}\} \,|$ ve $\beta = |\, \{x \mid P(x) \text{ yanlış}\} \,|$ anlamındadır. $\alpha \neq 0$ için $\gamma = \exists$, $\beta = 0$ için $\gamma = \forall$ olur. Örnek olarak, $\alpha \rangle \beta$ için "P(x), evrenin elemanlarının çoğu için doğrudur" anlamına gelen *çoğunluk niceleyicisi* **[19]** elde edilir.

Yüklemsel fonksiyonlar ve niceleyicilerin kullanımı ile oluşan yüklemsel önermeler birer değişken olarak alınıp, yeni mantıksal formüller üretilebilir. Yüklemler mantığının konusunu oluşturan bu formüllere *yüklemsel formüller* denir. Yüklemsel kalkülüsün başlıca niteliği, genellemeler içeren akıl yürütmeleri temsil etmek için tasarlanmış bir formel dil olmasıdır. Aristo, niceliklere ilişkin bir formel mantık geliştirdiyse de, bunları birtakım bağıntılarla veya karmaşık yüklemsel formüllerle kombine ederek ele alamamıştı. Stoacılar *ve*, *veya*, *eğer*, *değil* eklemlerini ilk kez kullananlardır. Önermeler mantığı daha sonra karmaşık yüklemler içeren mantığa uygulanmıştır. Yüklem kalkülüsünün gelişimi başlıca dört aşamada gerçekleşmiştir **[10]** :

1. Boole' un doğru-yanlış cebirini geliştirmesi.

2. De Morgan' ın, önermeleri geleneksel özne-yüklem çekimi yerine, yüklemsel bağıntılar olarak ele alması.

3. Peirce ve Frege' in nicelik ve değişken kavramlarını biçimselleştirmeleri.

4. Frege' in, geleneksel nicelik terimleri semantiği yerine, örneğin, "her insan fanidir" tümcesinin öznesini ("her insan"), birinci düzeyden "fanidir" yüklemini kontrol eden bir ikinci düzey yüklem olarak ele alması.

Frege ve Peirce, niceleyicileri tek tek ele aldıkları gibi bunlar arasındaki bağıntı ve fonksiyonları da incelemişlerdir. Whitehead ve Russell bu konuları daha da ileri götürerek, birinci mertebe ve daha yüksek mertebeden yüklem kalkülüsleri arasındaki ayırımı ortaya koymuşlardır.

2.4 KAVRAM, TERİM, TANIM

Kavram, bir objenin zihindeki tasarımıdır. *Terim*, bir kavramı dile getiren bir sözcüktür. *Tanım*, bir kavrama ilişkin özelliklerin, dilsel olarak belirtilmesidir. Kavrama karşılık gelen terime A, kavramın özelliklerine B dersek, A' nın tanımı, A' nın özne, B' nin yüklem konumunda olduğu,

"A, B' dir"

biçiminde bir önerme tümcesi ile yapılır. Bu durumda A' ya *tanımlanan*, B' ye *tanımlayan* denir. Fakat A' nın tüm özelliklerini dilsel olarak ortaya koyabilmek, genelde mümkün olmaz. En kusursuz tanım, kavrama ilişkin terimin kendi kendisini tanımlayan konumunda bulunduğu,

"A, A' dır"

biçiminde yapılan tanımdır. Fakat bu türden bir tanım, besbelli ki, kavramın ne anlama geldiğini ortaya koymuş olmaz; sadece onu bilenlere anımsatmış olur. Betimleyici (ve fakat kusursuz) bir tanım, ancak önceden belirlenmiş bir özellikler evreninde yapılabilir. Aristo' ya göre terimin kendisi, ilgili olduğu kavramı (hem de en yetkin bir biçimde) zaten tanımlamaktadır; "terim, kavramın tek bir sözcükle yapılan tanımıdır". Fakat, önermeler terimler ile oluşturulur; tanımlar önermeler kurularak yapılır ve eğer terimler de bir çeşit tanım ise, "kavramlar mı önermeleri oluşturur, yoksa önermeler mi kavramları oluşturur ?" sorusu ortaya çıkar. Bu paradoksal durum, felsefecileri uğraştırmıştır. Neopozitivistler "düşünmenin en küçük birimi önermeler değil kavramlardır" **[8]** görüşünü savunurlar. Sentaks bakımından, "önermeler kavramlardan değil terimlerden oluşur". Epistemolojistler' e göre "kavram" kavramının tam bir tanımı verilemez. Mantıkçılar, kavramı "tanımsız terim" olarak kabul ederler; onlara göre kavramlar önerme değillerdir ve bu nedenle doğrulukları ve ya yanlışlıkları söz konusu değildir.

Kavramlara, çeşitli bakış açılarıyla, soyut-somut, tümel-tikel, olumlu-olumsuz, özlük-ilinti, genel-tekil gibi nitelendirmeler yapılır **[7,8]**. *Somut kavram*, duyusal ya da düşünsel tekil bir objeyi; *soyut kavram* ise objelerin tek tek kendilerini değil niteliklerini konu eder. *Tümel kavram*, bir önermede özne durumunda yer alarak bir objeler sınıfının tüm elemanlarını; *tikel kavram* ise yine özne durumunda fakat sınıfın boş olmayan bir kısmını ifade eder. *Kollektif kavramlar*, farklı sınıfların elemanları olan tekillerin belli bir amaç için bir araya getirilmesi ile oluşturulmuş kavramlardır. Kollektif kavramı oluşturan tekillerin, "kollektif amaç" doğrultusunda bir rol almasını anlamlandıran kavramlara *distribütif kavramlar* denir. *Açık kavram*, sırf duyusal olarak değil fakat düşünsel olarak da, ilişkin olduğu objeyi başka objelerden ayırmaya imkan veren kavramdır. *Seçik kavram* ise kavrama ilişkin özellikleri ayırdetmeye imkan verir. Her seçik kavram açıktır; açık kavramlar seçik olmayabilir. Hem açık hem seçik kavramlara *apaçık kavramlar* denir. *Olumlu* *kavram*, ilişkin olduğu objede bir özelliğin varlığını; *olumsuz kavram* ise herhangi bir özelliğin olmayışını bildirir. *Özlük kavramları*, bir önerme içinde özne durumundaki kavrama göre yüklem durumunda olan ve özneyi de içeren kavramlardır. *İlinti kavramları*, yine bir önermede yüklem durumunda fakat özneyi içine almayan, sadece onunla *ilintisi* olan kavramlardır.

Kavramlara yapılan tüm bu nitelendirmeler, ontoloji, epistemoloji, metodoloji, sentaks gibi disiplinlerin konusudur. Mantık açısından, kavramlarda tekillik-genellik nitelendirmeleri önem taşır. *Tekil kavramlar*, somut ve tek olarak tasarlanan objelerin, "teklik" olarak soyutlanmasıyla oluşurlar. "Özdeşlik ilkesi" gereği tekil kavramlara karşılık gelen objeler kendi kendileriyle özdeş ve "çelişmezlik ilkesi" gereğince de diğerlerinden farklıdırlar. *Genel kavramlar* ise tekil kavramlardaki ortak özellikler dikkate alınarak oluşturulur. Genel kavramlar arasında da ortak özellikler "soyutlanarak" yeni (ve daha genel) kavramlara ulaşılır. Bu düşünce süreci olabildiğince genişletilebilir. Böylece herhangi bir genel kavram, daha üst bir genel kavramın tekili gibi durur.

Cins, ortak özelliklere sahip genel kavramları içeren bir genel kavramdır. *Tür*, cinsin içeriğinde olan, fakat bir kısım özellikleri bakımından cinse kısmen özdeş, bir kısım özellikleri bakımından da ondan farklı olan bir genel kavramdır. Herhangi bir cins ile onun içeriğindeki bir türü ayıran özelliklere *ayırım* denir. Aynı cins içindeki türleri birbirlerinden ayıran özelliklere *türsel ayırım* denir. Bir türdeki cinslere bazen ait, bazen ait olmayan özelliklere de *ilinti* denilmektedir. Genel kavramlara ilişkin olan bu cins, tür, ayırım, türsel ayırım ve ilinti kavramlarına, felsefede *beş tümel* denir. Bir cinsin türleri, bu cinsin tür konumunda olduğu cinslerin de türleridir. Cinste olan bir özellik tüm türlerde de vardır (*Hep* kuralı), türde olmayan bir özellik cinste de yoktur (*Hiç* kuralı).

Bir *kavramın kaplamı*, bu kavramın cins konumunda olduğu tüm türlerdir. Bir *kavramın içlemi* ise bu kavramı oluşturan özelliklerdir [7].

Örnek olarak, sayı kavramı (ortaya çıkışından bu yana), çeşitli revizyonlara uğrayarak matematikçilerin zihninde günümüzdeki şeklini almış ve "sayı" sözcüğü ile terimleşmiştir. Sayının tanımı "sayı" sözcüğünün içinde vardır. Matematikçiler bu sözcüğü duyduklarında, "sayı kavramı" zihinlerinde oluşur. Fakat bunu tanımlamak, yani sayının ne anlama geldiğini tüm açıklığıyla dilsel olarak ortaya koymak, "sayı" terimini özne ve sayıya ilişkin tüm özellikleri yüklem olarak alan bir önerme tümcesi kurmayı gerektirir. Ancak, sayının tüm özelliklerini dilsel olarak tüketmek çok zor belki de imkansızdır. Anlamları iyi bilinen, fakat betimleyici bir tanımını vermenin zor (ya da gereksiz) olduğu böyle terimler için, herhangi bir matematiksel disiplin içinde, *tanımsız terim* **[8]** nitelendirmesi yapılır. Sayı kavramı; sayma sayı, doğal sayı, tam sayı, rasyonel sayı, irrasyonel sayı, cebirsel sayı, transandant sayı, reel sayı, kompleks sayı, kardinal sayı vs. gibi alt kavramların ortak özellikleri dikkate alınarak oluşturulmuş ve dolayısı ile bunlara göre genel olan bir kavramdır. Bu sayılanlar sayı cinsinin türleridir. Öte yandan sayı kavramı "matematiksel" kavramına göre tür konumundadır. Sayı kavramına göre tür konumunda olan "doğal sayı" kavramı "beş" kavramına göre cinstir. "Bir", "beş" vs. kavramları doğal sayı türleridir. Demek ki cins-tür ve tekillik-genellik ilişkileri sabit olmayıp, bir tekil kavram başka kavramlara göre genel; bir genel kavram başka kavramlara göre tekil; bir cins başka bir kavramın türü ve bir tür de başka bir kavramın cinsi olabilir. Fakat bir cinsin türlerinin, bu cinsi tür kabul eden cinslerin de türleri olduğunu kaydetmiştik.

Tüm sayı türleri sayı kavramının kaplamındadırlar; sayı olmanın tüm özellikleri de sayı kavramının içlemindedirler.

BİR MODEL : En az bir özelliği ortak olan kavramların, bu ortak özelliği (ya da özellikleri) taşıyan bir genel kavram oluşturduklarını kaydetmiştik. Bu yeni genel kavram diğerlerinin cinsi, diğerleri de bu cinsin türleri oluyordu. Şimdi yine tüm özellikler evrenine E dersek, P(E) yi, (şimdi obje durumunda olan) tüm tekil kavramların kümesel temsilcilerinin ailesi olarak ele alabiliriz.

P(E)' nin bir $\mathcal{A}$ ailesi,

1. $\cap\mathcal{A} \neq \varnothing$

2. $A \in P(E), \cap\mathcal{A} \subset A \Rightarrow A \in \mathcal{A}$

koşullarını taşırsa, $\mathcal{A}$' yı bir genel kavramın kümesel temsilcisi olarak tanımlayalım. Aynı zamanda $\mathcal{A}$ bir cins, $\mathcal{A}$' nın elemanları da bu cinsin türleri olur. Şimdi yukarıda değindiğimiz kavramları, küme teorisinin kavram ve notasyonları ile açıklayabiliriz:

A, B $\in \mathcal{A}$ ise AΔB, A' nın B' den (ve B' nin de A' dan) türsel ayırımıdır. A ile B, A$\cap$B bakımından kısmen özdeş, AΔB bakımından da kısmen farklıdırlar. A' nın $\mathcal{A}$' dan ayırımı,

$$A \setminus (\cap \mathcal{A})$$

olur. $\mathcal{A}$' nın kaplamını, içerdiği tüm kavramlar oluşturur. $\cap\mathcal{A}$; A' nın içlemidir. 1 ve 2 koşullarından hareketle herhangi bir $\mathcal{A}$ kavramını

$$\mathcal{A} = \{ A \mid \exists B \in P(E) \mid B \subset A\} \;\; ; \;\; (B \neq \varnothing)$$

şeklinde düşünebiliriz. Burada geçen, $\mathcal{A}$' nın tüm elemanlarının kapsadığı, P(E)' ye ait, boş olmayan B kümesi (ki o da bir kavramın temsilcisidir) bir bakıma $\mathcal{A}$ kavramını karakterize eder. Buna, (Aristo' nun "töz"leri ya da Eflatun' un "idea"larına benzer bir düşünce ile) $\mathcal{A}$' nın *ideali* **[18]** diyelim. Böylece bir $\mathcal{A}$ kavramının ideali, (eğer B = $\cap\mathcal{A}$ ise) bir kavramın içleminden ibaret olabileceği gibi, (B $\subset$ $\cap\mathcal{A}$ ise) içlemin bir öz alt kümesi de olabilir. Bu son durumda, şimdi tanımladığımız anlamda ideal ile Eflatun' un "idea"ları birbirini çağrıştırmaktadır. Yani ikisi de mutlak bir E evreninde, P(E)' de tam olarak algılamamızın mümkün olmadığı ancak hayalini belki tutturabileceğimiz meçhul bir öz.

2.5 BENZERLİK, EŞİTLİK, ÖZDEŞLİK, DENKLİK

Herhangi iki objenin en az iki ortak özelliği varsa bu iki objeye (ortak oldukları özellik ya da özellikler bakımından) *benzer* denir. Ortak özellikler arttıkça, "benzerlik miktarı" **[14]** da artar. Ayrı iki objenin tüm özellikleri ortak olamaz; en azından zihindeki tasarımları bakımından farklı olacaklardır . . . Ayrı iki objenin tüm özelliklerinin ortak olması, ancak önceden belirlenmiş bir "özellikler evreni" kapsamında mümkün olabilir. Böyle bir belirli özellikler evrenine göre tüm özellikleri ortak olan iki objeye *eşit* denir. *Özdeşlik* ise tek bir obje için söz konusudur. Mantığın *özdeşlik ilkesi*ne göre; "her şey kendisiyle özdeştir". "Özdeş olma" tüm evrenlerde eşit olma anlamına gelir. Sonuç olarak, özdeş iki obje (aynı obje) aynı zamanda eşittir; eşit iki obje aynı zamanda benzerdir; fakat benzer iki obje eşit olmayabilir ve eşit iki obje özdeş olmayabilir. Özdeşliği "≡" , eşitliği "=" , benzerliği "~" simgeleri ile gösterirsek, herhangi iki A,B objeleri için,

$$(A \equiv B \Rightarrow A = B) \wedge (A = B \Rightarrow A \sim B)$$

bir totoloji olur. Mantığın *çelişmezlik ilkesi*; "bir şey başka bir şeye özdeş olamaz" şeklinde ifade edilir. *Üçüncü halin imkansızlığı ilkesi* ise; "herhangi bir şey ile o şey olmayanlardan başka bir şey yoktur" **[20]** anlamındadır. İki objenin farklı olması en az bir ortak özelliklerinin olmaması yani bu iki objenin eşit olmaması demektir. Şimdi tüm özellikler evrenine (nasıl bir şey ise !?...) E dersek ve objeleri de sahip oldukları özelliklerle temsil edersek, P(E)' nin her elemanını bir obje olarak ele alabiliriz. Buna göre mantık ilkeleri aşağıdaki gibi simgeleştirilebilir **[7]**. $A,B,C \in P(E)$ ise,

1. $A \equiv A$
2. $A \neq B \Rightarrow A \not\equiv B$
3. $A \equiv B \vee A \not\equiv B$, $(\{A\} \cup \{B \mid A \not\equiv B\} = P(E) \wedge \{A\} \cap \{B \mid A \not\equiv B\} = \varnothing)$

Herhangi bir evrendeki, herhangi iki objenin *denkliği*, bu evrende, *denklik bağıntısı* denilen ve yansıyan, simetrik, geçişken bir ikili bağıntının oluşturulması halinde söz konusudur. Böyle bir bağıntı, objeler evrenini *denklik sınıfları*na **[17]** ayırır, öyle ki bu sınıflar ikişer ikişer ayrıktır ve birleşimleri tüm evrendir. Herhangi bir sınıfın elemanlarına (verilen denklik bağıntısına göre) birbirlerine *denk* denir. Herhangi iki a,b objesinin verilen bir α denklik bağıntısına göre denk olması $(a,b) \in \alpha$ ve ya $a\alpha b$ şeklinde gösterilir. Buna göre, her α denklik bağıntısı ve evrendeki her a,b,c objesi için,

1. $a\,\alpha\,a$
2. $a\,\alpha\,b \Rightarrow b\,\alpha\,a$
3. $a\,\alpha\,b, b\,\alpha\,c \Rightarrow a\,\alpha\,c$

özellikleri vardır **[17]**. *Özdeş olma*nın bu üç özelliği taşıdığı ve o halde bir denklik bağıntısı olduğu açıktır. *Özdeşlik bağıntısı* simgesel olarak,

$$\{(a,a) \mid \ \in E\}$$

şeklinde yazılır. Buna karşılık gelen her bir denklik sınıfı bir tek objeden oluşur. Tüm denklik sınıflarının ailesi tam olarak, evrenin tek elemanlı alt kümelerinin kümesidir:

$$\{ \{a\} \mid a \in E \}$$

Eşitlik bağıntısı da aşağıdaki *eşitlik aksiyomları* **[13]** gereğince bir denklik bağıntısıdır.

1. $a = a$
2. $a = b \Rightarrow b = a$
3. $a = b\,,\, b = c \Rightarrow a = c$

Fakat eşitlik bağıntıları her zaman karşımıza bir özdeşlik bağıntısı olarak çıkmayabilir. Herhangi bir disiplinde, iki objenin eşit oluşu, yukarıda bildiğimiz gibi, önceden kararlaştırılmış bir özellikler evrenine yani bir takım kıstaslara göre söz konusudur, öyle ki *eşitlik aksiyomları* sağlanmalıdır. Örnek olarak, "üçgenlerin eşitliği", elemanların aynı ölçümlere sahip olması; "kümelerin eşitliği", aynı elemanlara sahip olmak; "önermelerin eşitliği", aynı doğruluk değerine sahip olmak gibi tanımlarla verilirler. Aşağıdaki zinciri oluşturan simgelerin her biri aynı kümeyi temsil etmelerine ve böylece birbirlerine eşit olmalarına karşın özdeş değillerdir:

$$\{-1,1\} = \{ x \mid x^2 = 1 \} = \{ x \mid |x| = 1 \} = \{-1\} \cup \{1\} = \ldots$$

yukarıdaki kümelerin her biri "-1 ve 1 elemanlarından oluşan küme" kavramı kaplamındadırlar. Öte yandan her biri "içlem" bakımından farklıdır; denklem, mutlak değer, birleşim gibi farklı kavramları içermektedirler.

2.6 DOĞRULUK KAVRAMI

Doğruluk kavramı, felsefeciler arasında; "her şey doğrudur" dan "hiçbir şey doğru değildir" e kadar türlü dikotomilere yol açan tartışmalara konu olmuştur. Kuşkusuz ne olduğu tam olarak ortaya konulmayan ve o halde meçhul olan bir kavrama dayanılarak ortaya konacak değer yargılarının kargaşaya yol açması kaçınılmazdır. Genel olarak söz konusu olan "bilginin doğruluğu" dur. *Bilgi* için, "öznelerin nesnelerle olan ilişkilerinden kazanımlarıdır" denir, bilginin doğruluğu ise bu kazanımların yani bilginin nesne ile uygunluk derecesidir. Uygunluk arttıkça doğruluk da artar ve eğer elde edilebilirse, tam uygunluk *kesinlik*tir. Rasyonalistlere göre, nesne hakkındaki bilgi (hiç olmazsa bir kısmı), nesne ele alınmadan önce de *a priori* olarak vardır. Fakat empiristler, bilginin ancak nesneyle ilişki kurulduktan sonra duyusal olarak elde edilebileceğini savunurlar. İlk çağın rasyonalist felsefecileri, doğruluğa rasyonel yoldan ulaşılabileceği, yani kavramların objelerle uygunluk içinde olmalarının sağlanabileceği inancındaydılar.

Ontolojide, mantığın üç temel ilkesi olan *özdeşlik*, *çelişmezlik* ve *üçüncü halin imkansızlığı* ilkelerinin yanında, "varolan her şey sebebin sonucudur" şeklinde ifade edilen *yeterli sebep ilkesi*nin de ilke olarak yer alması ile, "madem ki her şeyin bir sebebi vardır, o halde hiç hata olmadı ve olmayacak yani her şey doğrudur!" anlayışı ortaya çıkmıştır. Bu anlayışın başlıca savunucularından Leibniz' e göre "eğer doğruluk, düşünme ile nesnenin uygunluğu ise, her ifade doğru olmak yani gerçeklik içinde nedenini bulmak zorundadır".

Buna karşın, Locke, Hume, Kant gibi yeniçağ felsefecileri "aklın kişiye (ya da özneye) özgü olduğunu ve bu nedenle de aklın ortaya koyduğu kavramların bunlara ilişkin varlık ya da fenomenlerle tam bir uygunluk içinde olamayacağını" savunmuşlardır. Buna göre ontolojik bir doğruluğa ulaşılamaz. Mantık ilkeleri sadece düşüncelerimizi düzenler; ontolojinin "her şeyin tam manası ile açıklanabilir bir sebebi olduğu" kuralını ilke edinmek mantık dışıdır. Çünkü ne denli yaklaşılırsa yaklaşılsın ilk nedene ulaşmak mümkün değildir. Tıpkı "bir sayıya (sağdan) ne kadar yaklaşılırsa yaklaşılsın, sıfırdan büyük en küçük sayıya ulaşmak mümkün değildir, o halde bir gerçel sayıdan büyük en küçük sayı yoktur" dediğimiz gibi "her şeyin bir ilk nedeni vardır" değil "ilk neden yoktur" demek gerekir. O halde bizim yapabileceğimiz, gerçeğe olabildiğince yaklaşabilmek için, bilme imkanlarımızı arttırmaktır. Şu halde felsefe ontoloji yerine epistemolojiyi temel almalıdır.

Görüldüğü gibi felsefe, "doğru bir doğruluk kavramı!" ortaya koyamamıştır. Mantık ise doğruluğun ne olduğu ile pek ilgilenmez; ancak bu kavramı sürekli kullanır. Üstelik mantığın, önermelerin olgusal doğruluklarını saptamaya gücü de yetmez. Hele, "Gödel, Hilbert' ten daha akıllıydı" gibi tümcelerin doğru olup olmadıklarına tüm bilimler seferber edilse bile, hiç kimsenin itiraz edemeyeceği bir karar verilemez. Ancak, mantığın, evrenin herhangi bir galaksisinde ya da herhangi bir boyutunda bulunan ve düşünebilen hiçbir varlığının aksini iddia edemeyeceği kadar yerindeliğinden emin olunan, apaçık (besbelli, aşikar...) üç temel doğrusu vardır **[21]**:

1. P doğruysa doğrudur
2. P hem doğru hem doğru değil olamaz
3. P ya doğrudur ya da doğru değildir.

Mantık sadece bu üç temel ilkeden hareketle *mantıksal* denilen, yani doğruluğu herhangi bir empirik denetlemeye bağlı olmayan, analitik (a priori) türden önermelerin doğruluklarını denetleyebilir. Temel ilkelerle çelişmeyen her önerme doğrudur.

Doğruluk kavramını semantik olarak ve çeşitli bağlamları ile inceleyen ve bu kavramın doyurucu bir tanımını veren Tarski' nin bu konudaki görüşlerini kaydetmek gerekiyor **[22]**: Tarski' nin amacı, doğruluk sözcüğünün alışılmış anlamını bir yana bırakıp ona yeni bir anlam vermek değil, aksine bu sözcüğün gerçek anlamını ortaya çıkaracak şekilde formel bir tanımlamasını yapmaktı. Bu tanım, hem formel olarak yetkin hem de onu kullanacak bilim adamları için bir materyal olarak yeterli olmalıydı. Kaplamsal olarak, çeşitli fikirler, inançlar, fiziksel olgular, ifadeler, cümleler v.s. ye ilişkin olarak kullanıla gelen doğruluk kavramı, Tarski' nin makalesinde yalnızca belirli bir dilin önermelerine ilişkin olarak ele alınmıştır. İçlemsel olarak, *doğru* sözcüğü, günlük dildeki bir çok sözcük gibi, tek anlamlı değildir. Felsefede de çeşitli anlamlarda kullanılagelmiştir. Doğru sözcüğünün anlamı, klasik Aristo mantığındaki, iyi bilinen aşağıdaki sözcüklerde kastedilen şekliyle ele alınacaktır: "o, o değildir" demek veya "o değil olan odur" demek yanlıştır; "o, odur" demek veya "o değil olan o değildir" demek doğrudur. Doğru' nun buradaki anlamı şu ifadede de aynıdır:

"Bir önermenin doğruluğu onun realiteyi yansıtmasıdır"

Şimdi, objelere adlar verdiğimiz gibi, önermeleri de, olguların varoluş durumlarının adları olarak ele alacak olursak, bir önermenin doğru oluşunu;

"Bir önerme eğer olguların bir varoluş durumunu adlandırıyorsa doğrudur"

şeklinde ifade edebiliriz. Fakat bu tanımlama girişimlerinin hiçbiri yeteri kadar tam ve açık değildir ve çeşitli yanlış anlamalara neden olabilirler. Şimdi, bir önerme hakkında herhangi bir şey (örnek olarak doğru olup olmadığını) söylemek istiyorsak, kullanacağımız ifadede önermesel cümlenin ismi geçmelidir. Cümlenin ismi, önermenin ifade etmek istediği olgudan bağımsızdır. Bir önermeyi isimlendirirken, onun kendi ifadesini tırnak içine alıp bu önermenin ismi olarak kullanabileceğimiz gibi, bu cümleyi kasteden başka isimler de kullanabiliriz. Şimdi, bir P önermesi ele alalım ve bunun ismi de X olsun. Temel aldığımız klasik doğruluk kavramına göre, "a önermesi doğrudur" ifadesi ile, P birbirine denk olacaktır. Buna göre,

"X cümlesi yalnız ve yalnız P ise doğrudur"..................................(T)

denkliğini elde ederiz. Buna (T) formundan bir denklik diyelim. Yapmak istediğimiz doğruluk tanımının, bir materyal olarak yeterli olmasından, kastedilen anlamın, (T) formundaki tüm denkliklerdeki anlamı ile uyuşmasını anlayacağız.

Semantik, bir dilin ifadeleri ile, bu ifadelerin işaret ettiği objeler arasındaki bazı bağıntılarla ilgilenir. Örnek olarak, "Türkler' in ulu önderi" ifadesi Atatürk' ü işaret eder. "Atatürk" , "X Türkler' in ulu önderidir" ifadesini sağlar ve "X = Türkler' in ulu önderi" eşitliği Atatürk' ü tanımlar. Bu ifadelerdeki, işaret etmek, sağlamak, tanımlamak gibi sözcükler, ifadelerle objeler arasındaki bağıntıları oluşturan kavramlara ilişkin terimlerdir. Bu nedenle bunlara *semantik terimler* denir.

Bunlar gibi, doğruluk kavramı da, her ne kadar objelerle ifadeler arasında bir ilişkiye doğrudan doğruya işaret etmese de, (T) formundaki ifadelerde olduğu gibi, muhtemelen, cümlelerle tanımlanmış olgulara işaret eder. Ayrıca (T) formundaki bir ifade, X adı verilen bir cümle için sağlanıyorsa, bu cümle doğrudur diyebileceğimizden, doğruluk tanımını, bir semantik kavram olan "sağlamak" kavramından hareketle yapabiliriz. Bu nedenle, *doğruluk* bir semantik terim olarak düşünülecektir. Semantik kavramların tam bir tanımları verilmeden, dilde bir çok yanlış anlaşılma ve paradokslarla karşılaşılabilir.

Antinomilerin ortaya çıkmaması için, dilin semantik kavramlarının dikkatle tanımlanması ve bu dilin sözlüğünün ve formel yapısının oluşturulması hassas bir problemdir. Tam belirlenmiş bir dil diye, aşağıdaki genel şartları sağlayan dillere diyeceğiz **[22]**:

1. Anlamlı sözcükler içerir ve bunlar tek anlamlıdır.

2. İfadeler tek anlamlıdır.

3. Tanımlarda kullanılan tüm tanımsız terimler önceden belirlenmiştir.

4. Yeni terimler tanımlamak için kullanılan tanımlama kuralları belirtilmiştir.

5. Önermeleri, diğer ifadelerden ayıran kriterler ve önerme olma koşulları ortaya konulmuştur.

6. Aksiyomlar belirlenmiştir.

7. Önermelerden, yeni önermeler elde etmeyi sağlayan çıkarım (ispat) kuralları ortaya konulmuştur.

Biçimselleştirilmiş bir dil ise, yapısı bir takım özel ifade formları ile belirlenmiş dildir. Doğruluğu tanımlama problemi, sadece yapısı tam olarak belirlenmiş dillerde çözülebilir ve tam bir anlam kazanabilir. Diğer dillerde problemin anlamı tam belirli değildir ve ancak yaklaşık olarak çözülebilir.

Şimdi, *Yalancı antinomisi* olarak bilinen aşağıdaki dekleratif cümleyi ele alalım:

"Bu sayfanın 17. satırındaki cümle doğru değildir"

Bu cümlenin ismi S olsun. "Doğru" teriminin yeterli kullanımına ilişkin olarak daha önce sözünü ettiğimiz (T) formuna, bu cümleyi uygulayacak olursak,

1. " "S" yalnız ve yalnız bu sayfanın 17. satırındaki cümle doğru değilse doğrudur" elde ederiz. Aynı zamanda,

2. " "S" bu sayfanın 17. satırındaki cümle ile idantiktir". O halde, buradan Leibniz' in yerine koyma kuralı gereğince,

3. " "S" yalnız ve yalnız "S" doğru değilse doğrudur" elde ederiz. Bu apaçık bir çelişkidir. Bu çelişkiyi hafife almamak ve ona yol açan sebepleri ortadan kaldırmak zorundayız.

Şunu da vurgulamak gerekir ki, antinomiler modern dedüktif bilimlerin temellerinin oluşturulmasında önemli bir rol oynamıştır. Örnek olarak, küme teorisinin antinomileri özellikle Russell antinomisi, mantık ve matematiğin uyumlu bir formalizasyonunda başlangıç noktasını oluşturmuştu. Yalancı antinomisi ve diğer semantik antinomiler de teorik semantiğin inşasında önemli rol oynar.

Semantik olarak kapalı bir dil diye, aşağıdaki koşulları sağlayan dillere denir **[22]** :

1. İçinde bir antinomi oluşmuşsa, bu antinominin ifadesiyle birlikte ismini de içerir.

2. Önermelere atfedilen "doğru" gibi semantik terimleri içerir.

3. "Doğru" teriminin yeterli kullanımını belirleyen tüm cümleler dil içinde ileri sürülebilir.

Yalancı antinomisine yol açan sebepler arasında aşağıdaki varsayımları gösterebiliriz:

1. Kullanılan dil semantik olarak kapalıdır.
2. Kullanılan dilde mantığın (adi) kanunları geçerlidir.
3. **2.** gibi ifadeler dil içinde öne sürülebilir ve formüle edilebilir.

Ancak 3. varsayım olmasaydı da yalancı antinomisi oluşturulabilirdi **[Ek]**. O halde bu varsayım zorunlu değildir. Şimdi, geriye kalan 1. ve 2. varsayımların ikisini de sağlayan bir dil tutarsız olduğu sürece onlardan en az birini dışlamalıyız. Mantığın temel kanunlarını, yani 2' yi dışlamak büyük kargaşa ve sıkıntıya yol açar. O halde 1 varsayımını dışlamayı düşünelim; yani kullanmamız gereken dil semantik olarak kapalı olmasın. Bu kısıtlama, kuşkusuz kimileri için kabul edilemez görülebilir; fakat bunun, bilimin ilgi veya ihtiyaçlarını etkilemeyeceğini düşünüyoruz. Bilimsel araştırmalarda kullanılan dil semantik olarak kapalı olmamalıdır. Bu, özellikle semantik kavramlara ilişkin araştırmalar bir bilimin konu alanına girmiyorsa aşikardır. Bununla beraber, semantik kavramlar içeren bilimsel araştırmalarda bile semantik olarak kapalı dillerin yol açtığı sorunların üstesinden gelinebileceğini biraz sonra göreceğiz.

Semantik olarak kapalı dilleri kullanmamaya karar verdiğimize göre, doğruluk tanımı problemini (daha genel olarak, semantik alandaki herhangi bir problemi) incelemek için iki farklı dile ihtiyacımız olacak. Birincisi, tüm incelemelerimizin esas konusu olan "hakkında konuşulmuş olan" dildir ve aradığımız doğru tanımı bu dilin cümlelerine uygulanacaktır. Buna *obje-dil* denir. İkincisi ise, içinde ilk dil hakkında konuştuğumuz ve ilk dilin cümleleri için uygulayacağımız doğruluk tanımını oluşturmakta kullanmak istediğimiz dildir. Buna da *meta-dil* **[22]** denir.

Hemen belirtelim ki, "obje-dil" ve "meta-dil" terimleri görecelidir. Örnek olarak, eğer doğru kavramını orijinal obje-dilimizin cümlelerine değil de, meta-dilin cümlelerine uygulamak istiyorsak, bu meta-dil obje-dil konumuna gelir ve tanımı yapabilmek için öncekinden daha yüksek düzeyde yeni bir meta-dil oluşturmamız gerekir. Böylece giderek bir dil hiyerarşisi oluşabilir.

Meta-dilin sözlüğü, doğru tanımının materyal olarak yeterli olma şartlarını yerine getirebilecek kapasitede olmalıdır. Tanımın kendisi ve tanımın kapsadığı tüm çift gerektirmeler meta-dil ile formüle edilecektir. Diğer yandan;

X yalnız ve yalnız P ise doğrudur..(T)

ifadesindeki "P" sembolü obje-dilin herhangi bir önermesi olarak yer almaktadır. Buna göre, obje-dilde geçen her önerme meta-dilde de geçer; başka bir deyişle, meta-dil, obje-dili kısmen içermelidir. X sembolü ise, P önermesinin ismidir. O halde meta-dil, obje-dilin her önermesine bir isim verebilecek kadar zengin olmalıdır. Ayrıca meta-dil, "ancak ve ancak" gibi mantıksal terimleri de içermelidir. Buna karşın meta-dil, bu sözü edilenler dışında (obje-dildeki gibi) herhangi bir tanımsız terim içermemelidir. Özellikle semantik terimlerin, meta-dile sadece tanım ile girmeleri arzu edilir. Çünkü, eğer bu sağlanırsa, doğruluk veya herhangi başka bir semantik kavramın tanımı, sezgisel olarak bir tanımdan beklediğimizi yerine getirmiş olacaktır. Yani terimin açık ve kesin olarak tanımlanmış olmasının anlamını ortaya koymuş olacaktır. Ancak böylece semantik kavramları bir çelişkiye düşmeden kullanabilmeyi bir şekilde garanti etmiş olacağız. Ayrıca, obje-dil ve meta-dilin formel yapılarının hali hazırda bilinen diğer biçimselleştirilmiş dillerin yapılarına benzer olduğunu varsayacağız. Özellikle alışılmış formel kuralların meta-dilde korunduğunu kabul edeceğiz.

Bu aşamada, doğru tanımının uyması gereken materyal olarak yeterlilik şartları ve bu tanımın inşa edilebileceği dilin formel yapısı ortaya konulmuş bulunmaktadır. O halde artık problem sadece dedüktif bir tanımlama problemi olarak karşımızdadır. Doğruluğu tanımlama probleminin pozitif bir çözümü, meta-dilin, mantıksal içerik olarak obje-dilden *özde zengin* olmasını gerektirir. Bu "özde zenginlik" kavramının tam ve genel bir tanımını vermek zordur. Eğer Tipler Teorisi mantığı çerçevesinde kalacak olursak, meta-dilin obje-dilden "özde zengin" olması, onun obje-dile göre daha yüksek lojik tipten değişkenler içermesidir diyebiliriz. Eğer "özde zenginlik" şartı sağlanmazsa, bu, meta-dilin obje-dil içine bir tercümesinin mümkün olduğunu, yani meta-dilin herhangi bir teriminin obje-dilin iyi tanımlanmış bir terimi ile ve herhangi bir önermesinin de obje-dil içinde bir önerme ile eşlenecek şekilde bir korelasyonun oluşturulabileceğini gösterir. Bunun sonucu olarak da, meta-dil içinde doğrunun doyurucu bir tanımının varolduğu varsayımı, bu dil içinde yalancı antinomisinin de yeniden formüle edilebilmesine yol açar. Bu da bizi bu varsayımdan da vazgeçmeye zorlar. Meta-dilin mantıksal olmayan kısmında, obje-dilden daha kapsamlı oluşu, obje-dile tercüme imkanını etkilemez. Örnek olarak obje-dildeki ifadelerin isimlerinin büyük bir kısmı obje-dilde ortaya çıkmadığı halde meta-dilde çıkar; fakat buna rağmen bu isimleri obje-dil cinsinden tercüme etmek mümkündür.

Sonuç olarak "özde zenginlik" koşulunun, meta-dilde tatmin edici bir doğru tanımı yapabilmek için gerekli olduğunu görüyoruz. Eğer bu şartı sağlamayan bir meta-dilde doğruluk teorisi geliştirmek istiyorsak, bunu yukarıda sözünü ettiğimiz kavramların yardımı olmaksızın yapmak durumundayız. Bu durumda da, "doğru" terimini ya da başka bazı semantik kavramlara dair terimleri meta-dilde tanımsız terim olarak listelememiz ve doğru kavramının temel özelliklerini bir dizi aksiyomla ifade etmemiz gerekecektir. Artık böyle bir aksiyomatik prosedür içinde, zorunlu olarak yanlış bir şey olmayacak ve çeşitli amaçlar için kullanışlılık sağlanabilecektir. Ancak bununla beraber, bu prosedürden kaçınmak gerekebilir. Çünkü meta-dilin "özde zenginlik" şartı sadece gerekli değil, aynı zamanda doğrunun tatmin edici bir tanımı için yeterlidir de. Yani eğer meta-dil bu şartı sağlarsa, doğru kavramı meta-dil içinde tanımlanabilir. Şimdi bunun nasıl yapılabileceğini ana hatlarıyla göstereceğiz.

Doğrunun bir tanımı, başka bir semantik kavram olan "sağlamak" kavramından yararlanarak çok basit bir şekilde elde edilebilir. "Sağlamak", herhangi keyfi objeler ile, cümlesel fonksiyonlar (açık önermeler) arasında bir bağıntıdır. Cümlesel fonksiyonların formel yapısı önermelerinki gibidir. Ancak bunlar, "X, Y' den büyüktür" "X başkenttir" cümlesel fonksiyonlarında olduğu gibi, X, Y v.s. serbest değişkenlerini içerirler. Biçimselleştirilmiş dillerde, cümlesel fonksiyon kavramını tanımlamak için, "yineleme" denilen yönteme başvurulur. Yani önce en basit cümlesel fonksiyonlar tanımlanır ve bu en basit olanlardan hareketle bileşik cümlesel fonksiyonlar oluşturmayı sağlayacak olan işlemler ortaya koyulur. Böyle bir işlem, örnek olarak, iki basit cümlesel fonksiyonun "veya" ya da "ve" sözcükleriyle birleştirilerek, mantıksal ayırtım veya birletimlerini oluşturmaktan ibaret olabilir. Şu halde bir önerme basitçe, serbest değişken içermeyen bir cümlesel fonksiyon olarak tanımlanabilir.

"Sağlamak" kavramını, "verilen objeler, eğer verilen bir cümlesel fonksiyondaki serbest değişkenler yerine geldiklerinde elde edilen önerme doğru ise verilen cümlesel fonksiyonu sağlarlar" diyerek tanımlamayı deneyebiliriz. Örnek olarak, "kar beyazdır" cümlesi doğru olduğundan "kar", "X beyazdır" cümlesel fonksiyonunu sağlar. Bununla beraber, diğer zorlukları bir yana bu yöntem, bizim için uygun değildir. Çünkü biz "sağlamak" kavramını, doğruyu tanımlamak için kullanmak istiyoruz.

Tatmin edici bir tanım yapabilmek için tekrar, yineleme yöntemine başvurmak zorundayız. Önce objelerin sağladığı en basit cümlesel fonksiyonları ortaya koyarız ve sonra verilen objelerin bir bileşik fonksiyonu sağlama koşullarını ifade ederiz. Örneğin, verilen sayılar eğer "X, Y' den büyüktür" veya "X, Y' ye eşittir" fonksiyonlarından en az birini sağlarsa, "X, Y' den büyük veya X, Y' ye eşit" mantıksal ayırtımını sağlar.

"Sağlamak" kavramının genel tanımını yapabildiysek, bunun otomatikman serbest değişken içermeyen cümlelere de uygulanabileceğini kaydedelim. O halde bir önerme için iki hal mümkündür: Bir cümle ya tüm objeler için sağlanır ya da objelerin tümü tarafından (en az bir obje tarafından) sağlanmaz. Buradan, "bir cümle eğer tüm objeler tarafından sağlanırsa doğrudur, aksi halde yanlıştır" diyerek doğruluğun (ve yanlışlığın) bir tanımına ulaşmış oluruz. Bu tanım formel olarak uygunluğunun yanında, materyal olarak da yeterlidir, yani (T) biçimdeki tüm denklikleri kapsar. Ayrıca materyal olarak yeterli olma şartları, "doğru" teriminin kaplamını da tek türlü olarak belirler.

Modern mantığın gelişmesiyle, matematiksel ispat kavramı son derece basitleşmiştir. Biçimsel bir dizgede, verilen bir önerme, eğer bu dizgenin aksiyomlarından, ayırma ve yerine koyma gibi belli, basit ve tamamen formel sonuç çıkarma kuralları uygulanarak elde edilebiliyorsa bu önermeye *ispatlanabilir* **[21]** denir. Bu nedenle tüm ispatlanabilir cümlelerin doğru olduğunu göstermek için, aksiyom olarak kabul edilen cümlelerin doğru olduğunu ve doğru cümlelere uygulandığında yeni doğru cümleler elde etmeyi sağlayan sonuç çıkarma kurallarını denetlemek yeterlidir. İspatlanabilirlik kavramının tam bir tanımı için, bu kavramın söz konusu edileceği biçimsel dizge içinde basit mantıksal düzenlemeler yapmak yeterlidir. Fakat "doğru" kavramı ile "ispatlanabilir" kavramının uyuşmadığını kaydedelim. Çünkü her ispatlanabilir cümle doğru olduğu halde, ispatlanamayan doğru cümleler de vardır.

Doğruluğun materyal olarak yeterli her tanımı, yukarıda yapmış olduğumuz tanıma zorunlu olarak denk olacaktır. Bu tanımdan hareketle Aristo' nun doğruluk yorumunu karakterize eden *çelişki* ve *üçüncü halin imkansızlığı* kanunlarını, yani çelişik iki cümleden bir ve yalnız birinin doğru olduğunu ispatlayabiliriz.

Doğru kavramı ile *ispatlanabilir* kavramı, basit bir mantık yapısı olan disiplinler dışında, yani kapsamlı matematiksel disiplinlerde, (biçimselleşme sağlanmış olsa bile) ispatlanamayan doğru önermelerin bulunması nedeni ile uyuşmaz kavramlardır. Bu tür disiplinler tutarlı fakat tam değildir; yani çelişik iki cümleden en çok biri ispatlanabilir ve ikisi de ispatlanamayan çelişik cümleler vardır. Böylece, doğruluk teorisi bize, biçimselleştirilmiş matematiksel disiplinlerde tutarlılık ispatları için genel bir yöntem kazandırabilir. Ancak bu sadece, kısmen de olsa obje-dili içermeyen bir meta-dil ile doğruluk tanımını yapabilmemiz halinde mümkündür. Aksi halde, bu yöntemle yapılan bir tutarlılık ispatı sezgiye yer verebilir. Yani bizi ikna edebilir ya da inancımızı güçlendirebilir.

Biçimselleştirilmiş disiplinlerde yeteri kadar kapsamlı bir sistemin tam olmayışı, Gödel' in bir temel teoreminin asıl içeriğini oluşturmaktadır. Doğruluk teorisinden hareketle Gödel' in sonuçlarını elde etmek için doğruluk tanımının, zenginliği sadece obje-dil kadar olan bir meta-dil ile verilemeyeceği gerçeğini ortaya koyabilmek yeterlidir. Fakat bu gerçeği açıklayabilmek için kullanılan akıl yürütme yöntemi, ilk kez Gödel tarafından kullanılan yönteme son derece yakındır. Gödel' in ispatında doğruluk kavramının bir tanımı verilmediği halde, üstü kapalı ve sezgisel olarak kullanıldığını da kaydedelim.

Doğruluk kavramına ilişkin elde edilen sonuçların bir çoğu, uygun değişiklikler yapılarak "sağlamak", "göstermek", "tanımlamak" gibi başka semantik kavramlar için de geçerli olur. Bu semantik kavramların her birinin, semantik olarak kapalı olan bir dilde kullanıldıkları zaman bir çelişkiye yol açacakları gösterilebilir.

Obje-dil ile meta-dil arasındaki ayırım yine zorunludur ve meta-dilin "özde zenginliği", semantik kavramın tatmin edici bir tanımı için gerekli ve yeterlidir.

2.7 DİL, SİNTAKTİK, SEMANTİK, PRAGMATİK VE META-MATEMATİK

Her türlü bilgiler, düşünceler ve dil ile ifade edilerek insanlarca paylaşılır. Bilimde de, toplumların yüzyıllar süren süreçler içinde geliştirdikleri *doğal diller* ve her bilim alanında, bu alana özgü tanım ve kurallara göre oluşturulmuş *yapay diller* anlatım aracı olarak kullanılır. Ancak doğal dil, anlam belirsizliği olan ya da çok anlamlı olan sözcükler içerdiğinden, bilimsel anlatım için öngörülen açıklık ve kesinlik gereklerini yeterince yerine getiremez. Bu nedenle bilimler, bir yapay dil olan ve kesin, açık, tam anlatım imkanı veren matematiksel dili olabildiğince kullanabilme gayreti içindedirler. Matematiğin dili de (tüm diller gibi) temel yapı taşları olan sözcük ve simgelerin oluşturduğu bir alfabeye ve dilin sentaksını oluşturan gramer kurallarına sahiptir. Herhangi bir dilde, soyut ya da somut nesneleri temsil eden sözcük ya da simgelerden, isim, sıfat, zarf v.s. gibi adlarla sınıflandırılanlara *betimleme sözcükleri* denir. Bir de, *her*, *bazı*, *ve*, *veya*, *değil*, *ise*, *ancak* gibi tek başlarına anlamı olmayan, fakat dilin oluşturulmasında vazgeçilmez bir işlevi olan mantıksal sözcükler vardır ki bunlara *mantıksal sabitler* denir. Mantıksal sabitler, *önerme eklemleri* ve *niceleyiciler* olmak üzere iki gruba ayrılır. Önerme eklemleri, iki ya da daha çok basit önermeyi birleştirerek bileşik önermelerin oluşmasını sağlar. Niceleyiciler ise önermenin konu ettiği nesnelerle ilgili nicelikleri belirtir. Önermeler mantığı mantıksal sabitler bakımından, *önerme eklemleri mantığı* ve *niceleme mantığı* olmak üzere iki konuya ayrılır. Önerme eklemleri mantığı, bileşik önermelere ilişkin doğruluk fonksiyonları ve doğruluk tabloları yardımıyla tutarlılık, denklik, geçerlilik v.s. konularının denetlenmesini içerir. Bu nedenle önerme eklemleri mantığına, *doğruluk fonksiyonları mantığı* da denir. Niceleme mantığında ise önermeler, klasik olarak, özne ve yüklemleri arasındaki kaplamsal ilişkiler ele alınarak nicelik bakımından incelenir. Bu nedenle niceleme mantığına *yüklemler mantığı* **[23]** da denir.

Betimleyici sözcüklerden *isimler*, nesneleri belirtmek için kullanılır. Ancak (sonsuz çoklukta olan) tüm nesneler için birer isim bulmak olası değildir. Bu nedenle *cins isim* denilen ayırımı yapmak ve böylece farklı nesneleri aynı sözcükle isimlendirmek gereği vardır. Bir sözcüğün adlandırdığı nesneler kümesi, bu sözcüğün (bir bakıma) anlamını ortaya koyar. Buna, sözcüğün *kaplamsal anlamı* [7] denir ve sözcüğün adlandırdığı nesnelerin tümü de sözcüğün kaplamını oluşturur. Cins isim olarak kullanılan bir sözcüğün anlamını, onun kaplamını oluşturan nesnelerin ortak özelliklerini dikkate alarak da ortaya koyabiliriz. Sözcüğün kaplamına giren nesneleri diğerlerinden ayırdetmemizi sağlayan, onlardaki ortak özelliklerin sağladığı anlama, sözcüğün *içlemsel anlamı* [7] denir. Sözcükler, karşılık geldikleri kavramları sadece adlandırırlar. Kavram ise sözcüğün anlamıdır. *Tanımlama*, kullandığımız sözcüklerin anlamlarını kesinliğe kavuşturmak, anlam belirsizliği ve çok anlamlılığı ortadan kaldırmak amacıyla, anlamları bilinen kavramlardan hareketle yapılır.

Matematik, zengin ve dakik bir sentaksı olan özel bir dildir; bir iletişim aracıdır. Matematiğin dili de dahil tüm diller, Morris' in 1938' de ve Carnap' ın 1942' de belirttikleri gibi, üç bakımdan ele alınır: *Sintaktik, semantik* ve *pragmatik* [13]. *Sintaktik,* işaretlerin (imlerin) işaretlerle olan ilişkisini inceleyen dilsel bilgi alanıdır. Bu alanda, işaretlerle objeler ve işaretleri kullananlar (veya yorumlayanlar) arasındaki ilişkiler söz konusu edilmez. Sintaktik; mantık, matematik, sentaks (sözdizimi) gibi formel disiplinlerle ilgilidir. Sintaktiğin önermeleri analitik olup, empirik içerikli değillerdir. Örnek olarak, dilbilgisindeki noktalama işaretlerine dair kurallar, cebirsel formüllerin oluşumuna dair cebirsel yasalar bu türdendir. Formel matematik bir sintaktik dalıdır.

Yazılabilen her dilin bir alfabesi vardır ve alfabeler simgelerden oluşur. Sonlu sayıda simgenin bir araya gelmesiyle de sözcükler oluşur. Sözcükler anlamlı ya da anlamsız olabilir ve bunu sintaktik kuralları belirler. Örnek olarak, Türk alfabesi ile oluşturulmuş sözcüklerde *ğ* harfi hiçbir anlamlı sözcüğün başına gelemez ya da herhangi bir Türkçe sözcükte dört sessiz harf yan yana olamaz.

Matematiğin alfabesini de bazı simgeler oluşturur. Her matematiksel alanın da kendine özgü simgeleri olabilir. Örneğin Ali Nesin, *Önermeler Mantığı* [24] adlı kitabında, önermeler mantığının alfabesi olarak;

$\rightarrow, \neg, (,), P_0, P_1, P_2, \ldots$

simgelerini kullanmıştır. P_0, P_1, P_2,... simgeleri (sonsuz çoklukta) temel önermeleri gösterir; $\rightarrow$ koşutluk (ise) eklemi, $\neg$ değilleme eklemi, (ve) simgeleri de sırayla açan ve kapatan ayraçlar olarak tanımlanmıştır. Bunların çeşitli bir araya gelişleriyle de

$(P_1 \rightarrow P_2)$, $P_1 \rightarrow P_2$, $- P_1 \rightarrow$, $P_1 P_0($

gibi anlamlı ya da anlamsız sözcükler oluşur.

Bir sözcüğün uzunluğu, "o sözcüğü oluşturan simgelerin sayısı" olarak tanımlanır. Simgelerinin sırası ve uzunlukları eşit olan iki sözcüğe *eşit sözcükler* denir. Örneğin, iki simgeden oluşturulabilecek sözcüklerden, uzunluğu n olanların sayısı 2^n dir. m tane simgeden, uzunluğu n olan m^n tane sözcük oluşur. En az bir simgesi bulunan tüm alfabelerin sonsuz çoklukta sözcüğü olacağı açıktır.

Gödel sayıları için bir hazırlık olarak, yine Nesin' in verdiği ve sözcüklerden doğal sayılara bir eşlemeyi gösteren aşağıdaki örneği ele alalım **[24]**:

P_1, P_2 simgelerinden oluşan bir alfabemiz olsun. Bu alfabe ile oluşturulabilecek her bir sözcüğe bir tek doğal sayı karşılık gelecek şekilde bir eşleme şöyle yapılabilir: n uzunluktaki bir sözcüğe, ilk n asal sayının 1. veya 2. dereceden kuvvetlerinin çarpımı karşılık gelsin. Öyle ki sözcüğün i. sırasındaki harf P_1 ise i. çarpan durumundaki asal sayının kuvveti 1, aksi halde (yani i. sıradaki harf P_2 ise) 2 olsun. Böylelikle, $P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_n}$ ($P_{i_j} = P_1$ veya $P_{i_j} = P_2$ olmak üzere), uzunluğu n olan bir sözcük ve n. asal sayı P olmak üzere,

$$f : < P_1, P_2 > \rightarrow N \ , \ f(P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_n}) = 2^{i_1} 3^{i_2} \ldots P^{i_n} , n \in N$$

fonksiyonu ile her sözcüğe bir doğal sayı karşılık gelmiş olur. Kuşkusuz ki f örten değildir fakat birebirdir. Örnek olarak,

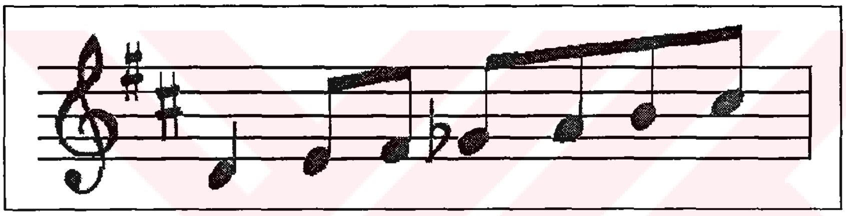
$$f(P_2 P_1 P_1 P_2) = 2^2.3.5.7^2 = 2940$$

olup, 2940 doğal sayısının orijinali $P_2P_1P_1P_2$ sözcüğüdür. Buna karşın,

$$700 = 2^2.5^2.7$$

hiçbir sözcüğün görüntüsü değildir. Genel olarak herhangi bir doğal sayının, n uzunlukta bir sözcüğün f altındaki görüntüsü olması için bu doğal sayının asal çarpanlara ayrılışında ilk n tane asal sayının bulunması ve bunların üslerinin 1 veya 2 olmaları gerekir ve yeter.

Tarski' nin obje-dil ile meta-dil kavramlarına ilişkin betimlemelerini daha önce incelemiştik. Bu iki kavram birbirleriyle göreceli idi. Belirli bir alana ilişkin önermeler, kavramlar, bulgular ya da olgular, bu alana özgü bir anlatım biçimiyle (bu alanın diliyle) ortaya koyulur. Bu ortaya koyulanlar, eğer bu alan dışındaki güzellik, etik, tutarlılık, doğruluk v.s. gibi bakımlardan yorumlanmaya kalkışılırsa, artık bunun için başka bir dile gereksinim vardır. İşte bu durumda, söz konusu alanın dili obje-dil, bu alan hakkında konuşulan dil de meta-dil olur. Örneğin müziğin dili, notalar ve bazı başka simgelerle oluşturulmuştur. Bu alanda çalışanların ortaya koyduğu bir melodi, porte, sol anahtarı, nota, diyez, bemol v.s. gibi müziğe özgü simgelerle aşağıdaki gibi ifade edilmiş olsun:



Şekil 2.7.1 Bir re majör örneği

Şimdi, "bu, güzel bir melodi", "bu melodi bir re majör örneğidir", "sol bemol kullanılmasa daha iyi olurdu" gibi önermeler, obje-dil durumunda olan müziğin diliyle değil, bu dili konu eden meta-dil ile ifade edilmişlerdir. Benzer şekilde, pür matematiğinde tamamen kendine özgü simge ve kuralları olan bir dili vardır. Örneğin,

$$\forall x\ (\ e^{ix} = \cos x + i.\sin x\ ,\ x \in R\ ) \Rightarrow 1 + e^{i\pi} = 0$$

önermesi, bu matematiksel dil ile yazılmıştır. Bu dili bilmeyenlerin, bundan herhangi bir şey anlaması olası değildir. Fakat ister dili iyi bilen, ister az çok bilen (hatta hiç bilmeyen) biri, yukarıdaki sintaktik önerme hakkında çeşitli konuşmalar yapabilir. Örneğin; "Yukarıdaki önermede geçen $1 + e^{i\pi} = 0$ eşitliği, 0, 1, e, π, i gibi beş önemli sayı arasındaki bir ilişkiyi gösteren ilgi çekici bir formüldür" tümcesi, üst-matematiksel bir ifadedir.

Başka bir dilsel bilgi alanı olan *semantik* (anlambilim) ise, işaretlerin objelerle olan ilişkilerini inceler. Sintaktik sistem üzerinde konuşabilmek için, bu sistemden çıkıp başka bir dil kullanma gereği vardır. Daha önce de değindiğimiz gibi, buna meta-dil denir. Örnek olarak, sintaktik kurallarla bir araya gelmiş imlerden oluşan

$\exists$ x

önermesi için, "yukarıdaki önermede $\exists$ niceleyicisi kullanılmıştır" dediğimizde, bu önerme ile $\exists$ arasındaki bir ilişkiyi, meta-dil terimleri (ya da sözcükleri) ile anlatmış oluyoruz. Yani meta-dil sözcükleriyle, (şimdi obje durumuna gelmiş bulunan) başka bir dilin terimlerini semantik kurallar çerçevesinde ilişkilendiriyoruz. Bazen objeler, meta-dilin kendi terimleri de olabilir. "$\sqrt{2}$ ' nin anlamı nedir?", "$x^2-2=0$ denkleminde x neyi temsil etmektedir?" gibi soruların cevabı meta-dil ile verilir.

Herhangi bir sintaktik formülü oluşturan imlerin, formülde bir işlevi olması gerekir. Bir sintaktik formülü oluşturan terimlerin objeler veya olgularla olan ilişkisini semantik kurallara uyarak meta-dil ile kesin olarak açıklayabilmek, çoğu kez mümkün olmayabilir. Çünkü bu iş, meta-dil terimlerinin de kesin tanımlarının yapılmış olmasını gerektirir. Sintaktik önermeler kesin olarak doğru (ya da yanlış) olmalarına karşın, bu ifadelerle empirik olgular arasında ortaya koyulmuş bulunan ilişkiler birebir örtüşmez. Yapabileceğimizin en iyisi, gerçeğe uygun bir yaklaşma olup hata kaçınılmazdır. Örnek olarak, bir gerçek dünya olgusu ile, bu olguyu temsil ettiği düşünülen bir matematiksel model asla birebir örtüşmezler. Model, olguyu tam olarak temsile yaklaştığı oranda matematiksellikten uzaklaşır. Bu bağlamda sıra ile Galileo, Einstein, Russell ve Wigner' den birer söylemi hatırlayalım:

"Evren matematiğin dili ile yazılmıştır; harfleri üçgen, çember ve geometrik nesnelerdir. Bunları bilmedikçe onun bir sözcüğünü bile anlayamayız. Matematiğin dilini bilmeyen için evren, içinden çıkılmaz karanlık bir labirent gibidir".

"Matematiksel bir önerme, olgusal dünyaya ilişkin olduğu kadarı ile kesin değildir, kesin olduğu kadarı ile de olgusal dünyaya ilişkin değildir".

"Arı matematik, ne neden söz ettiğimizi, ne de söylediklerimizin doğru olup olmadığını bilmediğimiz bir alandır".

"Matematiğin doğa bilimlerindeki yararlılığı neredeyse gizemli denilebilecek bir şey; bunun rasyonel bir açıklaması da yok".

Meta (ya da üst) sözcüğü genel olarak, herhangi bir alanın dili ile bu alan hakkında konuşulan dil arasındaki ayırımı vurgulamak için kullanılır. Hilbert' de, biçimselleştirilmiş bir matematiksel sistem ile bu sistem (ve içeriği) hakkındaki söylemleri birbirinden ayırmak için, ilkine matematik, ikincisine üst-matematik demiştir. Böyle bir ayırım yapılmadığı takdirde, çeşitli paradokslar kaçınılmaz olacaktır. Bu farkın ortaya konulmasından sonradır ki, matematiksel akıl yürütmenin mantıksal yapısı net bir şekilde ortaya çıkmıştır. Gizli varsayımlar, anlamsız bir takım yüklemeler ortadan kalkmış ve asıl matematiğin simgeleri, kusursuz bir şekilde bir araya getirilerek çeşitli mantıksal çıkarım zincirlerinin biçimselleştirilmesi mümkün olmuştur. Akıl yürütmelerde kullanılan kural ve işlemlerin önceden kesin tanımlarının yapılması gerçekleştirilmiştir. Yüzyıllarca, bir çok örneği görüldüğü gibi, hangi kuralları kullanarak sonuca ulaştığını bilmeden matematik yapmak, artık geçerli sayılmamaktadır. Gödel Kanıtlaması' nda da bu ayırım dikkate alınarak sonuca ulaşılmıştır. Matematik / üst-matematik ayırımını aşağıdaki maddelerle bir kez daha vurgulayalım **[8]**:

1. Matematik, matematikçilerin oluşturduğu biçimsel sistemlerden oluşur. Üst-matematik ise, bu sistemler hakkında yapılan betimlemeleri, tartışmaları, kuramlaştırmaları v.s. içerir.

2. Biçimselleştirilmiş bir sistemin yapısı hakkında, ya da sistemi oluşturan unsurların birbirleriyle ilişkileri hakkında konuşmak, üst-matematik diliyle gerçekleşir. Bunlar, sistem hakkında anlamlı ve önemli bilgiler verebilirler, fakat sistemin kendi içinde kalan söylemler değillerdir.

3. Üst-matematiksel önermeler, biçimsel sistemin kendi dili ile ifade edilmezler. Fakat biçimsel sistemin simgelerine, formüllerine, formül zincirlerine, sistemin tamamına ya da bunların birbirleriyle ilişkilerine ilişkindir.

Üst-matematiksel önermeler, temel imlerin bir araya gelmesiyle oluşan bazı matematiksel sözcükleri içerirler. Fakat bu içerme, sözcüklerin kendilerini değil onların adlarını içerme şeklinde algılanır. Bu nedenle üst-matematiksel bir tümcede geçen bir matematiksel sözcük, tırnak içine alınarak gösterilmelidir. Örnek olarak, "$x^2-1 = (x-1).(x+1)$ bir özdeşliktir" yerine " "$x^2-1 = (x-1).(x+1)$" bir özdeşliktir" şeklinde yazmak gerekir.

Son olarak, *pragmatik* kavramına değinecek olursak, metnin başında da belirttiğimiz gibi bu terim dilsel bir bilgi alanını ifade eder. Pragmatik sözcüğü, felsefede uygulamacı anlamına gelir. Dilsel anlamda ise, imlerle, imleri kullananlar arasındaki ilişkileri konu eder. Bilim adamının imleri nasıl kullandığı, nasıl tepki gösterdiği, imler arasında yaptığı tercihlerden nasıl etkilendiği v.s. gibi sorunlar bu cümledendir. Örnek olarak, " "olumlu" çoğu kimse için "iyi" bir sözcüktür", "bir edebiyatçı "esnaflar" demez", "bir matematikçi için "a \ b" yerine "$\frac{b}{a}$" yazmak abestir" gibi tümceler pragmatikseldir. "...hesap yapmasını bilen kimselerin, hesap yapmasını bilmeyen kimselerde uyandırmış oldukları insanı adeta felce uğratan o korku, uygulamalı pragmatiğin bir problemini oluşturur. Euler, Tanrının varlığını ispat etmek için Diderot' yu Rus sarayında sembolik bir *nonsequitor* (mantıksız sonuç) ile karşıladığı zaman, Diderot' yu bozguna uğratan da yine aynı korku olmuştu. Augustos de Morgan bu olayı şöyle nakletmiştir: '...Leonhard Euler, Denis Diderot' ya doğru yürüdü; ciddi bir tavırla ve tam inandırıcı bir ses tonuyla:

'Mösyö,

$$\frac{(a+b)^n}{n} = x$$

öyle ise Tanrı vardır' dedi. Cebir bilgisi kuş dili kadar bile olmayan Diderot çok bozuldu ve sinirlendi, Fransa' ya hemen dönmek için izin istedi' " **[21]**.

2.8 MANTIKÇILIK, SEZGİCİLİK VE DOĞRUYA ULAŞMANIN BAŞKA YOLLARI

Matematik, savlarını tümdengelimsel (dedüktif) yöntemlerle kanıtlayan bir disiplindir; dedüktif mantığın kusursuz bir şekilde uygulanabildiği yegane örnektir. "Mantıkçılık" denilen düşünce akımına göre; matematik tümüyle mantığa indirgenebilir ve hatta mantık ile matematik özdeş disiplinlerdir **[14]**. Frege, Dedekind, Russell gibi bu görüşte olan düşünürler, tüm matematiksel kavramların, mantıksal kavramlardan hareketle tanımlanabileceğini ve aksiyomların da mantık ilkelerinden hareketle ortaya koyulabileceğini savunmuşlardır; sayıları mantıktaki küme ve kümelere ilişkin kavramlardan yararlanarak tanımlayıp, sayılar arasındaki ilişkileri de kümeler arasındaki mantıksal ilişkilere göre ortaya koymuşlardır. Örnek olarak, "Doğal sayılar kümesi", tüm sonlu kümeler ailesinde "bire-bir eşleme" denklik bağıntısına göre oluşan tüm denklik sınıflarının kümesidir. Doğal sayılar arasındaki işlemler, bunlara karşılık gelen denklik sınıflarından alınan temsilci kümeler arasındaki (kesişme, birleşme, kartezyen çarpma v.s.) işlemlerden hareketle tanımlanır. Tam sayılar, Doğal sayılardan; Rasyonel sayılar, tam sayılardan; gerçel sayılar, rasyonel sayılardan hareketle yine mantıksal kavramlara dayanılarak ortaya koyulur. Örnek olarak, dünyamızda genellikle kısaca $-\frac{1}{2}$ simgesi ile gösterdiğimiz rasyonel sayı, tüm evrenler için tek anlamlı olan,

$$\left[\left([\,([\{Ali\}],[\{Ali,Veli\}])\,],[\,([\{Ali,Veli\}],[\{\}])\,] \right) \right]$$

denklik sınıfından ibarettir **[18]**. Şüphesiz ki söz konusu tek anlamlılık, burada geçen küme, ikili ve denklik sınıflarına ilişkin kavramların ve bu kavramlar için kullanılan simgelerin önceden, eksiksiz olarak tanımlanması ile ortaya çıkar. Bilindiği gibi 1879' da Frege ve 1901' de Russell, birbirlerinden bağımsız olarak, sayıları, birebir eşleme prensibinden hareketle küme, aile, sınıf mantıksal kavramlarını kullanarak tanımlamışlardır. Yıllar önce okullarımızdaki matematik programlarına da yansımış bulunan bu bakış açısı, tartışmalara yol açmıştır. Özellikle sezgicilere göre, matematikçilerin asırlardır kullanageldikleri ve birbirlerinden iyi ayırdedebildikleri çeşitli sayı türlerini, mantıksal kavramlarla yeniden tanımlayıp, onlara hakim olmayı, bir yığın yeni kavrama hakim olmaya bağlı kılmak gereksiz bir yokuşa sürmedir; bu yolla matematiğin hangi paradoksu ortadan kaldırılabilmiş veya hangi çözülememiş problemi çözülebilmiştir ki bu yokuşa katlanılsın? Poincare' in bu konudaki görüşleri şöyle özetlenebilir **[25]**: "Matematiğin konuları dedüktif yöntemlerle ele alınmaktadır ama bu konular indüktif ve sezgisel yollarla ortaya konulmuşlardır. Matematikçilerin davranışları bakımından da iki türlü anlayış vardır; kimileri çetin mantıktan başka bir şey tanımaz, kimisi biricik keşif kaynağını sezgide görür. Bu iki tip de ortak bir hedefin gerçekleşmesi için elbirliği eder. Mantıkla kesin bilgiler elde ederiz; o bir ispat aletidir; fakat mantıkçı toplu bir görüş vermekte zorlanır. Mantıkçılar hiçbir şeyi tesadüfe bırakmaksızın, hedeflerine doğru adım adım ilerler gibi görünürler; sezgiciler sezgilerinin gösterdiği yoldan gider ve ilk hamlede birtakım kazançlar sağlarlar, fakat bunlar cesur süvari öncülerinin başarıları gibi çoğu kez kararsızdır. Çoğu zaman mantıkçılara analizci, sezgicilere geometrici denirse de bu hal geometri yaparken analizci ve analiz yaparken de geometrici kalmalarını engellemez. Matematikçileri bu iki yöntemden birini kabule götüren şey ele aldıkları konu değildir. Onları sezgici ya da mantıkçı yapan şey zekalarının tabiatıdır. Bu yetişme tarzları ile de ilgili değildir. İnsan matematikçi doğar, sonradan matematikçi olmaz. Öyle görünüyor ki, insan matematikçi doğarken ya geometrici yahut analizci doğmaktadır."

Mantıkçılar, problemlerinin hiçbir noktada şüphe götürmez bir kesinlikle çözülebilmesinin ancak çetin mantıkla gerçekleşebileceğine inanırlar; üzerinde çalıştıkları elemanlar ve bu elemanlar arasındaki ilişkiler tamamen soyut olup, bunların doğadaki somut karşılıklarının olup olmadığıyla ilgilenmezler. Mantıkçılar her ispatı çok sayıda basit işlemlere ayırır, sezgici için çoğu kez buna gerek yoktur. Mantıkçılara göre salt sezgi ne kesinlik ne de pekinlik verebilir. Tanımlara kesinlik kazandırılmadan kesin akıl yürütmeler yapılamaz; sezginin bizi yanılttığı çok örnekler vardır. Sezgicilerin apaçık gibi gördükleri bir çok olgunun onların zannettiği gibi olmadığı, analizciler tarafından kanıtlanmıştır. Örnek olarak, sezgiciler, "her sürekli eğrinin bir teğeti olduğuna göre, bu eğrilere karşılık gelen sürekli fonksiyonların da türevi vardır" sanıyorlardı. Oysa analizciler her noktada sürekli olduğu halde hiçbir noktada türevi olmayan fonksiyon örnekleri vermişlerdir. Sezgicilere göre, "boş olmayan kümelerden oluşan, boş olmayan bir ailenin kartezyen çarpımı boş değildir" şeklinde ifade edilen seçme aksiyomu apaçıktır. Oysa analizciler bunun hiç de apaçık olmayan ve kavranması oldukça güç başka matematiksel önermelere denk olduğunu kanıtlamışlardır. Sezgicilere göre, mesela (0,1) kümesinin, R' nin bir öz alt kümesi olarak, R' den daha az eleman içerdiği apaçıktır ve dolayısı ile bu iki kümenin sayısal olarak denk olduğunu savunan Cantor teorisi saçmadır. Hatta, "istenildiği kadar küçük uzunluktaki bir doğru parçasının içerdiği noktaların miktarı ile tüm 3-boyutlu uzaydaki noktaların istediğiniz kadar katı alınarak elde edilen miktar eşittir" demek, daha da büyük bir saçmalıktır. Oysa bunlar Cantor teorisi içinde kolayca kanıtlanır.

Sezgi [26] için, "duyular, hayal gücü ve zihin yardımıyla, çoğu kez analoji ya da indüksiyon ile genellemeler ve soyutlamalar yaparak yeni bilgiler keşfetmek yetisidir" diyebiliriz. Sezgicilere göre bilimde keşif ve ilerleme, sezgi olmadan olası değildir; sezgi mantığın tamamlayıcısıdır; mantık kesin bilgi verir ama bu bilgi önceki bilgiler tarafından içerilen, yani zaten var olan bir bilgidir, oysa sezgi yeni bir icat aracıdır. Eski matematikçilerin sezgi yoluyla ulaştığı kavramların çoğu bugün itibariyle terkedilmiş olsalar bile, onların, yerlerine konulmuş oluşumları şekillendirdikleri göz ardı edilmemelidir. Matematiksel akıl yürütmede, mutlak kesinlik kaybolmaksızın, matematiksel tümevarımla da özelden genele doğru gidilir, sadece (biçimsel mantığı kullanarak) genelden özele gidilse idi bilimsel ilerleme olmazdı. Gerçekte, analizcilerin de ispatlarının ayrıntılarında, Aristo' nun klasik sonuç çıkarma yöntemlerinin yanında, matematiksel tümevarım kullandıkları ve bilimi bu yolla ilerlettikleri görülür. Yani analizciler, skolastikçiler gibi sadece tasım yapmazlar; hedefi görmeden adım adım ilerledikleri doğru değildir. Analojiye daima başvurmuşlardır. Benzerlikleri bulmak ise sezgi gerektirir. Mutlak analizciler (mantıkçılar) ise kesinlikten kazandığımızı, nesnellikten kaybettiriyorlar; mantık ideallerini gerçekle bağları kopararak gerçekleştirmek istiyorlar; belki sorunların nasıl çözülebileceğini görüyorlar fakat onların nasıl ve niçin ortaya çıktığını görmüyorlar; matematik bilimi kesinleşmekle (mantığa indirgemekle) yapmacık hale geliyor. Sezgi olmadan matematiğe ilgi de olmaz; sezgi hedefi bize uzaktan gösterir ve keşif için şarttır. Salt mantık bunu gerçekleştiremez. Salt mantığın yeni bilgiler yaratmasına imkan yoktur.

Gerçekte, sezgicilerin de mantıkçıların da zaafları vardır; mantıkçılar uzayda görmekte zorlanırlar, sezgiciler uzun hesaplardan çabuk bezerler. Fakat bu ikisi de bilimin ilerlemesi için gereklidir. Her biri, diğerinin yapamayacağı büyük işler başarmışlardır. Analizcilerden B. Hermit, Weierstrass, B. Meray; sezgicilerden B. Klein, Riemann, Lie ve daha birçokları buna örneklerdir.

Kant' a göre, matematik tüm kavramlarını ancak sezgisel yolla ortaya koyabilir; o halde matematik analitik değil, ancak sentetik olabilir. Örnek olarak sayıların bir ardışıklık tasarımı gerekir; bu ise analitik değil görsel veya duyusal yoldan yani sentetik olarak kabul edilebilir. Matematiğin mantıksal ilkeleri görüsel kaynaklıdır ve soyutlama ile elde edilir. Tüm matematiksel önermeler "*sentetik a priori*" niteliktedir.

Oysa, Frege ve Russell' ın matematiği mantığa indirgeme girişimleri, matematiksel önermeleri analitik saymalarına dayanıyordu. Bu Kant' ın görüşü ile çelişir. Lojistik, matematiği mantığa indirgemeyi umuyordu, oysa mantığı matematiğe indirgeme gibi bir sonuç ortaya çıkmıştır.

Bu tartışmaların temelinde "doğruyu bulma" problemine çözüm arayışına ilişkin çabalar bulunmaktadır. Her bilim kendi konu alanına ilişkin önermeler içerir ve bu önermelerin doğruluğunu (veya yanlışlığını) bulmaya çalışır. Fakat öyle önermeler vardır ki, konu, yer ve zaman ne olursa olsun, zorunlu olarak doğrudurlar (veya yanlıştırlar). İki değerli mantığın "üç temel düşünme ilkesi" [7] denilen aşağıdaki önermeler bu türdendir:

1. P doğru ise doğrudur

2. P hem doğru hem yanlış olamaz

3. P ya doğru ya da yanlıştır

Tüm bilimler kendilerine özgü geçerli bilgiler elde etmek için, bu ilkelere uymak ve bunları kullanmak zorundadırlar. Bir takım "basit" önermelerin doğruluk değerleri bir kere saptandıktan sonra, artık bunların mantıksal bağlaçlarla bir araya getirilmesi ile oluşan bileşik önermelerin de doğruluk değerleri kesin olarak bellidir. Herhangi bir bilime ilişkin olarak ortaya atılan "a, b' dir" biçimindeki bir basit önermenin doğruluğu bu bilimin yöntemleri ile (a ve b kavramlarının kaplamsal ilişkileri çerçevesinde) saptanabilir ya da saptanamaz; fakat a, b ne olursa olsun ,

"a, b' dir veya a, b değildir"

önermesi mantıksal olarak sadece bu bilim çerçevesinde değil, tüm evrenlerde doğrudur ve herhangi bir deney, gözlem ya da araştırmaya bağlı değildir. Benzer şekilde,

"a, b' dir ve a, b değildir"

önermesi de kesinlikle her yerde, her zaman ve her koşulda yanlıştır. Bu türden, doğruluk değerleri mantıksal ilke ve kurallara göre kesin olarak belli olan önermelere *analitik önermeler* denir. Analitik önermelerin doğruluğu gözlemden bağımsız (*a priori*) dır. Olgusal olan, yani doğruluğu ya da yanlışlığı bir takım gözlemlere dayanılarak saptanmaya çalışılan önermelere ise *sentetik önermeler* denir. Sentetik önermelerin doğruluğu gözleme bağlıdır (*a posteriori*). Sentetik önermeler "mutlak doğru" olamazlar. Empirik bilimlerin önermeleri genellikle sentetik, mantık ve matematik gibi disiplinlerin önermeleri genellikle analitiktir. Mantıkçılık tüm matematiksel önermelerin ancak dedüktif yöntemlerle elde edilebileceğini ve bunların analitik olduğunu savunur; sentetik önermelere yer vermez; duyularımızın, sezgilerimizin ve deneylerimizin bizi yanıltabileceğini ileri sürer. Mantıkçılara göre, olgusal bir hipotez, gözlem ve sezgi ile ne kadar açık görülürse görülsün (pozitif bir) yanlış çıkma olasılığı daima vardır.

Bir takım P_1, P_2, ...,P_n öncüllerinden hareketle, mantık kurallarına uyularak, dedüktif akıl yürütme yöntemleri ile P gibi bir sonuca ulaşılabilmiş ise, P_1, P_2, ...,P_n öncülleri mantıksal olarak P' yi gerektirir (ya da P' yi kanıtlar) denir. Bu durumda,

$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow P$..*

önermesine bir mantıksal gerektirme ya da *teorem* denir. Bir teorem bir kere kanıtlandığında artık * önermesinin, hangi sezgi ya da gözlem ile ters düşerse düşsün, yanlış sayılması mümkün değildir. Sadece öncüller (ya da aksiyomlar) tartışılabilir.

Bilimlerin bilgi üretmek ya da doğru önermeler üretmek yolunda hangi yöntemleri kullanacakları konusunda çeşitli felsefi görüşler vardır. Empiristler *indüksiyon*, rasyonalistler *dedüksiyon*, mantıkçılar *hipotetik dedüksiyon*, pragmatikçiler *retrodüksiyon* çıkarım yöntemlerini önermişlerdir **[27]**. Empiristlerin öncülerinden Bacon' a göre, olguları tek tek gözlemek, bu gözlem sonuçlarına göre genellemeler yapmak ve bu genellemelerden (daha genel olan) aksiyomlara ulaşmak gerekir. Ancak, indüksiyonun bizi hiçbir zaman mutlak doğru kabul edebileceğimiz bir yargıya ulaştıramayacağını ileri süren rasyonalistlere göre, mutlak doğruya ancak matematiğin ispat yöntemi olan dedüktif çıkarımlarla ulaşılabilir ve bu tek geçerli "bilgiye ulaşma" yoludur. Ancak bir q önermesinin doğruluğunun, doğru kabul edilen bir p önermesinden dedüktif yöntemle çıkarılmış olması, sadece,

"p doğru ise q' da doğrudur"

önermesinin mutlak doğru olduğunu gösterir; q' nun mutlak doğru olmasını garanti etmez. q ancak p doğru ise doğrudur; "doğru olduğu kabul edilen p yanlış ise ne olacak?" sorusuna karşı, rasyonalistler, p' nin ispat gerektirmeyecek kadar apaçık doğru olması gerektiğini ileri sürmüşlerdir. Descartes buna, "düşündüğüm kuşkusuz olduğuna göre var olduğum da kuşkusuzdur" savıyla,

"(p) düşünüyorum (q) öyleyse varım"

tarihsel örneğini vermiştir. Ne var ki, p' nin doğru kabul edilmesi hiçbir zaman sezgisel olmaktan kurtulamaz ve o halde değişik aksiyomatik sistemler olacaktır.

Hipotetik-dedüktif çıkarım yöntemi hem indüksiyon hem de dedüksiyon içerir. Bilgi üretmede, indüksiyon ve dedüksiyonun birlikte kullanılışı Aristo'ya kadar uzanır. Aristo'ya göre "bilim, gözlemler ile başlayarak, indüksiyon yoluyla olguları açıklayan bir takım genel ilkelere ulaşmak ve sonra bu ilkelerden söz konusu olguları dedüktif çıkarımla elde etme sürecidir. Hipotetik-dedüktif yöntem, dedüktif mantıkla, hipotezlerden sınanabilir sonuçlar çıkarmak ve çıkan sonuçları indüktif mantık kullanarak gözlem verileri ile karşılaştırmaktır.

Retrodüksiyon [13] yöntemini ileri süren Peierce' e göre, dedüksiyon yeni bir şey öğretmez, çünkü sonuç öncüllerde açık ya da örtük olarak zaten vardır. İndüksiyon ise sadece bulunmuş bir teoriyi test etmeye yarar ve o da bizi yeni bir teoriye götürmez. O halde gözlemlerimizi, gözlem dışı kalan nesne veya süreçler kurgulayarak açıklamalıyız.

Örnek olarak,

" p doğru ise q doğrudur , q doğrudur , o halde p doğrudur"

çıkarımı ne dedüktif ne indüktif ne de geçerlidir. Fakat analoji yardımıyla, yani iki nesnenin bazı benzerliklerinden hareketle başka benzerliklerin de olabileceğini düşünerek bunun araştırılmasına girişmek, yeni bilgilere ulaşmanın bir yolu olabilir.

2.9 BİÇİMSELLEŞTİRME VE FORMEL-EMPİRİK DİKOTOMİSİ

Herhangi bir bilgi alanına ilişkin önermelerin doğruluk, tutarlılık ve geçerliliklerinin sağlanması ve bunların denetlenebilmesi, öncelikle dilsel ifadelerin tek anlamlılığa indirgenmesini gerektirir. Bunun için ifadelerde kullanılan ve tek anlamlı olmayan tüm sözcüklerin, söz konusu bilgi alanına dair anlamları önceden belirlenmeli ve ifadelerde geçen her bir terimin de içlemsel ve kaplamsal özelliklerinin olabildiğince net bir dökümü verilmeli, yani olabildiği ölçüde terimlerin tanımları yapılmalıdır. Ancak bazı tanımların aksiyomlarda örtük olarak yapılması bir zorunluluktur; çünkü bir kavramın tanımlanmasında başka kavramlar kullanılacak, bu başka kavramların tanımlanmasında da yine başka kavramlar yer alacak ve bu bazen sonsuz bir geriye gidişe ya da bir kısır döngüye yol açabilecektir. O halde geriye gidişi bir yerden itibaren durdurabilmek için bazı terimlerin sezgisel çağrışımlarının verdiği anlamlarını kabul etmek ve bununla yetinmek zorunluluk olacaktır. Bunlara *ilkel* ya da *tanımsız* terimler **[7]** denir. Tanımsız terimler bir kere saptandıktan sonra, aksiyomlarda ya da diğer tanımlarda kullanılarak, bir bakıma örtük olarak tanımlanmaları yapılmış olur. Örtük olarak da olsa tanımlarda yer almayan hiçbir terim kanıtlamalarda kullanılamaz.

Sonra, sözcüklerin bir araya gelerek tek anlamlı ifadeler oluşturmalarını sağlayan gramer kuralları belirlenmelidir. Önermelerin bir araya geliş kuralları ve bu bir araya gelişleri sağlayan bağlaçların işlevleri net bir şekilde belirtilmelidir. Önermelerin doğru kurulması ve bir araya getirilmesi için koyulan kurallara *kurma kuralları*, ispat kurallarına da *çıkarım kuralları* denir. Matematik dili de dahil olmak üzere, genel olarak, bir dilin özellikleri ve yapısı üç alanda incelenir: *sintaktik*, *semantik* ve *pragmatik* **[14]**.

Sintaktik, işaretlerin işaretlerle olan ilişkisini inceler; işaretlerle objeler arasındaki ilişkilerin ve işaretlerle, işaretleri kullananlar arasındaki ilişkilerin söz konusu edilmediği lojik, matematik, sentaks gibi formel disiplinlere yöneliktir. Sintaktik önermeler empirik içerikli olmayıp gerçek dünya hakkında bir şey söylemezler. Adi cebir formülleri ya da gramerdeki noktalama kuralları sintaktiğin inceleme alanındadır. İşaretlerle objeler arasındaki ilişkilerin kurallarını inceleyen bilgi alanına *semantik* denir. Örnek olarak "*Grup* sözcüğü bir cebirsel yapıyı ifade eder" tümcesi, bir semantik ifadedir. *Pragmatik* ise, işaretlerin, işaretleri kullananlarla olan ilişkilerini inceler. "Politikacılar seçkin kişilerdir", "Gödel formalistlerde hayal kırıklığı yaratmıştır" gibi ifadeler pragmatik ifadelerdir. "Semantik ve pragmatikle ilgili tüm yorumlarla ilişkilerini tamamen kesmiş olan sintaktik bilimlerin imkan dahiline girmesi modern buluşlardan biridir" **[13]**.

Biçimselleştirme aşamaları arasında, hangi önermelerin aksiyom, hangilerinin bu aksiyomlardan hareketle ispatlanmış teoremler olduklarını saptamak ve bunları mantıksal bir ilişki içinde düzenlemek yer alır. Olabildiğince az sayıda aksiyom, olabildiğince çok sayıda teoreme temel oluşturmalıdır.

Teoremlerin ispatlarında kullanılan tüm mantık ilkelerinin bir dökümü yapılmalı ve bu dökümde yer almayan hiçbir akıl yürütme biçimi ispatlarda kullanılmamalıdır. Sezgi ürünü olan fakat kanıtlanmamış hiçbir önerme sistemde yer almamalıdır.

Biçimselleştirmenin mükemmel olarak gerçekleştirilebileceği bilgi alanları mantık, matematik gibi tümdengelimli disiplinlerdir. Biçimselleştirilmiş bir matematiksel disiplin, dönüşüm, oluşum ve çıkarım kurallarıyla, aksiyomlardan mantıksal olarak çıkarılabilecek tüm önermeleri içerir ve sistem içinde kanıtı yapılabilecek her önermeyi de kanıtlar.

Hilbert öncülüğündeki formalist okulun, matematiği tam olarak biçimselleştirme yolundaki çabaları, matematiği, içinde saklı hiçbir şeyin bulunmadığı ve fakat açıkça ona dahil edilenlerden başka da hiçbir şey içermeyen bir işaretler sistemi haline getirmeyi amaçlar. Tam biçimselleştirme için, yukarıda sözü edilen gerçekler yerine getirilip, biçimselleştirme sağlandıktan sonra, sembolleştirme işlemi yapılır. Sistemde geçen tüm deyimler ve kavramlar anlamlandırıldıktan sonra bunlara birer sembolik karşılık verilir. Artık salt matematiksel dizgede sadece semboller vardır ve bu sembollerin karşılığı olan deyimlerin anlamları bir tarafa bırakılmış, içi boş imler haline getirilmiştir. Bu imlerin bir araya gelişleri ve kullanılışları önceden saptanmış ve meta-matematik dil ile ifade edilmiş bir dizi kesin kurala bağlanır. Böylece aksiyomlar ve onları izleyen teoremler, sembollerin belli kurallarla bir araya gelmesi ile oluşmuş (anlamsız görünen) zincirlere dönüşür. Çıkarımların geçerliliğinin, aksiyomlarda geçen terimlerin özel anlamlarıyla hiçbir ilişkisi kalmaz.

Aksiyomlardan teoremleri elde etmek, belli kurallara uyarak böyle bir zincir kümesini başka bir zincir kümesine dönüştürmekten ibarettir. Ortaya çıkan sembol zincirleri, gizli varsayımlara ve gereksiz anlam yüklemelerine yer vermeyecek şekilde, özenle bir araya getirilmiş işaretlerden oluşan adeta bir mozaik gibi soyut bir tasarımı sergilerler. Sonuçta, çeşitli içeriksiz zincirlerin yapısal örgüsü, birbirleriyle bağlantıları, matematiksel önermeler arasındaki mantıksal ilişkiler, kısaca sistemin yapısı ve işlevi adeta bir makinenin çalışma modeli gibi tüm detayları ile göz önüne serilir. Tam biçimselleşme gerçekleştiğinde bir takım tutarsızlıklar için hiçbir sebep kalmaz. Matematiğin, başta aritmetik olmak üzere her dalının tutarlı olduğunu kanıtlamak, Hilbert' in formalist okulunun ideali idi. Matematiğe özgü kesinlik ve dakikliğin tamamen su yüzüne çıkması onun büyük bir kısmının biçimselleşmesi ile gerçekleşmiştir. Klasik matematikte ele alınmış olan biçimlerinden farklı türlerde cebir ve geometriler geliştirilmiştir. Biçimsel matematik, "bilimler matematiği kullandıkları oranda kesin ve güvenilirdir" anlayışının tam manasıyla yerleşmesini sağlamıştır. Matematiğin az sayıda varsayımdan hareketle, tümdengelim yöntemini kullanarak çok sayıda yeni ve güvenilir bilgilere ulaştıran en üstün bilimsel disiplin olduğu fikri pekişmiştir. Daha önce ele alınan, ancak birçok sonuçları sezgisel olarak kabul eden birçok araştırma konusunun aksiyomatik temelleri kurulmuştur. Matematiğin sadece *niceliklerin bilimi* olduğu görüşünün eksik ve yanıltıcı olduğu ortaya çıkmıştır. Matematiğin tam manasıyla soyut, yani nesnelerin nasıl istenirse öyle yorumlandığı ve biçimsel, yani kanıtlamaların geçerliliği belirli bir bilgi alanına göre değil, önermelerin biçimsel yapılarına dayanılarak yapıldığı bir disiplin olduğu anlayışı kabul görmüştür. Matematiğin asıl sorununun, varsaydığı aksiyomların ya da bu aksiyomlardan elde edilen sonuçların özsel olarak doğru olup olmadığını araştırmak değil, fakat ortaya çıkan sonuçların, başlangıçta varsayılanların zorunlu mantıksal sonuçları olup olmadığını araştırmak olduğu ortaya koyulmuştur. Önermeler arasındaki mantıksal ilişkilerin kurulmasında, ilkel terimlerin alışılmış çağrışımları konu dışı bırakılmıştır.

Alışılmış hiçbir somut nesnenin bulunmadığı böyle bir soyutluk ortamında çalışmak ilk bakışta zor ve sıkıcı görülse de, bu ortam kendi içinde bir takım hareket özgürlükleri ve yeni görüş imkanları oluşturur ve terimlerin alışılmış anlamlarının yol açtığı zihinsel sınırlılıklar ortadan kalkar. Her ne kadar ortaya koyulmuş bulunan biçimsel sistemlerin bazıları, Euclide' in geometrisinde olduğu gibi sezgisel yorumlara uygun olmasa da, sezginin bizi ne denli yanılttığına dair örneklerimiz hatırlanacak olursa, aslında bu durumun da kesinlik ve tutarlılık yolunda bir avantaj olduğunu savunabiliriz. Kaldı ki "birkaç nesil önce tümüyle sezgi dışı kabul edilen fikirlerden bugün artık korkmadığımız gibi, olasıdır ki çocuklarımız da görecelik kuramının paradokslarını sezgisel olarak kabul etmekte zorlanmayacaklardır" [14]. Giderek artan soyutluğun, matematik eğitiminde bir takım sorunları ortaya çıkarmış bulunması ise pedagojik bir konu olup matematiğin kendi içindeki yapılanmasının dışındadır ve burada tartışılmayacaktır.

Gerçekte, sağlam bir aksiyomatik dizge kurma ideali Aristoteles' ten beri gündemde olmuştur. Euclide (İ.Ö.300) aksiyomatik yöntemin kurucusu sayılır; geometri dalında o zamana kadar ortaya koyulmuş bulunan önermeleri mantıksal olarak kanıtlamaya yetecek tamlıkta bir aksiyomlar sistemi oluşturmuştur. Harezmi (790-847) ise cebirin babası sayılır; simgelerle hesabı önemli ölçüde biçimselleştirmiştir.19. yüzyılın ikinci yarısından itibaren, matematiği her türlü sezgiden arındırma ve biçimselleştirme çabaları yoğunlaştı; içerikten çok biçim ön plana çıktı. Örnek olarak Cantor' un kümeler kuramında sezgiye hemen hiç yer yoktur. Peano doğal sayılar aritmetiğini aksiyomatikleştirmiştir. Hilbert 1899' da *Grundlagen der Geometrie* [28] ile geometriyi salt aksiyomatik matematik ile yeniden oluşturdu. O' nun öncülüğündeki formalist okul, tutarlılığın sağlanması için, biçimselliğin şart olduğu görüşünü savunarak bu yolda dev adımlar atmıştır. Böylece matematik konu bağımlı bir disiplin olmaktan çıkıp salt biçimsel bir disiplin haline geldi. Matematiğin her dalının sonsuz çoklukta doğru önermeler türetmeye imkan verecek bir aksiyomlar kümesi saptanarak biçimselleştirilebileceği inancı yaygınlaştı. Aksiyomların doğru olup olmadıkları ise felsefi bir konu olarak matematikçilerin asıl ilgi alanının dışında kalacaktı.

1930' da Presburger, yalnızca toplama işleminin yer aldığı bir aritmetiksel teoride, önermelerin doğru ya da yanlış olduklarına nasıl karar verileceğine dair bir yöntem yayınlayarak, toplama işlemi ile sınırlı bir tam sayı sisteminde her önermeye karar verilebileceğini yani dizge içindeki bir önermenin kanıtlanabileceğinin ya da kanıtlanamayacağının kesin olarak belirlenebileceğini kanıtlamıştır [29].

En kapsamlı biçimsel sistemler arasında, *Principia Mathematica* ve *Zermelo-Frankel' in kümeler kuramı* sayılabilir [10]. Bunlar günümüzde kullanılan tüm kanıtlama yöntemlerinin biçimselleştirilmelerini de içerirler; kanıtlar az sayıda mekanik kurala ve az sayıda aksiyomlara indirgenmiştir. Matematiksel önermeler tam bir düzen içinde sistemleştirilerek, bunların doğrulukları, belirlenmiş olan sağlam kurallara dayanılarak kanıtlanmıştır.

Matematiğin biçimselleştirilmesi çabaları, mantık ve felsefede de bir takım pozitivist akımlar yol açmıştır. Örnek olarak, matematik felsefesinde Frege' in *Begriffsschrift*' iyle matematiğin mantığa indirgenebileceği tezi savunulmuştur.

Biraz da formel-empirik dikotomisi üzerinde durmak yerinde olacaktır. Bu dikotomi (zıt görüş), Hilbert öncülüğündeki formalistlerle, Weyl ve Brouver öncülüğündeki sezgiciler arasında şiddetli savaşlara yol açmıştır. Formalistlere göre, empirik bilimlerin temeli olan tümevarım yönteminin formel matematikte yeri yoktur; "indüksiyon kesin ve dakik matematikten ebediyen kovulmuştur" **[25]** ve Dantzig' in deyişiyle; "matematik formel, lojik, sembolik ve dedüktif bir disiplindir, asla empirik olamaz" **[8]**. Bazı matematiksel buluşların gerçek dünyanın olgularından esinlenerek gerçekleştirildiğini kabul edebiliriz, fakat modern matematik teorilerinin büyük çoğunluğu fizik dünyasının bilinen hiçbir olgusuna uymaz. Bell, 1945' de sadece fikir ürünü olan matematiksel prensiplere örnekler vermiş ve "matematiğin formel kuralları, keyfi seçimle kurulmuş uylaşımlardır" ifadesini kullanmıştır. Dil kuralları, satranç kuralları gibi matematiğin kurallarını da koyan insandır. Bu kuralların bir kısmı gerçek dünya olgularıyla bilerek eş biçimli hale getirilmiştir. Klein' a göre, "matematikçiler, kuralları, bu kuralların çıkarılmış oldukları özel hallerin gerektirdiğinden daha genel şartlar altında kullanma eğilimindedirler" **[8]**. 1867' de Henkel, bu eğilimin matematikte bir öncü prensip olduğunu savunarak, buna *formel kanunların süreklilik prensibi* adını vermiştir. Böylece matematikte esas olanın objeler değil kurallar olduğu ve unsurlar için kanunlar değil, kanunlar için unsurlar yaratıldığı vurgulanmaktadır.

Matematik, empirik bilimlerin bir çok konusu için model olarak işe yarar ve diğer bilimlerin gücü, matematiği bir model olarak kullandıkları oranda artar. Fakat madde dünyasının olguları ile bunların matematiksel modelleri hiçbir zaman mükemmel bir şekilde örtüşmez. Bu örtüşmenin olabildiğince sağlanabildiği alanlarda, formel model üzerinde çalışmakla onun empirik karşılığına ilişkin bir çok gerçekler keşfedilebilir. Einstein, "teorik kavramlarımızla gerçek dünyayı anlamanın mümkün olduğu inancı olmaksızın, dünyamızın iç uyumuna inanmaksızın, bilim denen şeyin ortaya çıkması beklenemezdi. Bu inanç her türlü bilimsel buluşun temel itici gücüdür ve daima öyle kalacaktır" diyerek matematiksel teorinin bilimdeki önemini vurgulamaktadır. Fakat yine kendisi şunu da söyler: "Matematiksel bir önerme, olgusal dünyaya ilişkin olduğu kadarı ile kesin değildir; kesin olduğu kadarı ile de olgusal dünyaya ilişkin değildir" **[13]**.

Formel model ile olgusal dünya arasındaki farkı kavrayamayan tümevarımcılar, örnek olarak, 3' ten 9' u çıkarmayı bir türlü kabul edememişlerdir. Hemen hemen Descartes (1596-1650)' a kadar bütün işlemler anlamsız ya da hayali kabul edilmiştir. $3-9 = -6$ işleminin kabulü, matematiğin bir formel sembolizm olduğunu ve aritmetiğin empirik olgularla oluşturulmasının mümkün olmadığını anlamalarını kolaylaştırmıştır.

Bir anti parantez olarak, Max Simon' un ifade ettiği şu antinomik durumu da kaydedelim: "Negatif sayılar, çıkarma işlemini istisnasız mümkün kılmak üzere yaratıldıkları halde, sırf bu yaratılış yüzünden, bağımsız bir işlem olarak çıkarma, varlığını kaybetmiş bulunmaktadır". Yani, çıkarma işlemini mümkün kılmak için çıkarma işleminden vazgeçilmiştir! Gerçekten, $3-9 = 3+(-9)$ ya da $9-3 = 9+(-3)$ tür ve yapılan iş toplamadır.

İrrasyonel sayılar da ancak 16. yüzyılda Avrupa' ya girebildi ama sadece cebrik olanları...! 1873' de Hermit e sayısının ve 1882' de Lindemann π sayısının cebrik olmadığını ispatlayınca ve nihayetinde Cantor, cebrik olmayan(transandant) ve bu özelliği ile o zamana kadar ancak bir-iki tanesi bilinen bu sayıların kardinalitesinin yanında cebriklerin kardinalitesinin sıfır mertebesinde olduğunu kanıtlayınca matematik dünyası hayrete düşmüştür. Ya imajiner sayılara ne demeli? İlk kez 1548' de Cardan tarafından kullanılan i ($\sqrt{-1}$) sayısı hangi olguya işaret ediyordu? 1779' da Gauss, karmaşık sayılar sayesinde "tek bilinmeyenli her cebrik denklemin bir kökü vardır" temel teoremini ispatladı. Euler' in tam sayılar, imajiner sayılar ve transandant sayılar arasında ortaya koyduğu

$$e^{\pi i} = -1$$

ilişkisi ise empiristlerin asla bir anlam veremeyecekleri bir matematiksel estetiktir. 1939' da Stevens' ın da dediği gibi; "karmaşık sayıların yaratılması, formel model ile empirik kainat arasındaki farkın gerçekten mevcut olduğunun canlı bir delilini oluşturmaktadır". 19. yüzyıl başlarında karmaşık sayıların bir geometrik yorumunun yapılmış olması ise, onların zaten mevcut olan matematiksel geçerliliğini ispat etmiş olmaz, belki sezgicileri rahatlatmış olur. Gerçekten başlangıçta, sembollerle boşu boşuna oynanan bir oyun olarak görülen bu formel sistemden, örnek olarak, alternatif akım teorisinde bir model olarak yararlanılmıştır. “Karmaşık sayıları yaratanlar, elektrik mühendisleri ile onları ilgilendiren pratik problemleri hatırlarına bile getirmemişlerdir. Üstelik bu kimseler bu sayıların hiçbir uygulaması olmayacağına da inanmışlardı. Bunlar tıpkı yüzünü bile görmedikleri ve neye benzediğini tasavvur dahi edemedikleri bir takım yaratıklara, hayal güçlerini zorlayarak elbise biçmeye çalışan bir terziye benziyorlardı. Terzinin diktiği elbiseye iyice uyan biri ara sıra ortaya çıkıyor ve dünyayı hayret ve memnunluk içinde bırakıyordu. Fakat matematikçilerin modern yaratışlarından çoğu, fizik dünyanın bilinen hiçbir safhasına uymamaktadır ve bu sembolik terzilerin, uygulama sahalarının bulunabilmesinden çok daha büyük bir hızla yeni tip matematikler yaratmaya devam edecekleri muhakkak gibi görünmektedir. Zira matematik henüz gerçek bir mükemmelliğe erişmiş değildir” **[25]**.

Sonuç olarak, matematiğin ya da daha genel olarak bir formel sistemin kural ve varsayımları keyfi seçilmiş uylaşımlardır. Gerektiğinde süreklilik prensibinden de vazgeçilebilir; yeter ki formel kurallar matematiği anlaşılması daha güç hale getirmesin, aksine onu daha güçlü kılsın.

Couturat’ nın aşağıdaki sözleri de matematikçilerin formalist yaklaşımlarını yansıtmaktadır: “Bir matematikçi, bir filozofun yapmak istediği gibi, büyüklüklerin kendisini tarife asla kalkışmaz; matematikçi sadece bunların eşitliklerini, toplamlarını, çarpımlarını v.s. tarif eder ve bu tarifler, büyüklüklerin bütün matematiksel özelliklerini tayin veya teşkil eder. Burada matematikçinin yaptığı şey, daha soyut ve daha formel bir tarzda, sembolleri meydana getirmek ve aynı zamanda bu sembollerin birleştirilme esaslarını koyan kuralları belirlemekten ibarettir. Bu kurallar, sembollerin karakterize edilmelerine ve bunlara bir matematik değer verilmesine yetmektedir. Kısaca burada matematikçi, keyfi olarak kabul ettiği şeylerle matematik varlıkları yaratmaktadır; tıpkı bir çok satrançççının, oyundaki hamleler arasındaki ilişkileri keyfi olarak kabul edilmiş şeyler olarak tarif etmesi gibi”.

Doğruyu bulma çabalarına ilişkin olarak, ünlü formalistlerden Hume ve Reichenbach’ ın 1938’ de ortaya koydukları şu savı da eklemek gerekir: “Empirik bir tez hiçbir zaman mutlak ve kesin olarak kanıtlanamaz; iddianın olabildiğince çok sayıda testte sokularak doğrulanması ancak belki doğruluk derecesini arttırabilir, onu asla kesinleştirmez. Sintaktik (işaretlerle oluşan) önermeler ise belki bize olgular hakkında bir şey söylemezler ama eğer oyunun kurallarına uyuyorlarsa, söyledikleri şey mutlak doğru ya da mutlak yanlıştır" **[14]**.

Bir de Descartes' ı dinleyelim: "Geometricilerin en çetin ispatlarına ulaşmak için izlemeye alışık oldukları uzun fakat aynı zamanda basit ve kolay olan çıkarım zincirlerine baktığımızda, başka alanlarda da bilgilerimizin böyle çıkarım zincirlerine dayanması gerektiği bana kaçınılmaz bir zorunluluk olarak gelmektedir. Gerçekten bu yoldan ulaşamayacağımız kadar uzak ya da bulamayacağımız kadar saklı bir doğru yoktur, yeter ki yanlış fikirleri doğru sanıp yola çıkmayalım ve bir adımdan diğerine geçerken çıkarımın gerekli düzenini korumuş olalım. Yalnız matematikçiler doğrulara ispat yoluyla giderler; onların yolundan gitmem gerektiği konusunda hiç kuşkum yok".

Buna karşın, indüksiyonun baş savunucularından olan Francis Bacon, "hataları pekiştirmeye ve onlara süreklilik kazandırmaya" yol açtığı için biçimsel mantık ve dolayısı ile dedüksiyondan kaçınmak gerektiğini savunur ve şöyle der: "Olguları ancak gözlemleyebildiğimiz kadarıyla anlayabiliriz. Tasım önermelerden, önermeler sözcüklerden oluşur; sözcükler ise kavramların simgeleridir. O halde eğer kavramların kendileri karışık ve olgulardan aceleye gelmiş soyutlamalar ise, bunlara dayanan mantık yapısı sağlam olamaz. Bu nedenle gerçek indüksiyon tek umudumuzu oluşturmaktadır; zihinsel tartışmalarla kurulan aksiyomlardan yeni olgular bulmak olanaksızdır; doğanın inceliği aklın inceliğini kat kat aşar. Geçmiş çağların tüm akıl ürünleri bir araya gelse de bunlara dayalı hipotezlerle bilimde hiçbir ilerleme sağlanamaz. Çünkü aklın, başlangıçtaki aşırı yanlışlıklarını daha sonraki yetkin ve düzenli işlemlerle giderme imkanı yoktur" **[10]**.

BÖLÜM 3

AKSİYOMATİK SİSTEMLERE DAİR

Aksiyomatik sistem fikrinin, Gödel' in makalesinde önemli bir yeri vardır. Çünkü, Hilbert' in aksiyomatik sistemlere ilişkin ortaya koyduğu programın her zaman karşısında yer almış olan Gödel, sonuçlarıyla tüm matematik dünyasını şaşırttığı kanıtlamasında, bu sistemlerin hiçbir zaman istenilen kesinlikte olamayacağının altını çizmiştir.

Bu bölümde; matematik tarihinin değişik dönemlerinde oluşturulmuş olan ünlü aksiyomatik sistemlerden; Cantor' a, Zermelo ve Fraenkel' e, Frege' e, Russell ve Whitehead' e ait olanları incelenmiş, Euclide' in Elemanlar adlı eserinin ve V. Postülat sorununun üzerinde özellikle durulmuştur. Bölümde ayrıca, Hilbert' in 1900 yılında Uluslararası Matematik Konferansı' nda yapmış olduğu ünlü konuşmaya ve ortaya koyduğu 23 büyük probleme de yer verilmiştir.

3.1 CANTOR KÜME TEORİSİ

Matematiksel teoriler, genellikle bir çok matematikçinin değişik zamanlarda ortaya koydukları bulguların uzun süreçlerden geçtikten sonra derlenip toparlanmasıyla oluşturulmuştur. Kümeler teorisi ise, büyük ölçüde sadece George Cantor' un (1845-1918) eseridir. Gerçi ilk çağlarda Elea' lı Zeno (M.Ö. 450), orta çağlarda Saksonya' lı Albert gibi sonsuzluğa ilişkin problemler üzerinde çalışan matematikçiler olmuştur; 1847' de Bolzano, bir sonsuz kümenin (sonlu kümelerden farklı olarak) bir öz alt kümesi ile birebir eşlenebileceğinin örneklerini vermiştir ve 19. yüzyılda başlayan kayda değer başka çalışmalar söz konusudur. Ancak, sonsuz kümeleri de içeren bir biçimsel küme teorisinin oluşumunda "aslan payı" Cantor' a aittir. Aşağıda, Cantor' u kümelere ilişkin bir teori oluşturmaya yönelten çalışmaları özetlenmiştir.

Cantor 1867-1871 aralığında daha çok sayılar teorisi ile ilgili eserler üretmiştir. 1872'de, İsviçre'de Richard Dedekind (1831-1916) ile tanıştıktan sonra, 1873-1879 aralığında verdiği eserlerde Dedekind' in derin ve soyut mantıksal düşünme tarzından etkilenmiş olarak küme teorisinin temellerini oluşturmaya başladı. Daha sonraki çalışmalarında, kümelerin denkliği, sayılabilirlik ve kardinalite konularını formalize etti. Bu arada çalışmaları, bu tür uğraşları yararsız bulan Kronecker tarafından tenkite uğramıştır.

Cantor 1872'de, "İki Fourier serisi $[-\pi,\pi]$ aralığında, sonlu sayıda nokta hariç (hemen) her yerde aynı limite yakınsarsa, bu iki serinin karşılıklı katsayıları eşittir" **[30]** teoremini ispatlamış ve hariç tutulan noktalar kümesinin en çok ne kadar genişletilebileceğini araştırmaya koyulmuştur. Önce,

$$A = \{ \frac{1}{n} \mid n \in N \}$$

gibi tek yığılma noktalı kümelerin hariç tutulması halinde de teoremin geçerli olduğunu kanıtlamış ve bunu,

$$B = \bigcup_{k=1}^{m} \{ a_k + \frac{1}{n} \mid n \in N, -\pi \leq a_k \leq \pi \}$$

gibi m tane yığılma noktası olan kümelere genelleştirmiştir. Bu sırada, kümelerin yığılma noktalarından oluşan türev kümesi kavramını tanımlayarak, bu kavramdan hareketle yığılma noktalarını sınıflandırmıştır. Bir C kümesinin türev kümesi D(C) ile gösterilirse, yukarıdaki kümeler için,

$$D(A) = \{0\} \quad , \quad D(B) = \{ a_1, a_2, \dots, a_m \}$$

olur. A, B gibi ya da

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{ a_k + \frac{1}{n} \mid n \in N \} \qquad , \qquad D(E) = \{ a_1, a_2, a_3, \dots \}$$

gibi, türev kümelerinin yığılma noktası olmayan kümelere Cantor, *1. cinsten yığılma noktasına sahip olan kümeler* **[19]** demiştir.

$$F = \{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \mid m, n \in N \}$$

kümesi için

$$D(F) = \{ \frac{1}{n} \mid n \in N \} \qquad , \qquad D(D(F)) = D^2(F) = \{0\}$$

olur ve bu F kümesinin türev kümesinin türev kümesi de bir yığılma noktası içerir. D(F)' nin elemanları F' nin 1. cinsten yığılma noktaları, D^2(F)' nin elemanı olan 0 ise, F' nin 2. cinsten yığılma noktasıdır.

Bu durum genelleştirilerek,

$$G = \{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k} \mid n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathrm{N}\}$$

$$D(G) = \{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_{k-1}} \mid n_1, n_2, \ldots, n_{k-1} \in \mathrm{N}\} \cup \{0\}$$

$$D^2(G) = \{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_{k-2}} \mid n_1, n_2, \ldots, n_{k-2} \in \mathrm{N}\} \cup \{0\}$$

.

.

.

$$D^{k-1}(G) = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathrm{N}\} \cup \{0\}$$

$$D^k(G) = \{0\}$$

1., 2. ve nihayet k. cinsten yığılma noktaları (0) olan kümeler söz konusu olur. Cantor, G gibi k. cinsten sonlu sayıda yığılma noktası olan kümelerin hariç tutulması halinde de teoreminin geçerli olduğunu kanıtlamıştır. Fakat hariç tutulan noktalar kümesi daha ne kadar genişletilebilirdi? İşte bu esnada Cantor' un kafasına, "sonsuz kümeler, elemanlarının miktarı bakımından sınıflandırılabilir mi ya da tüm sonsuz kümelerin eleman sayıları eşit midir?" sorusu takılmış olmalı. 1873' de Richard Dedekind' e, doğal sayılarla rasyonel sayılar arasında bir birebir eşleme oluşturarak bu iki kümenin aynı miktarda eleman içerdiğini kanıtladığını yazmıştır. Dedekind ise cevabında, tüm cebirsel sayıların bile doğal sayılarla birebir eşlenebildiğinin kanıtını göndermiştir. Cantor, Dedekind' e aynı yıl içinde yazdığı ikinci mektubunda, doğal sayıların reel sayılarla birebir eşlenemeyeceğini meşhur *diyagonal yöntemi*ni kullanarak kanıtlamıştır. O halde en az iki cins sonsuz küme vardır **[30]**:

1. Doğal sayılarla birebir eşlenebilen ve sayılabilir sonsuz denilen kümeler.

2. Doğal sayılarla birebir eşlenemeyen ve o halde ondan daha büyük bir sonsuzluk içeren sayılamayan kümeler.

Üstelik Cantor, buradan hareketle, transandant sayıların var olmakla kalmayıp 2. cinsten sonsuzluğa da sahip olduklarını 1874' de basitçe kanıtlamıştır . Sonraki üç yıl iki boyutlu sürekliliğin bir boyutludan daha çok nokta içerdiğini kanıtlama çabası ile geçmiş fakat bunu başaramayınca, "o halde bunlar denk olmalı" hipotezinden yola çıkarak, basit bir birebir eşleme ile hipotezini yine Dedekind' e yazdığı bir mektupta 1877' de kanıtlamıştır.

Fakat bunun, boyut kavramı ile çelişir gibi görünmesinden doğan endişelerini de Dedekind 'e iletmiştir. Dedekind ise cevabında, Cantor' un eşlemesinin süreksiz olduğunu ve farklı boyutlu uzaylar arasında sürekli ve bijektif eşlemelerin olamayacağını tahmin ettiğini bildirmiştir. Gerçi, 1890'da Peano ve 1891' de Hilbert bir doğru parçasından bir dikdörtgen üzerine sürjektif, sürekli fonksiyonlar bulmuşlardı fakat bunlar injektif değildi. Dedekind'in tahminini 1911' de L. Brouwer kanıtlamıştır.

Cantor 1878' de *kontinum hipotez*ini ortaya atmıştır. Sayılabilir kümelerin kardinal sayısı ile kontinumun kardinal sayısı arasında bir kardinal sayı yoktur. Yani bir sonsuz küme, ya sayılabilirdir ya da en az kontinum kuvvetindedir. Cantor bu hipotezini ispatlamak için, bir F kümesinin sonlu k. mertebeden türev kümesi $D^k(F)$ (kısaca D^k) kavramını genişleterek, sonsuz mertebeden yığılma noktası olan kümelerin türev kümelerini aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$$D^{w} = \bigcap_{k \in N} D^{k} \quad , \quad D^{w+1} \quad , \ldots , \quad D^{w+k} = D(D^{w+k-1}) \quad , \ldots$$

$$D^{2w} = \bigcap_{k \in N} D^{w+k} \quad , \quad D^{2w+1} \quad , \ldots , \quad D^{2w+k} = D(D^{2w+k-1}) \quad , \ldots$$

$$D^{3w} = \bigcap_{k \in N} D^{2w+k} \quad , \ldots$$

.
.
.

$$D^{w^2} = \bigcap_{k \in N} D^{kw} \quad , \ldots$$

.
.
.

$$D^{w^w} = \bigcap_{k \in N} D^{w^k} \quad , \ldots$$

.
.
.

Cantor, bu türev kümelerinden hareketle, *transfini ordinal sayılar* **[30]** kavramını tanımlamış ve bunları aşağıdaki gibi sıralamış ve sınıflandırmıştır:

Doğal sayılar yani N={1, 2, 3,...} kümesinin elemanları 1. sınıftan ordinal sayılardır. Tüm doğal sayılardan sonra gelen ilk transfini ordinal sayı w' dir. Tüm sonlu k' lar için $w+k$' dan sonra gelen ilk transfini ordinal $2w$' dir. Tüm $2w+k$' lardan sonra $3w$, tüm (sonlu k, l için) $kw+l$' lerden sonra w^2, tüm (sonlu n_1, $n_2,...,n_k$, k için) $n_k w^k +...+n_2 w + n_1$' lerden sonra w^w, sonlu sayılar ve w arasında toplama, çarpma ve üs alma işlemleri yapılarak elde edilebilecek tüm ordinallerden sonra gelen ilk ordinal de ε_0 'dır.

Buna göre,

$$1 < 2 <...< w < w+1 <...< 2w < 2w+1 <...< w^2 < w^3 <...< n_k w^k +...+n_2 w + n_1 <...< w^w <...< \varepsilon_0$$

olur. Kendinden önce gelenlerin kümesi sayılabilir sonsuz kardinalitesinde olan tüm ordinallere 2. sınıf ordinal sayı denir. Tüm 2. sınıf ordinallerden sonra gelen ilk transfini ordinal sayı w_1' dir. Buna göre w_1 3. sınıf ordinal sayıların ilkidir. Cantor, tüm 2. sınıf ordinallerden oluşan O_2 kümesinin en küçük sayılamayan küme olduğunu kanıtlamıştır. O halde Cantor hipotezinin kanıtlanabilmesi için O_2' nin kontinuma denk olduğunu kanıtlamak yeter. Fakat Cantor da, sonrakiler de bunu başaramamışlardır. Cantor' un hipotezini kanıtlama çalışmaları, kendi küme teorisinde bazı tutarsızlıklarla karşılaşıncaya kadar sürmüştür.

Küme kavramı ve bunu bir teori haline getirmeye yönelik ciddi çalışmalar 19. yy.' da başlamıştır. George Peacock (1791-1858), *Treatise on Algebra* adlı eseri ile aritmetik, cebir kavramlarına ilişkin matematiksel reformun öncülerindendir. Duncan Gregory (1806-1871), William Rowan Hamilton (1805-1865), Augustus De Morgan (1806-1871), cebrin biçimselleştirilmesi yolunda önemli katkılar yapmışlardır. George Boole (1815-1864) 1854' de basılmış olan *Investigation of the Laws of Thought* adlı eserinde, kümeler ve mantığa ilişkin cebirin (daha önceki çalışmaları da içeren) bir biçimselleştirmesini gerçekleştirmiştir.

Fakat tüm bunlar esas olarak sonlu kümelere ilişkin çalışmalardı. Sonsuz kümeleri de içeren ilk ciddi küme teorisi George Cantor' a ait olanıdır. Daha önce sözünü ettiğimiz gibi, Cantor sonsuz kümeleri karşılaştırma gereksinimini, Fourier serilerine ilişkin 1870' lerde yaptığı çalışmalar sırasında duymuştu.

Cantor orijinli küme teorisi, *tüm kümelerden oluşan mutlak bir evrensel kümenin varlığı* varsayımını temel almıştır. Kümeler x, y, z,...değişkenleri ile gösterilir. Tek bir eleman, bir elemanlı küme olarak addedilir. Eleman olma ($\in$) ve eşitlik ($=$) sezgisel olarak alışılmış anlamlarında kullanılır. Mantığın tüm aksiyomları, sonuç çıkarma kuralları, $\forall$, $\exists$ gibi niceleyiciler ve diğer semboller, küme teorisinde geçerlidir; teorinin formülleri, atomik önermelerin v.d. sembolleştirilmesi bunlardan hareketle elde edilir. Örnek olarak, "x boş kümedir", "x tek elemanlıdır" önermeleri, mantıksal notasyonlarla aşağıdaki gibi simgeleştirilir:

$$\forall y\,(\,y \notin x\,)$$

$$\exists y\; \forall z\,(\,z \in x \Rightarrow z = y\,)$$

İki kümenin eşitliğinden, aşağıdaki mantıksal gerektirme açık olarak çıkar:

$$x = y \Rightarrow \forall z\,(\,z \in x \Leftrightarrow z \in y\,)$$

Ancak bunun karşıtı açık değildir ve onu bir aksiyom olarak kabul etmeliyiz. Extensionality aksiyomu:

$$\forall z\,(\,z \in x \Leftrightarrow z \in y\,) \Rightarrow x = y \quad \text{...}(A_1)$$

F(y) bir açık önerme olmak üzere, bir x kümesini, F' yi doğru kılan tüm y' lerin kümesi olarak ele alabiliriz. Buna göre *Comprehension Axiom Schema* denilen ve

$$\exists x\; \forall y\,(\,y \in x \Leftrightarrow F(y)\,) \quad \text{..}(A_2(F))$$

şeklinde formüle edilen varsayım,

$$x = \{\,y \mid F(y)\,\}$$

kümesini tanımlar. Bu aksiyom yardımıyla örnek olarak bir boş x kümesinin varlığı da, $F(y) \equiv y \neq y$ alınarak,

$$\exists x\; \forall y\,(\,y \in x \Leftrightarrow y \neq y\,)$$

oluşundan hareketle,

$$\varnothing = \{\,y \mid y \neq y\,\}$$

bulunarak kanıtlanmış olur. C.A.S.'dan hareketle,

$\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\},\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, ...

kümelerinin varlığı ve en az bir sonsuz kümenin varlığı da kanıtlanabilir. Böylece hiçlikten sonsuzluğun türetilmesi ilginçtir [21].

$A_2(F)$ aksiyomu olası tüm F' ler için bir küme tanımlar. Böylece A_1 ve tüm $A_2(F)$' ler, Cantor' un sezgisel olarak kabul ettiği ve kullandığı, fakat bir formalizasyonunu vermediği seçme aksiyomu ile birlikte hemen tüm Cantor küme teorisinin varsayımlarını oluşturur. Örnek olarak, "tüm sonsuz kümelerin sayılabilir sonsuz alt kümeleri vardır" teoreminin ispatında Cantor keyfi seçmenin yapılabileceğinin apaçık olduğunu düşünmüş olmalıdır. Cantor 1883' de ortaya koyduğu "iyi tanımlı her küme iyi sıralanabilirdir" teoreminde de seçme aksiyomunu sezgisel olarak kullanmıştır. Bu teorem, 1938' de Kurt Gödel tarafından "inşa edilebilir her küme iyi sıralanabilirdir" şeklinde ele alınarak kanıtlanmıştır.

Cantor' un, 1884'de Halle' den Berlin üniversitesine geçme isteği Schwarz ve Kronecker tarafından engellendi. 1884' de Mittag Leffler' e, Kronecker' i tenkit eden 52 mektup yazdı. Aynı yıl kendi çalışmalarına karşı bir güvensizlik duyar gibi olduysa da 1885 başlarında yeniden güven kazandı. Sonraki çalışmalarında kardinal ve ordinal sayılarla ilgili çalışmalarını sürdürdü; 1895 ve 1897' de küme teorisi ile ilgili ilk kitaplarını yayınladı. Bağımsız olarak Felix Bernstein ve E. Schröder tarafından da ispatlanan ve *Schröder-Bernstein Teoremi* diye de anılan ünlü teoremini de, Cantor bu dönemde ispatlamıştır. Ancak 1897' de küme teorisine ilişkin ilk basılmış paradoks Cesare Burali-Forti (1861-1931) tarafından yayınlandı. Ancak bu paradoks, Burali-Forti' nin *iyi sıralanmış küme* tanımını yanlış yapmasından dolayı biraz göğüslenebildiyse de, gerçekte tanım doğru yapılsa da paradoks hala vardı! Paradoks kısaca şöyledir: "Tüm ordinallerin kümesi de bir ordinaldir" [19]. Cantor, teorisindeki bu paradoksu 1885'de görmüş ve hatta bunu 1886'da Hilbert' e yazmıştır. 1897'de Zürih' de yapılan ilk uluslararası matematik kongresinde Cantor' un çalışmaları özellikle Hurwitz ve Hadamard tarafından övgüyle ele alındı.

1899'da Cantor, *tüm kümelerin kümesi*ni ele almaktan kaynaklanan ünlü paradoksunu keşfetti. Oysa ki her kardinalden daha büyüğü olduğunu kendisi kanıtlamıştı. Russell' ın 1902'de ve bağımsız olarak Zermelo' nun bulduğu ünlü

Russell Paradoksu bu konuda son nokta olmuştur. Aslında Russell, Frege' in matematiği biçimselleştirmesine ilişkin çalışmasında paradoksu ortaya çıkarmıştır. Fakat Cantor teorisinde de aynı paradoks ortaya çıkar:

Normal olarak, $\varnothing \notin \varnothing$' de apaçık olduğu gibi, kümeler kendilerinin elemanı olmazlar; yani $x \notin x$' dir. Fakat Cantor küme teorisinin aksiyomlarında $x \in x$ olmasını engelleyen bir kayıt yoktur. $x \in x$ koşulunu sağlayan kümelere *anormal*, $x \notin x$ koşulunu sağlayanlara da *normal* kümeler diyelim. Tüm normal kümelerin kümesi x olsun. C2(F) gereğince

$$\exists x \, \forall y \, (y \in x \Leftrightarrow y \notin y)$$

olup,

$$x = \{ y \mid y \notin y \}$$

kümesi vardır. Şimdi x ile y' yi değiştirirsek, açıkça bir paradoks olan,

$$\exists x \, (x \in x \Leftrightarrow x \notin x)$$

elde edilir. Sonuç olarak C2(F) comprehension aksiyomlarından en az biri çelişkiye yol açmaktadır ve kısıtlanmamış bir C.A.S., küme teorisine temel olamaz.

Russell, paradoksunu Frege' e yazdığında, Frege matematiğin temellerine ilişkin ünlü eserine, "aritmetik sendeliyor" diyerek şunları eklemiştir:

"Bir bilim adamı için tamamladığı çalışmasının dayandığı temelin birden çökmesinden daha tatsız hiçbir şey olamaz. Yapıtım tam basımevinden çıkmak üzereyken Bertrand Russell' dan aldığım bir mektup benim için işte böyle bir tatsızlık yarattı" **[20]**.

Cantor, Dedekind ve Frege, aşağı yukarı yirmi yıl boyunca çalışmalarını sınırsız bir C.A.S. varsayımı üzerine yürüttüler. Onların çalışmaları matematiğin gelişiminde kuşkusuz büyük önem taşımaktadır. Ancak paradoksların ortaya çıkmasının verdiği demoralizasyondan olsa gerek, sonraki çalışmalarında kayda değer bir yenilik görülmez. Fakat onların etkileri matematiğin çeşitli alanlarında önemli gelişmelere yol açmıştır.

Örnek olarak Lebesque, küme teorisinin kavramlarını kullanarak 1901' de *ölçüm teorisi*ni ve 1902' de *Lebesque integral teorisi*ni oluşturmuştur. Kronecker gibi bir çok matematikçide hakim olan sezgiselci anlayış, yerini biçimselleştirme anlayışına bırakmıştır. Paradoksların ortaya çıkışıyla küme teorisinden vazgeçme değil, aksine, aksiyomlarını yeniden gözden geçirerek onu güçlendirme inancı yaygınlaşmıştır. Giderek, hemen tüm matematik disiplinleri küme teorisini temel alarak yeniden düzenlenmiştir.

Cantor' un oluşturduğu küme teorisi, hem sonlu hem de sonsuz kümeleri içeriyordu ve 1890' lara kadar büyük kabul gördü. Fakat bu teori, tüm kümelerden oluşan mutlak bir evrensel kümenin varsayılması üzerine kurulmuştu ve bu yine Cantor' un 1895' de keşfettiği "her kümeden daha büyüğü vardır" teoremiyle çelişiyordu. 1897' de Burali-Forti başka bir paradoks ortaya koydu. Russell 1901' de, kendi adıyla anılan Russell Paradoksu' nu net bir şekilde ortaya koyunca da Cantor küme teorisinin tutarsızlığı açıkça ortaya çıkmıştır. Frege' e göre "Russell Paradoksu matematiğin tümünü sarsmıştır" **[21]**.

B.Russell ve A.N.Whitehead (1861-1947), bu sarsıntının verdiği zararı ortadan kaldırmak ve matematiği sağlam bir mantıksal temele oturtmak için ünlü *Principia Mathematica*' yı yazmışlardır. Bu kitapta *Tipler Teorisi* olarak bilinen bir kavramlar hiyerarşisi oluşturarak, bu çerçevede bir küme teorisi geliştirdiler.

Her şeye rağmen Cantor teorisinin 20.yy. matematiğinde önemli çok önemli bir yeri vardır. Bu yeri David Hilbert' in (1862-1943), belki heyecan ve abartı içeren fakat olayı özetleyen şu ifadelerinde bulabiliriz:

"Hiç kimse bizi Cantor' un bizim için yarattığı cennetten kovamaz. Gerçekten bu cennette hemen hemen hiçlik ile sonsuzluk eşittir ve daha nice sürprizler vardır" **[20]**.

Zermelo 1908' de ilk kez küme teorisini aksiyomatikleştirme girişiminde bulunmuştur. Fraenkel, Von Neumann, Bernays ve Gödel bu konuda önemli adımlar atmışlardır. Gödel, bir çok matematikçinin (Frege ve Hilbert gibi) başaramadığı ve kabul etmekte zorlandıkları, matematiğin sınırlarını çizdiği teoremleriyle konuya neredeyse son noktayı koymuştur.

3.2 ZERMELO–FRAENKEL AKSİYOMLARI

Comprehension Axiom Schema (C.A.S.)' nın sınırlandırılması ilk kez 1908' de Zermelo tarafından gerçekleştirilmiştir **[31]**.

$C2[F] : \exists x\ \forall y\ (\ y \in x \Leftrightarrow F(y)\ )$

aksiyomu, kümelere ilişkin her F formülüne karşılık bir,

$x = \{\ y \mid F(y)\ \}$

kümesinin var olduğunu bildirmektedir. Fakat F(y) olarak,

$F(y) \equiv \sim (\ y \in y\ )$

aldığımızda ortaya çıkan,

$x = \{\ y \mid \sim (\ y \in y\ )\ \}$

kümesi y yerine konulursa,

$x \in x \Leftrightarrow x \notin x$

Russell Paradoksu elde edilmektedir. Bunu önlemek için, her F formülünün bir küme tanımladığı C2 aksiyomunu sınırlandırmak zorundayız. En azından bizi bir paradoksa götüren formüller küme tanımlamamalıdır. Şimdi her F formülünün (küme yerine) *sınıf* **[17]** denilen bir koleksiyonu tanımladığını varsayalım. Yani, F özelliğini taşıyan tüm y' lerin sınıfı,

$A = \{\ y \mid F(y)\ \}$

olsun. y, birtakım $z_1, z_2, ..., z_n$ keyfi kümesel parametrelerine de bağlı olabilir. Bu durumu da kapsaması bakımından,

$A = \{\ y \mid F(y, z_1, z_2, ..., z_n)\ \}$

yazılışını tercih edelim. Şimdi her kümenin bir sınıf olduğunu ispatlayabiliriz. Gerçekten bir x kümesi, $F(y) \equiv y \notin x$ için

$\{y \mid\ y \in x\ \}$.

sınıfıdır. Fakat örnek olarak Russell sınıfı

$\{\ y \mid \sim (\ y \in y\ )\ \}$

Russell Paradoksu' na yol açtığından bir küme değildir. Küme olmayan sınıflara *öz sınıf* diyelim. Küme teorisinde karşılaşacağımız her paradoksun bir öz sınıf doğuracağını söyleyebiliriz. Cantor teorisinde, C2[F] aksiyomu gereğince her sınıfın bir küme olduğunu da kaydedelim.

Zermelo' nun önerdiği küme teorisi formülasyonunda, Cantor küme teorisinin formel dili aynen geçerlidir ve

$$C1 : \forall z\,(\,z \in x \Leftrightarrow z \in y\,) \Rightarrow x = y$$

Extensionality Aksiyomu yine ilk aksiyom olarak alınır. İkinci aksiyom, *Separation Axiom Schema* (S.A.S.) **[32]** olarak bilinir. Eğer $F(y, z_1, z_2, ..., z_n)$, $y, z_1, z_2, ..., z_n$' i içeren fakat x ve z' yi içermeyen bir kümesel formül ise,

$$\exists z\, \forall y\, (\,y \in z \Leftrightarrow y \in x \wedge F(y, z_1, z_2, ..., z_n)) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots C2_1[F]$$

önermesi doğrudur. Buna göre, bir x kümesinin F' i sağlayan her elemanı bir z kümesi tanımlar. Cantor küme teorisinin tüm formülasyonu ve kümeler arasındaki operasyonlar, orada küme-sınıf ayırımı olmadığı için, sınıflar için de geçerlidir. $C2_1[F]$ aksiyomunu, sınıflar terminolojisiyle, F formülünün A sınıfını tanımladığını varsayarsak, "bir A sınıfı ile bir X kümesinin kesişimi bir $Z = A \cap X$ kümesidir", şeklinde yorumlayabiliriz.

$C2_1[F]$ ve C1 aksiyomlarından hareketle, $F(y) \equiv \sim(y = y)$ alarak boş kümenin varlığını ve tekliğini kanıtlayabiliriz. Yine "iki kümenin kesişimi ve farkı da bir kümedir", "$A \subset B$ ve A öz sınıf ise B' de öz sınıftır" gibi teoremler de kanıtlanabilir. Son önermeden hareketle, örnek olarak,

$$\{\,x \mid \sim(x \in x\,)\,\} \subset \{\,x \mid x = x\,\}$$

ve Russell sınıfının bir öz sınıf oluşundan,

$$\{\,x \mid x = x\,\}$$

kümesinin de bir öz sınıf olduğu görülür.

$C2_1[F]$ aksiyomu, herhangi kümelerden hareketle, daha küçük kümelerin varlığını kabul eder. Eldekilerden daha büyük (kapsamlı) kümeler oluşturmak için gereken aksiyomlardan ilki *Pairing Aksiyomu*' dur (P.A.) **[32]**:

$$\forall x_1\, \forall x_2\, \exists z\, \forall y\, (y \in z \Leftrightarrow y = x_1 \vee y = x_2\,) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots C2_2$$

$C2_2$ aksiyomuna göre x_1, x_2 kümeler ise $\{x_1, x_2\}$' nin de bir küme olduğu bildirilmektedir. Gerçekte $C2_2$

$$C2\,[y = x_1 \vee y = x_2]$$

C.A.' na denktir. Fakat biz C2[F]' yi, $C2_1$[F] ile sınırlandırdığımız için, $C2_2$' yi ayrıca kabul etmeliyiz.

$\{x_1, x_2\}$ kümesi elde edildikten sonra, N. Wiener ve K. Kuratowski tarafından (x_1, x_2) sıralı ikilisi,

$$(x_1, x_2) = \{\, \{x_1\}, \{\, x_1, x_2 \,\} \,\}$$

olarak tanımlanmıştır. Bu tanımdan hareketle

$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \Rightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2$$

$$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow (x_1, x_2) \neq (x_2, x_1)$$

olduğu ispatlanır. Kümelerin çarpımı,

$$A \times B = \{\, (x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \,\}$$
$$= \{z \mid \exists x\, \exists y\, (x \in A \wedge y \in B) \wedge z = (x,y)\}$$

şeklinde tanımlanır.

$$\forall z\, (\, z \in Q \Rightarrow \exists x\, \exists y,\, z = (x,y))$$

ise

$$Q = \{z \mid F(z)\,\}$$
$$= \{\, (x,y) \mid F(x,y)\,\}$$

sıralı ikililer sınıfına *ikili bağıntı* denir. Bir B sınıfının birleşimi,

$$\cup B = \{y \mid \exists z\, (\, y \in z \wedge z \in B\,)\}$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak,

$$\cup\{x, y\} = x \cup y$$

olur. *Birleşim Aksiyomu* (B.A.) **[32]**;

$$\forall x\, \exists u\, (\, \forall y\, (\, y{\in}u \Leftrightarrow \exists z\, (y{\in}z \wedge z{\in}x\,)) \text{..} C2_3$$

eğer x bir küme ise, $\cup x$' in de bir küme olduğunu ifade eder. *Kuvvet Kümesi Aksiyomu* **[33]**;

$\forall x \, \exists z \, \forall y \, (y \in z \Leftrightarrow (y \Leftarrow x))$..C$2_4$

$P(x) = \{ y \mid y \Leftarrow x \}$

şeklindedir. Buradan hareketle iki kümenin çarpımının da bir küme olduğu ispatlanabilir. F fonksiyonu,

$(u, v_1) \in F \wedge (u, v_2) \in F \Rightarrow v_1 = v_2$

mapping özelliği olan F bağıntısı olarak tanımlanmıştır. Tüm bu kavramlar, Zermelo' nun 1908' de yayınladığı *Untersuchungen veber die Grundlagen Der Mengenlehre* adlı makalesinde yer almaktadır.

Abraham Fraenkel, 1921' deki *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre* adlı makalesinde, F bir fonksiyon ise herhangi bir B sınıfının F-imajını

$F'' B = \{v \mid \exists u \, (u \in B \wedge F(u) = v) \}$

şeklinde tanıtmıştır ve

F bir fonksiyon $\Rightarrow \forall b \, \exists c \, F'' b = c$

olmasını sağlayan,

$\forall u \, \forall v_1 \, \forall v_2 \, (F(u, v_1, z_1,..., z_n) \wedge F(u, v_2, z_1,..., z_n) \Rightarrow v_1 = v_2) \Rightarrow$

$\forall b \, \exists c \, \forall y \, (y \in c \Leftrightarrow \exists x \, (x \in b \wedge F(x, y, z_1,..., z_n)))$..............................C2_5[F]

Replacement Axiom Schema (R.A.S.) **[34]** tanımını vermiştir. J. Mycielski, C2_1, C2_4 ve C2_5' den C2_2' nin elde edilebileceğini göstermiştir. Bunlara ek olarak, N doğal sayıları göstermek üzere,

$\exists x \, \forall y \, (y \in x \Leftrightarrow y \in N)$..C$2_6$

şeklinde ifade edilen *Sonsuzluk Aksiyomu* **[33]** ve *Seçme Aksiyomu*' nu **[35]**;

$\forall x(\forall y(y \in x \Rightarrow y \neq \varnothing) \Rightarrow \exists f \, (f \text{ fonk.} \wedge \text{dom}(f) = x \wedge \forall y(y \in x \Rightarrow f(y) \in y)$...(A.C.)

ve *Regularity Aksiyomu*' nu **[33]**;

$\sim \exists x \, (\exists y \, (y \in x) \wedge \forall y \, (y \in x \Rightarrow \exists z \, (z \in x \wedge z \in y)))$............................C3

küme teorisine dahil etmiştir.

C1, C2_1, C2_2, C2_3, C2_4, C2_5, C2_6 ve C3 aksiyomlarından hareketle oluşturulan küme teorisine, *Zermelo-Fraenkel Küme Teorisi* denir ve kısaca ZF ile gösterilir. Zermelo' nun aksiyom listesinde A.C.' da vardır. 1938' de Kurt Gödel, ZF+AC tutarlı bir teori oluşturursa, ZF' nin de tutarlı olacağını göstermiştir. ZF+AC kısaca ZFC **[35]** olarak anılır ve ZFC' den hareketle Cantor küme teorisinin tüm teoremleri kanıtlanabilir. Cantor, Zermelo, Fraenkel, Frege, Russell, Von Neumann ve diğerlerinin derleyip toparladıkları küme teorisi ile 19.yy. sonunda bilinen tüm matematiksel disiplinleri yeniden düzenlemek mümkün olmuş ve bu durum, varolan matematiği bir biçimsel teori haline getirebilmeyi amaçlayan Hilbert programının ilk aşamasını oluşturmuştur.

3.3 SEÇME AKSİYOMU VE EŞDEĞERLERİ

Seçme Aksiyomu' nun (A.C.) ilk kez Peano tarafından 1890' da bir diferansiyel denklem sisteminin çözümlerinin varlık ispatında kullanıldığı kabul edilir. 1902' de Beppo Levi tarafından da konu edilmiştir. A.C.' nin ilk formel ifadesi 1904' de Zermelo tarafından, iyi sıralama teoreminin ispatında kullanılmak üzere yapılmıştır. A.C., Cantor tarafından da, herhangi bir kabul ya da ispat yapılmaksızın kullanılmıştır. Emile-Borel, seçme aksiyomunun Zermelo teoremine denk olduğunu kanıtlamıştır. Gödel 1940' da, Seçme Aksiyomu' nun yanlışlığının, küme teorisinin diğer aksiyomlarından hareketle kanıtlanamayacağını göstermiş olup 1963' de Paul Cohen A.C.' nin küme teorisinin diğer aksiyomlarından bağımsız olduğunu kanıtlamıştır.

A.C. hakkındaki tartışmalar yıllarca sürmüştür ve bunlar matematikteki son büyük anlaşmazlık olarak kabul edilir.

Zermelo' nun formülasyonu şöyledir **[35]** : Eğer bir x kümesinin tüm elemanları boş olmayan kümeler ise, x' in her y elemanına y içinde bir f(y) karşılık gelecek şekilde, *seçme fonksiyonu* denilen bir f fonksiyonu vardır. En azından boş olmayan kümelerin her ailesi için böyle bir seçme fonksiyonunun bulunabileceğini varsayabiliriz. O halde,

$$\forall x\,(\forall y\,(y \in x \Rightarrow y \neq \text{boş}) \Rightarrow \exists f\,(f \text{ fonk.} \wedge \text{dom}(f) = x \wedge \forall y\,(y \in x \Rightarrow f(y) \in y)))......(\text{A.C.})$$

yazılabilir. Zermelo, *Keyfi Seçme Prensibi* diyebileceğimiz bu aksiyomu (apaçıkmış gibi) kullanarak 1904' de *Beweiss dass jede Menge wohlgeordnet werden kann* adlı makalesinde iyi sıralama teoremini kanıtlamıştır. Cantor' da A.C.' yi , "her sonsuz kümenin sayılabilir sonsuz bir alt kümesi vardır" teoreminin ispatında kullanmıştır.

A.C. bir *comprehension* aksiyomu değildir. Seçme fonksiyonu için z = f(y) şeklindeki bir kuralın açıkça ortaya konulup konulmayacağı A.C.' de konu edilmez. *Keyfi Seçme Prensibi* ifadesinden de A.C.' nin *non-constructive* (inşa edilemez) karakteri anlaşılabilir. Yani A.C. ile, herhangi belirli bir kural vermeksizin çeşitli şekillerde seçmenin yapılabileceği varsayılmaktadır.

A.C. hakkındaki tartışmalar, "vardır" sözcüğünün değişik yorumlanmalarından kaynaklanmıştır. Konstruktivistler' e göre, eğer "vardır" sözcüğü "bulunabilir" anlamında kullanılırsa, A.C. yanlış olur. Çünkü, örnek olarak, R gerçel sayılar kümesinin tüm alt kümelerinin P(R) ailesi üzerinde;

$f: P(R) \rightarrow R$

$f(X) \in X$

şeklinde, X' lerin f altındaki görüntülerini açıkça bildiren belirli bir f seçme fonksiyonu bulunamaz. Buna karşın,

$f: P(N) \rightarrow N$

$f(X) = \min X \in X$

fonksiyonu, N doğal sayılar kümesinin tüm alt kümelerinin P(N) ailesi üzerinde, her alt kümeye bu kümenin minimum elemanını karşılık getiren, tamamen belirli bir seçme fonksiyonudur; yani burada bir seçme fonksiyonu bulunmuştur. Genel kanı şudur ki, A.C.' de geçen "vardır" sözcüğü, sadece böyle bir seçme fonksiyonunun mevcut olduğunu kasteder ve fonksiyon için ille de belirli bir kuralın ortaya koyulabildiğini savunmaz.

Sezgisel olarak A.C. apaçık gibi görünür. Hatta en az bir seçme fonksiyonunun mevcut olmasının ötesinde, örnek olarak P(R) için sonsuz çoklukta seçme fonksiyonunun var olduğu da apaçıktır. Bu apaçıklık Euclide' in paralellik aksiyomundaki sezgisel apaçıklık gibidir; diğer aksiyomlardan hareketle ne kanıtlanabilir ne de çürütülebilir. Gödel ve Cohen' in ortaya koyduğu modellerden anlaşılır ki, çalışılan herhangi bir matematiksel evrende A.C.' yi kabul etmek ya da etmemekten ötürü bir çelişki ile karşılaşılmaz.

Birçok matematiksel alan çalışmalarında A.C.' nin kabulü işleri kolaylaştırır. Örnek olarak fonksiyonel analizde, yalnızca ayrılabilir uzaylarla ilgili çalışılıyorsa A.C. yerine, onun daha zayıf bir formu olan ve yalnızca keyfi bir dizinin seçilebilmesine izin veren *Sayılabilir Seçme* (C.C.) **[31,35]**, aksiyom olarak alınabilir.

A.C., matematiğin bazı alanlarında işleri kolaylaştırmasına karşın paradoksal görünen bazı sonuçlara da yol açması nedeniyle uygulamalı matematikçileri bazen rahatsız eder. A.C.' den kaynaklanan ilginç bir sonuç *Banach-Tarski Paradoxical Decomposition* olarak bilinir:

Banach ve Tarski, bir küreyi uygun şekilde parçalara ayırıp sonra bu parçaları yeniden bir araya getirerek, bu küreden aynı hacimde iki kürenin elde edilebileceğini A.C.' yi kullanarak kanıtlamışlardır. *Maddenin Korunumu* prensibi ile çelişir görünmesinden dolayı bu dekompozisyon (yeniden oluşturma), Banach-Tarski Paradoksu **[36]** adını alır. Fakat söz konusu olan hacmin fiziksel hacim değil Lebesque ölçüm teorisine göre tanımlanan hacim olması nedeniyle bu dekompozisyon, maddenin korunumu prensibi ile ilgili olmayıp, ölçüm teorisi kavramları çerçevesinde bir çelişkiye yol açmaz.

A.C. ile ilgili ilginç bir çalışma Z tamsayılar kümesi üzerindeki *filtre*ler (filter) ile ilgilidir **[31]**. Tam sayılarda bir *Filter* diye, P(Z)' nin elemanlarından aşağıdaki koşulları sağlayanların bir $\mathcal{A}$ sınıfı içinde toplanmalarını sağlayan yönteme diyelim:

1. $\mathcal{A} \subset P(Z)$

2. $A \in \mathcal{A}\ , A \subset B \Rightarrow B \in \mathcal{A}$

3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

4. $\varnothing \notin \mathcal{A}$

örnek olarak,

$$\mathcal{A}_1 = \{ X \mid |\setminus X| < \aleph_0 \}$$

ailesi 1.2.3.4. koşullarını sağlar. Bir *Ultrafilter*, yukarıdaki dört koşulla birlikte,

5. $A \subset Z \Rightarrow A \in \mathcal{A} \ \vee \ \setminus A \in \mathcal{A}$

koşulunu da sağlayan bir $\mathcal{A}$ ailesine denir. $\mathcal{A}_1$' in 5. koşulu sağlamadığı açıktır. Fakat örnek olarak,

$$\mathcal{A}_2 = \{ X \mid 1 \in X \}$$

ailesi beş koşulu da sağlar ve bir *Ultrafilter*' dır. Bir *Nonprincipal Ultrafilter* (N.U.) yukarıdaki beş koşulla birlikte,

6. $|A| < \aleph_0 \Rightarrow A \notin \mathcal{A}$

koşulunu da sağlar. Bir N.U.' ın varlığı A.C. kullanılarak ispatlanabilir. Fakat *Filter* ve *Nonfilter* örneklerinde olduğu gibi açık bir N.U. örneği verilemez.

Bertrand Russell, A.C.' nin hangi durumlarda gerekli olacağını anlatan aşağıdaki benzetmeyi yapmıştır:

"Sonsuz çoklukta çorap çiftinin her birinden bir çorap seçmek A.C.' yi gerektirir. Fakat sonsuz çoklukta ayakkabı çiftinin her birinden bir ayakkabı seçmek A.C.' yi gerektirmez!" **[35]**.

Seçme Aksiyomu' nun apaçık olmasının yanında, kendisine denk olduğu kanıtlanabilen fakat hiç de açık olmayan önermeler vardır. Örnek olarak *İyi Sıralama Prensibi*, sezgisel olarak sanki paradoksmuş gibi görünür ve kabul etmekte zorlanılır. *Zorn Lemması*' da anlaşılması zor, karmaşık bir önerme gibi görünür. Aşağıda bunların aslında eşdeğer önermeler olduklarının formel bir kanıtı verilecektir.

Eric Schechter' in *Handbook of Analysis and its Foundations* adlı kitabında, A.C.' nin 27 değişik formunun bulunduğu bildirilmiş olup bazıları şunlardır:

$\mathcal{A} = \{ A_i \mid i \in I \Rightarrow A_i \neq \varnothing, I \neq \varnothing \}$ olmak üzere,

1. $\prod_{i \in I} A_i \neq \varnothing$

2. $\exists f (f : \mathcal{A} \rightarrow \cup\mathcal{A}, f(A_i) \in A_i)$

3. $\exists f (f : I \rightarrow \cup\mathcal{A}, f(i) \in A_i)$

4. $\{ f \mid f : I \cup\mathcal{A}, f(i) \in A_i \} \neq \varnothing$

5. $\exists B (i \in I \Rightarrow | B \cap A_i | = 1)$

Bunların tümü, boş olmayan kümelerin boş olmayan bir ailesinin her bir elemanından bir elemanın seçilebileceğini, yani bu aile üzerinde, ailenin her bir A kümesine A' nın bir elemanını karşılık getiren bir f fonksiyonunun varlığını ifade etmektedir. Bu f fonksiyonuna *Seçme Fonksiyonu* denir.

Seçme Aksiyomu' nun ilk bakışta bağlantı kurulması zor olan eş değerlerinden bazıları da şunlardır [17] :

1_1. Verilen iki kümeden birinin kardinalitesi diğerinden küçük veya ona eşittir.

1_2. Verilen iki kümeden biri ile diğerinin bir alt kümesi arasında bir 1-1 eşleme vardır.

1_3. Verilen iki kümenin birinden diğerine injektif bir fonksiyon bulunabilir.

2_1. Bir F cismi üzerindeki her V vektör uzayının bir bazı vardır.

2_2. Bir F cismi üzerindeki her V vektör uzayının bir maksimal lineer bağımsız alt kümesi vardır.

3. Kompakt topolojik uzayların çarpımı da kompakttır (*Tychonoff Teoremi*).

4. Boş olmayan kısmi sıralanmış her küme içinde bir maksimal zincir vardır (*Haussdorff Büyüklük İlkesi*).

5. Boş olmayan kısmi sıralanmış bir küme içindeki her zincirin bir üst sınırı varsa, bu kümenin en az bir maksimal elemanı vardır (*Zorn Lemması*).

6. Her küme iyi sıralanabilirdir (*Zermelo İyi Sıralama Teoremi*).

Seçme Aksiyomu (A.C.), Zorn Lemması (Z.L.), Zermelo İyi Sıralama Teoremi (İ.S.) ve Haussdorff Büyüklük İlkesi (B.İ.)' nin denk olduklarının ispatına geçmeden önce, ispatta kullanacağımız kavramların bir özetini vermek yerinde olacaktır.

Boş olmayan bir X kümesi üzerinde yansıyan, ters-simetrik ve geçişken bir α bağıntısına *kısmi sıralama bağıntısı* (K.S.B.) denir. X' de bir α K.S.B. tanımlandığında X kümesi, α ile kısmi olarak sıralanmıştır denir ve (X,α) sıra yapısına (Partial Ordered Set sözcüklerinden kısaltılarak) *Poset* adı verilir. Bir (X,α) posetinde, eğer $(x,y)\in\alpha$ ise bunu $x\alpha y$ şeklinde gösterelim ve "x, α' ya göre y' den küçüktür" veya "y, α' ya göre x' den büyüktür" şeklinde yorumlayalım. Eğer herhangi iki x, y elemanı için

$$x \,\alpha\, y \;\vee\; y \,\alpha\, x$$

ise bu x ve y elemanlarına, *α' ya göre X' in kıyaslanabilir elemanları* denir. Aksi halde

$$x \not\alpha\, y \;\wedge\; y \not\alpha\, x$$

ise x ve y' ye, *α' ya göre X' in kıyaslanamayan elemanları* denir. Eğer bir (X,α) posetinde,

$$x, y \in X \Rightarrow (x \,\alpha\, y \;\vee\; y \,\alpha\, x)$$

ise, yani X' in her eleman çifti kıyaslanabilir ise, α K.S.B. *kıyaslanabilirlik özelliğine sahiptir* ve *X kümesi α ile tam sıralanmış bir kümedir* denir. Bu durumda (X,α) sıra yapısına da *zincir* denir. Bir (X,α) poseti bir zincir olmasa bile X' in bazı alt kümeleri (α' nın bunlara kısıtlanması ile) zincir olabilirler. Bunlara (X,α)' nın *alt zincirleri* [17] denir.

Bir (X,α) posetinde $A \subset X$, $y \in X$ olmak üzere,

$$x \in A \Rightarrow x \,\alpha\, y$$

koşulu sağlanırsa y' ye A kümesinin bir *üst sınırı*,

$$x \in A \Rightarrow y \,\alpha\, x$$

koşulu sağlanırsa y' ye A kümesinin bir *alt sınırı* denir. Bir A kümesinin tüm üst sınırlarının oluşturduğu küme A^s, tüm alt sınırlarının oluşturduğu küme de A_s ile gösterilecektir. Buna göre,

$$A^s = \{y \mid x \in A \Rightarrow x \,\alpha\, y \,,\, y \in X\}$$

$$A_s = \{y \mid x \in A \Rightarrow y \,\alpha\, x \,,\, y \in X\}$$

olur. Bir A kümesi için, $A^s \neq \emptyset \;\wedge\; A_s \neq \emptyset$ ise A' ya (X,α)' da *sınırlı küme* denir. (X,α) posetinde bir A alt kümesinde eğer A' nın tüm elemanlarından büyük bir eleman varsa buna A' nın *maksimum elemanı* denir ve maxA ile gösterilir; eğer A' da A' nın tüm elemanlarından küçük bir eleman varsa buna da A' nın *minimum elemanı* denir ve minA ile gösterilir. Buna göre,

$x = \max A \Leftrightarrow (x \in A,\ y \in A \Rightarrow y \alpha x)$

$x = \min A \Leftrightarrow (x \in A,\ y \in A \Rightarrow x \alpha y)$

olur. Bir A kümesinin maksimum ve minimum elemanları varsa tektirler. Eğer A kümesinde, kendisi ile kıyaslanabilen tüm elemanlardan büyük bir eleman varsa buna A' nın bir *maksimal* (büyük) elemanı denir; eğer A' da, kendisi ile kıyaslanabilen elemanlardan büyük bir eleman varsa buna da A' nın bir *minimal* (küçük) elemanı denir. A' nın tüm maksimal elemanlarının kümesini M(A), tüm minimal elemanlarının kümesini de m(A) ile gösterelim. Buna göre,

$M(A) = \{y \mid x \in A,\ y\ \alpha\ x \Rightarrow y = x\}$

$m(A) = \{y \mid x \in A,\ x\ \alpha\ y \Rightarrow x = y\}$

olur. Maksimal elemanlarla maksimum eleman (büyük elemanlarla en büyük eleman) ve minimal elemanlarla da minimum eleman (küçük elemanlarla en küçük eleman) birbirinden farklı kavramlardır. Bir kümede maksimum (minimum) eleman olmadığı halde maksimal (minimal) elemanlar olabilir. Maksimum (minimum) eleman varsa tektir ama maksimal (minimal) elemanlar birden çok olabilir. Eğer bir kümede bir maksimum (minimum) eleman varsa maksimal (minimal) eleman tektir ve maksimum (minimum) elemana eşittir. Boş olmayan sonlu her posetin en az bir maksimal ve en az bir minimal elemanı vardır. Zincirlerde her $A \neq \varnothing$ alt kümesi için $M(A)=\{\max A\}$ ve $m(A)=\{\min A\}$ dır.

(X,α) posetinde bir A alt kümesinin *supremumu*, A' nın üst sınırlarının minimumuna, *infimumu* da alt sınırlarının maksimumuna denir ve bunlar sıra ile supA ve infA şeklinde gösterilir. Buna göre,

$\text{Sup}A = \min A^s$

$\text{İnf}A = \max A_s$

olur. Bir A kümesi için supA ve infA varsa tektirler.

A' nın maksimumu (minimumu) varsa, bu aynı zamanda A' nın bir üst(alt) sınırı ve üstelik bu üst (alt) sınırların en küçüğü (en büyüğü) yani A' nın supremumu (infimumu) olur. Bu durumda maxA = supA, minA = infA olur.

$\mathcal{A}$ bir küme ailesi ise, ($\mathcal{A}$,$\subset$) bir posettir. Eğer $\mathcal{A}$, bir (X,α) posetindeki tüm alt zincirlerin ailesi ise, ($\mathcal{A}$,$\subset$) posetinin bir maksimal (minimal) elemanına (X,α) posetinin bir *maksimal (minimal) zinciri* denir. Minimal zincirler yalnız ve yalnız X' in tek elemanlı (singleton) kümelerinden ibarettir ve o halde $|m(\mathcal{A})| = |X|$ olur.

Bir (X,α) posetinde eğer, X' in boş olmayan her A alt kümesinin bir minimumu varsa α' ya *iyi sıralama bağıntısı*, (X,α) sıra yapısına da *iyi sıralanmış sistem* **[17]** denir. İyi sıralı her küme aynı zamanda tam sıralıdır.

Posetlere ilişkin olarak önemli bir sabit nokta teoremi (S.N.T.) şudur:

$$[\,(\,(X,\alpha),\, Z\subset X \Rightarrow Z^s \neq \varnothing\,) \wedge (\,f{:}X\to X,\, x\in X \Rightarrow x\,\alpha\, f(x)\,)\,] \Rightarrow \exists x\,(\,x\in X,\, f(x) = x\,)$$

S.N.T.' ne göre, bir (X,α) posetinin her alt zincirinin bir üst sınırı varsa, X üzerindeki x α f(x) koşulunu sağlayan her f fonksiyonu için x = f(x) olacak şekilde $\exists$x($\in$X) elemanı vardır. Bu teoremin ispatı **[17]**' de mevcuttur.

A.C., Z.L., İ.S. ve B.İ.' nin denk olduklarını ispatlamakta gerekecek olan alt yapıyı oluşturmak için bir de, genişletilmiş kartezyen çarpım kavramını inceleyelim:

Herhangi bir $\mathcal{A} = \{X_i \mid i\in I\}$ ailesinin kartezyen çarpımı,

$$\prod_{i\in I} X_i = \{f \mid f : I \to \cup\mathcal{A}\ ,\ f(i) = x_i \in X_i\}$$

ailesidir. $f = \{(i,x_i) \mid x_i \in X\}$ yerine kısaca $(x_i)_{i\in I}$ notasyonu kullanılır.

Aşağıdaki tam biçimselleştirilmiş ispatta *Zermelo Seçme Aksiyomu* A.C., *Haussdorff Büyüklük İlkesi* B.İ., *Zorn Lemması* Z.L., *Zermelo İyi Sıralama Teoremi* İ.S. ve *Sabit Nokta Teoremi*' de S.N. ile gösterilmiştir. (X,α) bir poseti; Z, (X,α)' da bir zinciri; $\mathcal{Z}$, (X,α)' daki tüm zincirlerin ailesini; M($\mathcal{Z}$), ($\mathcal{Z}$,$\subset$) posetinde $\mathcal{Z}$' nin maksimal elemanlarının kümesini göstermektedir. Tüm küçük harfler X' in elemanlarını belirtmekte olup (+) "vardır", (Ç) "çelişki" anlamındadır. Diğer notasyonlar (daha önce tanımlananlar hariç) lojistiğin ya da küme teorisinin standart notasyonlarıdır. (/) notasyonu ise "tüm bunlar gereğince" anlamına gelmektedir.

TEOREM :

$$\left.\begin{array}{l} \text{A.C.}: \mathcal{A}=\{A_i \mid i\in I \Rightarrow A_i\neq\varnothing\}\neq\varnothing \Rightarrow \prod \mathcal{A}\neq\varnothing \\ \text{B.İ.}: (X,\alpha),\ \mathcal{Z}=\{Z\mid Z\subset X\}\Rightarrow M(\mathcal{Z})\neq\varnothing \\ \text{Z.L.}: ((X,\alpha),\ Z\subset X\Rightarrow Z^s\neq\varnothing)\Rightarrow M(X)\neq\varnothing \\ \text{İ.S.}: \forall X,\ \exists\alpha\ (((X,\alpha),\ A\subset X)\Rightarrow \min A\ (+)\ ) \end{array}\right\} \Rightarrow (\text{A.C.}\Leftrightarrow\text{B.İ.}\Leftrightarrow\text{Z.L.}\Leftrightarrow\text{İ.S.})$$

İSPAT :

$$\sim \text{B.İ.} \Rightarrow \exists(X,\alpha), M(\mathcal{Z})=\varnothing$$

$$\Rightarrow \forall Y\ \exists Z\ (\ Y\in\mathcal{Z},\ Y\underset{\neq}{\subset} Z\ )$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \{Z\mid Y\in\mathcal{Z},\ Y\underset{\neq}{\subset} Z\}\neq\varnothing \\ \text{A.C.} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \prod \{\ \{Z\mid Y\in\mathcal{Z},\ Y\underset{\neq}{\subset} Z\}\mid Y\in\mathcal{Z}\}\neq\varnothing$$

$$\Rightarrow \exists f\ \forall Y\ (f:\mathcal{Z}\to \bigcup_{Y\in\mathcal{Z}} \{Z\mid Y\in\mathcal{Z},\ Y\underset{\neq}{\subset} Z\},\ f(Y)\in\{Z\mid Y\in\mathcal{Z},\ Y\underset{\neq}{\subset} Z\})$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \exists f\ \forall Y\ (f:\mathcal{Z}\to\mathcal{Z},\ Y\underset{\neq}{\subset} f(Y)) \\ \forall Y\ \exists Z\ (\ Y\in\mathcal{Z},\ Y\underset{\neq}{\subset} Z\ ) \\ \text{S.N.} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \exists Y\ (\ Y\in\mathcal{Z},\ Y=f(Y)\ )\ \ (\text{Ç})\ \ /\ \ \text{A.C.}\Rightarrow\text{B.İ.}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{B.İ.}\Rightarrow \forall(X,\alpha),\ M(\mathcal{Z})\neq\varnothing \Rightarrow \exists Z\in M(\mathcal{Z}) \\ a\in Z^s \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \forall x\ (\ x\in Z\Rightarrow x\ \alpha\ a\ )\Rightarrow Z\cup\{a\}\in\mathcal{Z} \\ Z\subset Z\cup\{a\} \\ Z\in M(\mathcal{Z}) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \quad Z = Z\cup\{a\} \Rightarrow a\in Z \\ \forall x\,(z\in Z \Rightarrow x\,\alpha\,a\,) \\ Z\in M(\mathcal{Z}) \end{array}\right\} \Rightarrow a\in M(X) \;/$$

$$\forall Z\,(Z\in \mathcal{Z} \Rightarrow Z^{s} \neq \varnothing\,) \Rightarrow M(X) \;/ \quad \text{B.İ.} \Rightarrow \text{Z.L.}$$

$$\left.\begin{array}{r} X \neq \varnothing,\ \mathcal{A} = \{\,(A,\alpha\,) \mid A \subset X,\ \alpha \text{ İ.S.B.}\} \\ \gamma = \{\,(\,(A,\alpha\,),\ (B,\beta)\,) \mid A\subset B,\ \alpha\subset\beta,\ x\in A \wedge y\in B\backslash A \Rightarrow (x,y) \in\beta\ \} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \qquad\qquad (\mathcal{A},\alpha) \\ Z = \{\,(A_i,\ \alpha_i) \mid i\in I\,\}\in\mathcal{Z} \\ C = \cup A_i\,,\ \delta = \cup\alpha_i \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} \Rightarrow (C,\delta) \in \mathcal{A}\,,\ (C,\delta) \in Z^{s} \\ \text{Z.L.} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow M(\mathcal{A}) \neq \varnothing \Rightarrow \exists\ (D,\varphi) \in M(\mathcal{A}),\ D\neq X$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \exists a \in X \setminus D \\ \Rightarrow (D,\varphi)\,\underset{\neq}{\gamma}\,(\,D \cup\{a\},\ \varphi \cup \{\,(x,a) \mid x \in D\,\}\,) \\ (D,\varphi) \in M(\mathcal{A}) \end{array}\right\} \ (\text{Ç})$$

$$\Rightarrow D = X \;/ \quad X \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists\alpha\,(\,(X,\alpha)\ \text{İ.S.}) \;/ \quad \text{Z.L.} \Rightarrow \text{İ.S.T.}$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{A} = \{\,A_i \mid i\in I \Rightarrow A_i \neq \varnothing\,\} \neq \varnothing \\ \text{İ.S.T.} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \exists\lambda\,(\,\cup\mathcal{A}\,,\ \lambda\,)\ \ \text{İ.S.}$$

$$\Rightarrow f : I \to \cup\mathcal{A}\,,\ f(i) = \min A_i \in A_i \;/\; \text{İ.S.T.} \Rightarrow \text{A.C.}$$

$$(\text{A.C.} \Rightarrow \text{B.İ.}) \wedge (\text{B.İ.} \Rightarrow \text{Z.L.}) \wedge (\text{Z.L.} \Rightarrow \text{İ.S.T.}) \wedge (\text{İ.S.T.} \Rightarrow \text{A.C.}) \ \Rightarrow$$

A.C. $\Leftrightarrow$ B.İ. $\Leftrightarrow$ Z.L. $\Leftrightarrow$ İ.S.T. $\llcorner$

Z.L. $\Rightarrow$ İ.S.T. olduğunun ispatında bazı geçişlerin detaylarına girilmemiş olup, ispat olabildiğince özetlenmiştir [17].

3.4 GOTTLOB FREGE

Frege (1848-1925), ünlü Alman matematikçisi,mantıkçısı ve felsefecisidir. Mantığın matematikselleştirilmesi ve matematiğin mantığa indirgenmesi çabalarının öncülerindendir. Frege' e göre mantık da, matematik de tanım ve varsayımlara dayalı dedüktif disiplinlerdir ve aynı formel yapıya sahiptirler.

Mantık için, bir düşünme dili ve bir rasyonel hesap oluşturma çabaları, aslında Leibniz ile hareketlenmiştir. Frege ise, *Begriffsschrift* [37] adlı eserinde, sistematik düşünme ve akıl yürütmeye ilişkin formel bir notasyon geliştirmiştir. Bu formel notasyon (pek fazla kullanılmamasına karşın) yüklem kalkülüsünün gelişiminde önemli rol oynamıştır. Frege' in yüklem kalkülüsü, *formel dil* ve *mantık*tan oluşan iki bileşenli bir formel sistemdi. Formel dil;

a) "x, F kavramının kaplamındadır", "x, R bağıntısı ile y' ye bağlıdır" gibi hükümsel ifadeleri

b) "O şöyle değildir", "eğer şöyle ise o halde böyledir" gibi daha karmaşık ifadeleri

c) "Bazı x' ler için şöyledir", "Her x için böyledir" gibi niceleyiciler içeren ifadeleri

düzenler [37]. Yüklem kalkülüsünün mantık kısmı ise, bu dilin bazı önermelerinin, diğer bazılarından elde edilmelerini sağlayan bir dizi çıkarım kuralı içeriyordu. Frege' e göre mantık, "doğru önerme formlarının kuramıdır"; p, q, r, ... gibi basit önermeler kuramın atomları, bileşik önermeler ise atomik önermelerden oluşan molekülsel önermelerdir. Bunların doğruluğu, basit önermelerden hareketle belirlenir.

Frege sistemi, matematiksel akıl yürütmenin temel mantığını çözümleyebilecek kadar güçlüdür. Bunun bir sebebi de bu sistemin, "bazı F kavramları için şöyledir", "her F kavramı için böyledir" gibi ifadeleri inceleyen ikinci mertebe yüklem hesabını da içermesidir. Fakat sistemin asıl önemli yanı, önermeleri fonksiyon-değişken bağlamında analiz etmesi ve böylece klasik mantığın, önermeleri özne-yüklem bağlamında analiz etmesinden kaynaklanan sıkıntıları ortadan kaldırmış olmasıdır. Örnek olarak klasik Aristo mantığında, " 'Ali, Veli' den çalışkandır' öyle ise 'bazıları Veli' den çalışkandır' " çıkarımı ile " 'Ali, Veli' den çalışkandır' öyle ise 'Ali bazılarından çalışkandır' " çıkarımı, farklı kurallara bağlı çıkarımlar olmalarına karşın Frege sisteminde tek bir mantıksal kurala tabidirler. Frege, önermelerdeki fiil sözcüklerini objeler kümesinden (ya da objelerin kartezyen çarpımlarından) {doğru, yanlış} kümesine fonksiyonlar olarak ele almıştır. Örneğin, "Ali çalışkandır" önermesinde "çalışkandır" fiili "insanlar" kümesinde tanımlı ve kuralı "x çalışkandır" olan bir fonksiyondur. Benzer şekilde, "Ali, Veli' den çalışkandır" önermesindeki "çalışkandır" fiili de, kuralı "x, y' den çalışkandır" olan bir iki değişkenli fonksiyondur. Yine, "x, y' den z' yi aldı" üç değişkenli "aldı" fonksiyonunun kuralı ve "x, y' de z' yi t ile ayırdı" da dört değişkenli "ayırdı" fonksiyonunun kuralıdır. Önermelere böyle bakıldığı zaman artık, " 'Ali, Veli' den çalışkandır', o halde, 'en az bir x için, x Veli' den çalışkandır' " çıkarımı ile " 'Ali, Veli' den çalışkandır', o halde, 'en az bir y için, Ali y' den çalışkandır' " çıkarımları tek bir mantıksal kurala tabi geçerli çıkarımlar haline gelir.

Frege' in *ispat* kavramı için yaptığı tanım da, günümüzde hala geçerliliğini korumaktadır: Bir takım A_1, A_2, ... , A_n öncül önermelerinden hareketle, bir B önermesinin ispatı, aşağıdaki koşulları sağlayan bir önermeler dizisidir **[37]** :

1. Dizinin terimleri sonlu sayıdadır
2. Dizinin son terimi B' dir
3. Dizinin terimleri ya bir aksiyomdur, ya A_1, A_2, ... , A_n öncüllerinden biridir, ya da herhangi bir çıkarım kuralı kullanılarak daha önce gelen terimlerden elde edilmiştir

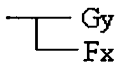
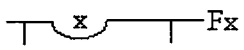
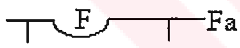
Frege, kavram *tanımları* yapma konusunda da kullanışlı ve güçlü kriterler geliştirmiştir. *Grundgesetze der Arithmetik* adlı eserinde, eksik ve iyi yapılmamış tanımların, giderek paradokslara yol açabileceğini göstermiştir. Aynı eserde kendi mantık sistemini en kapsamlı bir şekilde geliştirmiş ve "mantıkçılık" adlı felsefi doktrinin geçerliliğini ortaya koymaya çalışmıştır. Mantıkçılık; matematiksel kavramların, tamamen mantıksal kavramlardan hareketle tanımlanabileceğini ve matematiksel aksiyomların da sadece mantıksal kurallardan hareketle türetilebileceğini savunur. "Yapılacak iş, sayıları mantık terimleriyle ifade etmek ve sayılar arasındaki ilişkileri kaplamsal yönden kümeler arası ilişkiler olarak kurmaktır" **[16]** düşüncesiyle hareket eden bu girişim, büyük ölçüde başarılı olmuştur. Fakat ne yazık ki Frege sistemindeki V. Temel Kanun' un Russell Paradoksu' na yol açtığı anlaşılınca, mantıkçılık yeniden sorgulanır olmuştur. Örnek olarak Poincare, matematiğin yapısı ve kuruluşu bakımından dedüktif bir disiplin olarak mantığa benzediğini vurgulamakla beraber onun, konusunu kurarken, aslında indüktif ve sezgisel davranıldığını ileri sürmüştür. 200 yıl önce Kant' da matematiğin, tüm kavramlarını, ancak sezgisel yolla ortaya koyabilen ve asla analitik olmayan, sentetik bir disiplin olduğunu savunmuştu. Oysa Frege, Russell ve diğerlerinin, matematiği mantığa indirgeme çabaları, matematiksel önermeleri analitik saymalarına dayanır.

Günümüzde matematikte, mantığın konusu olmayan bazı kavramların kullanımı zorunluluğu, paradokslar, Gödel teoremleri v.s. gibi nedenlerle mantıkçılık, artık az sayıda matematikçi tarafından savunulur hale gelmiştir. Fakat her şeye rağmen Frege' in çalışmaları ve O' nun *Grundgesetze*' sini temel almış olan Russell ve Whitehead' in *Principia Mathematica*' sı, matematiğin gelişiminde devrim niteliğindeki hamlelerden sayılır. Peano, Hilbert, Bernays, Neumann, Brouwer, Heyting, Weyl, Gödel, Gentzen, Lorenzen, Reichenbach, Church, Quine, Menne, Bockonski, Tarski ve diğerlerinin çalışmaları da bu cümledendir.

3.5 FREGE' İN V. AKSİYOMUNA DAİR

Frege, yüklem hesabı ve kavram teorisi için oluşturduğu formel dilde, objeler için x,y,z,..., fonksiyonlar için f,g,h,..., kavramlar için F,G,H,... notasyonlarını kullanmıştır. f(x) (bugün olduğu gibi), x objesine f fonksiyonu altında karşılık gelen objeyi gösterir ve x' e f fonksiyonunun *argümenti*, f(x)' e fonksiyonun x' deki *değeri* denir. "Doğru", "yanlış" objeleri ilkel kavramlardır ve bunlara *doğruluk değerleri* denir. Frege' e göre bir kavram, argümentleri doğruluk değerlerine gönderen bir fonksiyon olarak düşünülebilir. Fx (ya da F(x)) notasyonu, F kavramının x objesi için doğru olduğunu ya da x' in F kavramının kaplamında olduğunu ifade eder.

Frege' in mantıksal kavramlar için kullandığı (fakat hiçbir zaman standart kabul edilmemiş) bazı notasyonlar, bugünkü kullanılışları ile birlikte aşağıda gösterilmiştir **[38]** :

	$\neg$ Fx	Fx değil
	Fx $\rightarrow$ Gy	Eğer Fx ise o halde Gy' dir
	$\forall$x Fx	Her x için Fx
	$\exists$x Fx	En az bir x için Fx
	$\forall$F Fa	Her F (kavramı) için Fa
	$\exists$F Fa	En az bir F için Fa

Frege' in mantığı temel aksiyomlar ve çıkarım kuralları ile başlar; önermeler mantığı, özdeşlik mantığı ve ikinci mertebe yüklem hesabının bilinen aksiyomlarını içerir. Örnek olarak eğer φ ve ψ herhangi formüller, a herhangi bir obje ve P herhangi bir kavram ise aşağıdakiler, Frege sisteminin temel kanunlarındandır:

$\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$

$(\forall x\, Px) \rightarrow Pa$

$(\forall F\, Fa) \rightarrow Pa$

$a = b \rightarrow \forall F (Fa \equiv Fb)$

Birinci mertebe yüklem hesabı ile ikinci mertebe yüklem hesabı aksiyomları arasında, ikincisinde $\exists x$, $\forall x$ niceleyicilerinin yanında, kavramlara ilişkin $\forall F$, $\exists F$ niceleyicilerinin de yer alması dışında bir fark yoktur.

Frege sisteminin "yerine koyma kuralı" ise şöyledir: "Mantığın bir teoremi olarak türetilebilen ...Fx... formundaki herhangi bir ifadede, Fx atomik formülünün geçtiği tüm yerlerde Fx yerine herhangi bir $\varphi(x)$ açık formülü yazılabilir" **[16]**.

Yerine koyma kuralından, "her $\varphi(x)$ açık formülünün karşılık geldiği bir kavram vardır" sonucu çıkar:

$$\forall x\ (Fx \equiv Fx)$$

aksiyomlardan kolayca elde edilebilen bir teoremdir.

Bu teoremden,

$$\exists G\ \forall x\ (Gx \equiv Fx)$$

yazılabilir. Şimdi yerine koyma kuralını uygulayarak Fx yerine $\varphi(x)$ yazarsak,

$$\exists G\ \forall x\ (Gx \equiv \varphi(x)) \text{.......................................(K.C.P.)}$$

elde edilir ki buna *kavramlar için comprehension prensibi* denir. Benzer şekilde,

$$\exists R\ \forall x\ \forall y\ (Rxy \equiv \varphi(x,y)) \text{.......................................(B.C.P.)}$$

bağıntılar için comprehension prensibi elde edilir.

Bir $\varphi(x)$ formülü ile buna karşılık gelen kavramın ismini karıştırmamak için λ notasyonu sıkça kullanılır. "$\varphi(x)$' i doğru kılan bir x objesi olmak" kavramı λx operatörü cinsinden,

$$[\ \lambda x\ \varphi(x)\ ]$$

şeklinde ifade edilir. "λ-..." ifadesi ise formülün belirttiği kavramın ismini göstermektedir. $\varphi(x)$ herhangi bir formül ve $\varphi(y/x)$, $\varphi(x)$' de x yerine y koyularak elde edilen yeni formülü göstermek üzere λ-convertion (dönüştürme) prensibi **[38]**;

$$\forall y\ (\ [\ \lambda x\ \varphi(x)\ ]\ y\ ) \equiv \varphi(y/x) \text{.......................................}(\ \lambda\text{-c}\ )$$

şeklinde sembolize edilir ve "bir y objesinin [$\lambda x\ \varphi(x)$] adlı kavramın kaplamında olması için $\varphi(y/x)$' in doğru olması gerekir ve yeter" anlamındadır. λ-c prensibi Frege' in "yerine koyma kuralı" ile K.C.P.' nin denk olduğunun ispatında (yani yerine koyma kuralının kavramlar için λ-c' yi gerektirdiği gibi bunun karşıtının da doğru olduğunun ispatında) kolaylık sağlar (Boolos bir ispat taslağı verirken [$\lambda x\ \varphi(x)$] yerine, 1985' deki bir makalesinde $\{a : Aa\}$, 1987' deki makalesinde ise [$\lambda : A(\lambda)$] notasyonlarını kullanmıştır).

Frege' in *Begriffsschrift* adlı eserinde geliştirdiği ikinci mertebe mantık sistemi ve kavramlar teorisi tutarlıdır. Ancak sistem, bu tutarlı temel üzerine V. temel kanunun (V.T.K.) eklenmesi ile tutarsız hale gelmiştir. Aşağıda V.T.K. ve sistemi neden tutarsız hale getirdiği incelenecektir .

Frege sisteminin sarsılmasına yol açan V.T.K., "bir fonksiyonun değer bölgesi" ve ""bir kavramın kaplamı" kavramlarını biçimselleştirme girişimlerinden biridir. Modern terminoloji ile, bir

$f : A \rightarrow B\,,\ y = f(x)$

fonksiyonu, sıralı ikililerin bir kümesi olarak,

$f = \{\ (x,f(x))\mid\ x \in A\ \}$

şeklinde gösterilir. f' nin değer kümesi ise,

$f\,[A] = \{\ f(x) \mid\ x \in A\ \}$

olarak tanımlanan kümedir. f ile f(x) farklı kavramlardır; f, fonksiyon için kullanılan bir simge olmasına karşın f(x), f' nin x' de aldığı değeri göstermektedir ve f(x)' e bazen "f fonksiyonunun kuralı" da denir. Bazen bir karışıklığa yol açmayacağı düşünülerek bazen de bilinçsizce, örnek olarak "x' i x^2+1' e gönderen" yani kuralı $f(x) = x^2+1$ olan bir f fonksiyonu için "x^2+1 fonksiyonu" dendiği olur. Biz de burada bir karışıklığa yol açmayacağını umarak, Frege sistemini bu ayırımı dikkate almadan yorumlayan bazı mantıkçıların yaptığı gibi, bazen bir fonksiyon yerine bu fonksiyonun kuralını belirtmekle yetinebileceğiz. Örnek olarak, "x' in babası" fonksiyonu derken, tanım ve hedef kümeleri "insanlar" ve kuralı

f (x) = x' in babası

olan f fonksiyonunu kastedeceğiz.

Frege' in terminolojisinde bir f fonksiyonunun "değer alanı", x argümenti ile f(x) değerinden oluşan (x, f(x)) sıralı ikililerinin oluşturduğu bir kümedir. Örnek olarak yukarıdaki "x' in babası" fonksiyonunun değer alanı (Atatürk,Ali Rıza bey) gibi ikilileri içerir. Bir kavramın kaplamı ise, kavrama uygun düşen tüm objelerin kümesi olarak addedilebilir. Örnek olarak, "10' dan küçük asal sayı" kavramının kaplamı {2, 3, 5, 7} kümesidir. Kavramlar, objelerden doğruluk değerleri kümesine fonksiyonlar olarak ele alınabildiğine göre bir kavramın kaplamı, kavramı doğru kılan objelerin değer alanıdır.

Frege, değer alanları ve kaplamların isimleri için ε ve α simgelerini kullanmıştır. f fonksiyonunun değer alanı

$\acute{\varepsilon}\ f(\varepsilon)$

notasyonu ile, F kavramının kaplamı ise

$\acute{\varepsilon}\ f\ \varepsilon$

ile gösterilmiştir. Örnek olarak $\acute{\varepsilon}\ (\varepsilon^2 - \varepsilon)$, "$x^2 - x$" fonksiyonunun değer alanını, $\acute{\alpha}\ (\alpha\ (\alpha - 1))$, "$x(x - 1)$" fonksiyonunun değer alanını gösterir. "4 ile toplandığında 5 eden" kavramını λ-notasyonu ile

$[\lambda x\ \ x+4 = 5]$

şeklinde göstermiştik. Frege bu kavramın kaplamını

$\acute{\varepsilon}\ (\varepsilon + 4 = 5)$

şeklinde göstermiştir. Benzer şekilde "2^2 ile toplandığında 5 eden" kavramı yani $[\lambda x\ \ x+2^2 = 5]$ kavramının kaplamı için

$\acute{\alpha}\ (\alpha + 2^2 = 5)$

notasyonunu kullanmıştır. Şimdi, $\varphi(x)$ herhangi bir formül ise, $[\lambda x\ \varphi(x)]$ kavramının kaplamı olarak

$\acute{\varepsilon}\ (\ \varphi(\varepsilon / x)\ )$

yazabiliriz. $\acute{\varepsilon}\ (\ \varphi(\varepsilon)\ )$ bir objeyi gösterirken, $[\lambda x\ \varphi(x)]$ bir kavramı ifade etmektedir ve Frege objelerle kavramları, ayrık iki kümenin elemanları olarak düşünmüştür. Bir $\varphi(x)$ formülünde x' in geçtiği her yerde yerine ε yazarak elde ettiğimiz formül $\varphi(\varepsilon / x)$ olmak üzere;

$\acute{\varepsilon}\ [\lambda x\ \varphi(x)]\ \varepsilon$

yerine

$\acute{\varepsilon}\ (\ \varphi(\varepsilon / x)\ )$

yazabiliriz. Frege' in kullanmadığı bu ayırım kuralı açık formülleri, bunlara karşılık gelen kavramların isimlerinden ayırmak için gereklidir.

Frege, "bir objenin bir kaplamın elemanı olması" kavramını,

$x \in y = \exists G\ (y = \acute{\varepsilon} G \varepsilon\ \&\ Gx)$

şeklinde tanımlamıştır. Burada "eleman olma" için, alışılmış "$\in$" sembolünü kullandık; Frege' in sembolü bugün kesişim için kullanılana benzer ($\cap$) bir semboldü [38].

Frege, fonksiyonların değer alanları için bir aksiyom olarak V.T.K.' u aşağıdaki gibi biçimselleştirmiştir:

$$\acute{\varepsilon}\, f(\varepsilon) = \acute{\alpha}\, g(\alpha) \equiv \forall x\, [f(x) = g(x)] \text{..........(V.T.K.)}$$

Buna göre f fonksiyonunun değer bölgesinin, g fonksiyonunun değer bölgesine eşit olması için gerek ve yeter şart f ve g' nin her objeyi aynı değere göndermeleridir. f ve g yerine daha önce birer fonksiyon olarak ele alınabileceğini gördüğümüz F ve G kavramları gelirse, bu kavramların kaplamlarına ilişkin olarak,

$$\acute{\varepsilon}F\varepsilon = \acute{\alpha}G\alpha \equiv \forall x\, [Fx \equiv Gx] \text{..........(V.T.K.)}$$

şeklinde özelleştirilebilir. Bu özel halde kastedilen, bir F kavramının kaplamının bir G kavramının kaplamına eşit olması için gerek şartın F' ye ilişkin objelerin tümünün ve yalnız bunların G' ye ilişkin objelerin tümü ve yalnız bunlardan ibaret olması, yani F ve G kavramlarının materyal olarak denk olmasıdır. V.T.K.' dan

$$\forall F\, \forall x\, (x \in \acute{\varepsilon}F\varepsilon \equiv Fx) \text{..........(K.Y.)}$$

şeklinde biçimselleştirilen ve "bir objenin, bir kavramın kaplamının elemanı olması için gerek ve yeter şart, bu objenin kavram altında kalmasıdır" şeklinde ifade edilen *kaplamlar yasası*nın elde edilebileceği kanıtlanabilir. Ayrıca bu yasadan, "eğer iki kaplam aynı elemanlara sahip ise eşittirler" şeklinde ifade edilen *kaplamsal prensip* de elde edilebilir. Bu prensip,

$$\exists F\, (x = \acute{\varepsilon}F\varepsilon)\ \&\ \exists F\, (y = \acute{\varepsilon}F\varepsilon) \rightarrow [\forall z\, (z \in x \equiv z \in y) \rightarrow x = y] \text{..........(K.P.)}$$

şeklinde biçimselleştirilebilir.

Tüm bu olumlu sonuçlarına rağmen V.T.K.' un Frege sistemini tutarsız kıldığı bir gerçektir. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik* adlı eserinin ikinci bölümünü bastırmak üzere iken, B. Russell' dan aldığı ve Russell Paradoksu' nun biçimselleştirildiği bir mektup ile V.T.K.' un yol açtığı çelişkinin farkına varmıştır. Bunun üzerine kitabına hemen bir ek yaparak, V.T.K.' dan bir paradoks türetmenin iki farklı yolunu açıklamıştır: Önce, V.T.K.' dan "her kavramın bir kaplamı vardır" sonucunun çıkarılabileceğini gösterelim. V.T.K.' da G yerine F koyarsak,

$\acute{\varepsilon}F\varepsilon = \acute{\alpha}F\alpha \equiv \forall x\,(Fx \equiv Fx)$

elde ederiz. Genelleştirilmiş $\exists$ (varlık) gereğince buradan

$\exists x\,(x = \acute{\alpha}F\alpha)$

ve genelleştirilmiş $\forall$, F kavramına uygulanırsa

$\forall F\,\exists x\,(x = \acute{\alpha}F\alpha)$...*

bulunur. Bu sonuncusu her kavramın bir kaplamı olduğunu ifade eder. Şimdi,

$\exists F\,(x = \acute{\alpha}F\alpha \,\&\, \neg\, Fx)$

şeklinde formüle edilen, "kaplamı kendisini sağlamayan bir kavram" kavramını ele alalım. K.C.P. gereğince bu formüle karşılık gelen bir kavram vardır. λ- notasyonu ile bu kavramın ismini

$[\,\lambda x\,\exists F\,(\,x = \acute{\alpha}F\alpha \,\&\, \neg\, Fx\,)\,]$

şeklinde gösterebiliriz. * gereğince bu kavramın kaplamı vardır ve bu,

$\acute{\varepsilon}\,[\,\exists F\,(\,\varepsilon = \acute{\alpha}F\alpha \,\&\, \neg\, F\varepsilon\,)\,]$

şeklindedir. Şimdi kanıtlanabilir ki, "bu kaplamın $[\,\lambda x\,\exists F\,(\,x = \acute{\alpha}F\alpha \,\&\, \neg\, Fx\,)\,]$ adlı kavramı sağlaması için gerek ve yeter şart, sağlamamasıdır".

Frege V.T.K.' un, R.P. ile tutarsızlığa yol açtığı kanıtlanan, N.C.A. (kaplamlar ya da kümeler için *Naive Comprehension Axiom*)' ya sebep olduğunu da kanıtlamıştır. N.C.A., V.T.K.' un sonucu olan L.E. (Law of Extensions)' den üç basit adımda elde edilebilir **[38]**:

1. $\forall x\,(\,x \in \acute{\varepsilon}F\varepsilon \equiv Fx\,)$...(L.E.' den)

2. $\exists y\,\forall x\,(\,x \in y \equiv Fx\,)$

3. $\forall F\,\exists y\,\forall x\,(\,x \in y \equiv Fx\,)$..(N.C.A.)

Kaplamlar için ikinci mertebeden N.C.A.; "her F kavramı için, yalnız ve yalnız F' yi sağlayan objeleri eleman kabul eden bir kaplam vardır", şeklinde ifade edilebilir. Bu aksiyomun Frege sisteminden türetilebileceğini görmek için Frege' in *yerine koyma kuralı* **[16]** da uygulanabilirdi:

$\exists y\,\forall x\,(\,x \in y \equiv \varphi(x)\,)$...(N.C.A.)

Bu ise, "objeler üzerinde bir şart tanımlayan herhangi bir $\varphi(x)$ formülü için, objelerin yalnız ve yalnız tümünün şartı sağladığı bir kaplam vardır" **[38]** anlamına gelir.

N.C.A.' dan, Frege mantığı çerçevesinde, R.P. hemen görülür. N.C.A.' da F olarak [$\lambda z\ \neg(z \in Z)$] kavramı alınmak ve N.C.A.' nın ikinci formunda φ yerine $\neg(x \in x)$ koyularak

$$\exists y\ \forall x\ (\ x \in y \equiv \neg(x \in x)\ )$$

elde edilir. $\exists y$, b olmak üzere

$$\forall x\ (\ x \in b \equiv \neg(x \in x)\ )$$

ve buradan da

$$b \in b \equiv \neg(\ b \notin b\ )$$

elde edilir.

3.6 PARADOKS NASIL OLUŞUR ?

Frege sisteminin tutarsızlığı matematikçiler tarafından değişik yollarla gösterilmiş olup konu bugün bile bir dereceye kadar tartışmalıdır. Birçok matematikçi ve mantıkçıya göre Frege' in ortaya koyduğu ikinci mertebe mantık ve kaplam teorisinin tutarsızlığı; kavramlar alanının kaplamlar alanından kesinlikle daha büyük ve aynı zamanda kaplamlar alanının en az kavramlar alanı kadar büyük olmasının imkansızlığı nedeniyledir. Bu imkansızlık, Cantor teoreminin ispatındaki imkansız durumla şaşılacak derecede benzerlik göstermektedir (Cantor teoremi; A herhangi bir küme ve B, A' nın kuvvet kümesi olmak üzere B' nin eleman sayısının A' dan fazla oluşudur. Olmayana ergi metoduyla yapılan ispatta A' dan B' ye örten bir fonksiyon bulmanın imkansızlığı görülür).

Söz konusu sistemin tutarsızlığını analiz ederken unutulmaması gereken bir nokta, kavramların tanımlanma şartlarıdır. Örnek olarak Frege, F ve G kavramları için F = G gibi önermeleri anlamlı bulmamış, *Grundgesetze*' de, F' yi sağlayan objelerin tümünün ve yalnızca bunların G' yi gerçeklemesi durumunun F ve G' nin farklı kavramlar olmalarını engellemeyeceğini savunmuştur.

Bütün bunları göz önünde bulundurarak artık, paradoksun nasıl oluştuğuna bakalım. Hatırlayacağımız gibi V.T.K., her kavramı bir kaplamla ilişkilendirmekteydi. V.T.K.' a hangi yönden ($\Leftarrow,\Rightarrow$) bakarsak bakalım, bu ilişkinin bir takım özellikleri ortaya çıkar. Örneğin V.T.K. sağdan sola ($\Leftarrow$) incelendiğinde; "hiçbir kavram iki farklı kaplam ile ilişkili değildir" sonucuna ulaşılır. Bu yöne doğru yapılan incelemeyi Frege, "Va" olarak adlandırmıştır. Va. Temel Kanun **[38]**;

$$\forall x\,(Fx \equiv Gx) \rightarrow \acute{\varepsilon}F\varepsilon = \acute{\alpha}G\alpha$$

şeklinde ifade edilir. Bu şekliyle incelendiğinde Va' nın aslında, kaplamların değişimi ve onların ilişkili olduğu kavramların değişimini düzenlediği söylenebilir. Bu ise bizi, V.T.K.' un kavramlar ve kaplamlar arasındaki korelasyonu düzenleyen bir fonksiyon tanımladığı sonucuna götürür (Bilindiği gibi hiçbir kavram iki farklı kaplam ile ilişkili değildir ama farklı kavramlar aynı kaplamla ilişkili olabilir). Frege, Va' nın bu yönüyle problemsiz olduğunu belirtir.

Ancak V.T.K.' a soldan sağa ($\Rightarrow$) bakıldığında ortaya çıkan tablo daha ciddidir. Vb. Temel Kanun **[38]**;

$$\acute{\varepsilon}F\varepsilon = \acute{\alpha}G\alpha \rightarrow \forall x\,(Fx \equiv Gx)$$

şeklindedir ve farklı F ve G kavramlarına karşılık gelen kaplamların da farklı olduğunu ifade eder. Böylelikle V.T.K., kavramlar ve onlarla ilişkili kaplamlar arasında bir birebir fonksiyon tanımlar. Her kavram bir kaplamla ilişkili olacaksa en az kavram sayısı kadar kaplam olacaktır.

Öte yandan Frege sistemi bir bütün olarak düşünüldüğünde, kaplamdan çok sayıda kavrama ihtiyaç duyduğu görülür. Duyulan bu ihtiyaç, bizzat K.C.P. ve K.C.P.' nin V.T.K. üzerindeki önemli etkisi nedeniyledir. Zira K.C.P., bir dil içerisinde, objeler için geçerli olan her koşulda kullanılabilen kavramların var olduğunu söyler. Dolayısıyla K.C.P. ve V.T.K.' un birlikte aynı sistemde bulunmaları, kavramlar alanının hem objeler ve hem de kaplamlar alanından daha büyük olduğu sonucunu ortaya koyar. Ancak önceki paragrafta söylediğimiz gibi Vb için, en az kavram sayısı kadar kaplama ihtiyaç vardır. Bu ise bizi imkansız bir durumun içine sürükler ki işte paradoks burada ortaya çıkmaktadır.

Özellikle son yirmi yıldır Frege sistemini tamir etmenin ve paradoksu ortadan kaldırmanın değişik yolları aranıyor. Örneğin geleneksel görüşe göre, bunun için

V.T.K. veya K.C.P. sınırlandırılmalıdır ki Boolos, 1986 ve 1993' te bu yönde ilginç öneriler sunmuştur. Bu arada Schroeder-Heister 1987' de, Frege sisteminin birinci mertebe olan kısmının (birinci mertebe yüklem hesabına V.T.K.' u uygulayarak oluşan) tutarlı olduğunu iddia etmiş ve bu, 1987' de Parsons ve 1998' de Burgess tarafından kanıtlanmıştır. 1996' da Heck ve 1999' da Wehmeier ise farklı bir yol izleyerek, V.T.K.' un yer aldığı ama K.C.P.' nin kısıtlandığı ikinci mertebe mantık sistemlerini araştırmışlardır **[32]**. Burada bu araştırmaları tartışmayacak, kesin kabul gören hiçbir yaklaşım olmadığını söylemekle yetineceğiz.

V.T.K.' un yarattığı hayal kırıklığına rağmen Frege, ikinci mertebe mantıktan elde edilebilen ve doğal sayılar için önemi tartışılmaz olan Dedekind-Peano aksiyomlarına dair önemli bir gerçeği, Hume Prensibi yardımıyla kanıtladı. 1965' te Parsons ve 1983' te Wright, Hume Prensibi' nin Dedekind-Peano aksiyomlarını tek başına elde edebileceğini gösterdiler ama Heck 1993' te, Frege' in V.T.K.' u Hume Prensibi' ni elde etmek için kullandığını kanıtladı ki Hume Prensibi ikinci mertebe mantığa göre tutarlı olduğundan bunun anlamı, Frege' in sayılar teorisinin temel yasalarını gayet geçerli bir şekilde elde ettiğidir.

3.7 BERTRAND ARTHUR WILLIAM RUSSELL

Russell (1872-1970), İngiltere'de kraliçe Victoria zamanında iki kez başbakanlık yapmış olan Lord John Russell' ın oğludur. 1908'de "Royal Society"ye seçilmiş, 1916'da savaş karşıtı görüşleri nedeniyle yargılanmıştır. *Introduction to Mathematical Philosophy* **[39]** adlı eserini hapishanede yazmıştır. Amerika'da öğretmenlik yapmış ve 1950'de edebiyat alanında Nobel barış ödülünü kazanmıştır. 1955'de Einstein ile birlikte savaş karşıtı ünlü *Russell-Einstein Manifestosu*' nu yayınlamıştır. Sonraki yıllarda da savaş karşıtı çalışma ve eylemlerini sürdürmüş, 97 yaşında ölmüştür.

Russell, uzun ve çok yönlü meslek yaşamında matematiğin temelleri, modern mantığın gelişimi, analitik felsefe ve daha bir çok konuda çok sayıda eserler vermiştir; Kurt Gödel ile birlikte 20.yy.ın en önemli matematik mantıkçısı kabul edilir. Russell Paradoksu' nun (R.P.) keşfi, mantıkçılık akımı için yaptığı güçlü savunma, Tipler Teorisi' ni (T.T.) ortaya koyuşu, birinci mertebeden yüklem kalkülüsünü düzenlemesi ve popülerleştirmesi, bilime önemli katkılarındandır.

Kendi kendisinin elemanı olmayan tüm kümelerin kümesi varsayımının bir sonucu olarak ortaya çıkan paradoksunu Russell, ünlü eseri *Principia Mathematica* (P.M.) nın **[39]** yazılışı sırasında keşfetmiştir. Eğer yukarıda sözünü ettiğimiz gibi bir küme varsa, bu küme ancak ve ancak kendisinin elemanı değilse kendisinin elemanı olmaktadır! Bu paradoksun önemi, klasik mantıkta kabul edilen "tüm kümelerin kümesi" kavramının yukarıdaki çelişkiye yol açması ve böylece matematiğin temellerinin sarsılmasından gelmektedir. Hilbert ve Brouwer' de dahil olmak üzere bir çok matematikçi "eğer matematiğin temeli olan mantık böyle çelişkilere yol açıyorsa, bu mantıkla yaptığımız ispatlara nasıl güvenebiliriz?" sorusuyla, şüphe ve endişeye kapılmışlardır. Mantık, küme teorisi, felsefe ve matematiğin temellerini sağlamlaştırma çabaları RP' nun ortaya çıkışıyla hız kazanmış ve 20.yy.ın ilk yarısındaki başlıca araştırmaların konusu olmuştur.

R.P. küme teorisinde *sınırsız kaplamlılık* (ya da soyutlama) denilen ve ilk kez Cantor tarafından koyulan aksiyomun (S.K.A.) bir sonucu olarak ortaya çıkmaktadır. "Herhangi bir yüklemsel P(x) formülü, elemanları P(x)' i sağlayan bir küme belirler" şeklinde ifade edebileceğimiz S.K.A., herhangi bir tutarlı koşula bir ve yalnız bir kümenin karşılık geldiğini (sezgisel olarak) varsaymaktadır. R.P.' nu çözme girişimlerinin çoğu, S.K.A.' nu kısıtlamak ya da ortadan kaldırmak anlayışı üzerinde yoğunlaşmıştır.

Russell R.P.' na, *Tipler Teorisi* denilen bir teori oluşturarak cevap vermiştir. T.T.' nin temel fikri, kendi kendisinin elemanı olmayan tüm kümelerin kümesi gibi çelişkiye yol açan kümeleri hiç söz konusu etmeksizin, tüm kümeleri bir hiyerarşi içinde sıralamaktır. En alt düzeyde tekler, sonra teklerden oluşan kümeler ve daha sonra teklerden oluşan kümelerin kümeleri v.s. yer almaktadır;

1. düzey : a, b, c, . . .
2. düzey : {a}, {a,b}, {b,c,d}, . . .
3. düzey : { {a}, {a,b} }, . . .

.
.
.

Russell, S.K.A.' nun neden çelişkiye yol açtığını, T.T.' ni ve *kısır döngü prensibi*ni kullanarak açıklamaya çalışmıştır. İlk olarak 1906' da H. Poincare tarafından ortaya koyulan *kısır döngü prensibi*nin temel fikri; belli bir çeşit objenin tanımını yaparken, aynı çeşitten olan tüm objeleri kullanmaktır. Öyle ki, bu özelliği gerçekleyen tanımlara *yüklemsel olmayan*, gerçeklemeyen tanımlara da *yüklemsel* denir. Bu konuda Gödel, Platonist bir bakış açısıyla; "soyut objeler, ancak bizim inşa ettiğimiz yapıların bir sonucu olarak vardır" savının arkasında olmuş ve yüklemsel olmayan tanımlarda kabullere ters ya da yanlış olan hiçbir şeyin bulunmadığına dikkat çekmiştir.

"x bir kümedir" şeklindeki önermesel fonksiyonlar kendi kendilerine uygulandıklarında bir kısır döngüye yol açmaktadırlar. O halde verilen şartı yerine getiren (yüklemi sağlayan) objelerin kümesi ancak sadece onların aynı düzeyde (aynı tipte) olmaları halinde söz konusudur. "Küme olmak" kavramı da tek bir küme ile aynı tipte değildir. O halde "küme kavramı" bir kümedir diyemeyiz.

Russell T.T.' ni ilk kez 1903' de *The Principles of Mathematics*' de **[39]** vermiş ve daha sonra 1908' de *Mathematical Logic as based on The Theory of Types* adlı makalesinde ve A. N. Whitehead ile birlikte yazdıkları anıtsal eser *Principia Mathematica*' da olgunlaştırmıştır. Yani teorinin "basit" ve "olgunlaşmış" olmak üzere iki versiyonu vardır. Her ikisi de daha sonra şiddetli tenkitlere uğramıştır. Bazıları için bilinen paradoksların tümünü çözemediğinden zayıftılar, bazıları içinse her ne kadar tutarlı disiplinlerse de, *kısır döngü prensibi*ne rağmen yapılabilecek birçok matematiksel tanıma izin vermemeleri bakımından kısıtlayıcıydılar.

Russell, teorisinin kısıtlayıcı olduğuna dair yapılan tenkitlere, *indirgenebilirlik aksiyomu*nu ortaya koyarak cevap vermeye çalıştı. Bu aksiyom, T.T.' nin ilk düzeyinde yer alan yüklemsel fonksiyonların tümü üzerinde yapılacak olan uygun bir sayma (miktar ölçme) nın, tüm fonksiyonlar üzerinde, düzeye bakılmaksızın yapılan sayma ile aynı anlama geleceğini garanti ediyordu. Dolayısıyla, teori tarafından önü kapatılmış olan kısıtlanmamış saymaya, yeni ve başka bir yol açılmış oluyordu. Ancak aksiyom her ne kadar *kısır döngü prensibi*nin uygulama alanını başarıyla daraltmışsa da, özellikle felsefe çevrelerinden gelen tenkitlerin sürmesini engelleyememiştir.

A. Dumitriu 1971' deki, *Tipler Teorisi Antinomisi* adlı makalesinde, T.T.' nin çelişkili olduğunu göstermeye çalışmıştır. T. Batog ise *Tipler Teorisinde çelişki var mıdır?* adlı makalesinde **[40]**, A. Dumitriu' nun tezinin sonsuzluk aksiyomunu göz ardı ederek yalnızca, uzun yıllar güvenilir olduğu düşünülen T.T. çerçevesinde kalınarak gerçekleştirildiğini ve bu yönüyle aşırı devrimci olduğunu savunmuştur. Batog' a göre, Dumitriu haklı ise, içinde T.T. için sonsuzluk aksiyomu kullanılmadan yapılmış bir tutarlılık kanıtının biçimselleştirildiği, küme teorisinin tüm aksiyomatik sistemleri tutarsız demektir. Batog, Dumitriu' nun akıl yürütmesini analiz ederek doğru olmadığını göstermiştir.

Russell, mantıkçılık akımını en iyi savunanlardan biridir. *Principles*' da ve daha sonra detaylı olarak P.M.' da bu akımın iki temel tezini oluşturmuştur. Birincisi, tüm matematiksel doğruların mantıksal doğrulara dönüştürülebileceği veya başka bir deyişle, matematik sözlüğünün mantığınkinin bir öz alt kümesi olduğu fikridir. İkincisi ise, tüm matematiksel ispatların mantıksal ispatlar olarak yeniden oluşturulabileceği, başka bir deyişle matematiksel teoremlerin mantıksal teoremlerin bir alt kümesini oluşturduğu düşüncesidir.

G. Frege gibi Russell' daki temel düşünce de sayıların, sınıfların sınıflarıyla özdeşleştirilebilmesi ve sayı teorisi önermelerinin birim ve nicelikler cinsinden açıklanabilmesi idi. Böylece 1 sayısı tüm tek elemanlı sınıfların sınıfı ile, 2 sayısı tüm iki elemanlı sınıfların sınıfı ile v.s. özdeşleştiriliyordu. Örnek olarak "iki kitap vardır" önermesi, "x kitabı vardır, y kitabı vardır ve x ile y eşit değildir" şeklinde biçimselleştirilir. Sayı teorisinin işlemleri, küme teorisinin kesişim, birleşim v.s. gibi işlemleri cinsinden tanımlanır. Whitehead ve Russell P.M.' da küme teorisi, sonlu ve transfini aritmetik, elemanter ölçüm teorisine ilişkin bir çok önemli teori v.s.' nin detaylı bir şekilde mantıksal türetimlerini oluşturabilmişlerdir. Geometri üzerine planlanan dördüncü cilt ise tamamlanamamıştır.

P.M.' nın amacı, çıkarım mantığı çerçevesinde Frege' in bulgularını, aksiyomatik yöntemi ve Peano ve diğerlerinin geliştirdiği sembolizmi kullanarak biçimselleştirmekti. Bundaki amaç da, Aristo mantığı ile çözülememiş olan paradoksları çözmekti. Ayrıca fizikte, Newton mekaniği ile Einstein mekaniği arasında ortaya çıkan çelişkilerin de acilen ortadan kaldırılmasını sağlayacak çelişkisiz bir matematik oluşturma talepleri de gündemdeydi. Bu alanda Russell' ın, *The Principles of Mathematics* ve *Introduction to Mathematical Philosophy* [39] adlı çalışmaları mantık araştırmalarına hız kazandırmıştır. Bu arada Whitehead' in aslında daha önce ve daha orijinal olarak ortaya koyduğu *Universal Algebra*' sı etkisini büyük ölçüde kaybetmiştir. Oysa Russell' ın fikirlerinin esası Frege' den gelmekte iken Whitehead' in P.M.' ya katkısı tamamen kendine özgüdür [41].

Russell, matematiğin temelleri ve felsefenin temellerine ilişkin tartışmalı konuları mantıkla açıklamak istemiştir. Bu yönüyle o, "Analitik Felsefe"nin kurucularından biri olarak kabul edilir. [37, 38, 39]

3.8 PRINCIPIA MATHEMATICA

Principia Mathematica (P.M.) [39,42], matematiksel mantık ve matematiğin temelleri üzerine Alfred North Whitehead ve Bertrand Russell tarafından yazılmış bir şaheserdir. 1910, 1912 ve 1913' de yayınlanmış üç ciltten oluşmaktadır. Esas olarak mantıkçılığı savunma amaçlı yazılmış ve modern matematiksel mantığın popüler hale gelmesinde önemli rol oynamış olan P.M., Aristo' nun *Organon*' undan sonra, mantık üzerine yazılmış en etkili kitap olarak kabul edilmektedir.

3.8.1 P.M.' NIN TARİHSEL GELİŞİMİ

Mantıkçılık, matematiğin tümünün ya da bir kısmının mantıktan türetilebileceğini savunan bir görüş olup iki kısımda incelenebilir. Birincisi; tüm matematiksel gerçeklerin mantıksal gerçekler haline getirilebilir olması ya da başka bir deyişle, matematiğin sözcük dağarcığının mantığınkinin bir alt kümesi olduğu düşüncesidir. Diğeri ise; tüm matematiksel kanıtların mantıksal kanıtlar haline getirilebilir olması ya da başka bir deyişle, matematiğin teoremlerinin mantığınkilerin bir alt kümesi olması düşüncesidir. Bertrand Russell' a göre mantıkçının amacı; "tüm pür matematiğin, pür mantıksal öncüllerle oluşturulabildiğini ve sadece mantıksal terimlerle tanımlanabilen kavramları kullandığını göstermek" [39] tir.

Temeline inildiğinde, mantıkçılık tezinin ilk olarak 17. yüzyılın sonlarında Gottfried Leibniz, sonraları ve daha kapsamlı olarak da Gottlob Frege tarafından savunulduğu görülür. Özellikle Frege' in çalışmalarını sürdürdüğü dönemde Bernard

Bolzano, Niels Abel, Louis Cauchy ve Karl Weierstrass gibi matematikçiler, o devir matematik teorilerindeki birçok belirsizlik ve çelişkiyi gidermeyi başardılar. 1800' lerin sonunda William Hamilton, kompleks sayılara mantıksal temel oluşturması bakımından önemli olan "reel sayıların sıralı ikilileri"ni, Weierstrass, Dedekind ve Cantor ise irrasyonel sayıları rasyonel sayılar cinsinden ifade etmenin değişik metotlarını geliştirdiler. H.G.Grassmann ve Dedekind' in çalışmasını kullanan Peano, doğal sayılar için oluşturduğu meşhur aksiyomlardan hareketle bir rasyonel sayılar teorisi geliştirdi. Bütün bu gelişmelerden dolayı Frege' in devri, primitif kavramların küçük bir kümesinden matematiğin büyük bir kısmının türetilebildiği bir devir olarak bilinir.

1879 yılına kadar olan süreçte Frege' in gerekli mantıksal alt yapıyı geliştirmesi üzerine, mantıkçılık projesinin teknik olarak uygulanabilir hale geldiği söylenebilir. Hatta ilerleyen yıllardaki çalışmalarıyla Frege, mantık aritmetiği için gerekli olan tanımlara da ulaşmış, özellikle 1890' lar boyunca temel birçok kavramı aydınlatmıştır. Bununla birlikte yeni yüzyılın başlangıcıyla beraber Russell paradoksu ve benzeri paradoksların ortaya çıkışı, mantıkçılığın başarıya ulaşabilmesi için birtakım ek kaynaklara ihtiyacı olduğunu göstermiştir.

1903' de Whitehead ve Russell' da böyle bir sonuca ulaştılar. Bu sırada ikisi de, önceki kitaplarının ikinci ciltleri için henüz çalışmaya başlamışlardı. Çalışmaları ileri bir aşamada iken işbirliği yapmaya ve sonradan *Principia Mathematica* adını alacak olan eserlerini oluşturmaya karar verdiler. Sonunda, neredeyse on yıl süren zahmetli bir çalışma ile bu eser oluştu ve *Cambridge University Press* tarafından yayınlandı [42].

3.8.2 P.M.' NIN ÖNEMİ

Öncelikle şunu söylemek gerekir ki Whitehead ve Russell, bu eserde kullandıkları çeşitli varsayımlardan hareketle amaçlarına ulaşmış ve projelerini tamamlamışlardır. Bununla birlikte, her ne kadar P.M., kümeler teorisi, finite ve transfinite aritmetik ve elemanter ölçüm teorisindeki ana teoremlerde başarıya ulaşmışsa da iki tane mantık dışı karakterde aksiyom içermektedir; *sonsuzluk aksiyomu* ve *indirgenebilirlik aksiyomu*. Sonsuzluk aksiyomu, nesneler planında bir sonsuzluğun söz konusu olduğunu kabul eder ki bu haliyle o, mantıksal olmaktan çok empiriktir. İndirgenebilirlik aksiyomu ise, Russell ve Whitehead' in, paradokslara yol açan ifadeleri kısıtlamaya yönelik kullandıkları *Tipler Teorisi*' nin tatmin edici görülmeyen sonuçlarını ortadan kaldırmak için kullanılmıştır. Bu amaç teknik olarak mümkün olsa bile indirgenebilirlik aksiyomu, eleştirenlerin de iddia ettikleri gibi bu zamana kadar yalnızca felsefi olarak haklı çıkabilmiştir. Sonuç olarak, "matematik mantığa indirgenebilir mi?" ya da "matematik küme teorisine indirgenebilir mi?" soruları şu an için cevapsız durumdadır.

Bu eleştirilere karşın P.M., dikkate değer ve etkileyici oluşunu en az üç farklı yolla kanıtlamıştır **[42]**: *Birincisi*; O, modern matematiksel mantığı, yazarlarının bile hayal etmediği bir popülerliğe kavuşturdu. Zira Russell ve Whitehead' in kullandıkları notasyonun Frege' in notasyonundan daha üstün oluşu, modern mantığın kayda değer gücünü, daha önce hiçbir yazarın başaramadığı şekilde ortaya koydu. *İkincisi*; O, yeni mantığın dedüktif gücünü çok açıkça sergiledi ve modern bir "formal sistem" fikrinin etkileyiciliğini gösterdi. *Üçüncüsü*; O, mantıkçılık ile geleneksel felsefenin iki dalı olan metafizik ve epistemoloji arasındaki açık ve ilginç bağlantıları ortaya koydu ve böylece bu alanlardaki yeni ve ilginç bir çalışma sürecini başlattı.

Sonuç olarak söylenebilecek şudur ki; P.M., derin ve felsefi olarak zengin kavramları (önermesel fonksiyon, mantıksal inşa, Tipler Teorisi...) bilime kazandırmakla kalmamış, aynı zamanda meta-teorik buluşların (Kurt Gödel ve diğerleri) ortaya çıkışına da zemin ve altyapı hazırlamış, felsefe, matematik, linguistik, ekonomi ve bilgisayar bilimlerinde yeni açılımlara neden olmuştur.

3.8.3 P.M.' NIN KAPSAMI

P.M. üç ciltten ibaret olup toplam altı bölüm içerir **[39]**. 1. cilt; "Fikirler ve notasyonlara ilişkin ön açıklamalar", "Mantıksal Tipler Teorisi" ve "Tam olmayan semboller" konularını içeren uzunca bir girişle başlar. Ardından;

BÖLÜM 1 (MATEMATİKSEL MANTIK)

1. Dedüksiyon teorisi
2. Açık değişkenler
3. Sınıflar ve bağıntılar
4. Bağıntılar mantığı
5. Sınıfların toplam ve çarpımı

BÖLÜM 2 (KARDİNAL ARİTMETİĞİNE GİRİŞ)

1. Birim sınıflar ve ikililer
2. Alt sınıflar, alt bağıntılar ve ilişkili tipler
3. Bire çok, çoka bir, bire bir bağıntılar
4. Seçmeler (Ayırmalar)
5. İndüktif bağıntılar

şeklinde iki bölümle son bulur. 2. cilt ise "Sembolik kabullere yönelik birkaç söz" ile başlar ve

BÖLÜM 3 (KARDİNAL ARİTMETİĞİ)

1. Kardinal sayıların tanımı ve mantıksal özellikleri
2. Kardinal sayılarda toplam, çarpım ve üs alma
3. Sonlu ve sonsuz kardinaliteler

BÖLÜM 4 (BAĞINTI ARİTMETİĞİ)

1. Ordinal benzerlik ve bağıntı sayısı
2. Bağıntıların toplamı ve iki bağıntının çarpımı
3. 1.Farklar kavramı ve bağıntılarda çarpma ve üs alma
4. Bağıntı sayıları aritmetiği

BÖLÜM 5 (SERİLER)

1. Genel seriler teorisi

2. Kesitler, kesmeler, germeler ve türevler üzerine

3. Fonksiyonlarda limit ve yakınsama üzerine

şeklindeki 3., 4. ve yarım kalmış 5. bölümle sona erer. 3. ciltte 5. bölümün devamı ve 6. bölüm vardır:

BÖLÜM 5 (SERİLER)

4. İyi sıralı seriler

5. Sonlu ve sonsuz seriler ile ordinaller

6. Kompakt seriler, rasyonel seriler ve sürekli seriler

BÖLÜM 6 (NİCELİK)

1. Sayıların genelleştirilmesi

2. Vektör aileleri

3. Ölçüm

4. Devirli aileler

Geometri üzerine olması tasarlanan dördüncü cilt maalesef tamamlanamamıştır. Ancak öyle bile olsa bu eser, 20. yüzyılın en büyük bilimsel dokümanlarından biri olarak literatürdeki eşsiz yerini almıştır **[42]**.

3.9 GEOMETRİNİN GELİŞİMİ; EUCLİDE GEOMETRİSİ VE EUCLİDE-DIŞI GEOMETRİLER, AKSİYOMATİK SİSTEME FORMALİST BAKIŞ VE BİR AKSİYOMATİK SİSTEMDE TAMLIK, TUTARLILIK VE BAĞIMSIZLIK

Geometri, şekillerin ölçüm ve biçimlerini inceleyen bir matematiksel disiplin olarak ortaya çıkmış ve gelişimini sürdürmüştür. Bir matematiksel disiplin olarak son derece soyutlaşmış olmasına karşın, orijininin gerçek dünyanın olgu ve görünümlerinden kaynaklandığı kuşkusuz gibidir. Bilinen ilk kaynaklar, M.Ö. 2000 yıllarına varan empirik karakterli geometri çalışmalarını yansıtmaktadır. M.Ö. 2000-1700 yıllarına ait bir Mısır papirüsünde, çokgenler, çember, küre ve piramitlere ilişkin çalışmalar görülmüştür. Hemen hemen aynı yıllarda Babilliler' in de arazi ölçümlerine ilişkin geometri çalışmaları ve 2. dereceden bazı özel denklemlerin çözümlerini inceledikleri bilinmektedir. Hintliler' in ve Urartular' ın da Pythagoras Teoremi' ni yüzyıllarca öncesinden bildiklerini gösteren bulgular vardır. M.Ö. 600' lü yıllarda Mısır geometrisi Thales' le Antik Yunan' a taşındı. M.Ö. 572' de Pythagoras, Kroton' da mistik ve felsefi bir okul kurdu; geometrinin ilk kez bu okulda tümdengelimsel bir yapıya dönüşmeye başladığı sanılmaktadır. Pythagorasçılar' a göre doğrular, *monad* **[43]** denilen çok küçük boyutlu küreciklerden oluşuyordu. Doğrulardan oluşan düzlemlerin de az çok bir kalınlığı vardı. *m* ve *n* tane monad içeren iki doğru parçasının oranı *m/n* idi (yani uzunluklar ortak ölçümlüydü). Ancak Pythagoras Teoremi, belki de monad kavramından kaynaklanan ilk paradoks oldu. Çünkü, örnek olarak bir ikizkenar dik üçgenin hipotenüsü ile dik kenarlarının ortak ölçümlü oluşu ($\sqrt{2}$' nin irrasyonelliğinin ispatında kullanılan) çelişkiye yol açıyordu. Bu çelişkinin ortaya çıkışı, matematikte mistik bir yücelik gören Pythagoras okulu için bir yıkım olmuştur. Efsaneye göre, bunu sır olarak saklama kararlarına karşın Hippakos adlı bir okul mensubunun açıklaması, Hippakos' un tanrılar tarafından denizde boğularak cezalandırılmasına neden olmuştur **[21]**.

Daha sonra, Elea okulunun başlıca üyelerinden Parmenides ve öğrencisi Zeno, monad kavramının yol açtığı dört paradoks ortaya çıkararak, bu kavramın artık ortadan kalkmasını sağlamışlardır. Antik Grekler' in, *açının üçe bölünmesi*, *küpün iki katının alınması* ve *dairenin karelenmesi* adlı üç ünlü problem üzerinde de bir hayli çalıştıklarını; problemleri çözememiş olsalar da bu yoldaki çalışmalarından kaynaklanan birçok başka geometrik buluşlar yaptıklarını ve günümüzde artık, bu üç ünlü problemin çözülemeyeceğinin kanıtlandığını da kaydedelim.

Antik Grek geometrisinin en önemli ürünü, M.Ö. 300 başlarında İskenderiye' li Euclide tarafından yazıldığı sanılan *Elemanlar* **[20]** adlı ünlü eserdir. *Elemanlar*, (bugün dahi okullarda verilen) geometrinin esasını oluşturan konuları aksiyomatik yöntem ile ele alan ilk eser olabilir.13 bölümden oluşur; ilk dört bölüm *düzlem geometri*, 5. bölüm *büyüklükler ve oranlar teorisi*, 6. bölüm 5. bölümün geometriye uygulanması, 7.8.9. bölümler *aritmetik ve sayılar teorisi*, 10. bölüm *ortak ölçümsüz sayılar* ve son üç bölüm de *uzay geometri* ile ilgilidir. 1. bölüm, nokta, çizgi, uç nokta, doğru, yüzey, düzlem, sınır, şekil, daire, üçgen, dörtgen, kare, dikdörtgen, eşkenar dörtgen, paralelkenar, açı v.b. tanımlarla başlar. Son tanım olan paralellik tanımı şöyledir:

"Paralel doğrular, aynı düzlemde bulunan ve iki tarafa doğru uzatıldıklarında birbirini kesmeyen doğrulardır" **[20]**.

Postülatlar ise:

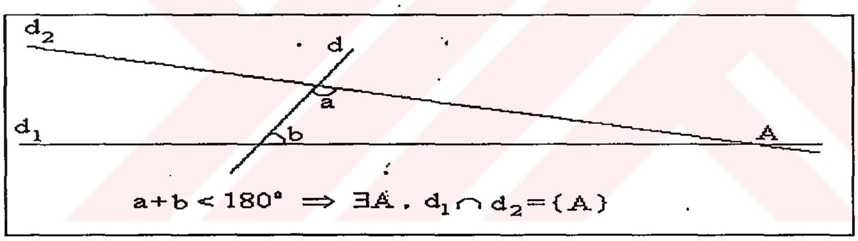
1. İki noktadan bir doğru geçirilebilir

2. Sınırlı bir doğru, istenildiği kadar uzatılabilir

3. Merkezi ve yarıçapı bilinen bir çember çizilebilir

4. Tüm dik açılar eşittir

5. İki doğruyu kesen bir doğru aynı tarafta, toplamları iki dik açıdan küçük açılar oluşturursa, bu iki doğru (bu açıların oluştuğu tarafta) kesişir



Şekil 3.9.1 Euclide' in 5. Postülatı **[20]**

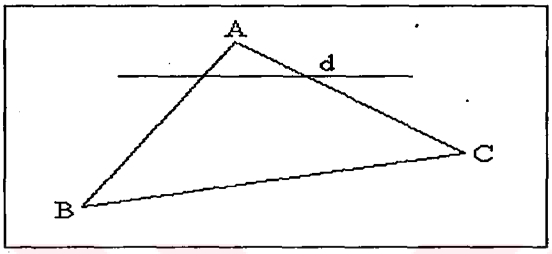
5. postülat, Euclide Postülatı olarak anılır ve daha öncekilerden hareketle bunu kanıtlamak için yüzyıllarca uğraş verilmişse de başarılamamıştır. 1. bölümde ayrıca büyüklüklere dair (tüm bilimlerde geçerli olan), 8 aksiyom yer alır. Daha sonra 48 teorem verilmiştir. Aşağıdaki 29. teoremden itibaren Euclide, ispatlarında 5. postülatı kullanmaya başlamıştır:

"Paralel doğruları kesen bir doğru, eşit iç ters açılar oluşturur"

Ayrıca belirtmek gerekir ki 47. teorem Pythagoras Teoremi ve 48. teorem de bunun karşıtıdır.

Gelmiş geçmiş hemen tüm matematikçiler (ve kuşkusuz matematikçi olmayan birçok insan), *Elemanlar*' ın içeriğindeki konularla içli dışlı olmuştur. Zira *Elemanlar* 2000 yıl boyunca, mantıklı akıl yürütmenin en güzel örneklerinin sergilendiği bir eser olarak kabul edilmiştir. Buna karşın, tanımların muğlak oluşu ve teoremlerin ispatlarında önemli bir rol oynamamaları; aksiyomlarda bazı eksikler oluşu ve bu nedenle de bazı teoremlerin üstü kapalı ispatlanmış olması v.s. önemli eksiklerindendir. Örnek olarak, birçok yerde gerektiği halde, aşağıdaki Pasch' ın ortaya koyduğu aksiyom *Elemanlar*' da yoktur:

"A, B, C düzlemin doğrusal olmayan 3 noktası ve d, aynı düzlemde olup bunların hiçbirinden geçmeyen bir doğru olmak üzere, d doğrusu eğer AB doğru parçasını keserse, AC veya BC' den en az birini de keser".



Şekil 3.9.2 Pasch Aksiyomu **[44]**

Elemanlar, hiçbir süreklilik aksiyomu da içermez. Sıra ile Archimedes, Cantor ve Dedekind' in ortaya koyduğu üç süreklilik aksiyomu ise şunlardır:

1. [AB] bir doğru parçası olmak üzere A_1, A ile A_2 arasında, A_2, A_1 ile A_3 arasında,...v.d. ve $|AA_1| = |A_1A_2| = |A_2A_3| = \ldots$ olacak şekilde A_1, A_2, A_3,... alınırsa, B, A ile A_n arasında olacak şekilde bir n vardır.

2. Bir [AB] doğru parçası üzerinde,

a) $|AA_1| < |AA_2| < \ldots$

b) $|AB_1| > |AB_2| > \ldots$

c) $|A_1B_1| > |A_2B_2| > \ldots$

d) $\exists n, \forall [CD], |A_nB_n| < |CD|$

koşullarını sağlayan $\langle [AA_n] \rangle$ ve $\langle [AB_n] \rangle$ dizileri varsa,

$n \in N \Rightarrow |AA_n| < |Ax| \wedge |AB_n| > |Ax|$

olacak şekilde bir x noktası vardır.

3. Bir [AB] doğru parçasının noktaları, aşağıdaki kurallara uyulmak kaydıyla iki sınıfa ayrılsın:

a) Her nokta, sınıflardan birine aittir.

b) A noktası 1. sınıfta ve B noktası 2. sınıftadır.

c) 1. sınıfın bir noktası, C 2. sınıfta olmak üzere bir [AC] doğru parçasının elemanıdır.

Bu durumda [AX] doğru parçasının her noktası 1. sınıfta ve [XB] doğru parçasının her noktası 2. sınıfta olacak şekilde bir X noktası vardır.

Lobachevsky *Elemanlar* için; "tarihi değerine ve matematikteki parlak başarılarına rağmen Euclide' in *Elemanlar*' ının ilk kusurları zamanımıza kadar gelmiştir" ve "hiçbir matematik disiplini, Euclide' de olduğu gibi müphem kavramlardan başlamamalıdır" yorumlarını yapmıştır.

Elemanlar' da, *arasında olma*, *içinde*, *dışında* gibi kavramlar sezgisel olarak ele alınmış ve hiçbir konum aksiyomu koyulmamıştır.

5. postülatın diğerlerinden hareketle ispatı için 2000 yıl boyunca girişilen başarısız çabalara dair Lobachevsky, 1823' de şöyle demiştir: "Bunun doğruluğunu gösteren bir ispat bugüne kadar verilememiştir. Verilenler de izahtan ibarettir ve matematiksel bir ispat olmaktan uzaktır". 1929' da ortaya konan *Geometrinin Anahtarlarına Dair* adlı eserde ise şunlar kaydedilir: "Matematiğin hiçbir yerinde, paralel teorisinde olduğu gibi ciddiyetten uzak kalmaya tahammül edemeyiz. Her ne kadar nesnelerin sezgimizde şekillenmesi, bizi geometrinin genel ve ilkel kavramların belirsizliği nedeniyle yanlış sonuçlara varmaktan korursa da ve ulaşılan gerçeklerin doğruluğuna, sadelikleriyle ve deneysel verilerle kendimizi ikna ettikse de, bütün bunlar ciddi muhakemeye alışkın zekayı tatmin etmekten uzaktır".

Euclide, 5. postülattan hareketle şu sonuçları kanıtlar **[20]**:

1. Bir noktadan, verilen bir doğruya sadece bir paralel doğru geçirilebilir.

2. Üçgenin iç açıları toplamı iki dik açıdır.

3. Verilen bir şeklin benzeri olan şekiller vardır.

Postülatın ilk tenkitçileri, onun doğruluğundan çok açıklığını sorgulamışlardır; ya ispatlamaya ya da yerine daha açık bir postülat koymaya uğraşmışlardır. Yunan geometrisinin diğer önemli temsilcileri arasında Archimedes (?-M.Ö.212), Apollonius (4.yy. sonu) ve Proklos (410-485) sayılabilir ve Proklos' un 5. postülatı ispatlama girişimleri kaydedilmiştir.

Halife Hz. Ömer' in 647' de İskenderiye' yi fethetmesiyle, antik çağın bilimsel eserleri Müslümanlar tarafından incelemeye alınmış ve İslam uygarlığının ürünü olarak ortaya çıkan bilim, hemen hemen 1000 yıl boyunca insanlığın hizmetinde olmuştur.

Paralellik postülatı üzerine bu süreçteki ilk ciddi çalışmalar, Nasiruddin Tusi' nin (1201-1274) ispat denemeleridir **[45]**.

Cataldi ve Giordano Vitale (1633-1711), düzlemde verilen bir doğruya eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yerinin, bu doğruya paralel iki doğru olduğunu varsayarak postülatı ispatlamaya çalışmışlardır. Wallis (1616-1703), bir üçgenin istenilen büyüklükte bir benzerinin olduğu varsayılarak postülatın ispatlanabileceğini göstermiştir. Saccheri (1667-1733) ise, $|AD| = |BC|$, $AD \perp AB$ ve $BC \perp AB$ koşullarını sağlayan ABCD dörtgenini ele alarak, C açısı (dik, dar ya da geniş olabilir) eğer dik ise, buradan hareketle 5. postülatın çıkabileceğini ileri sürmüştür. Lambert (1728-1777)' de, üç açısı dik olan bir dörtgenin dördüncü açısının dik, dar ve geniş olma durumlarını ele alarak postülatı kanıtlamaya çalıştı. Postülatla uğraşan diğer bilim adamları arasında Lagrange (1736-1813), Laplace (1749-1827), Legendre (1752-1833), Carnot (1753-1823) ve Fourier (1768-1890) sayılabilir.

Boşa giden ispat çabaları aslında matematiğe önemli bir katkı sağlamıştır. Bir *aksiyom sistemi*nden ne anlamak gerektiği sorgulanmış ve matematiğin gerçek işlevi ortaya çıkmıştır. Anti-Euclide ya da Euclide-dışı gibi adlarla anılan geometrilerin **[43]** söz konusu olabileceğini Gauss (1777-1856), Schweikarf (1780-1857), Taurinus (1794-1874) ve J. Bolyai (1802-1860) ilk savunanlardır. Lobachevsky (1793-1856), *pangeometri* ya da *sanal geometri* adını verdiği ve günümüzde *Lobachevsky Geometrisi* olarak bilinen geometriyi, 5. postülat yerine, "bir doğruya, dışındaki bir noktadan birden çok paralel çizilebilir" varsayımından hareketle oluşturmuştur. Riemann (1826-1866) ise, "bir doğruya, dışındaki bir noktadan hiçbir paralel çizilemez" varsayımı ile (yani paralellik kavramını hiç kullanmadan) *Riemann Geometrisi*' ni kurmuştur.

Euclide' çi olmayan geometrilerin ortaya çıkmasıyla *geometrinin yöntemi* tartışması başladı. Aksiyomların *geçerliliği*, *tamlığı*, *yeterliliği* kavramları ortaya çıktı. Modeller ve yorumlarla, bunların denetlenmesine girişildi. Öncelikle Pascal, Fermat ve Descartes' ın Analitik Geometri' sine başvuruldu. İzdüşüm geometrisi ile geometriler, Analitik Geometri' ye dönüştürüldü. Cayley ve Klein bu yolda çalışmalar yaptılar. Staudt, İzdüşel Geometri' nin Analitik Geometri' den bağımsızlığını kanıtladı. M. Pasch, kavramsal analizin aksiyomlarının temel kavramlardan çıkarılabileceğini savundu. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*' de aksiyomları; kendi içlerinde geçen kavramları kapalı olarak tanımlayan mantıksal bağıntılar olarak yorumladı.

Euclide-dışı geometriler ve geometrinin ilkeleri tartışmaları, Euclide geometrisinin postülatlarının bir dökümü ve mantıklı bir analizinin yapılması ihtiyacını da beraberinde getirmiştir. 19. yüzyıl sonlarında H. Poincare, D. Hilbert ve F. Enriques bu yolda çalışan önemli isimlerdir. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*' de Euclide geometrisi anlamındaki postülatları, *ortaklık*, *dağılım*, *paralellik*, *eşitlik* ve *süreklilik* olarak beş kısma ayırdı. Nokta, doğru ve düzlem kavramlarını tanımsız olarak ele alıp, bunları aksiyomlarda (örtük olarak tanımlanmış farzedip) kullandı.

Nokta, doğru ve düzlem kavramlarını varsayıp bunlar arasında birtakım bağıntılar oluşturarak, bu bağıntıları aksiyom olarak kullanıp bir geometri kurmak, ancak ortaya koyulan aksiyomların herhangi bir aşamada bir çelişkiye yol açmaması halinde gerçekleşebilir. Yani aksiyomların *bağdaşabilir* (tutarlı) olması gerekir. Hilbert, Euclide geometrisinin aksiyomlarının tutarlılığını kanıtlamak için onları özenle inceledi ve onların gerçekleştiği bir model olmak üzere bir analitik geometri inşa etti.

Aksiyomların *bağımsız*, yani herhangi birinin diğerlerinden elde edilememesi de gereklidir. Bunun için, genel olarak, seçilen bir aksiyom ayrıldıktan sonra, geriye kalanların gerçeklendiği bir model oluşturulur. Hilbert, Archimedes Postülatı' nın gerçekleşmediği bir geometri kurarak, Archimedes Postülatı' nın diğerlerinden elde edilemeyeceğini de kanıtlamıştır. Daha önce Veronese (1854-1917)' nin de aynı kanıtı verdiği bilinmektedir **[43]**.

Aksiyomların bağımsız olmaları gerekirse de, bunlardan herhangi birinde yapılacak bir değişiklik, diğer bazılarında da zorunlu olarak buna paralel bir değişikliğin yapılmasını gerektirebilir. Örnek olarak, paralellerin varolmadığını kabul ettiğimizde (Riemann), bir doğrunun sınırsız olarak uzatılabileceğinden de vazgeçmeden, Euclide aksiyomunu reddedemeyiz.

Geometride; "herhangi bir teoremi ispat etmek için başlangıçta hangi aksiyomların kabul edilmesi gerekir ve yeter?" sorusu da irdelenmiştir. Örnek olarak Hilbert, Desarques' in homolojik üçgenlere dair teoreminin, ancak denklik postülatları kabul edilirse düzlem geometride kanıtlanabileceğini kanıtlamıştır. Yani denklik postülatlarını kullanmadan bu teoremi ispatlamak için uzay geometriyi kullanmak gerekir. Bunun için Hilbert, denklik postülatlarının ve Desarques teoreminin doğru olmadığı bir düzlem geometri kurmuştur.

19. yüzyılda 5. postülatın diğer postülatlardan hareketle ispatlanamayacağının ispatlanması, herhangi bir matematiksel sistem içinde bazı önermelerin doğruluğunun (ya da yanlışlığının) ispatlanabilmesinin imkansızlığının da ispatlanabileceğini ortaya çıkarmıştır **[46]**.

Euclide-dışı geometriler ortaya çıkmadan önce, aksiyomların, doğrulukları (ayrıca bir ispatı gerektirmeyecek kadar) sezgisel olarak kendiliğinden-apaçık olan önermelerden seçilmesi gereğine özen gösteriliyordu. Ancak doğrulukları apaçık olmadığı halde (hatta sezgisel olarak yanlışmış gibi göründükleri halde) birtakım varsayımlardan, tutarlı geometrilerin kurulabilmiş olmasıyla bu düşünce kökten sarsılmış oldu. Üstelik, apaçık sayıldığı için, akıl kanunları gibi ele alınan Euclide aksiyomlarının sorgulanması da gündeme geldi. Örnek olarak Euclide' in; "bütün, parçalarından büyüktür" varsayımı, *büyük* kavramının hangi kıstasa göre söz konusu edildiği belirtilmedikçe hiçbir anlam taşımaz. Nitekim Cantor Teorisi' ne göre; kardinalite bakımından, tüm evrendeki noktaların kümesi, bir atom zerresindeki noktaların kümesinden daha büyük değildir. Ayrıca, Euclide aksiyomlarının kanıtlamaya yetmediği, *Goldbach Tahmini*, *Fermat Problemi* gibi birçok matematiksel sorun da vardır.

Bu noktada, matematiğin (ve özellikle geometrinin) yalın ve ödünsüz olarak kullandığı *tümdengelim* (deduction) yöntemine bir kez daha kısaca bakalım. *Tümdengelim* **[21]**; bazı başlangıç önermelerinden hareketle, gözlem, sezgi, deney, kamuoyu araştırması v.s. etkisi altında kalmaksızın, yalnızca mantık kurallarına dayanarak yeni önermeler elde etmeyi sağlayan bir bilgi üretme biçimidir. Böylece, eğer bir p önermesi, $p_1, p_2, ..., p_n$ önermelerinden tümdengelim ile elde edildiyse,

$$(p_1, p_2, \ldots, p_n) \Rightarrow p$$

gerektirmesine bir *teorem* ve p' nin elde edilme sürecine de $p_1, p_2, ..., p_n$' lerden hareketle p' nin *ispatı* demiştik. Şu besbellidir ki, mantık yanılgılarına düşmeden her şeyi ispatlayabilmek ve bir kısır döngü içine düşmeden de her şeyi tanımlayabilmek mümkün değildir. Bu nedenle, (ispatsız kabul edilen) temel önermelerden (aksiyomlardan) ve tanımsız kabul edilen terimlerden yola çıkmak zorunluluğu vardır. Böyle yola çıkarak ve yalnızca tümdengelim yöntemini kullanarak yeni önermeler (teoremler) elde etme biçimine *aksiyomatik yöntem* ve aksiyomatik yöntemle elde edilen bilgileri (ve bunların elde ediliş biçimlerini) içeren bir sisteme de *aksiyomatik sistem* **[20]** denir. Aksiyomatik sistem; dil, dilin simgeleri, terimler, aksiyomlar, tanımlar ve teoremlerden oluşur. Terimler, *tanımsız* (ilkel) ve *tanımlanmış* terimler olmak üzere iki sınıfa ayrılır. Aksiyomlar, ilkel terimler kullanılarak oluşturulan ve doğru oldukları varsayılan önermelerdir. İlkel terimler ve bunlardan hareketle oluşturulan aksiyomların anlamlı olması gerekmez. Bunlardan üretilen teoremler de herhangi bir olgusal durumdan bağımsızdır. Ancak bu soyut ve biçimsel yapının tümü ya da bir kısmı, olgusal dünya ile kasten eş biçimli hale getirilebilir. Bunun için ilkel terimlere ve aksiyomlara çeşitli olgu alanlarına ilişkin anlamlar verilip bunlar yorumlanabilirler.

Aksiyomatik bir sistem olan matematikteki önermelerin doğruluk değeri gözlem, deney v.s.' den bağımsızdır. Bunlara *analitik önermeler* ya da doğrulukları *a priori* olan önermeler demiştik.

Eski filozoflar ve matematikçiler geometriyi; "algının doğrudan nesnesi olan temel gerçeklerden yola çıkarak, yalın ve ödünsüz olarak tümdengelimle elde edilen bilgiler topluluğu" olarak görmüşler ve onu maddi dünyaya ilişkin en sağlam bilgi kaynağı saymışlardır. 19. yüzyıldan sonra, aksiyomatik yöntemin doğasına dair tartışmalar ve aksiyomatik yöntemin matematiğin diğer alanlarında da başarıyla uygulanması bu anlayışı değiştirmiştir. Formalistler (biçimselciler), matematiğin (matematikçinin), aksiyomlarının maddi dünyaya ilişkin gerçeklerle örtüşüp örtüşmediği konusuyla ilgilenmediğini ve bu konunun fizikçi, felsefeci v.d.' nin işi olduğunu savunur. Matematikçi için önemli olan; temel öğeler arasındaki ilişkiler ve bu ilişkilerin mantıksal sonuçlarıdır. Böylece matematik, *niceliklerin bilimi* olmaktan çıkar ve herhangi bir aksiyom sisteminden mantıksal olarak çıkabilecek sonuçları bulmayı sağlayan en üstün bilim olur. Herhangi bir çıkarımın geçerliliğinin, aksiyomlarda geçen terimlerin özel anlamlarıyla hiçbir ilgisi yoktur. Matematik sanılandan daha soyuttur; matematiksel önermeler türlü biçimlerde yorumlanabilir. Matematik sanılandan daha formeldir; kanıtlamaların geçerliliği, önermelerin sadece biçimsel yapılarına bağlıdır. Hilbert' e göre; "matematiğin asıl görevi olan arı matematiksel ilişkilerin bağımlılığı söz konusu olduğunda, ilkel terimlerin alışılmış çağrışımları bir kenara bırakılmalıdır; onlara yüklenecek yegane anlam, içinde geçtiği aksiyomlara bağlıdır" **[46]**.

Sorun şudur; bir aksiyomatik sistemin temelini oluşturan aksiyomlar, kendi içlerinde tutarlı mıdırlar? Yani bunlardan hareketle bir paradoksa düşülür mü?

Aksiyomatik yöntemin geometriye 2000 küsur yıl önce uygulanmış olmasına karşın, cebir aksiyomlarının, 3000 yıldan beri gittikçe karmaşıklaşarak kullanılagelen ve büyük ölçüde Harezmi' ye borçlu olduğumuz cebir kuralları arasından çekip çıkarılması yenidir. Huntington' un düzenlediği tutarlı, bağımsız ve yeterli 27 cebir aksiyomu vardır. Harkin, "korkmuş" anlamına gelen, İngilizce *scaret* sözcüğünün harfleriyle indislediği 6 adi cebir postülatı vermiştir ki bunlar bugün, cebirsel yapıların (grup, halka, cisim, v.s.) oluşturulmasında ele alınan işlemsel varsayımlardır.

Aksiyomlar, objeler arasındaki ilişkilere ilişkin olarak ortaya koyulan hipotezlerden ibarettir ve o halde onları oluşturmak kolay gibi görünmektedir. Dahası, eğer bir önermenin doğruluğunu ispatlayamıyorsanız onu bir aksiyom olarak kabul edin, olsun bitsin! Russell, böyle yapanlar için ağır konuşmuştur:

"İstediğimizi postülat olarak koyma yönteminin birçok avantajları vardır; bu avantajlar tıpkı, şerefle dökülen alın teri yerine, yapılan hırsızlığın sağladığı avantajlara benzemektedir" **[39]**.

Bir aksiyom sisteminin tutarlı (consistent), bağımsız (independent) ve yeterli (sufficient) olması gerekir. Tutarlılık vazgeçilmez koşuldur. Tutarlı bir aksiyom sisteminde bir teorem ve bunun zıttı birlikte ispat edilemez. Yani postülatlar, hiçbir çelişkiye yol açmazlar. 19. yüzyıla kadar Euclide geometrisinin tutarlı olup olmadığı söz konusu edilmemiştir. Çünkü, "birtakım önermelerin eğer tümü doğruysa, bunların karşılıklı olarak tutarlı olması gerekir" prensibinden hareketle, tümü apaçık doğru olan Euclide aksiyomlarının da tutarlılık sorunu söz konusu olamazdı. Bir sistemin tutarlı olduğunu kanıtlamak için aksiyom sisteminin bir modeli oluşturulur. Öyle ki her aksiyom, modelin doğru bir önermesine karşılık gelir. Buna *yorumlama* da denir. Euclide geometrisinin modeli ise, bildiğimiz 1, 2 veya 3 boyutlu uzaylardır. Hilbert, Euclide geometrisinin tutarlılığını kanıtlamak için aksiyomları özenle inceleyip, onların gerçeklendiği bir analitik geometri inşa etmiştir.

Euclide geometrisinin, başka birçok modelleri de oluşturulmuştur. Bunlardan birinde; (düzlem geometri için) paralel doğru ve düzlemlerden oluşan bir demetin, doğrularını nokta ve düzlemlerini de doğru olarak ele almak şeklinde oluşturulur. Bir diğeri; düzlemin bir noktasını silip, bu silinen noktadan geçen doğru ve çemberleri doğru olarak ele almak şeklindedir. Kristalograf ve matematikçi F.S. Feodorov (1853-1919) da, kristaller üzerinde çalışırken, Euclide uzayının düzlemde bir modelini oluşturmuştur [44].

H. Poincare (1854-1912) Lobachevsky geometrisi için, bir yarım düzlem ele alıp, merkezi bunun sınır doğrusu üzerinde bulunan yarım çemberleri düşünmüştür. Bu çemberlerden belli bir tanesini ele alarak, bunun üzerinde olmayan bir noktadan geçen çemberleri, bu ele alınan çemberi kesenler ve kesmeyenler şeklinde iki sınıfa ayırmıştır. Paralel doğrular, sınır doğrusunun bir noktasında kesişen iki çemberdir. Böylece Poincare, bu modelin Lobachevsky aksiyomlarını sağladığını kanıtlamıştır.

Riemann geometrisi de, verilen bir O noktasından geçen doğru ve düzlemler demeti ele alınarak;

O merkezli buket – İdeal düzlem

O noktasından geçen doğru – Nokta

O noktasından geçen düzlem – Doğru

İki doğru arasındaki açı – İki nokta arasındaki uzaklık

İki yüzlü açı – İki doğru arasındaki açı

Üç yüzlü – Üçgen

eşlemeleri yapılarak somut bir modele dönüşür [43].

Tüm bu modeller, söz konusu geometrik sistemlerin tutarlı olduklarını kanıtlamak için kullanılabilir. Ancak bu modellerle yapılan tutarlılık kanıtlamaları, Euclide geometrisinin tutarlı olduğu varsayılarak yapılmış olmaktadır. O halde, Euclide geometrisinin tutarlı olup olmadığı, hala sorun olarak durmaktadır. Her ne kadar, oluşturulan modeller üzerinde yapılan sonlu sayıdaki gözlemler aksiyomlarla uyum içinde olsa da, aksiyomlarla çelişebilecek bir olguyla karşılaşma olasılığı hala sıfır değildir. Hilbert' in, model olarak bir analitik geometri kurup, Euclide geometrisinin tutarlı olduğunu kanıtlama girişimi de, cebirin tutarlı olduğu varsayımına dayanır. Yani bu kanıtlamalar, yine başka bir sistemin tutarlı olduğu varsayımına dayanmaktadır ve o halde mutlak bir kanıtlama sayılamaz.

Tutarlılığın kanıtlanmasında model yönteminin kullanılması, eğer sonlu sayıda öğe içeren modeller söz konusu olabilseydi, geçerli olabilirdi. Ama sonsuz eleman içeren modeller, akıl yürütmelerde sonludan sonsuza doğru bir ekstrapolasyon (öteleme) içermekte ve bu ötelemeye de kuşkusuz, kuşkuyla bakılmaktadır.

Matematiğin konusunu oluşturan birçok aksiyomatik sistem, sonlu modellerle yorumlanamaz. Peano aksiyomları ile oluşturulan doğal sayılar sistemi de (ardışıklık aksiyomundan dolayı), ister istemez ancak sonsuz üyeden oluşan bir modele yansıtılabilir ve tutarlılık, sınırlı sayıda öğe ile gerçeklenemez. Nitekim ortaya çıkan paradokslar (Cantor, Russell, v.s.) da yukarıda sözünü ettiğimiz kuşkuyu haklı çıkarmaktadır.

Hilbert, bir sistemin, tutarlı olduğu varsayılan başka bir sisteme göre yorumlanarak tutarlı olduğunun gösterilmesine, *göreceli tutarlılık kanıtı* demiştir. Tutarlılığın (eğer varsa), başka bir sistemden yararlanmaksızın kanıtlanabileceğini savunan Hilbert, böyle ulaşılan tutarlılığa ise *mutlak tutarlılık* adını vermiştir. Mutlak tutarlılığın kanıtlanabilmesi için ilk adım, sistemin tam olarak biçimselleştirilmesidir. İkinci aşama; obje-dil, meta-dil ayırımının yapılmasıdır. Söz konusu olan sistem matematik ise; matematik, üst-matematik ayırımını yapmak gereklidir. Bu ayırım yapılırsa ve eğer sistem tutarlı ise paradokslara düşülmez. Eğer paradoksal bir durum ortaya çıktıysa, bu durum çözümlenebilir. Üçüncü aşama ise; analizdir. Bu analiz, tam biçimselleştirilmiş sistemdeki sembollerin saptanması, bu sembollerin bir araya gelerek formülleri nasıl oluşturduğu, bir formülden diğerinin nasıl elde edildiği ve herhangi bir formülün, belirlenmiş kurallara uyularak başka formüllerden elde edilip edilemeyeceğinin gösterilmesini içermektedir. Böylece Hilbert, sonsuz işlemlere başvurmadan, sadece sistemi oluşturan obje-dilsel ifadelerin yapısal özelliklerinin incelenmesiyle, sistemin aksiyomlarından çelişik önermelerin çıkıp çıkmayacağının gösterilebileceğini umuyordu. Mutlak tutarlılığın kanıtlanması için Hilbert tarafından önerilen ve Hilbert okulunun da geliştirme çabası içinde olduğu bu yönteme, *sonlayıcı üst-matematiksel yöntem* **[46]** denir. Sonlayıcı yöntem, tıpkı, satrancın hesaplanamayacak kadar çok alternatif içermesine rağmen, herhangi özel bir satranç probleminin sonlu sayıda analizle, üst-satranç diliyle çözümlenmesine benzer.

Aritmetiğin üst-matematiksel tutarlılığının kanıtlanması, aslında Hilbert okulunun bir üyesi olan Gerhard Gentzen tarafından 1936' da ve daha sonra da başkaları tarafından gerçekleştirilmiştir. Gentzen' in kanıtlaması, tüm aritmetiksel kanıtlamaları basitlik derecelerine göre sıralamaya dayanır. Kanıtlama, bu çizgisel sıraya, *sonsuz ötesi tümevarım ilkesi* denilen bir çıkarım ilkesi uygulanarak elde edilir. Bu kanıtlama, Hilbert''in başlangıçtaki saptaması anlamında sonlayıcı değildir.

Aksiyomların bağımsızlığı, bunlardan herhangi birinin diğerlerinden çıkarılamaması anlamına gelir. Bağımsız bir aksiyom sisteminden herhangi bir aksiyomu atmakla, aynı sistemi oluşturmak mümkün değildir. Bir sistemdeki bazı aksiyomların, kısmen de olsa bağımlı olmaları pek önemli bir sorun değildir. Aynı şeyi ifade etme v.s. gibi durumlar sistemi bozmaz. Fakat en az sayıda başlangıç önermesi ile başlamak tasarruf, dakiklik ve estetik bakımlarından tercih edilir. Bağımsızlık, postülatlara zerafet kazandırır. Geometrideki birçok aksiyom sistemleri bağımsız değillerdir. Belli bir aksiyomun diğerlerinin tümünden bağımsızlığı, yani bu aksiyomu diğerlerinden hareketle ispatlamanın imkansızlığı, bu aksiyom yerine tersi (olumsuzu) alınarak oluşan sistemin çelişmez (tutarlı) olduğu gösterilerek kanıtlanır. Örnek olarak, Euclide' in 5. aksiyomunun diğerlerinden bağımsız olduğu; bu aksiyom yerine Lobachevsky aksiyomu koyularak elde edilen Lobachevsky geometrisinin tutarlı olduğu kanıtlanarak kanıtlanmıştır. Hilbert bağımsızlık konusunu, *Grundlagen der Geometrie* (Geometrinin Temelleri) adlı eserinde ele almıştır.

Aksiyom sisteminin tamlığı (bazen yeterlik, kesinlik v.s. adı da verilir); izomorfik olmayan çeşitli sistemlere karşı tek bir sistemin belirlenmesinde, postülatların sahip olduğu imkanı ifade eder. Yani, herhangi iki yorumu izomorf olan bir aksiyom sistemine *tam* denir. Örnek olarak, izomorf olmayan grupların varlığı, gruplar teorisinin aksiyomlarının tam olmadığını gösterir.

3.10 HILBERT PROGRAMI

19. yüzyılın ortalarından itibaren matematik dünyasının değişik merkezlerinden yükselmeye başlayan ve matematiğe sağlam bir temel bulmaya, onu tam ve çelişkisiz bir şekilde ifade etmeye yönelik çalışmaların en önemlilerinden biri, çağının büyük bilim adamı David Hilbert' e ait olanıdır. Hilbert, *formalizm* adıyla anılan ve matematiğin biçimselleştirilmiş aksiyomatik sistemlerden oluşmasını öngördüğü çalışmalarını, matematiksel bir süreç olarak ele almış ve onu bir program şeklinde bilim dünyasına sunmuştur. Hilbert programı, matematiğin doğruluk, tamlık, tutarlılık ve kesinliğin adeta kalesi olduğu ve onda herhangi bir eksiklik ve çelişkiye asla yer olamayacağı düşüncesi üzerine inşa edilmiştir. Bu yönüyle program, matematikte çözülemeyecek hiçbir problem olmadığını ve hala çözülememiş olan matematiksel problemlerin de bir gün mutlaka çözüleceğini iddia etmektedir. Hilbert bu iddiasını açık bir şekilde ortaya koyabilmek için, matematik dünyasının o güne kadar çözemediği tüm problemlerin 23 tane olduğunu, bu problemlerin içerikleriyle beraber matematikçilere ilan etmiş ve onlara, hepsinin üstesinden gelebilecekleri yolunda ciddi telkinlerde bulunmuştur. Aşağıda, Hilbert' in tüm bunlara ilişkin, 1900 yılında Paris' te toplanan ve devrin ileri gelen tüm matematik adamlarının katıldığı Uluslararası Matematik Kongresi' nde yaptığı, *Matematiksel Problemler* adlı tarihi konuşmanın büyük bir kısmı yer almaktadır. Bu metni, asıl konumuzla yakından ilişkili olması nedeniyle, 23 problemin 2.si durumunda olan *Aritmetik Aksiyomlarının Tutarlılığı Problemi*' nin, aynı konuşma sırasında Hilbert' in cümleleriyle ifade edilmiş şekli izlemektedir **[2]** :

"Gelecekte saklı duranlarla aramızdaki perdeyi kaldırmak, bilimin ilerleyişine ve gelecek yüzyıllar boyunca onun gelişiminin sırlarına bir göz atmak hangimizi mutlu etmez ki? Gelecek nesillerin çalışmalarına önderlik edecek matematiksel ruhun, acaba ne gibi temel amaçları olacak? Geniş ve zengin bir alan olan matematiksel düşüncenin, yeni yüzyıllarda ortaya koyacağı yeni yöntemler ve gerçekler neler olacak?

Tarih bize, bilimsel gelişmenin sürekli olduğunu öğretir. Biliyoruz ki her neslin kendine özgü ve gelecek neslin çözeceği veya yararsız sayıp kenara atacağı ve yenisiyle değiştireceği problemleri vardır. Biz de eğer, matematiksel bilginin yakın gelecekteki muhtemel gelişimi içinde yeni fikirler yakalayabilirsek, öncelikle henüz açıkça belli olmayan (yerleşmemiş) sorunları belleğimizden atmalı ve günümüz biliminin çözümünü gelecekten beklediği problemlere yoğunlaşmalıyız. Yüzyılların birikimi olarak günümüze gelmiş bu problemlerin tekrar gözden geçirilmesi, kanımca daha anlamlıdır. Zira büyük bir çağın bitişi bizi sadece geçmişe bakmaya çağırmıyor, aynı zamanda düşüncelerimizi de bilinmeyen geleceğe doğru yönlendiriyor.

Belli (yerleşmiş) problemlerin derin anlamının, genelde matematiksel ilerlemede ve özel olarak bireysel çalışmalarda önemli rol oynadığı inkar edilemez. Bir bilim dalı, ortaya koyduğu problemlerin çokluğu oranında ayakta kalır; problemleri ortaya koyuştaki eksiklik, bu dalın gelişiminin durması ya da tamamen ortadan kalkmasının habercisidir. Her insanın bazı şeyleri elde etmek için başka bazı şeylere ihtiyaç duyması gibi, matematiksel araştırmalar da problemlere ihtiyaç duyarlar. Öyle ki bu problemlerin çözülmesiyle araştırmacı, içindeki cevherin kıvamını ölçer, yeni yöntemler ve bakış açıları geliştirir, daha geniş ve daha özgür bir ufuk yakalar.

Bir problemin değerini kesin olarak belirlemek zor ve genellikle imkansızdır. Bu belirlemede varılan kararı, bilimin bu problemden kazandıkları etkiler. Ancak yinede, bir matematiksel problemi değerlendirmede kullanılan genel kriterlerin neler olduğu sorulabilir. Bu konuda eski bir Fransız matematikçi şöyle demiştir:

'Bir matematiksel teori, sokakta gördüğünüz ilk insana açıklanabilecek basitliğe indirgenene kadar, üzerinde tam olarak çalışılmış değildir.'

Bu açıklık ve kolaylık, matematiksel teorilerin bugün de ısrarla sahip olması gereken bir özelliktir. Bir matematiksel problemin mükemmelliği için bunlara ihtiyacı vardır, zira; açık olan ve kolayca kavranan çekicidir, komplike olan ise itici!

Ayrıca bir matematik problemi bizi cezbedecek kadar zor olmalı, ancak çabalarımızın heba olacağı kadar da ulaşılamaz olmamalıdır. O, saklı gerçeklerin dikenli yollarında bize kılavuzluk yapmalı ve başarılı bir çözümle ondan keyif almamızı sağlamalıdır.

Geçen yüzyıllardaki matematikçiler, bazı zor problemlerin çözümüne şiddetli bir istek ile adanmaya alışmışlardı. Onlar zor problemlerin değerini iyi bildiler. John Bernoulli' nin ortaya koyduğu *en hızlı düşüş doğrusu* problemini hatırlayınız. Bernoulli bu problemi ilan ederken; 'tecrübelerimizin bize öğrettiği, zor ve aynı zamanda yararlı problemlerin yüksek zihinlerce ele alınarak, bilimin ilerleyişi için onların yol göstermesi gerekliliğidir' demiş ve başta Mersenne, Pascal, Fermat ve Viviani olmak üzere tüm matematik dünyasının övgülerini beklemiştir. Çünkü, devrinin seçkin analizcilerinin, bu problemi bir mihenk taşı olarak kabul edeceklerini ve böylece yöntemlerinin değerini ve yeterliliğini ölçeceklerini düşünmüştür. Gerçekten değişkenler hesabı, kaynağını Bernoulli' nin söz konusu problemi ve benzerlerine borçludur.

Bilindiği gibi Fermat' nın öne sürdüğü

$$x^n + y^n = z^n \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (x, y, z \in Z)$$

diofant denklemi, açıkça belli olan özel durumlar dışında çözümsüzdür. Çözümsüzlüğü kanıtlama denemeleri, bilimde çok özel ve önemsiz gibi görünen bazı problemlerin, gayet ilham verici sonuçlara sahip olabileceğini göstermiştir. Fermat' ın probleminin teşvik ettiği Kummer, *ideal sayılar teorisi*nin gelişimine önderlik etmiş ve artık günümüzde bir yasa olan; bir dairesel cisme ait sayıların ideal asal çarpanlarına tek türlü ayrılmasını bulmuştur. Bu yasanın değişik cebirsel alanlara genelleştirilmesi Dedekind ve Kronecker tarafından yapılmış olup bugün bu çalışmalar, modern sayılar teorisinin merkezini oluşturmaktadır. Hatta söz konusu yasanın derin anlamı artık, sayılar teorisinin sınırlarını aşmış, cebire ve fonksiyonlar teorisine girer hale gelmiştir.

Çok farklı bir alandan örnek vermek için *üç durum* problemini hatırlayınız. Bu konuda Poincare' in astronomik mekaniğe kazandırdığı verimli yöntemler ve ulaşılması zor prensipler, bugün uygulamalı astronomide iyi bilinir ve kullanılır.

Poincare bu zor problemi tekrar gözden geçirme ve çözüme yaklaşma işini üzerine aldığında işte bu prensipleri kullanmıştır.

Bahsedilen son iki problem bize neredeyse karşıt kutuplarda gibi görünür. Öyle ki, birincisi tamamen teorik (pür) nedenlerle ve sayılar teorisiyle açıklanabilirken, diğeri astronomiyle ve kainatın temel ve basit fenomenleri ile anlaşılabilir.

Ancak sık sık görülmektedir ki bir problem, matematiğin birbirinden çok farklı dallarında uygulama alanı bulabilmektedir. Örneğin *en kısa yol* problemi, geometrinin temellerinde tarihsel ve önemli bir rol oynadığı gibi, eğriler ve yüzeyler teorisinde, mekanikte ve değişkenler hesabında da ciddi yer tutmaktadır. Yine, Klein' ın düzgün yirmiyüzlü üzerinde yaptığı çalışmalar, elemanter geometrideki regüler çokyüzlü problemini direkt olarak ilgilendirdiği gibi, grup teorisi, denklemler teorisi ve lineer diferensiyel denklemler teorisiyle de yakından ilişkilidir.

'Problem' kavramının önemini daha iyi kavratabilmek için Weierstrass' a da işaret edebilirim. Zira o, mutlu geleceğini biraz da, Jacobi' nin *inversiyon* problemi kadar önemli bir problemi, daha bilimsel kariyerinin hemen başlarında çalışmak için önüne almasına borçludur.

Artık, matematiksel problemlerin önemini anlamış durumdayız. O halde bu bilimin, problemlerini hangi kaynaklardan çıkardığı sorusuna dönelim. Elbette, matematiğin her dalındaki ilk ve en eski problemler, tecrübeler ve dış dünyadaki fenomenlerden esinlenerek bulunmuştur. İnsanlık tarihinin ilk dönemlerinde tamsayılarla hesap yapmanın kuralları bu yolla keşfedilmiş olup, günümüz çocukları da bu kuralları empirik yöntemlerle öğrenmektedirler. Aynı durum; geometrinin ilk problemleri ve eski medeniyetlerden miras kalan problemler (küpün duplikasyonu, çemberin kareselleştirilmesi ...) için söz konusu olduğu gibi, nümerik denklemlerin çözüm teorisine ait eski problemler, eğriler teorisi ile diferensiyel ve integral hesaba ait problemler, değişkenler hesabı, Fourier serileri ve potansiyel teorisi ile ilgili problemlerde ve burada sayılamayacak çoklukta olan mekanik, fizik ve astronomiye ait problemlerde de geçerlidir.

Zamanla matematiğin dallarının gelişim sürecinde, ona ait problemlerin başarılı çözümleri, insanın, aklının ve benliğinin bağımsızlığının bilincine varmasını sağlar. Dışarıdan sezilebilir bir etki olmaksızın kendi kendini geliştirir; mantıksal kombinasyonlar, genelleme ve soyutlamalar, fikirleri değişik yollarla dağıtıp toplamalar sonucunda yeni ve yararlı problemler bulur. Asal sayılar problemi ve sayılar teorisindeki diğer problemler, Galois' nin denklemler teorisi, cebirsel değişmezler teorisi, otomorfik ve Abeliyen fonksiyonlar teorisi ile modern aritmetik ve fonksiyonlar teorisinin daha nice güzel problemi işte bu süreci takiben doğmuşlardır.

Teorik amaçlı yaratım süreci çalışmaya başladığında, dış dünya bu sürece tekrar katılır. O bizi, tecrübelerimizle ulaşacağımız yeni problemlere ve matematiğin yeni dallarını keşfetmeye iter. Biz ise, teorik düşünce adına bilginin yeni alanlarını ararken, sık sık çözülmemiş eski problemlerin yanıtlarına ulaşır ve böylece eski teorilerin gelişimine büyük oranda yardımcı oluruz. Bana öyle geliyor ki, matematiğin değişik dallarındaki sorular, yöntemler ve fikirlerin şaşırtıcı benzerliği ve kendiliğinden bir armoniye sahip oluşları, kaynağını düşünce ve tecrübe arasındaki sürekli etkileşimden almaktadır.

Bir matematiksel problemin çözümünden beklediğimiz şeyler, genel anlamda nelerdir? Her şeyden önce şunu söylemeliyim; çözümün doğruluğu, sonlu sayıda hipotezden yola çıkılarak sonlu sayıda adımda gösterilebilmeli ve bu gösterim tamamen formüle edilebilmelidir. Bu şekilde, sonlu sayıdaki süreçlerle tanımlanan mantıksal dedüksiyonun gerekliliği, çözümdeki uslamlamanın kesinliği adına vazgeçilmezdir. Aslında herkesin iyi bildiği matematiğin *kesinlik* düşüncesi, evrensel ve felsefi bir gereklilik olup sadece bu gerekliliğin gerçeklenmesi bile, probleme anlamlılık ve içerik zenginliği katar. Tecrübeler dünyasında kaynağını bulan yeni bir problem, genç bir fidanın, tüm bahçıvanlık kurallarının uygulanması ve dikkatlice aşılanması ile büyüyüp meyve verdiği gibi, genel kurallara uyulduğunda gelişir.

Bununla birlikte ispatın kesinliğinin onun basitliğinin düşmanı olduğu düşüncesi, yanlış bir inanıştır. Tersine, kesin ama aynı zamanda basit ve kolay kavranabilen yöntemlere çok sayıda örnek verilebilir. Çünkü kesinlik için gösterilen çaba, bizi daha basit ispat yöntemleri bulmaya zorladığı gibi, eski ve daha az kesin olan yöntemlerin aksine, gelişime açık, yeni ve kesin yöntemlerin oluşumuna da öncülük eder.

Bu sebeple cebirsel eğriler teorisi önemli bir basitleştirmeye tabi tutulmuş, daha kesin teorik yöntemler ve tutarlı transandant objeler yardımıyla içeriği konsantre edilmiştir. Hatta, terim terime diferensiyel ve integrasyon gibi elemanter dört işlem uygulamalarının ispatlarının, ancak kuvvet serileriyle mümkün olması ve bu serilerin diğer yararlarının ortaya çıkışı, tüm analizdeki belirgin bir basitleşmeyi, özellikle eliminasyon teorisi ile diferensiyel denklemler teorisinin basitleşmesini ve varlık teoremlerinin ispatını da beraberinde getirmiştir. Ama bence, söylediklerimin en güzel örneği değişkenler hesabında mevcuttur. Zira, tek ve iki değişkenli belirli integrallerin ele alınışında komplike denilebilecek hesaplamalar vardı ve eski matematikçiler bu hesaplamaları, gerekli kesinliği sağlayamayan süreçlerle ele almışlardı. Ta ki Weierstrass bize, değişkenler hesabının yeni ve kesin bir yolunu gösterene kadar. Bu yolu, örneklerini, basit ve iki katlı integrallerde olmak üzere konuşmamın sonunda kısaca anlatacak, onun değişkenler hesabındaki basitleşmeye nasıl önderlik ettiğini göstereceğim.

Bu noktada, bir problemin çözümünde yapılanların kesinliği üzerinde ısrar ederken, diğer taraftan da bu kesinliğin yalnızca analiz veya aritmetikte aranması gerektiği düşüncesine karşı çıkmalıyım. Tamamen yanlış olduğunu düşündüğüm bu fikir, zaman zaman seçkin kişilerce de savunuldu. Ancak kesinlik ihtiyacına dayanan böylesi tek yanlı bir yorumun, ileride geometri, mekanik ve fizik kaynaklı teorilere önem verilmesine, dış dünyadan gelen yeni materyallerin önünün kesilmesine ve son olarak ta kontinum ve irrasyonel sayılar teorisinin reddine yol açacağını düşünüyorum. Hangi büyük güç, geometri ve matematiksel fiziği çökerterek matematiğin canlılığını sona erdirebilir? Tersine, bilgi teorisinden, geometriden, doğal veya fiziksel bilimlerin herhangi birinden kaynaklanan matematiksel fikirlerin, kaynağına bakılmaksızın dayandığı ilkeler araştırılmalı, basit ve tam bir aksiyomlar sistemi üzerine oturtulmalıdır. Böylece yeni fikirlerin doğruluk ve tümdengelime uygunlukları, eski matematiksel konseptlerden hiçte aşağı kalmaz.

Yeni fikirler, yeni işaretler taşırlar. Bu işaretler bize, başka yeni fikirlerin oluşumuna neden olan fenomenleri hatırlatırlar. Bundan dolayıdır ki geometrik şekiller, uzaysal algılamamızın işaretleri ve sembolleri olup tüm matematikçiler tarafından böyle anlaşılırlar. ‘ $a>b>c$ ’ eşitsizliğini, geometrik olarak bir doğru üzerindeki üç noktanın gerçeklediği *arada olma* fikriyle bütünleştirmez miyiz?

Fonksiyonların sürekliliği ya da yığılma noktalarının varlığına ilişkin zor bir teoremin *kesin* bir ispatında, kim doğru parçaları ve dikdörtgenlerle sonuca gitmez? Kim bir üçgenden, onunla eşmerkezli bir çemberden ve üç dik eksenin kesim noktasından vazgeçebilir? Ya da kim, diferensiyel denklemler ve diferensiyel geometride önemli rol oynayan bir vektör alanı, bir eğriler veya yüzeyler ailesinin geometrik yorumunu ya da değişkenler hesabı gibi diğer pür matematik bulguların geometrisini göz ardı edebilir?

Aritmetik sembolleri diyagramlarla, geometrik şekiller grafiklerle ifade edilirler. Hiçbir matematikçi bu grafiklerden, hesaplamalardaki parantez ekleme ve kaldırmalardan ya da diğer analitik işaretlerin kullanımından vazgeçemez.

Geometrik işaretlerin kesin bir ispat için kullanılışında, eksiksiz bilgi ve işaretlerin dayandığı aksiyomların öncülüğü esastır. Öyle ki bu işaretlerin başka matematiksel işaretlerin birleşmiş hali olma ihtimaline karşılık, içeriklerine ilişkin kesin bir aksiyomatik inceleme yapmak gereklidir. Örneğin iki sayıyı toplarken, aynı basamakların doğru sırada alt alta gelmesi hesaplamanın bir kuralı olup, aritmetiğin aksiyomları basamakların doğru kullanılışını tanımlamaktadır. Dolayısıyla geometrik işaretlerin kullanılışı, geometrik konseptler ve onların kombinasyonlarının aksiyomları tarafından tanımlanmaktadır.

Geometrik ve aritmetik düşünce arasındaki uygunluk, bu alanlarda yapılan uslamlamaların alışık olduğumuz yönü tersine çevrilerek te gösterilebilir. Özellikle bir problemi ilk ele alışımızdaki o ilk, hızlı, bilinçsiz ve aritmetiksel hissedişe güvenerek yapılan kesin olmayan kombinasyonda bu daha belirgindir. Kesinlik korunarak geometrik fikirler ve işaretlerle işlenmiş bir aritmetik teorisine örnek olarak, Minkowski' nin *Die Geometrie der Zahlen* eserini öneriyorum. Matematiksel problemlerin zorlukları ve bunların üstesinden gelmenin anlamı üzerine önemli bilgiler, burada bulunabilir.

Bir problemin çözüm sürecindeki başarısızlığımızın nedeni genelde, bu problemle ilgili başka problemlerin oluşturduğu zincirin bir bağlantı noktasını göremeyişimizdir. Bu noktanın bulunuşuyla yalnızca ilgilendiğimiz probleme ilişkin bir rahatlama sağlanmayıp, aynı zamanda ilgili diğer problemlerde de uygulanabilecek bir yönteme kavuşmuş oluruz. Buna Cauchy' nin, *integrasyonun kompleks yolları* ve Kummer' in, sayılar teorisindeki *idealler* konuları örnek verilebilir. Elbette böyle bir yol, tek bir problem için değil de ilgilenilen tüm problemler için genel bir yöntem arayanlara, en pratik ve en kesin bir yoldur.

Matematiksel problemlerle ilgilenirken bence, genelleme yerine daha çok soyutlama yaparız. Belki birçok kez, eldeki problemden daha basit ve daha kolay başka problemlerin çözümündeki eksiklikler, asıl problemin çözümünü boş yere başka yerlerde aramamıza sebep olur. İşte ancak bu kolay problemlerin ortaya konuşu ve olabildiğince mükemmel çözümüyle, genelleme yapabilecek konseptlere ulaşabiliriz. Bu kural, aslında her zaman kullandığımız ve çoğu kez farkında olmadığımız, matematiksel zorlukları aşmada en etkili kurallardan biridir.

Bazen bir problemin çözümünü, yetersiz hipotezlerden veya doğru olmayan bir sezgiden hareketle arar ve başarısız oluruz. Böylece, verilen hipotezlerle ya da sezgilerimizle çözüme ulaşmanın mümkün olmadığını gösterme sorunu belirir. Böyle imkansızlık ispatları eski matematikçiler tarafından sıklıkla yapılmış olup, bir ikizkenar dik üçgenin hipotenüsünün kenarına oranının irrasyonel oluşunun gösterilmesi, buna iyi bir örnektir.

Daha sonraki yıllarda, kesin çözümün imkansızlığı sorunu matematikte önemli bir rol oynadı. Paralel aksiyomu, çemberin kareselleştirilmesi problemi ve 5. dereceden denklemlerin çözümü gibi eski ve zor problemler, bu yolla tamamen tatmin edici ve kesin çözümlerine ulaştılar. Bu ulaşımda diğer felsefi nedenlerle birlikte, tanımlı her matematiksel problemin tam olarak yerleşmesinin gerekliliği ve hassasiyeti düşüncesinin önem kazanması da etkili olmuştur. Örneğin Euler-Mascheroni sabiti C ' nin irrasyonelliği ya da $2^n + 1$ formunda sonsuz asal sayının varlığı gibi hala çözümsüz olan bir problemi düşünün. Her ne kadar böyle bir problem bize yaklaşılamaz gibi gözükse de, sonlu sayıda mantıksal süreçler sonucunda çözüme ulaşacağımıza olan inancımız tamdır.

Her problemin çözülebilirliği, sadece matematiksel düşünceye ait karakteristik bir özellik midir? Yoksa o, 'sorulan her sorunun bir cevabı vardır' şekliyle zihinlerimizde doğal olarak yer alan bir genel yasa mıdır? Diğer bilimlerde de, çözümsüzlüğünün ispatıyla bilimin çok şeyler kazanacağı ve tam bir tatmine ulaşacağı eski problemler vardır. *Sürekli devinim* problemini buna örnek verebilirim. Sürekli devinim makinesinin yapımı ile boşuna uğraşıldığı anlaşıldıktan sonra, böyle bir makinenin imkansızlığı fikri, doğadaki kuvvetler arasındaki ilişkilerin araştırılmasını sağladı. Bu araştırmalar, enerjinin korunumu yasasının keşfine öncülük ederken, daha önce sezgisel olarak tasarlanan bir sürekli devinim makinesinin mümkün olmayışını da tekrar ispatladı.

Her matematiksel problemin çözülebilir olduğu inancı, çalışan kişiyi güçlü bir şekilde güdüler. İçimizde sürekli olarak şunu duyarız: 'Bir problem var. Çözümünü aramalısın. Bulabilirsin. Matematikte vazgeçmek yoktur!'

Matematikte problemler tüketilemez. Çözülen her problem, yerini yeni başka problemlere bırakır. İzin verirseniz ileriki bölümde, matematiğin değişik dallarından derlediğim, bilimsel gelişmeye katkıda bulunacağına inandığım problemleri sunacağım.

Gelin analizin ve geometrinin temel ilkelerini gözden geçirelim. Bana kalırsa son yüzyılın bu alanlarda en anlamlı ve kaydadeğer başarıları Cauchy, Bolzano ve Cantor' un *kontinum* fikrini formüle etmeleri ve Gauss, Bolyai ve Lobachevsky' nin *Euclide-dışı geometri*yi keşifleridir. Şimdi dikkatlerinizi, bu alanlara ait problemlere çekmek istiyorum:

1. Cantor' un, kontinumun kardinal sayısı problemi

2. Aritmetiksel aksiyomların tutarlılığı problemi

3. Eş tabanlı ve eş yükseklikli iki dörtyüzlünün hacimlerinin eşitliği problemi

4. İki nokta arasındaki en kısa yol doğrusu problemi

5. Lie' nin, diferensiyellenebilir olmaları gerekmeyen sürekli transformasyonlar grubu problemi

6. Fiziksel aksiyomların matematiksel ele alınışları problemi

7. Bazı belirli sayıların, irrasyonelliği ve transandantlığı problemi

8. Asal sayılar problemi

9. Bir sayılar cisminde, genel ters elemanlık yasasının ispatı problemi

10. Diofant denkleminin çözülebilirliğinin belirlenmesi problemi

11. Cebirsel nümerik katsayılı kuadratik formlar problemi

12. Abel cisimleri üzerindeki Kronecker teoreminin, herhangi bir rasyonel cebirsel yapı üzerine genişletilmesi problemi

13. 7. dereceden denklemlerin, iki değişkenli fonksiyonlar yardımıyla çözümünün imkansızlığı problemi

14. Fonksiyonların tam sistemlerinin sonlu oluşunun ispatı problemi

15. Schubert' in sayılabilir hesap teorisinin kesin dayanağı problemi

16. Cebirsel eğriler ve yüzeylerin topolojisi problemi

17. Tanımlı yapıların karelerle ifade edilişi problemi

18. Kongruent çokyüzlüler uzayının inşası problemi

19. Değişkenler hesabındaki regüler problemlerin çözümlerinin, her zaman analitik olup olmadığı problemi

20. Sınır değerler problemi

21. Monodromik grup içeren lineer diferensiyel denklemlerin varlığının ispatı problemi

22. Analitik bağıntıların otomorfik fonksiyonlar yardımıyla düzgün hale getirilmesi problemi

23. Değişkenler hesabının yöntemlerindeki son gelişmeler problemi"

3.11 ARİTMETİK AKSİYOMLARININ TUTARLILIĞI PROBLEMİ [2]

"Bir bilimin temellerine ilişkin yaptığımız araştırmada, o bilimin temel fikirleri arasındaki ilişkileri net ve eksiksiz şekilde ortaya koyan bir aksiyomlar sistemine ihtiyaç duyarız. Bu koşulu sağlayan böyle bir aksiyomlar sistemi, aynı zamanda bu temel fikirlerin tamamı mahiyetinde olup, ilgili bilimin tüm gerçekleri, bu aksiyomlardan sonlu sayıda mantıksal adım sonucu çıkarılabilmelidir. Kısa bir düşünme süreci sonucunda ortada şöyle bir problem belirecektir: 'Aksiyomlardan oluşan ifadeler birbirine bağımlı mıdır ve bu aksiyomlar, birbirlerinin bazı kısımlarını içerirler mi?'. Ayrıca; 'birbirinden tümüyle bağımsız aksiyomlardan oluşan bir sisteme varabilmek için, bu aksiyomların tamamen izole edilmiş olmaları gerekli midir?'

Fakat hepsinden önce, bu konuda sorulabilecek en önemli sorulardan birini düşünmenizi istiyorum: 'Aksiyomların çelişkili olmaması, onlardan hareketle sonlu sayıdaki mantıksal adımın çelişkiye yol açmaması demek midir?'

Geometride aksiyomların tutarlılıklarının ispatı, uygun bir sayılar cismi inşa edilerek yapılabilir ve cisimdeki sayılar arasındaki ilişkiler, geometrik aksiyomlara karşılık gelirler. Böylece yapılan akıl yürütmede, geometrik aksiyomlardan doğabilecek çelişkiler, cismin sayıları arasındaki aritmetiksel ilişkilerde aranırlar. Bu yolla geometrik aksiyomların tutarlılıklarının ispatı, aritmetik aksiyomlarının tutarlılığına bağlı olarak yapılır.

Öte yandan, aritmetik aksiyomlarının tutarlılıklarını ispatlayabilmek için direkt bir yönteme ihtiyaç vardır. Gerçekte aritmetik aksiyomları, bilinen hesaplama kuralları ve süreklilik aksiyomundan başka bir şey değildir. Son zamanlarda tüm bu aksiyomları toparladım ve süreklilik aksiyomunun yerine iki aksiyom koydum. Bunlar, *Archimedes aksiyomu* ve *tamlık aksiyomu*dur (Sayılar, diğer tüm aksiyomları da sağlayacak kadar uzun ve fakat daha uzun olamayan bir sistem oluştururlar). İnanıyorum ki aritmetik aksiyomlarının tutarlı oluşlarının direkt ispatı, irrasyonel sayılar teorisinde kullanılan, bilinen akıl yürütme yöntemlerinde yapılacak uygun değişiklikler ve özenli bir çalışma ile bulunacaktır.

Problemin önemini gösterebilmek için şu fikrimi ekliyorum: 'Eğer bir konsepte *çelişkili* deniyorsa, ben de bu konseptin matematiksel olarak var olmadığını söyleyebilirim.' Örnek olarak; 'karesi –1 olan bir reel sayı', matematiksel olarak var değildir. Ancak bu konseptin uygulamada hiçbir çelişkiye yol açmayacağı, sonlu sayıda mantıksal süreç tarafından gösterilebilirse, söz konusu konseptin matematiksel varlığı ispatlanmıştır derim. Aritmetiğin içinde, reel sayıların aksiyomlarına dair çalışırken biliriz ki; bu aksiyomların tutarlılıklarının ispatı, aynı zamanda kontinumun veya reel sayıların oluşturduğu tam sistemin matematiksel varlığının ispatıdır. Gerçekten de, aksiyomların tutarlılık ispatı tam olarak başarılabilirse, reel sayıların bir tam sistem oluşturabileceğine yönelik şüphelerin anlamı kalmaz. Reel sayıların *tümlüğü* ya da başka bir deyişle ve az önce belirttiğim şekliyle *kontinum*, ondalık kesirlerde tanımlı mümkün olan tüm serilerin tümlüğü veya bir temel dizinin elemanlarına ilişkin mümkün tüm yasaların tümlüğü değildir. O daha çok, ikili bağıntıları aksiyomlarının kuruluşuyla belirlenen ve önermelerinin doğruluğu, onların sonlu sayıda mantıksal süreç tarafından aksiyomlarından çıkarılabildiği bir sistemdir. Bence *kontinum* fikri, kesin olarak mantıksal anlamda açıklanabilir bir fikirdir. Bu bize, tecrübe ve sezgilerimizin de söylediğidir. *Kontinum* ya da *tüm fonksiyonların sistemi* fikri tamamen, integral veya rasyonel sayılar fikri ile ya da Cantor' un; *sayıların yüksek sınıfları* ve *kardinal sayılar* teorileriyle aynı anlamdadır. Kardinal sayıların varlığına inandığım ve kontinumu da onunla benzer gördüğüm için, varlık ispatının daha önce belirttiğim gibi yapılabileceğini düşünüyorum."

BÖLÜM 4

PARADOKSLAR

Bir aksiyomatik sistemin sağlaması gereken üç temel özelliğin tamlık, tutarlılık ve bağımsızlık olduğundan önceki bölümde bahsedilmişti. Ne var ki bu özelliklerin tümünün, ele alınan bir aksiyomatik sistemde bir arada bulunması, şu ana kadar başarılabilmiş değildir. Aksiyomları ne kadar özenle seçilirse seçilsin, hiçbir sistem, paradoks adı verilen çelişkilerden kurtulamamıştır.

Bu bölümde; paradoks kavramına ana hatlarıyla değinilmiş, paradoksların ortaya çıkış süreçleri ve matematik dünyasında yarattıkları bunalım incelenmiş, paradokslara ait bir sınıflandırma yapılarak matematik tarihinde söz konusu olmuş önemli paradokslar ayrıntılarıyla ele alınmıştır.

4.1 PARADOKS KAVRAMI

Sosyal bilimlerden fen bilimlerine kadar hemen her bilim dalında ve günlük yaşamın değişik alanlarında kullandığımız *paradoks* kelimesi, aslen matematiksel mantığa ait bir terim olup ilk olarak Antik Yunanca' da kullanılmıştır. Matematiksel mantık dışındaki alanlarda "içinden çıkılması zor, beklentilere ters düşen, çelişkili ya da karar verilemez durum" anlamında kullanılan *paradoks*, mantık literatüründe daha belirgin, anlaşılır ve açık bir tanıma sahiptir: "Doğruluğu veya yanlışlığı hakkında kesin bir karara varılamayacak şekilde düzenlenmiş önerme ya da önermeler kümesi" **[47]**. Bir önerme eğer kendi içinde çelişkili ise doğruluk değeri kesin olarak belirlenemez ve bu durum bizi paradoksa götürür. O halde; "doğru kabul edildiğinde yanlış, yanlış kabul edildiğinde doğru çıkan" veya "hem kendisi, hem de tersi doğru/yanlış olan" önerme ya da önermeler kümesine *paradoks* denir **[20]**. Açıktır ki bir önerme, anlayış eksikliği veya kullanılan dilin yetersizliği gibi nedenlerle paradoks gibi görünebilir. Ancak bu tür eksikliklerin giderilmesiyle, zaman içinde, paradoks sanılan birçok önermenin aslında paradoks olmadığının ortaya çıkabileceği gözden kaçırılmamalıdır.

Bu başlık altında değinilmesi gereken bir diğer önemli konu da, mantık literatüründe sıkça geçen *ikilem* kavramının, *paradoks* kavramıyla olan ilişkisidir. İlk bakışta benzeştikleri söylenebilen bu iki kavram, temelde birbirinden farklıdır. Şöyle ki, *ikilem* bir akıl yürütme biçimi olup, istenmeyen ve eş uygunsuzluktaki iki sonuçtan birini seçmeyi gerektirir. Oysa *paradoks* bir akıl yürütme olmayıp, her ne kadar alışageldiğimiz gerçeklerle çelişiyor gibi görünse de yalnızca bir önermedir.

İlerleyen kısımlarda paradokslar daha detaylı olarak incelenecek ve ortaya çıkışları ile matematik dünyasında oluşturdukları bunalıma değinilecektir.

4.2 PARADOKSLARIN ORTAYA ÇIKIŞ SÜRECİ VE MATEMATİK DÜNYASINDA YARATTIĞI BUNALIM

Çağlar boyu matematikçileri uğraştırmış ve bugün artık literatüre geçmiş bulunan tüm paradoksların temellerinin, Antik Yunan medeniyeti döneminde atıldığı bilinmektedir. Gerçekten bu dönem, düşünsel hayatta olabildiğine ilerlemiş Grek filozofları sayesinde oldukça parlak ve görkemli geçmiştir.

Bilinen ilk paradoks M.Ö. 6. yüzyılda Epimenides tarafından ortaya konmuş olan ünlü *Giritli (Yalancı) Paradoksu*' dur **[48]**. Kendisi de Giritli olan Epimenides; "tüm Giritliler yalancıdır" diyerek bir anlamda fitili ateşlemiştir. Kendisinden iki yüz yıl sonra, ortaya koyduğu bu önerme Eubulides tarafından; "bu söylediğim cümle yanlıştır" formuna getirilmiş ve yeni bir boyut kazanmıştır. Aynı yıllar, Elea' lı Zeno' nun kendi adıyla anılan paradokslarını tartışmaya açmasına sahne olmuştur. Değişik biçimlerde dile getirilen *Zeno Paradoksları*, temelde şöyle bir varsayıma dayanmaktadır: "Sonlu bir zaman süreci içinde, sonsuza giden sayıda devinime imkan yoktur" **[20]**. Böyle bir varsayımı kullanarak Zeno, döneminin gelenekçi ve oldukça kapalı topluluğu Pythagorasçılar' a karşı, hocası Parmenides' i savunma yolunda, evrende çokluk ve devinimi yadsımaya yönelik birçok paradoksa imza atmıştır.

İlerleyen yüzyıllar, matematiksel ilginin daha çok geometriye kayması sonucu, değişik paradoksların ortaya çıkışı anlamında kısır geçmiş ve fakat mevcut paradokslara ilişkin tartışmalar öne çıkmıştır. Özellikle Yalancı Paradoksu bir hayli tartışılmış, gerçekte tam bir paradoks oluşturmadığı belirtilmiş ve gelişim süreci 14. yüzyılda Jean Buridan' ın onu açık ve net bir formda ortaya koyuşuyla son bulmuştur. Yine aynı yıllarda Saksonya' lı Albert, kendine referanslı önermeler yardımıyla değişik paradokslar oluşturmuştur [47].

18. ve 19. yüzyıllara gelindiğinde Frege, Cantor, Peano ve Poincare' in genel kümeler kuramına ilişkin aksiyomları oluşturup, tüm matematiksel modelleri bu kurama dayandırmaya başladıkları görülür. Gerçekten küme kavramı, matematik için sarsılmaz bir temel niteliğine bürünmüş ve diğer çalışmalar onun üzerine inşa edilmeye başlanmıştır. Ancak tam bu sırada umulmadık şeyler olmuş ve matematik dünyasının dört bir yanından, kümeler kuramının sebep olduğu paradokslar ortaya çıkmaya başlamıştır. Burali-Forti, Cantor, Russell ve çağdaşlarının buldukları paradokslar, yakınçağ matematiğinde ciddi sıkıntıların da habercisi olmuşlardır.

Aynı dönemler, geometri ve topolojinin gelişim sürecine paralel olarak bu alanlarda da değişik paradoksların belirmesine sahne olmuştur. Özellikle Banach ve Tarski' nin, geometriye seçme aksiyomunu uygulayarak ortaya koydukları akıl almaz paradoks çarpıcıdır [3].

Şüphesiz insanlığın mutlak doğruluk, kesinlik ve tutarlılığın biricik kalesi olarak gördüğü matematikte böylesi çıkmazların söz konusu olması büyük bir hayal kırıklığını da beraberinde getirmiştir. Özellikle, matematiği sağlam bir temele oturtmaya çalışan ünlü bilim adamlarının gayretleri, paradoksların ortaya çıkışıyla yarım kalmış ve böylelikle matematik, kendini önemli bir bunalımın ortasında buluvermiştir. Paradoksları izah edebilme ve kurulan tüm matematiksel sistemleri onun etkisinden uzak tutabilme çabaları uzun yıllar almış ve fakat 1931' e gelinceye dek bu çabalar büyük ölçüde sonuçsuz kalmıştır.

1931' e gelindiğinde Avusturya' lı genç mantık ve matematik adamı Kurt Gödel (1906-1978), tarihi; *On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems* [1] adlı makalesini bilim dünyasına sunmuş ve tartışmalara son noktayı koymuştur. Gödel, Russell ve Whitehead' in ünlü eseri *Principia Mathematica*' da geçen ve formal olarak karar verilemeyen önermelerden yola çıkarak, bu ve buna benzer tüm sistemlerdeki tamlık ve tutarlılık sorunlarını irdelemiştir. Bu makalede ortaya koyduğu teorem ve yaptığı uzun kanıtlamaya göre herhangi bir aksiyomatik sistemde, önceden karar verilemeyecek önermelerin, yani paradoksların bulunması kaçınılmaz olup bu durum, hiçbir matematiksel sistemin tam olamayacağı anlamına gelmektedir. Söz konusu makale tüm matematik dünyasında şok etkisi yaratmış, kanıtlama defalarca incelenip hatalar aranmış, bulunamayınca da çaresizlik ve ümitsizlik içinde kabul edilmiş ve başta Bertrand Russell ve David Hilbert olmak üzere birçok matematikçinin konuyla ilgili çalışmalarının sona ermesine neden olmuştur.

4.3 PARADOKSUN KAPSAMI VE ÇEŞİTLİ PARADOKSLAR

Yukarıda tanımı verilen paradokslar, üç ana kategoriye ayrılarak sınıflandırılabilirler [3];

♦ Akıllıca, fakat içinde mantık hatası bulunan bir akıl yürütme ile oluşan paradokslar

♦ Sezgisel olarak farklı ve inanılmaz olan, fakat doğru ve kesin bir akıl yürütme ile oluşan paradokslar

♦ Kümeler teorisi etrafında gelişen ve kendine referanslı paradokslar

Aşağıda bu sınıflandırma, çeşitli paradoksların analizi yapılarak incelenecektir:

4.3.1 AKILLICA, FAKAT İÇİNDE MANTIK HATASI BULUNAN BİR AKIL YÜRÜTME İLE OLUŞAN PARADOKSLAR

Bu tür paradokslar, mantıksal usavurum süreci içerisinde yer yer yapılan aritmetiksel ve cebirsel hatalar ile yanlış veya eksik varsayımlar sonucu ortaya çıkarlar.

4.3.1.1 (2 = 1)' İN VEYA "HER SAYI İKİ KATINA EŞİTTİR" İN İSPATI

İki değişik versiyonu olan bu ispatın, Augustus De Morgan' a ait olanı şöyledir [48] :

$x = 1$ olsun. Bu durumda

$x^2 = x$

ve eşitliğin her iki yanından 1 çıkarılarak

$x^2-1 = x-1$

olur. Her iki taraf x-1 ile bölünerek

$x+1 = 1$

sonucuna ulaşılır. $x = 1$ yerine koyulduğunda $2 = 1$ eşitliği ortaya çıkar.

İspatın diğer versiyonu şudur [47] :

a ve b iki sayı olmak üzere $a = b$ olsun. Eşitliğin her iki yanı a ile çarpıldığında

$a^2 = ab$

olup her iki taraftan b^2 çıkarılarak

$a^2-b^2 = ab-b^2$

ve her iki taraf çarpanlarına ayrılarak

$(a+b)(a-b) = b(a-b)$

olur. Son olarak her iki taraf (a-b)' ye bölünerek

$a+b = b$

sonucuna ulaşılır. Burada $a = b = 1$ kabul edildiğinde $2 = 1$ olduğu görülecektir. Bundan başka, yine son eşitliğin her iki yanından b çıkarılarak, başlangıçta herhangi bir sayı olarak kabul ettiğimiz a' nın aslında 0 olduğu gibi bir anlaşılmazlığa da yol açılabilecektir. Hatta başlangıçtaki kabul $a = b$ olduğundan, son eşitlikte b yerine a (ya da a yerine b) yazılmak suretiyle $a = 2a$ (ya da $b = 2b$), yani "her sayı iki katına eşittir" gibi bir sonuca bile ulaşılabilir.

Gerek De Morgan' ın ispatında ve gerekse diğer ispatta paradoksu oluşturan neden, sıfıra bölme kuraldışılığının yapılışıdır. İlk ispatta $x = 1$ kabul edip x-1' e bölme ve ikinci ispatta a = b kabul edip (a-b)' ye bölme işlemlerinin yapılışı böyle bir paradoksa yol açmıştır.

4.3.1.2 (3 + 2 = 0)' IN İSPATI [3]

A, B ve C, A+B = C koşulunu gerçekleyen sayılar ve özel olarak A=3, B=2 olsun. A+B = C eşitliğinde; her iki taraf (A+B) ile çarpılarak

$$A^2 + 2AB + B^2 = C(A + B)$$

eşitlikteki terimler düzenlenerek

$$A^2 + AB - AC = -AB - B^2 + BC$$

her iki taraf (A+B–C) parantezine alınarak

$$A(A+B-C) = -B(A+B-C)$$

ve her iki taraf (A+B–C)' ye bölünerek

$$A = -B$$

sonucuna ulaşılır. A=3 ve B=2 olduğundan 3 + 2 = 0' dır.

Bu ispatta da paradoks, A+B = C kabulüne karşılık, ilgili eşitliğin her iki yanını (A+B–C)' ye yani sıfıra bölmeye dayanmaktadır.

4.3.1.3 (n = n+1)' İN İSPATI [3]

n herhangi bir reel sayıyı temsil etmek üzere,

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

özdeşliğinde,

$$(n+1)^2-(2n+1) = n^2$$

yazılıp her iki taraftan n(2n+1) çıkartılarak

$$(n+1)^2-(n+1)(2n+1) = n^2-n(2n+1)$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafına $\frac{1}{4}(2n+1)^2$ eklenerek

$$(n+1)^2-(n+1)(2n+1) + \frac{1}{4}(2n+1)^2 = n^2-n(2n+1) + \frac{1}{4}(2n+1)^2$$

eşitliğine ulaşılır ki bu da

$$[\,(n+1) - \frac{1}{2}(2n+1)\,]^2 = [\,(n - \frac{1}{2}(2n+1)\,]^2$$

olması demektir. Her iki tarafın karekökü alınarak

$$(n+1) - \frac{1}{2}(2n+1) = n - \frac{1}{2}(2n+1)$$

ve sonuç olarak n = n+1 bulunur ki bu sonuç, "her reel sayı bir fazlasına eşittir" şeklinde bir genellemeye neden olur.

Yine burada paradoks, yapılan cebirsel bir hata sonucu ortaya çıkmıştır. İlgili eşitliğin her iki yanının karekökü alınırken kök dışına yalnızca pozitif çıkarım yapılmış olup doğrusu şöyle olmalıdır:

$$\mp(\,(n+1) - \frac{1}{2}(2n+1)\,) = \mp(\,n - \frac{1}{2}(2n+1)\,)$$

4.3.2 SEZGİSEL OLARAK FARKLI VE İNANILMAZ OLAN, FAKAT DOĞRU VE KESİN BİR AKIL YÜRÜTME İLE OLUŞAN PARADOKSLAR

Bu kapsam içerisinde değerlendirilen paradokslar, duyularımızla algılayıp deney ve gözlemlerle kavradığımız gerçekliklere ters düşen ama tamamen doğru ve kesin bir mantıksal akıl yürütme süreci sonunda ulaşılan yargılardır.

4.3.2.1 BANACH-TARSKI PARADOKSU

İlk olarak 1924' te Banach ve Tarski tarafından ortaya konulan bu paradoksa göre **[3,36]** ; bir küre en az altı parçaya ayrılıp, bu parçalar sadece katı hareketlerle, orijinaliyle aynı boyuta sahip iki küre olacak şekilde birleştirilebilir. R.M.Robinson 1944' te, kürenin ayrıldığı parçaları daha komplike hale getirerek parça sayısını beşe indirmiştir. İspatında seçme aksiyomunun kullanıldığı bu teoriye göre, seçme aksiyomunun genel bir olgu olarak düşünülmesi yanlış olup o, bazı özel haller için kullanılabilecek bir aksiyomdur.

4.3.2.2 ZENO PARADOKSLARI

Sayısal sonsuzluk kavramının bilinen ilk argümanları bu paradokslar sayesinde ortaya çıkmıştır. Çeşitli kaynaklarda, değişik şekil ve sayıda ifade edilen Zeno paradokslarından, en çok bilinen ikisine aşağıda değinilecektir.

4.3.2.2.1 ACHILLES PARADOKSU

Devrinin en hızlı atleti olan Achilles' in bir kaplumbağa ile yapacağı olası bir yarışta, önce başlaması durumunda yarışı kaplumbağanın kazanacağı iddiasına dayanır. Zira Achilles yarışa geriden başladığı için, hareketin her safhasında geride kalacaktır. Şöyle ki; Achilles kaplumbağanın başladığı yere geldiğinde kaplumbağa daha ileride olacak, Achilles ikinci kez kaplumbağanın başladığı yere geldiğinde kaplumbağaya daha yakın ama yine de geride olacak ve aralarındaki bu mesafe hiçbir zaman sıfır olmayacaktır. Sonsuz tane sıfırdan farklı mesafeyi almak için sonsuz zaman gerekeceğinden Achilles, kaplumbağayı hiçbir zaman yakalayamayacaktır. Aşağıdaki şekilde bu olgu anlatılmaktadır:

#Başlangıç #Bitiş

I → A----------x_1----------K

II → → A------x_2------K

III → → → A---x_3---K

IV → → → → A-x_4-K

. .

. .

. .

Şekil 4.3.1 Achilles Paradoksu **[48]**

4.3.2.2.2 OK PARADOKSU

Bu paradoks, belirli bir noktadan belirli bir yöne doğru atılan okun, hiçbir zaman hedefine ulaşamayacağı fikrinden ortaya çıkar. Atılan okun hedefe varabilmesi için önce aradaki mesafenin yarısını geçmesi, ardından, kalan yarı mesafenin yarısını ve böylece azalan ama asla sıfır olmayan sonsuz çoklukta yarı mesafeyi geçmesi gerekir. Zaman sonlu ama geçilecek mesafe sayısı sonsuz olduğundan, okun hedefe ulaşması mümkün değildir. Aşağıdaki şekil ok paradoksunu karakterize etmektedir:

```
A→→→→→→→→→→→→|----------------------------------------B
A_________________________________→→→→→→|-------------------B
A________________________________________________→→→|---------B
A_______________________________________________________→→|---B
.                                .                            .
.                                .                            .
.                                .                            .
```

Şekil 4.3.2 Ok Paradoksu **[48]**

4.3.3 KÜMELER TEORİSİ ETRAFINDA GELİŞEN VE KENDİNE REFERANSLI PARADOKSLAR

Kümeler teorisinin matematik için önemli bir temel kabul edilip, genel küme aksiyomlarının oluşturulduğu bir dönemde ortaya çıkan bu paradokslar, teorinin açıkta kalan ve yetersiz durumdaki yönlerini gözler önüne sermiştir. Ayrıca, çağlardır bilinen *kendine referans* **[47]** kavramı daha formal bir şekilde ele alınarak, kümeler teorisinden kendine referanslı birçok paradoks elde edilmiştir.

4.3.3.1 GİRİTLİ (YALANCI) PARADOKSU - I

M.Ö. 6. yüzyılda, kendisi de bir Giritli olan Epimenides' in ortaya attığı; "tüm Giritliler yalancıdır" önermesidir **[20]**. Eğer bu önerme doğru ise Epimenides yalancıdır ve dolayısıyla önerme yanlıştır. Tersine, eğer önerme yanlış ise tüm Giritliler yalancı olmayıp önerme doğrudur.

Mantık tarihinin bilinen ilk paradoksu olan ve bugün oluşturulan birçok paradoksun da esin kaynağı durumundaki bu önerme, aynı zamanda, *kendine referans* kavramının da ilk örneğidir. Çünkü cümlenin nitelediği insanlar topluluğu olan Giritliler arasında Epimenides' in kendisi de vardır. Dolayısıyla cümlenin fiili, direkt olarak cümlenin sahibini de etkilemektedir. Ne var ki, bütün bu özelliklere sahip olan yukarıdaki cümlenin aslında tam olarak bir paradoks içermediği, iki asır sonra anlaşılabilmiştir. Zira önermenin yanlış kabul edilmesi bizi, sanıldığı gibi tüm Giritliler' in doğrucu olduğu değil, yalancı olmayan en az bir Giritli olduğu sonucuna götürür. Bu durumda Epimenides' in doğrucu ya da yalancı olduğu belirsizdir.

4.3.3.2 GİRİTLİ (YALANCI) PARADOKSU – II

M.Ö. 4. yüzyılda Eubulides' in, Giritli Paradoksu' nun tam ve doğru bir formunu oluşturabilmek için ortaya koyduğu; "bu söylediğim yanlıştır" önermesidir **[20]**. Gerçekten, Eubulides bu önermeyi ortaya koymakla tam ve gerçek bir paradoksa imza atmıştır. Çünkü önerme doğru kabul edildiğinde Eubulidies' in söylediği söz yanlış olup önerme de yanlış, yanlış kabul edildiğinde ise Eubulides doğru söylemekte olup önerme de doğrudur. Ayrıca belirtilmelidir ki bu paradoks da kendine referanslı olup cümlede bahsedilen olgu, bir bütün olarak cümlenin kendisine yöneliktir.

4.3.3.3 JEAN BURIDAN PARADOKSU

14. yüzyılda Jean Buridan tarafından ortaya atılan bu paradoks **[48]**; üzerinde sadece "bu kağıdın üzerindeki tüm cümleler yanlıştır" önermesinin bulunduğu bir kağıt parçasından ibarettir. Kağıdın üzerinde başka hiçbir şeyin yazmaması, adı geçen önermenin muhatabının yine kendisi olmasını gerektirir ki bu durum da tipik bir kendine referans örneğidir. Bu nedenle önerme doğru ise adı geçen cümle ve dolayısıyla önerme yanlış, önerme yanlış ise adı geçen cümle yanlış ve dolayısıyla önerme doğrudur. Mantık notasyonunda bu paradoks, p bir önermeyi göstermek üzere kısaca;

p : p yanlıştır

şeklinde ifade edilir.

4.3.3.4 SAKSONYA' LI ALBERT VEYA B.JOURDAIN' İN KART PARADOKSU

Paradoksları notasyonel olarak ifade etme yolunda en önemli adım 14. yüzyılda Saksonya' lı Albert tarafından atılmıştır **[3]**. Kendine referanslı önermeleri sistematik anlamda ortaya koyan Albert, p_1, p_2, q_1, q_2 ve q_3 birer önermeyi ifade etmek üzere aşağıdaki genel iki paradoks formunu oluşturmuştur:

1.	p_1 : p_2 yanlıştır	**2.**	q_1 : q_2 yanlıştır
	p_2 : p_1 doğrudur		q_2 : q_3 yanlıştır
			q_3 : q_1 yanlıştır

İlk formdaki paradokslara bir örnek, İngiliz matematikçi B.Jourdain tarafından 1913' de verilmiştir **[3]**. Buna göre, elimizde iki yüzünde de birer cümle olan bir kart bulunmaktadır. Üst yüzde; "bu kartın arka yüzündeki önerme doğrudur" önermesi ve arka yüzde; "bu kartın ön yüzündeki önerme yanlıştır" önermesi yer almaktadır. Burada, önce okunan yüzden bağımsız olarak kabulümüz tersine dönerek yanlışlanmakta ve tam bir paradoks oluşmaktadır.

4.3.3.5 BURALI-FORTI PARADOKSU

Kümeler teorisinin, temel aksiyomlardan hareketle oluşturulmaya başlandığı dönemlerde, bu teoriye ilişkin ortaya çıkan paradokslardan ilki 1897' de İtalyan matematikçi Burali-Forti tarafından iddia edileni olup, özetle şöyledir **[47,48]** :

Tüm ordinal sayılar kümesinin de bir ordinal sayısı vardır ve bu sayının, en büyük ordinal sayı olması beklenir. Oysa ki her ordinal sayı da sonuçta bir *sayı* olduğu için bir fazlası her zaman mevcuttur ve bu yeni sayı adı geçen kümeye dahil değildir. Öyle ise başlangıçta var kabul edilen tüm ordinal sayıların kümesi, gerçekte yoktur.

4.3.3.6 CANTOR PARADOKSU

Burali-Forti' den iki yıl sonra, 1899' da, genel kümeler kuramına ilişkin kendi adıyla anılan ünlü teoremini kullanarak mutlak bir *tüm kümelerin kümesi* sorgulamasına giren Cantor, çalışmasını aşağıdaki paradoksla sonuçlandırmıştır **[20]**:

Tasarlanabilecek tüm kümelerin kümesine C ve bu kümenin tüm alt kümelerinden oluşan kümeye de $\mathcal{P}(C)$ adı verilsin. Cantor teoremi gereği $\mathcal{P}(C)$' nin kardinalitesi C' nin kardinalitesinden büyüktür. Yani, tüm kümeleri kapsayan kümenin kardinalitesinden büyük kardinalitede bir küme bulunmuş olur. Bu durumda en büyük kümeden daha büyük bir kümeye ulaşılmış olur ki bu, başlangıçta kabul ettiğimiz tüm kümelerin kümesinin, mutlak bir *en büyük küme* olması kavramıyla çelişmektedir.

4.3.3.7 BERBER PARADOKSU

Bu paradoks Bertrand Russell tarafından, Burali-Forti ve Cantor paradoksları üzerine yaptığı çalışmalar sırasında bulunmuştur. Adı geçen bu paradokslarda olduğu gibi Berber Paradoksu' nda da paradoksa yol açan neden, kendine referans ya da *döngül tanımlama* dediğimiz olgudur. Paradoks şöyledir **[20,47]** :

Uzak ve sapa bir köyde tek bir berber mevcuttur ve bu berber, yalnızca kendini tıraş etmeyen köylüleri tıraş etmektedir. Acaba bu berber kendi kendini tıraş edebilir mi? Cevap ne olursa olsun çelişkiye yol açar. Zira berberin kendini tıraş etmesi tıraş etmemesine sonuç, tıraş etmemesi de tıraş etmesine sebeptir.

4.3.3.8 RUSSELL PARADOKSU

Yakın tarihin en popüler paradoksu olan ve kendi adıyla anılan bu paradoksu Russell, 1901 yılında, *Principia Mathematica* adlı eserini oluştururken keşfetmiş ve iki yıl sonra basılan bu eserine almıştır. Doğrudan kümeler teorisini ilgilendirmesi bakımından oldukça çarpıcı ve etkileyici olan bu paradoks şöyle ifade edilebilir **[3,20]** :

Russell kümeleri kendini eleman olarak kabul edenler ve kendini eleman olarak kabul etmeyenler olmak üzere ikiye ayırır. Bu sınıflandırmanın ardından, kendini eleman olarak kabul etmeyen kümelerin kümesini ele alıp sorar; kendini eleman olarak kabul etmeyen kümelerin kümesi, kendini eleman olarak kabul eder mi?

Cevap evet ise, yani "kendini eleman olarak kabul etmeyen kümelerin kümesi kendini eleman olarak kabul eder" denildiğinde, bu durum bizi, kümenin kendini eleman olarak kabul etmeyen kümelerden oluşması nedeniyle "kendini eleman olarak kabul etmemesine", yani hayır cevabına götürür. Tersine cevap hayır ise, yani "kendini eleman olarak kabul etmeyen kümelerin kümesi kendini eleman olarak kabul etmez" deniliyorsa, o halde, adı geçen bu kümenin de kendini eleman kabul etmeyen kümelerin kümesine dahil olması, yani cevabımızın evet olması gerekir. Sonuç ve ortada olan durum bir çelişki olup, paradoksun nedeni *kümelerin kümesi* kavramının ta kendisidir.

1900' lü yılların başında Russell' ın böyle bir paradoksu ortaya koyuşu, matematiği kümeler teorisi yoluyla temellendirmeye çalışan düşünceye beklenmedik bir darbe indirir. Böylelikle genel kümeler kuramının bütünüyle tutarlı olmadığı, yer yer problemli alanların söz konusu olduğu ortaya çıkmıştır.

4.3.3.9 RICHARD PARADOKSU

1905 yılında Fransız matematikçi Jules Richard tarafından ortaya koyulan ve kullandığı *eşleme* kavramının, Kurt Gödel' e, 1931' deki ünlü makalesinde yaptığı akıl yürütmede ışık tuttuğu bu paradoks şu şekildedir **[3]** :

Sayma sayıları arasındaki tüm aritmetiksel özelliklerin tanımlanabileceği bir dil (örneğin Türkçe) ele alınsın. Yapılacak tüm tanımların sonlu sayıda sözcük ve dolayısıyla sonlu sayıda alfabe harfi içerecekleri açıktır. O halde tüm tanımlar, şu kurallara göre sıralanabilirler:

1. İki tanımdan, az sayıda harf içereni yukarıda olacaktır.

2. Aynı harf sayısına sahip iki tanım, içerdikleri harflerin alfabedeki sıralarına göre sıralanacaktır.

Şüphesiz her tanım, yukarıdaki kurallar uyarınca sıralandığında, bir tek tam sayı ile ifade edilecektir. Bu durumda, tanıma karşılık gelen tamsayı ile tanımın belirttiği özellik ya aynıdır ya da aynı değildir. Örneğin; "asal ve çift bir sayı olan" tanımına karşılık gelen sıra sayısı 2 ise, sıra sayısı ile tanımın belirttiği özellik aynıdır. Ama; "3' e bölünebilen" tanımına 13 tamsayısı karşılık geliyorsa, sıra sayısı ile tanımın belirttiği özellik aynı değildir. İşte bu gerçekler doğrultusunda, ilgili tanımın belirttiği özelliği sağlamayan sıra sayılarına *Richard' cı*, sağlayanlara ise *Richard' cı olmayan* denilsin. Ancak *Richard' cı olmak* da, sayma sayıları arasındaki bir aritmetiksel özellik olup yukarıda bahsedilen sıralamada yerini almalıdır. Adı geçen özelliğe bu sıralamada ‘t’ sayısının karşılık geldiği varsayılsın ve sorulsun:

‘ t ’ *Richard’ cı* mıdır ?

Cevap ne olursa olsun, bizi tam bir paradoksa götürecektir. Zira t’ nin *Richard’ cı* olduğu kabul edilirse, temsil ettiği tanımın özelliğini sağlamaması gerektiğinden *Richard’ cı* olmayacak, *Richard’ cı* olmadığı kabul edilirse de, temsil ettiği tanımın özelliğini sağlaması gerektiğinden *Richard’ cı* olacaktır. Dolayısıyla;

“ t sayısı *Richard’ cı* dır”

önermesi, hem doğru ve hem de yanlış bir önermedir.

BÖLÜM 5

GÖDEL KANITLAMASINA DAİR

Kurt Gödel' in matematiksel mantık alanında ortaya koyduğu çalışmaların çoğunluğu, Hilbert' in tam biçimselleştirme adına oluşturduğu tezleri çürütmeye yöneliktir. Özellikle 1929, 1930 ve 1931 tarihli makalelerinde **[4,5]** Gödel, Hilbert' in aksiyomatik sistemlere ilişkin en önemli beklentisi olan tamlık özelliğini ciddi şekilde sorgulamış, çarpıcı gerçeklere ulaşmıştır.

Bu bölümde önce; yukarıda söz konusu olan makalelerden, 1929 tarihli ve *Mantık Kalkülüsü' nün Tamlığı Üzerine* adlı çalışma ile 1930 tarihli ve *Mantığın Fonksiyonel Kalkülüsü' nün Tamlığı Üzerine* adlı çalışma genel anlamda ele alınmış, Gödel' in bu ve benzeri makalelerde kullandığı alternatif notasyona değinilmiştir. Ardından, çalışmamızın asıl konusunu teşkil eden, 1931 tarihli ve *Principia Mathematica ve Benzer Sistemlerin Formel Olarak Karar Verilemeyen Önermeleri Üzerine* **[1]** adlı makalede Gödel' in ortaya koyduğu teorem ve kanıtlama ayrıntılarıyla incelenmiş, Gödel' in önemli makalelerinin başlıkları, yayın tarihlerine göre listelenmiştir.

5.1 MANTIK KALKÜLÜSÜNÜN TAMLIĞI ÜZERİNE

Gödel, 1929' da yazdığı *Mantık Kalkülüsünün Tamlığı Üzerine* **[4]** adlı makalesinin girişinde, aşağıdaki önemli ve ilgi çekici yorumları yapmıştır:

"Bu araştırmanın temel konusu, Whitehead ve Russell tarafından 1910' da ve benzer şekilde Hilbert ve Ackerman tarafından 1928' de oluşturulan ve adına *Sınırlı Fonksiyonel Kalkülüs* (S.F.K.) denilen sistemin aksiyomlarının tamlık ispatıdır. Burada tamlık; S.F.K.' de bulunan her geçerli formülün, sonlu bir formel çıkarım dizisi ile aksiyomlardan çıkarılabileceği anlamındadır. Bu savın şuna denk olduğu görülebilir: 'Sadece geçerli formüllerden oluşan her tutarlı aksiyom sisteminin bir *realizasyonu* (yorumu, modeli,...) vardır'(Burada tutarlılık; sonlu çoklukta formel çıkarım ile bir çelişkinin elde edilemeyeceği anlamındadır). Bu denkliğin gösterilmesi, bir anlamda, tutarlılık ispatında kullanılan alışılmış yöntemin (şüphesiz ki sadece burada ele alınan özel aksiyom sistemleri için) teorik anlamda tamlığını gösterdiğinden, ikinci ifade kendi içinde bir öneme sahip gibi görünmektedir. Çünkü bu bize, bu yöntemin her durumda amacına ulaştıracağının garantisini verecektir. Yani, ya bir çelişki oluşturulabileceğinin ya da bir model aracılığıyla tutarlılığın ispatlanabileceğinin teminatını verecektir. L. E. Brouwer, 'bir aksiyom sisteminin tutarlılığından bir model oluşturulabilir' sonucunun, başka bir gereksinim olmaksızın çıkarılıp çıkarılamayacağı konusunda, özellikle kuşkulanmıştır. Fakat bir aksiyom sistemi içinde geçen kavramların varlığının, aksiyomların tutarlılığı ile kesin olarak tanımlanmış olduğu ve bu nedenle de başka bir kanıtın gerekmeyeceği düşünülebilir. Yine de bu tanım (sadece, eğer bu şekilde verilen varlık kavramının diğer elemanter kavramlarla aynı işlem kurallarına bağlı olmasının kendiliğinden apaçık bir gereklilik olduğunu kabul edersek), her matematiksel problemin çözülebileceğini aksiyom olarak önceden kabul etmektedir. Çünkü (diyelim ki gerçel sayılara dair) en az bir problemin çözülemeyeceği ispatlandıysa, yukarıdaki tanımdan, reel sayıların aksiyom sisteminin izomorfik olmayan iki realizasyonunun varlığı çıkacaktı; oysa ki herhangi iki realizasyonun izomorfik olduğunu ispatlayabiliyoruz.

Bununla beraber, eğer sorun sadece tam olarak belirlenmiş bir formel çıkarım yoluyla çözülememek ise, bir problemin çözülemeyeceğinin bir ispatını tamamen reddedemeyiz. Çünkü, burada ele alınan tüm kavramlar (kanıtlanabilirlik, tutarlılık, v.s.), sadece, sonuç çıkarmanın anlamını kesin olarak sınırlandırmadığımız zaman tam bir anlama sahip olurlar. Bu düşünceler sadece, böyle bir varlık kavramı tanımının yol açabileceği zorlukları gereği gibi açıklamak amacıyla ileri sürülmüştür; bu kavram hakkında herhangi bir tanımın olabilirliği hakkında bir sav söz konusu edilmemiştir.

Eğer mantıksal sonuç (yani, sonlu sayıda adımda formel olarak ispatlanabilir olmak) kavramı yerine, Russell anlamında gerektirmeyi ya da daha doğru olarak formel gerektirmeyi alırsak (ki burada fonksiyonel değişkenler, söz konusu aksiyom sisteminin ilkel kavramlarıdır), bir tutarlı aksiyom sistemi için bir modelin varlığı, yanlış bir önermenin herhangi başka bir önermeyi gerektirmesinden (bu nedenle de her çelişkiyi gerektirmesinden) çıkar."

Gödel' in ele aldığı mantık aksiyom sistemi ve kullandığı notasyonlar, Hilbert-Ackerman sisteminden uyarlanmıştır. Araştırmanın objeleri mantıksal ifadelerdir. Bunlar simgelerin (sembol, im,...), önceden koyulan kurallara uygun bir şekilde bir araya gelmesi ile oluşur. Asal simgeler olarak; *veya* için $\vee$, *değilleme* için $\neg$, *her* için (x) alınmıştır. Değişken simgeler olarak; sayısal değişkenler (x_1, x_2, ...), fonksiyonel değişkenler (F_1, F_2, ...) ve önermesel değişkenler (X_1, X_2, ...) kullanılmıştır. İçinde '=' simgesi geçen ifadeler de ele alınmıştır. Diğer alışılmış mantık sembolleri ($\wedge$(&), $\rightarrow$, ~, $\exists$(E), ...), asal simgeler cinsinden yazılabilen kısaltılmış notasyonlar olarak kullanılmıştır. Mantık aksiyomları olarak (Russell' dan), aşağıdakiler kabul edilmiştir **[5]** :

1. $X \vee X \rightarrow X$

2. $X \rightarrow X \vee Y$

3. $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$

4. $(X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \vee X \rightarrow Z \vee Y)$

5. $(x)\ F(x) \rightarrow F(y)$

6. $(x)\ [X \vee F(x)] \rightarrow X \vee (x)\ F(x)$

7. $x = x$

8. $x = y \rightarrow [F(x) \rightarrow F(y)]$

Sonuç çıkarma kuralları olarak ise **[5]** ;

1. Ayırma (detachment) kuralı

2. Önermesel ve fonksiyonel değişkenler için yerine koyma kuralı

3. A(x)' den (x)A(x) önermesini elde etme kuralı

4. Sayısal değişkenlerin değişimi kuralı

kullanılmıştır. Sonuç çıkarma kurallarından hareketle sonuç elde etme, *çıkarılabilme* (provable) ve *çürütülebilme* (refutable) anlamlarına gelmektedir. Bir ifadede eğer sadece başlangıçta verilen niceleyiciler geçiyorsa, buna bir *normal ifade* denir. Yalnızca önerme değişkenlerinden oluşan ifadelere de, bir *önermesel formül* denir.

Bir A mantıksal ifadesi; $F_1, F_2, ..., F_n$ fonksiyonel değişkenleri, $x_1, x_2, ..., x_l$ serbest değişkenleri ve $X_1, X_2, ..., X_m$ önermesel değişkenlerinden oluşsun. B' de; tümü aynı evrende tanımlanmış $f_1, f_2, ..., f_n$ fonksiyonları, aynı evrenin elemanları olan $a_1, a_2, ..., a_l$ ve önermesel sabitler olan $A_1, A_2, ..., A_m$' den ibaret olsun. Eğer;

$$B = \{ f_1, f_2, ..., f_n ; a_1, a_2, ..., a_l ; A_1, A_2, ..., A_m \}$$

sisteminin elemanları A mantıksal ifadesinde yerine koyulduğunda A doğru bir önerme oluyorsa *B, A' yı sağlar* denir. Anlaşılacağı üzere *sağlanmak* kavramı, belli bir tanım evrenine özgü olmaktadır.

5.1.1 ALTERNATİF MANTIK NOTASYONLARI

Gödel' in orijinal makalelerinde kullandığı mantıksal semboller aşağıda bütünüyle ve eksiksiz şekilde verilmiştir [4,5]. Bazı semboller birkaç değişik formda ifade edilmiş olup Gödel, farklı yazılarında farklı formları tercih etmiştir. Ayrıca bu mantıksal semboller, zaman zaman, formel olmayan ifadeleri formel olarak yazabilmek için kısaltma işlevi görmüştür. Dolayısıyla onların orijinalliğine dokunulmamış ve A ve B önermeler ya da formülleri, A(x) ise x' e bağlı bir önermesel değişkeni ya da formülü ifade etmiştir:

1.'VE' BAĞLACI (A ve B) : $A.B$, $A \wedge B$, $A\&B$

2.'VEYA' BAĞLACI (A veya B) : $A \vee B$

3.'DEĞİLLEME' OPERATÖRÜ (A değil) : $\overline{A}$, $\sim A$, $\neg A$

4.'GEREKTİRME' BAĞLACI (A ise B) : $A \supset B$, $A \rightarrow B$

5.'ÇİFT GEREKTİRME' BAĞLACI (A ancak ve ancak B) : $A \supset\subset B$, $A \equiv B$, $A \sim B$, $A \leftrightarrow B$

6.'EVRENSEL' NİCELEYİCİ (Her x için A(x)) : $(x)A(x)$, $\Pi x A(x)$, $x\Pi(A(x))$, $(\forall x)A(x)$

7.'VARLIK' NİCELEYİCİSİ (En az bir x için A(x)) : $(Ex)A(x)$, $\Sigma x A(x)$, $(\exists x)A(x)$

8.'TEKLİK' NİCELEYİCİSİ (Tek bir x için A(x)) : (E!x)A(x), Σ!xA(x), (∃!x)A(x)

9.'GEREKLİLİK' OPERATÖRÜ (A gereklidir) : □A, NA

10.'MİNİMUM' OPERATÖRÜ (En küçük x için A(x)) : ϵx(A(x)), μx(A(x))

11.'KANITLANABİLİRLİK' BAĞINTISI (A, S sistemi içinde kanıtlanabilirdir) : $S \vdash A$

5.1.2 SINIRLI FONKSİYONEL KALKÜLÜS' DEKİ TEOREMLERİN ÖZETİ

S.F.K., tamlık teoreminin; 1. dereceden formüllere indirgenmesi, kısıtlanmış anlamda ispatı, genişletilmiş anlamda ispatı, mantık aksiyom sisteminin bağımsızlığının ispatı, sonsuz mantık sistemlerine genişletilmesi olmak üzere beş bölümden oluşmaktadır. Aşağıda, S.F.K.' e ait teoremlerin kısa bir özeti yer almaktadır [4] :

1. Her önermesel formül sağlanabilir veya çürütülebilirdir.

2. Eğer $A \sim A'$ olduğu kanıtlanabilir ve B' ; B' de A yerine A' koyularak B' den elde edilirse, $B \sim B'$ olduğu da kanıtlanabilirdir.

3. Her A mantıksal ifadesi için A~N olacak şekilde bir N normal ifadesi vardır ve bu denklik kanıtlanabilirdir.

4. $(E\ x_1)(E\ x_2)...(E\ x_n)\ A(x_1, x_2, ..., x_n)$ formundaki her ifadenin, varlık niceleyicisinin değişik sırada alınmasıyla elde edilen yeni ifadeye denk olduğu kanıtlanabilirdir.

5. $(p_1)...(p_n)\ F(x_1, x_2, ..., x_n) \wedge (q_1)...(q_m)\ G(y_1, y_2, ..., y_m)$ ifadesi, (P), (p_i) ve (q_i)' lerden oluşmak üzere, $(P)\ [F(x_1, x_2, ..., x_n) \wedge G(y_1, y_2, ..., y_m)]$ ifadesine denktir ve bu denklik kanıtlanabilirdir.

5.1.3 GÖDEL' İN SINIRLI FONKSİYONEL KALKÜLÜS' E İLİŞKİN KANITLADIĞI TEOREMLER

Kurt Gödel, 1930 tarihli ve *Mantığın Fonksiyonel Kalkülüsü' nün Aksiyomlarının Tamlığı* [4] adlı makalesinde, aşağıdaki teoremleri kanıtlamıştır:

1. S.F.K.' de her geçerli formül, kanıtlanabilirdir.

2. S.F.K.' ün her formülü, ya sağlanabilirdir veya çürütülebilirdir.

3. K, başında evrensel niceleyici, sonunda varlık niceleyicisi bulunan ve serbest değişken içermeyen bir normal formül ise, ya sağlanabilirdir veya çürütülebilirdir.

4. k. dereceden her ifade ya sağlanabilir veya çürütülebilir ise, k+1. dereceden her ifade de, ya sağlanabilir veya çürütülebilirdir.

5. 1. dereceden her formül, ya sağlanabilirdir veya çürütülebilirdir.

6. Her n için; $(P)A \rightarrow (P_n)A$ ifadesi (P)' ye denktir ve bu denklik kanıtlanabilirdir.

7. Genişletilmiş bir modelin her geçerli formülü P' dir.

8. Genişletilmiş bir modelin her formülü, ya sağlanabilirdir veya çürütülebilirdir.

9. S.F.K.' de yer alan sayılamaz sonsuz her formül kümesi, ya sağlanabilirdir veya sonlu bir çürütülebilir alt sistem içerir.

10. Sayılamaz sonsuz bir formül sisteminin sağlanabilir olması için gerek ve yeter şart, bunun sonlu her alt sisteminin sağlanabilir olmasıdır.

5.2 GÖDEL KANITLAMASI

Gerçeği bulma yolunda, matematiğin ne denli güçlü bir araç olduğunun açıkça ortaya çıkması ve fakat bu gücün bile aslında ne denli yetersiz olduğunun anlaşılması, iki dünya savaşı arasındaki yıllara rastlar. Bu dönemde, dünya sahnesinde, ulusunun (hatta tüm ulusların) geleceği için, evrensel denilebilecek ilkeler koyan bir dahi düşünür, asker devlet adamı bulunuyordu. Atatürk onca uğraşılarının yanında, matematikteki bu sorgulamaların da bilincine varmış ve ulusu için bir geometri kitabı yazmıştı. O' nun, o zamana kadar, *müselles, müsavi, zaviye* v.s. gibi Arapça terimlerle anılan bir yığın geometrik kavrama, *üçgen, eşit, açı* v.s. gibi Türkçe adlar vererek kaleme aldığı bu kitap, kuşkusuz, Türk çocuklarının geometriyi daha iyi anlamaları için bir ışık olmuştur. Aslında vatanı, onuru ve özgürlüğü için bin küsur yıldan beri hemen hemen sürekli savaşmak zorunda bırakılmış bir ulus için, bilim adamı yetiştirebilmenin ne denli zor olduğu ortadadır. Zamanın en seçkin okulundan (Galatasaray Sultanisi) mezun olur olmaz gönüllü olarak Çanakkale cephesine koşup, ülkelerini istifaya kalkışan yedi düvele karşı savaşarak tamamı şehit olan en seçkin evlatlarımızın hazin öyküleri belleğimizden çıkmıyor. Sarıkamış' ta, Kanal Harekatı' nda, Yemen' de, Çanakkale' de, Galiçya' da, Dumlupınar' da, Sakarya' da . . ., hiçbir kötülüğe bulaşmamış milyonlarca seçkin gencimiz şehit oldular. Tüm bunlara karşın Türk ulusu, birçok orijinal çalışmaya imzasını atmış sayısız bilim adamı yetiştirebilmiştir.

İki dünya savaşı arasına rastlayan 1925-1935 tarihleri arasında, dünya sahnesinde, o zaman için kendisini ancak üç beş kişinin anlayabildiği bir başka dahi de vardır. Avusturyalı mantıkçı ve matematikçi Kurt Gödel, daha 25 yaşında Viyana Üniversitesi' nde bir öğretim üyesidir ve 1938 yılından itibaren de, Princeton İleri Araştırmalar Enstitüsü' nün sürekli üyesi olmuştur [49]. Gödel, aşağıda bazılarının bir listesini verdiğimiz onlarca çalışmaya imzasını atmış ve bu çalışmalarıyla, matematikte devrim denilebilecek nitelikte sonuçlar ortaya koymuştur. Kabaca; "matematik bile bazı problemleri çözemez" şeklinde ifade edebileceğimiz bir savı, orijinal bir yöntemle kanıtlamıştır. Kuşkusuz ki Hilbert' in ve diğerlerinin ortaya koyduğu birtakım henüz çözülememiş problemlerin varoluşu, bu savı kanıtlamaya yetmez. Hilbert gibi bir dahinin 1900 yılında tüm matematikçilere hitaben; "işte sadece bu problemler çözülememiştir ve eninde sonunda bunlar da mutlaka çözülecektir; haydi başlayın çalışmaya...!" dediği bir ortamda, Gödel' in adeta; "bunları çözseniz bile karşınıza yeni, çözülemeyecek problemler mutlaka çıkacaktır" dercesine ürkütücü bir savla ortaya çıkıp bunu da kendine özgü bir yöntemle kanıtladığını ilan etmesi, tüm matematikçileri korkutmuş ve kanıtlamada bir hata olması gerektiği düşüncesine iletmiştir. Hatta büyük Hilbert' in, son yıllarını, bu hatayı ortaya çıkarmak yolunda geçirdiği bile söylenmektedir.

Gödel' in sözünü ettiğimiz çalışmalarından en önemlisi (ki burada, kullanılan kanıtlama yönteminin bir krokisini vermeye çalışacağız), 1931' de yazdığı ve orijinal Almanca; *Über formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und verwandter systems*, İngilizce; *On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems* ve Türkçe; *Principia Mathematica ve benzeri sistemlerin formel olarak karar verilemeyen önermeleri üzerine* **[1]** adlı makalesidir. Bu makale, matematik tarihinin önemli bir dönüm noktasıdır ve matematiğin mevcut biçimsel yapısı içindeki sınırlılıklarını belirlemektedir. Gödel, söz konusu makalenin başlangıcında aşağıdakilerin altını çizmiştir **[28]** :

"Matematiğin giderek daha kesinliğe doğru ilerlemesi, kanıtlamaların az sayıda mekanik kuralla yapılabilmesini sağlayan biçimselleştirme sayesindedir. Şimdiye kadar oluşturulan en kapsamlı biçimsel sistemler; *Principia Mathematica* ve *Zermelo-Fraenkel* aksiyomatik sistemleridir. Bunlar, bugün matematikte kullanılan genel yöntemleri, az sayıda aksiyom ve çıkarım kurallarına indirgeyerek biçimselleştirmişlerdir. Bu nedenle, bu aksiyomlar ve çıkarım kuralları ile her matematiksel problemin çözülebileceği düşünülmüştür. Bu makalede, durumun böyle olmadığı, yani yukarıdaki iki sistemde de tam sayılar kuramı içinde, aksiyomlardan hareketle karar verilemeyecek oldukça basit önermelerin varlığı gösterilmiştir."

Bu konuya ilişkin Gödel' in, *Monatshefte für Mathematik und Physik* adlı dergiye yazdığı bir yazıda aşağıdaki teoremler ve kanıtları yer almaktadır **[4,5]**.

Eğer Peano aksiyomlarına, seçme aksiyomunun tüm tipleriyle birlikte, *Principia Mathematica*' nın mantığını eklersek, bir S formal sistemi elde ederiz. Bu S sisteminde, aşağıdaki teoremler kanıtlanabilir:

1. S sistemi tam değildir; yani sistemde öyle A önermeleri vardır ki ne A, ne de $\overline{A}$ kanıtlanabilir. Ayrıca özel olarak S sistemi, x bir doğal sayı olmak üzere, (Ex)F(x) basit yapısında karar verilemez problemler içerir (Üstelik S.F.K.' den öyle formüller içerir ki, bunların ne evrensel geçerliliğinin kanıtı yapılabilir, ne de bunlara en az bir ters örnek verilebilir).

2. Hatta, *Principia Mathematica*' nın tüm mantıksal önlemleri alınsa bile (genişletilmiş fonksiyonel kalkülüs, seçme aksiyomu, v.s.), S sistemi için matematiksel bir tutarlılık kanıtı yoktur.

3. Hatta, S sistemine sonsuz çoklukta başka aksiyomlar eklense bile, *w-tutarlı* olacak şekilde tam bir sistem oluşturulamaz (Her n doğal sayısı için $(\exists x)\overline{F(x)}$ ispatlanabilir olacak şekilde bir F(x) özelliğine sahip olmayan bir sisteme *w-tutarlı* denir).

4. Teorem 1, S sistemine, aksiyomlar *kararlı* olacak şekilde, sonsuz çoklukta aksiyom eklense bile, S sisteminin böylece elde edilen tüm *w-tutarlı* genişletilmişleri için hala geçerlidir (Aksiyom sisteminin *kararlılığı*; her formülün, bir aksiyom olup olmadığına matematiksel olarak karar verilebildiği anlamına gelmektedir).

Peano aksiyomları, seçme aksiyomları ve *Principia Mathematica*' nın mantığı ile oluşturulmuş biçimsel sisteme S diyelim. Sistem (S); temel semboller, temel sembollerin belli kurallarla bir araya gelmesi ile oluşan önermeler (Ö.), aksiyomlar ve teoremlerden (kanıtlamalardan) (K.) oluşmaktadır. Temel semboller; sabit semboller (S.A.) ve değişken sembollerden oluşur. Değişken semboller; sayısal değişkenler (S.D.), önerme değişkenleri (Ö.D.) ve yüklem değişkenlerini (Y.D.) içerir. Üst-matematiksel bir yaklaşımla (burada meta-S diyebiliriz) S' den (ya da daha doğru olarak S' nin sembol, önerme ve önerme dizilerinden oluşan anlamlı alt kümelerinin ailesinden) N doğal sayılar kümesine bir fonksiyon tanımlayalım. Yani her sembol, her önerme ve her önerme dizisine (kanıtlamaya), bir doğal sayı karşılık gelsin. Bu fonksiyonun kuralı aşağıdaki gibidir:

S.A. = $\{ -, \vee, \rightarrow, \exists, =, 0, a, (,), , \}$

S.D. = $\{ x, y, z, \dots \}$

Ö.D. = $\{ p, q, r, \dots \}$

Y.D. = $\{ P, Q, R, \dots \}$

Ö. = $\{ p \vee p \rightarrow p,\ \exists x(x = ay),\ \exists x(x + 3 = 5), \dots \}$

K. = $\{ \{\exists x(x = ay), (\exists x)(x = a0)\}, \dots \}$

(ay; y doğal sayısının ardışığını göstermektedir)

olmak üzere,

S = S.A. $\cup$ S.D. $\cup$ Ö.D. $\cup$ Y.D. $\cup$ Ö. $\cup$ K.

olduğunu farzediyoruz. Burada sadece S.A. sonlu olup, diğer tüm kümeler sonsuz kardinalitededirler. Şimdi,

$$f : S \rightarrow N$$

fonksiyonunun kuralı şöyledir:

$f(-) = 1$, $f(\vee) = 2$, $f(\rightarrow) = 3$, $f(\exists) = 4$, $f(=) = 5$, $f(0) = 6$, $f(a) = 7$

$f(\,(\,) = 8$, $f(\,)\,) = 9$, $f(\,,\,) = 10$

$f(x) = 11$, $f(y) = 13$, $f(z) = 17$, . . .

$f(p) = 11^2$, $f(q) = 13^2$, $f(r) = 17^2$, . . .

$f(P) = 11^3$, $f(Q) = 13^3$, $f(R) = 17^3$, . . .

Ayrıca, A; sıra ile a_1, a_2, ..., a_n temel simgelerinden oluşan bir sözcük (tümce, önerme, formül, tam deyim ...) ve p, n asal sayılar olmak üzere,

$$f(A) = 2^{f(a_1)}.3^{f(a_2)}\ldots\, p^{f(a_n)}$$

ve B; sıra ile A_1, A_2, ..., A_m sözcüklerinden oluşan bir kanıtlama dizisi ve q, m asal sayılar olmak üzere,

$$f(B) = 2^{f(A_1)}.3^{f(A_2)}\ldots\, q^{f(A_m)}$$

olsun. Böylece S sisteminin her objesine bir doğal sayı karşılık getirilmiş olmaktadır. Sabit sembollere 1' den 10' a kadar doğal sayılar; sayısal değişkenlere 10' dan büyük asal sayılar; önerme değişkenlerine 10' dan büyük asal sayıların kareleri; yüklem değişkenlerine 10' dan büyük asal sayıların küpleri; sözcüklere, eğer sözcük n tane simgenin bir araya gelmesiyle oluşmuş ise sıra ile ilk n asal sayının, oluşturucu simgelere karşılık gelen görüntüler kadar kuvvetleri alınarak çarpımı; ve kanıtlamalara, eğer kanıtlama m tane sözcüğün bir araya gelmesi ile oluşmuş ise sıra ile ilk m asal sayının, oluşturucu sözcüklere karşılık gelen görüntüler kadar kuvvetleri alınarak çarpımı karşılık gelmektedir. Bu şekilde tanımlanmış fonksiyonda f[S]' nin elemanlarına *Gödel Sayıları* **[28]** denir.

Örnek olarak, $\exists x(ax = 2)$ tümcesine karşılık gelen doğal sayı;

$$f(\exists x(ax = 2)) = 2^{f(\exists)}.3^{f(x)}.5^{f(()}.7^{f(a)}.11^{f(x)}.13^{f(=)}.17^{f(2)}.19^{f())}$$

$$= 2^4 . 3^{11} . 5^8 . 7^7 . 11^{11} . 13^5 . 17^{f(2)} . 19^9$$

şeklinde tanımlanır. Burada 2 simgesi, temel simgeler arasında bulunmamasına rağmen, 0' ın ardışığının ardışığı anlamına gelen 'aa0' sözcüğünün kısaltılmışı olarak kullanılmıştır. O halde, $f(2) = f(aa0) = 2^7.3^7.5^6$ olur. Benzer şekilde her n doğal sayısı, a simgesi kullanılarak 'aa...a0' şeklinde yazılabilir ve buna karşılık gelen Gödel sayısı da,

$$f(n) = f(aa...a0) = 2^7 . 3^7 . 5^7 . . . p^7 . q^6$$

olur. Burada p; n. asal sayı ve q; n+1. asal sayıdır. f fonksiyonunun 1-1 olduğu fakat örten olmadığı kolayca görülebilir. Ayrıca, bir doğal sayı 10' dan büyükse, bir asal sayının 1. 2. veya 3. kuvveti değilse, asal çarpanlara ayrılışında geçen asal tabanlar sıra ile ilk asal sayılar değilse ve üslerden en az biri Gödel sayısı değilse, adı geçen sayı bir Gödel sayısı değildir.

Sistem içinde, temel simgeler arasında bulunmayan başka simgeler de yer alabilir. Bunların anlamı, temel simgeler cinsinden verilebilir. Örnek olarak, temel simgeler arasında geçmeyen $\wedge$ eklemi,

$$\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$$

eşitliği ile tanımlanabilir. Zira $\overline{p \wedge q}$ ifadesinin Gödel sayısı, $\overline{p} \vee \overline{q}$ ifadesinin Gödel sayısıdır.

S biçimsel sisteminin dili obje-dil olarak alınırsa, S hakkında konuşulan dil meta-dil (üst-dil) olur. S' nin diline *matematiksel dil*, söz konusu meta-dile de *meta-matematiksel dil* (üst-matematiksel dil) diyelim. O halde Gödel sayılarını açıklarken kullandığımız ifadeler (fonksiyonlar, simgeler v.s.), üst-matematiksel dile aittir. Üst-matematiksel dilin ifadelerinde, matematiksel-dilin simge ve sözcükleri de geçmektedir. Matematiksel-dildeki ifadelerin yapısal özellikleri ile ilgili üst-matematiksel dile ait önermeler, bir takım matematiksel-dile ait önermelerle eşleştirilebilir. Üst-matematiksel önermelerde geçen matematiksel simge ya da sözcüklerin birer Gödel sayıları olduğunu biliyoruz. Bu matematiksel objeler ve birbirleriyle olan yapısal ilişkilerini konu eden bir üst-matematiksel önermeye, bu önermenin içeriğindeki matematiksel objelere karşılık gelen Gödel sayıları arasındaki sayısal (ve dolayısıyla matematiksel) bağıntılar karşılık gelir. Bu türden üst-matematiksel önermelerin kümesine Ü.M.K. dersek ve matematiksel-dile ait u, v, w, ... objelerini içeren bir üst-matematiksel önermeyi A(u, v, w, ...) şeklinde gösterirsek,

$g : Ü.M.K. \rightarrow S$

$g(\ A(u, v, w, ...)\ ) = \beta_A(\ f(u), f(v), f(w), ...)$

fonksiyonu Ü.M.K.' daki her A önermesini, S' deki bir sayısal β bağıntısına dönüştürür. Matematiksel-dil ile ifade edilmiş olan bu β bağıntısı, yine S' deki u, v, w, ... objelerine karşılık gelen f(u), f(v), f(w), ... Gödel sayıları arasındaki bir aritmetiksel bağıntıdır. u, v, w, ... objeleri yerine simgeler, değişkenler, önermeler ve önerme dizileri gelebilir. Örnek olarak; "p, q, r, ... önermeler dizisi S' yi kanıtlar" üst-matematiksel önermesinde geçen dizinin Gödel sayısı x ve f(S) = y ise x ve y doğal sayıları arasındaki β(x,y) bağıntısı, S içinde üst-matematiksel önermenin g altındaki görüntüsüdür. Kuşkusuz ki gerek üst-matematiksel önermeler ve gerekse bunların g altındaki görüntüleri olan matematiksel önermeler, aynı anlama gelen değişik biçimlerde ifade edilebilirler. Şimdi yukarıdaki üst-matematiksel önermeyi "Gödel sayısı x olan önermeler dizisi, Gödel sayısı y olan önermenin kanıtlamasıdır" şeklinde ifade edelim ve S' de buna karşılık gelen sayısal bağıntı da β(x,y) olsun. O halde β' nın S' deki biçimsel değili olan –β(x,y) önermesi de, "Gödel sayısı x olan önerme dizisi, Gödel sayısı y olan önermenin kanıtlaması değildir" üst-matematiksel önermesinin g altındaki görüntüsüdür. Yine S' deki,

$\forall x\ (\ -\beta(x,y)\ )$ *1*

önermesi; "her x için, Gödel sayısı x olan önermeler dizisi, Gödel sayısı y olan önermeyi kanıtlamaz" ya da aynı anlamda olan; "S içinde, Gödel sayısı y olan önermeyi kanıtlayan hiçbir önerme dizisi yoktur" veya; "Gödel sayısı y olan önerme, S' de kanıtlanamaz" üst-matematiksel önermelerinin görüntüsüdür.

Şimdi S içinde bir 'h' *isim fonksiyonu*nu şöyle tanımlayalım: "Gödel sayısı a olan önermede, Gödel sayısı b olan değişken yerine c koyularak bulunan yeni önermenin Gödel sayısı" üst-matematiksel ifadesi, bir d Gödel sayısını ifade etsin. Bu durumda, a, b, c' ye bağlı olan bu d sayısı S içinde,

$d = h(a, b, c)$

şeklinde bir isim fonksiyonu olarak ele alınabilir. O halde S içindeki, örnek olarak,

$h(z, 17, z)$

biçimsel ifadesi; "Gödel sayısı z olan önermede, Gödel sayısı 17 olan değişken yerine z koyularak elde edilen önermenin Gödel sayısı" üst-matematiksel ifadesinin görüntüsüdür ve bir Gödel sayısını temsil etmektedir. *1* önermesinde, y yerine h(z, 17, z) sayısını koyarsak,

$\forall x\ (-\beta(x, h(z, 17, z)))$..*2*

önermesi elde edilir. S' deki bu matematiksel önerme, "Gödel sayısı h(z, 17, z) olan önerme kanıtlanamaz" üst-matematiksel önermesinin g altındaki görüntüsüdür. *2*' nin Gödel sayısı (yani f altındaki görüntüsü) m olsun. Şimdi *2*' de, (Gödel sayısı 17 olan) z değişkeninin yerine m sayısını koyarsak, S' de;

$\forall x\ (-\beta(x, h(m, 17, m)))$..*3*

önermesini elde ederiz. Bu *3* önermesinin Gödel sayısı,

h(m, 17, m)

olur. Çünkü *3* biçimsel önermesi, Gödel sayısı m olan önermede, z yerine m koyularak elde edilmiştir ve h(m, 17, m) sayısı da, Gödel sayısı m olan önermede z yerine m koyularak elde edilen önermenin Gödel sayısıdır. O halde *3* matematiksel önermesi,

"*3* kanıtlanamaz"..*4*

üst-matematiksel önermesinin S içindeki görüntüsüdür. Çünkü *4*, "Gödel sayısı h(m, 17, m) olan önerme kanıtlanabilir değildir" üst-matematiksel önermesine denktir. Şimdi *3*' ün (h(m, 17, m) Gödel sayılı önermenin) S içinde kanıtlanabilir olduğunu farzedelim. Bu durumda kanıtlamanın 't' gibi bir Gödel sayısı olacaktır ve bu t sayısı; "h(m, 17, m) Gödel sayılı önerme, Gödel sayısı k olan önermeler zinciri tarafından kanıtlanır" üst-matematiksel önermesinin g altında S' deki görüntüsü olan,

$\beta(k, h(m, 17, m))$

önermesini sağlar. Yani,

$\exists x\ (\beta(x, h(m, 17, m)))$

önermesi ve buna denk olan,

$-\forall x\ (-\beta(x, h(m, 17, m)))$

önermesi doğrudur. O halde,

3 kanıtlanabilir $\Rightarrow$ -3 kanıtlanabilir.

Benzer şekilde,

-3 kanıtlanabilir $\Rightarrow$ 3 kanıtlanabilir

ve sonuç olarak,

3 kanıtlanabilir $\Leftrightarrow$ -3 kanıtlanabilir

sonucu elde edilir.

Bir önermenin hem kendisi hem de değili, tutarlı bir aksiyom kümesinden hareketle elde edilemez [28]. O halde, eğer S' nin aksiyom sistemi tutarlı ise 3 önermesinin doğruluğuna ya da yanlışlığına karar verilemez, yani ne 3 ve ne de -3, aksiyomlardan çıkarılamaz. Ancak,

$\forall x\ (-\beta(x, h(m, 17, m)))$..$3$

önermesi aksiyomlardan hareketle elde edilememesine karşın, bu önermenin doğru olduğu üst-matematiksel akıl yürütmeyle kolayca gösterilebilir:

"3 kanıtlanamaz"..4

üst-matematiksel önermesinin doğru olduğunu kanıtlamıştık. Bu önermenin S' deki matematiksel görüntüsünün 3 olduğunu da biliyoruz. Üst-matematiksel önermelerle matematiksel önermeler arasındaki eşlemede, doğru önermelere yine doğru önermeler karşılık geldiğinden 4 doğru üst-matematiksel önermesine karşılık gelen 3 matematiksel önermesi de doğrudur.

Bu sonuç, S sisteminin aksiyomlarının tutarlı olmaları halinde tam olmadıklarını da göstermektedir. Daha önce tanımlandığı üzere, bir aksiyom sisteminin tam olması, biçimsel sistem içindeki her doğru önermenin aksiyomlardan elde edilebilmesi anlamına gelir. Oysa S' de oluşturulan 3 önermesi doğrudur (üst-matematiksel yöntemle gösterildi), fakat aksiyomlardan çıkarılamamaktadır.

Ayrıca S' ye, aksiyomlardan çıkarılamayan bu doğru önerme bir aksiyom olarak eklense bile, sistem yine de tam olmaz. Çünkü aynı akıl yürütmelerle, yeni sistem içinde de karar verilemeyen fakat doğru olan önermelerin varlığı gösterilebilir.

Artık S' nin tutarlılığının S içinde kalarak kanıtlanamayacağı, basit bir akıl yürütmeyle gösterilebilir:

" S tutarlı ise S tam değildir "

üst-matematiksel önermesine S içinde,

$$\exists y \, \forall x \, (-\beta(x,y)) \Rightarrow \forall x \, (-\beta(x, h(m, 17, m))) \quad \ldots\ldots 5$$

matematiksel önermesi karşılık gelir. Gerçekten bu gerektirmenin öncül kısmı; "S tutarlıdır" üst-matematiksel önermesine denk olduğunu gösterdiğimiz ve "kanıtlanamayan en az bir önerme vardır" üst-matematiksel önermesinin S görüntüsü olan,

$$\exists y \, \forall x \, (-\beta(x,y)) \quad \ldots\ldots 6$$

matematiksel önermesidir. Sonuç kısmı ise; yine daha önce, S' nin tam olmadığını bize gösteren *3*' dür. Şimdi eğer 6 kanıtlanabilir olsaydı, 5 ve ayırma kuralı gereğince *3*' de kanıtlanabilir olurdu. O halde, bu çelişkiyi ortaya çıkaran "6 kanıtlanabilir" varsayımı yanlıştır. Yani S' nin tutarlı olduğu S içinde kalarak kanıtlanamaz.

Sonuç olarak Hilbert' in düşlediği bir mutlak tutarlılık kanıtlamasının sonlu yöntemlerle yapılamayacağı anlaşılmaktadır. Zira herhangi bir aksiyom kümesinden çıkarılamayacak, sonsuz çoklukta doğru önerme vardır. S' nin tutarlılığı ancak üst-matematiksel yöntemlerle ve Hilbert' in sonlayıcı yönteminden vazgeçilerek, Hilbert ekolünden Gerhard Gentzen tarafından 1936' da kanıtlanmıştır **[50]**. Daha sonra başka kanıtlamalar da verilmiş olsa da, bunlar Hilbert' in istediği yeterlilikten uzaktırlar.

5.3 GÖDEL' İN ÖNEMLİ MAKALELERİ [4,5]

1. On the completeness of the calculus of logic # 1929
2. The completeness of the axioms of the functional calculus of logic # 1930
3. On the completeness of the calculus of logic # 1930a
4. Some metamathematical results on completeness and consistency # 1930b
5. Lecture on completeness of the functional calculus # 1930c
6. On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems # 1931
7. Discussion on providing a foundation for mathematics # 1931a
8. On undecidable sentences # 1931?
9. On the intuitionistic propositional calculus # 1932
10. A special case of the decision problem for theoretical logic # 1932a
11. On completeness and consistency # 1932b
12. A property of the realizations of the propositional calculus # 1932c
13. On Parry' s axioms # 1933
14. On independence proofs in the propositional calculus # 1933a
15. On the isometric embeddability of quadruples of points of R_3 in the surface of a sphere # 1933b
16. On Wald' s axiomatization of the notion of betweenness # 1933c
17. On the axiomatization of the relations of connection in elementary geometry # 1933d
18. On intuitionistic arithmetic and number theory # 1933e
19. An interpretation of the intuitionistic propositional calculus # 1933f
20. Remark concerning projective mappings # 1933g
21. Discussion concerning coordinate-free differential geometry # 1933h
22. On the decision problem for the functional calculus of logic # 1933i
23. The present situation in the foundations of mathematics # 1933j

24. Simplified proof of a theorem of Steinitz # 1933?
25. On undecidable propositions of formal mathematical systems # 1934
26. Discussion remark # 1936
27. On the length of proofs # 1936a
28. Lecture at Zilsel' s # 1938
29. Lecture at Göttingen # 1939
30. Lecture on the consistency of the continuum hypothesis (Brown Univ.) # 1940
31. In what sense is intuitionistic logic constructive? # 1941
32. Some observations about the relationship between theory of relativity and Kantian philosophy # 1946
33. Lecture on rotating universes # 1949
34. Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications # 1951
35. Is mathematics syntax of language? # 1953
36. The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy # 1961
37. Ontological proof # 1970
38. Some considerations leading to the probable conclusion that the true power of the continuum is $\aleph_2$ # 1970a
39. A proof of Cantor' s continuum hypothesis from a highly plausible axiom about orders of growth # 1970b
40. Unsent letter to Alfred Tarski # 1970c

BÖLÜM 6

SONUÇ

“Başlangıç nasıldı, son nasıl olacak, yoksa ikisi de mi yok?!...”; temel kuşku, kuşkusuz bu!... Bilim ve kutsal kitaplar, koca evrenin büyük patlama ile neredeyse yoktan var olduğunu ve yok oluşun da kaçınılmaz olduğunu söylüyor. Matematiğin sorunu ise bu değil... Varlıktan yokluğun, yokluktan varlığın oluşması matematiksel bir *aleladeliktir*. Gerçel sayılar vardır ama başı sonu yoktur; istediğimiz kadar küçük sonsuz çoklukta pozitif sayı vardır ama bunların en küçüğü yoktur; boş kümenin tüm elemanları sonsuzdur, hatta çapı da sonsuzdur ($-\infty$); evrenin tüm noktaları, küçük bir toz zerreciğinin içerdiklerinden daha çok değildir; evrendeki tüm atomların sayısı, istediğimiz kadar küçük bir aralıktaki noktaların sayısının yanında solda sıfır kalır (yani ilkine a, ikincisine b dersek; a+b = b+a = b’ dir). Evrendeki noktalar kadar başka evrenler olsa, tüm bunlardaki noktaların sayısı küçük bir aralıkta tanımlı ve gerçel değerli fonksiyonların sayısının yanında yine solda sıfır kalır; $f(x) = \frac{1}{x}$ kuralı ile verilen fonksiyonun sıfır civarındaki değerleri ise eksi sonsuzdan artı sonsuza fırlar! Tüm bunlar ve daha nice akıl almaz gibi görünen olgular, matematikçiler tarafından kolaylıkla kanıtlanır. Matematikçilere göre; “yanlış doğruyu gerektirir”, “yanlış yanlışı gerektiriyorsa doğrudur” ve hatta bunlar birer kanundur. 1960’ larda Penrose ve Hawking; “fizik kanunlarına göre kara deliklerde, fizik kanunlarının geçerli olmadığı noktalar olması gerektiğini” kanıtlamışlardır. Yani “doğruysa yanlıştır” bulmuşlardır. Matematikçileri çileden çıkaran, paradokslardır... İnsanoğlu ikilemlerden hiç kurtulamamıştır... “Maymundan mı? Balçıktan mı?”, “Elmayı yediği mi iyi oldu? Yoksa yemese miydi?” Doğruyu bulamıyoruz... En akıllılarımız arasında bile her kafadan bir ses çıkıyor. İşte bir kaçı:

Platonizm, Phythagorizm, İntuitivizm, Formalizm, Empirizm, Hümanizm, İdealizm, Rasyonalizm, Realizm, Pozitivizm, Stoasizm, Teizm, Ateizm, Vitalizm, Agnostizm, Animizm, Atomizm, Solipsizm, Spiritualizm, Pragmatizm, Pluralizm, Panteizm, Behaviorizm, Determinizm, Dualizm, Epitenomenalizm, Fatalizm, Fenomenalizm, Finalizm, Kuşkuculuk, Belirlenemezcilik, Uzlaşmacılık, Yanlışlanabilircilik, Mistisizm, Monizm, Nihilizm, Nominalizm, ...!

Buna karşı bir tez olarak, L. Glemens' den şu sözleri de nakletmek yerinde olacak:

"Hepimizin aynı fikirde olması iyi bir şey değildir. Çalışmayı yaratan, fikir ayrılıklarıdır" **[14]**.

İnsanlığın, bu belirsizlikler ve ikilemler dünyasından kurtulup, yalnızca doğruların bulunduğu bir alemde yaşama tutkusu, matematik denen oyunun uydurulmasında başta gelen etken olmalıdır. Gerçekten bu alemde yalnızca doğrularla haşır neşir olmanın huzuru bulunabilir. Fakat bu alemdeki doğruluk yargıları "bu doğrudur" şeklinde değil, "bu doğruysa bu da doğrudur" şeklindedir. Bir şeyler ister istemez önceden kabul edilir. Yani *mutlak doğru* bu alemde de yoktur. Matematikçi, hesaplanmamış hesapların olabileceğini hesaba katarak, kesin bir yargıda bulunmak gerektiğinde, "doğrudur" yerine "doğru olabilir" demeyi tercih eder. Çelişki gibi görünse de, Poincare' in; "matematikçi bilir fakat zannetmez" dediği budur. "Olabilir", söz konusu olgu olsa da doğrudur olmasa da doğrudur, o halde "olur" dan daha doğrudur! Matematikçi, "bu doğruysa bu da doğrudur" dediği zaman da, yine Poincare' in dediği gibi; "iknaya çalışmaz fakat ispat eder". Bunu nasıl yaptığı ile epeyce ilgilendik. Fakat ne var ki, yanlış yapmanın asla affedilmediği ve bu nedenle çok ince elenip sık dokunan bu alemde bile, şu *inanç sarsıcı* paradokslar matematikçinin yakasından düşmez... Bu *akıl almazlık*lar Cantor, Gödel, Hilbert gibi en akıllıları bile çıldırtmıştır! Çok akıllı değilsen sorun değildir. Çünkü o zaman çok derine inemezsin ve her şey aydınlık geliyorsa çıldırmak için sebep olmaz!...

Diyebiliriz ki, matematiğin dramatik çöküşü (ve bu nedenle de müthiş yükselişi!) Cantor' la başlamıştır. Sonsuzlukları hizaya getirdiği şahane teorisinin sonunda Cantor' u çıldırtan sadece, meslektaşlarının onu anlamamaları ve hatta yaptıklarına *deli saçması* yakıştırmasında bulunmaları değildi; ayrıca teorisinin üzerine düşmekte olan *paradoks* kabusunu da görmüştü... Hiç kimsenin asla aksini iddia edemeyeceği, son derecede naif; "birebir eşlenebiliyorlarsa aynı miktardadırlar" varsayımı üzerine kurduğu ve kendisinin de zaman zaman;

"görüyorum ama inanamıyorum" dediği inanılmaz anıtsal teori, bir matematik klasiği, paradokslar yüzünden çökmek üzereydi!...

Benzer bir hayal kırıklığını Frege' de yaşamış ve bunu; "matematik çöküyor" nidalarıyla dile getirmiştir. 19. yüzyıl matematiğinin Cantor, Frege, Hilbert gibi güçlü mimarları, Russell' ın 1902' de ortaya koyduğu ünlü paradoks ile sarsılmışlardır. Paradoks, küme teorisinin kavramlarından hareketle ortaya çıkıyordu ve kavramların küme teorisinden hareketle ele alınışı ise Frege' in 1884' deki öncülüğüyle, Russell dahil çoğu matematikçi tarafından benimsenmişti. Ancak Russell' ın paradoksu işleri alt üst etmişti!... Çelişki çıkarmayan bir aksiyom sistemi ve akıl yürütme yöntemi gerekiyordu ve Russell ve Whitehead bu amaçla *Principia Mathematica*' da ünlü formel sistemlerini geliştirdiler. Bu sistemin mükemmelliğine Hilbert' de inandı ve üstelik bu sistemden çelişki çıkmayacağının kanıtının da yapılabileceğini savundu. Gerçekten tam formalizasyon, tipler teorisi, obje-dil meta-dil ayırımı v.d. ile (birçok tenkitler almasına rağmen) paradoksların nasıl ortadan kaldırıldığını biliyoruz. Mutlak bir evrensel kümenin varlığını kabul ettiğimiz ve bunu kullanmayı beceremediğimize göre biz de sadece konu evreniyle yetiniveririz!...

Hilbert programı, matematiğin yeteri kadar geniş ve iyi tanımlanmış bir konusu için gerekli olan tüm akıl yürütme yöntemlerini içeren bir aksiyomatik biçimsel yapı oluşturmayı amaçlamıştır. Böylece tutarlılık ve tamlık sorunlarının halledilebileceği umulmuştur. Tüm matematiksel ifadeler sonlu simge dizilerinden oluşur ve bu dizilerin oluşumunun önceden belirlenmiş kesin kuralları vardır. Her biri, sezgiye yol açacak herhangi bir dışsal çağrışımları olmayan, sadece kendi içlerinde (ancak oyunu bilenlerin anlayabileceği) içsel işlevleri olan simgeler mozaiği formundadır. Bu mozaik sayesinde tüm doğru önermeler (Hilbert' in 23 problemi de dahil) aksiyomlardan çıkarılabilecek ve aksiyomlarda hiçbir çelişki çıkmayacaktı. Bu çerçevede Hilbert, 1918 ve 1922 yıllarında, küme teorisinden kaynaklanan paradokslara karşı, tam biçimselleştirilmiş bir S sistemi kullanmayı önermiştir **[2]**. S' de önceden seçilmiş asal semboller, formüller (sonlu sembol dizileri) ve kanıtlamalar (sonlu formül dizileri) bulunacaktır. Biçimselleşme gerçekleştirildiğinde, matematiğin herhangi seçilmiş bir kısmının önermeleri, anlamlarından arındırılmış simgesel objeler üzerinde yapılan basit mekanik işlemlerle elde edilebilecektir. Böylece informal (biçimselleşmemiş) matematikteki, sezgiye yer vermenin yol açtığı paradokslardan kurtulunacaktır.

Ne yazık ki, işlerin tam da iyi gittiği bir sırada Gödel, formalizme ezici bir darbe indirmiştir. Üstelik formalizmin kendi silahlarıyla... Kendine referans kavramının, bir paradoksa yol açmayacak şekilde ustaca kullanıldığı *Gödel' in Tam Olmama Teoremi* şöyledir:

Tam sayıları içeren herhangi bir aksiyomatik sistemde, ne doğruluklarının ve ne de yanlışlıklarının, sistemin aksiyomlarından hareketle çıkarılamayacağı önermeler vardır. Bu ise, biçimselleşmenin gerçekleşemeyeceği anlamına gelir.

Gödel teoremi meta-dilsel bir önerme olduğundan, bir meta-teoremdir; fakat kanıtlama, meta-dili obje düzeyine indirgeyerek ve tamamen formel sistem içinde kalarak (onun kurallarına göre) yapılmıştır.

Gödel' in 1931 tarihli makalesi **[1]**, 20. yüzyılda matematiksel mantık ve matematiğin temellerine ilişkin tartışmasız en önemli eser olarak kabul edilir. Bunun bir özeti, 23 Ekim 1930' da Viyana Bilimler Akademisi' nde sunulmuş, tüm metin ise, daha sonra *Monatshefte für Mathematik und Physik* dergisinde yayınlanmıştır. 22 Ocak 1931' de Gödel, basit tipler teorisi yerine, Peano aritmetiğini temel sistem alarak, önceki teoremlerinin daha genel kanıtlarını vermiştir.

Kısaca özetlersek Gödel, sayı teorisini kapsayan bir biçimsel aksiyomatik sistem almıştır. Bu sistemin önermelerine *obje-düzey*, sistem ve sistem içindeki önermelere de *meta-düzey* önermeler dersek; Gödel önce meta-düzey önermeleri sayılara ilişkin obje-düzey önermelere indirgemiş ve her bir obje-düzey önermesine ve önerme zincirlerine (ve tabii ki simgelere) de birer Gödel sayısı (bir çeşit kod numarası) karşılık getirmiştir. Daha sonra ustaca akıl yürütmelerle, sayılara dair (meta-düzeyde) ve kendi kendisinin kanıtlanamayacağını ifade eden bir obje-düzey önerme inşa etmiştir. Bu önermenin doğru olduğu, ancak ve ancak obje-düzeyde ispatlanamaz ise ispatlanabilmektedir. Aksiyomlar tutarlı ise, bu önermenin ne doğruluğu ve ne de yanlışlığı kanıtlanabilmektedir. Üstelik bu önerme sisteme yeni bir aksiyom olarak eklense bile, aynı yöntemle, yeni karar verilemez (yani sistemden bağımsız) önermeler türetilebilmektedir **[51]**.

Algoritma **[52]** sözcüğü; bir problemin çözümlenmesinde kullanılan ardışık rutin (veya mekanik) işlemler zinciri anlamına gelir. Horasanlı Türk matematikçisi Harezmi (al-Khowarizm)' nin 825' de yazdığı *Kitab el Cebr ve' l Mukabele* adlı cebir kitabında, cebirsel problemlerin çözümlerinde orijinal algoritmalar kullandığı bilinmektedir. Zaten *algoritma* sözcüğü de onun adından gelmektedir. Bununla birlikte algoritma kavramının kesin tanımlaması ancak 20. yüzyılda verilebilmiştir. İngiliz matematikçi Alan Turing 1937 yılında, Hilbert' in, *Entscheidungs problem* adıyla anılan ve 1900 Paris ve 1928 Bologna kongrelerinde sunduğu; "herhangi bir matematik probleminin çözümü için geçerli bir algoritmik yöntemin olup olmadığı" problemine geniş kapsamlı bir çözüm getirebilmek amacıyla, *Turing Makinesi* kavramını ortaya atmıştır. Turing Makinesi fiziksel bir nesne olmayıp, belli yöntemlerle algoritmik işlemler yapabilen bir soyut aygıttır. Hilbert' in kendi problemini çözmek için oluşturduğu programın, Gödel teoremiyle çıkmaza girdiğini biliyoruz. Turing' in ilgilendiği problem ise biraz daha genel olup; "matematiğin tüm problemlerini sıra ile çözebilecek genel bir mekanik yöntemin ilke olarak olabilirliği" ni sorgulamaktadır. Turing bu amaçla, basitten zora değişik problem sınıflarını çözebilen değişik cinslerde Turing Makineleri tanımlamıştır. Benzer düşünceler daha önce A. A. Markov, Alonzo Church, S. C. Keene, Emil Post ve başkaları tarafından da ortaya koyulmuştur. Sonunda *Church-Turing Tezi* denilen ortak görüş; "Turing Makinesi kavramı, matematik açısından algoritmik bir yöntemle anlatmak istenen kavram" **[52]** olarak ortaya çıkmıştır. Turing, Fermat problemi, Goldbach sanısı gibi problemlerin (ya da daha genel olarak tüm problemlerin) çözümü için bir yöntemin olamayacağını kanıtlamıştır. Bir Turing Makinesi' yle çözülemeyecek ve sezginin kaçınılmaz olduğu başka bazı problem örnekleri de, Roger Penrose tarafından bulunmuştur.

Matematik ve mantıktaki gelişmelere paralel olarak, matematiksel mantık da 20. yüzyılın ikinci yarısından itibaren ciddi bir gelişim süreci içerisine girmiştir. Gödel' in 1930' lu yıllardaki makalelerini **[4,5]** takip eden yıllar, özellikle çok değişkenli mantık çeşitlerinin ortaya çıkmasıyla, paradoksların giderilmesine ilişkin önemli bir umudu beraberinde getirmiştir. 1970' li yıllarda Zadeh tarafından geliştirilen Fuzzy Mantığı **[53]** ise, son haliyle, değişik bilim dallarındaki açılımlarından bağımsız olarak, matematiksel mantığın en önemli olgusu olarak görülmektedir. Üstelik, Gödel Kanıtlaması' nın Fuzzy Mantığı çerçevesinde değerlendirilmesi, matematiksel mantıkçıların yeni ilgi odağı haline gelmektedir.

Bu bağlamda, yaptığımız bu çalışmanın daha ileri bir aşaması niteliğinde, Fuzzy Mantığı' nın, tasarlanabilecek herhangi bir aksiyomatik sistemin tamlığı, tutarlılığı ve bağımsızlığı adına ortaya koyabileceği sonuçların, Gödel Kanıtlaması' nın vurguladığı gerçeklerle karşılaştırılmasının mümkün ve oldukça yararlı olabileceği kanısını taşımaktayız.

EK

Bu, şu yol ile yapılabilir: S, "Her cümle" kelimeleriyle başlayan herhangi bir cümle olsun. S cümlesinde şu iki değişikliği yaparak S_1' i oluşturalım: S' nin ilk kelimesi olan "Her" i "Bir" ile değiştirelim ve ikinci kelime olan "cümle" den sonra tüm S cümlesini tırnak içinde yazalım. Bundan böyle S_1' in doğru ya da yanlış oluşuna göre S' ye, "kendine uygulanabilir" ya da "kendine uygulanamaz" adını verelim. Şimdi şu cümleye bakalım:

"Her cümle kendine uygulanamazdır"

Kolayca gösterilebilir ki bu cümle hem kendine uygulanabilir, hem de uygulanamazdır. Bu ise bir çelişkidir. Her ne kadar, bir empirik ön bilgi gerektirmeyen bu antinomiyi formüle etmek yeterince kolay olmayabilirse de bu noktanın üzerinde incelikle durmayacağız.

KAYNAKLAR

[1] http://www.ddc.net/ygg/etext/godel/index.htm (*Gödel' in aksiyomatik sistemlerin tam olmamasına dair teoremi*)

[2] Brouder, Felix , 1976 , *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems* , American Mathematical Society , U.S.A.

[3] Erickson, G.W. , Fossa, J.A. , 1998 , *Dictionary of Paradox* , M.D.:University Press of America , Lanham

[4] Gödel, Kurt , 1986 , *Collected Works Vol.I (1929-1936)* (Edited by Feferman, Solomon) , Oxford University Press , NewYork

[5] Gödel, Kurt , 1990 , *Collected Works Vol.II (1938-1974)* (Edited by Feferman, Solomon) , Oxford University Press , NewYork

[6] Robbin, J.W. , 1969 , *Mathematical Logic (A First Course)* , W.A. Benjamin

[7] Özlem, Doğan , 1999 , *Mantık* , İnkılap Kitabevi , İstanbul

[8] Grunberg, Teo , Onart, Adnan , Batuhan, Hüseyin , 1976 , *Modern Mantık ve Uygulamaları* , M.E.B. Yayınları , İstanbul

[9] Kac M., Ulam S.M. , 1968 , *Mathematics and Logic* , Dover Publications , NewYork

[10] Johnstone, P.T. , 1987 , *Notes on logic and set theory* , Cambridge University Press , Cambridge-NewYork

[11] Tomassi, Paul , 1999 , *Logic* , Routledge , London-NewYork

[12] Gamut, L.T.F. , 1991 , *Introduction to Logic* , The University of Chicago Press , Chicago-London

[13] Yıldırım, Cemal , 1985 , *Bilim Felsefesi* , Remzi Kitabevi , İstanbul

[14] Reichenbach, Hans , 1981 , *Bilimsel Felsefenin Doğuşu* , Remzi Kitabevi , İstanbul

[15] Sesil, B.V. , 1971 , *Foundations of the Logic of Change and Development* , International Logic Rewiev

[16] Mendelson, E. , 1964 , *Introduction to Mathematical Logic* , Van Nostrand Reinhold , NewYork

[17] Güney, Zekeriya , 1993 , *Soyut Matematiğe Giriş* , Dokuz Eylül Üniversitesi Yayınları , İzmir

[18] Grimaldi, Ralph P. , 1989 , *Discrete and Combinatorial Mathematics* , A.W.P. Company , U.S.A.

[19] Halmos, Paul , 1987 , *Naive Set Theory* , Springer-Verlag , NewYork

[20] Yıldırım, Cemal , 1996 , *Matematiksel Düşünme* , Remzi Kitabevi , İstanbul

[21] Stevens S.S. , 1968 , *Matematik Ölçme ve Psikofizik* (Çev. Özbağlar, Sabri) , John Wiley and Sons , Ankara

[22] http://www-csli.stanford.edu/hp/ (*Alfred Tarski*)

[23] Yıldırım, Cemal , 1987 , *Mantık-Doğru Düşünme Yöntemi* , V Yayınları , Ankara

[24] Nesin, Ali , 1994 , *Önermeler Mantığı* , Düşün Yayıncılık , İstanbul

[25] Poincare, H. , 1949 , *Bilimin Değeri* , M.E.B. Yayınları (Çev. Yücel, Fethi) , Ankara

[26] Blackburn, Simon , 1994 , *The Oxford Dictionary of Philosophy* , Oxford University Press , Oxford-NewYork

[27] Polya, G. , 1966 , *Matematikte Endüksiyon ve Benzetme* (Çev. İçen, Orhan S.) , Türk Matematik Derneği Yayınları , İstanbul

[28] Nagel, Ernest , Newman, James R. , 1994 , *Gödel Kanıtlaması* (Çev. Gözkan, Bülent) , Sarmal Yayınevi , İstanbul

[29] Packard, Dennis J. , Faulconer, James E. , 1980 , *Introduction to Logic* , D. Van Nostrand Company , NewYork

[30] http://www.shu.edu/projects/reals/history/cantor.html (*George Cantor*)

[31] Mathias, A.R.D. , 1983 , *Surveys in Set Theory* , London Mathematical Society Lecture Note Series , Cambridge University Press , Cambridge-NewYork

[32] Cameron, Peter J. , 1999 , *Sets, Logic and Categories* , Springer-Verlag , England

[33] Jech, Thomas , 1997 , *Set Theory* , Springer-Verlag , Germany

[34] Kunen, Kenneth , 1983 , *Set Theory (An introduction to independence proofs)* , North-Holland Publishing Company , Amsterdam-NewYork

[35] http://www.math.vanderbilt.edu/~schectex/ccc/ (*Seçme Aksiyomu*)

[36] Nesin, Ali , Mayıs 2000 , *Matematik Sohbetleri* , Bilim ve Ütopya Dergisi 71. Sayı

[37] http://www.plato.stanford.edu (*Stanford Encyclopedia of Philosophy-Gottlob Frege*)

[38] http://www.plato.stanford.edu (*Stanford Encyclopedia of Philosophy-Frege' in V. Aksiyomu*)

[39] Russell, Bertrand , 1999 , *The Basic Writings of Bertrand Russell (1903-1959)* , Routledge , London

[40] Batog, T. , 1973 , *Is There a Contradiction in the Theory of Types ?* , International Logic Rewiev

[41] Onicescu, O. , 1973 , *Assumptions of Whitehead' s and Russell' s Principia Mathematica* , International Logic Rewiev

[42] http://www.plato.stanford.edu (*Stanford Encyclopedia of Philosophy-Principia Mathematica*)

[43] Godeux, L. , 1968 , *Çeşitli Geometriler* (Çev. Şemin, Ferruh) , Türk Matematik Derneği Yayınları , İstanbul

[44] Kutuzov, B.V. , 1969 , *Geometri* (Çev. Demir, Hüseyin) , Türk Matematik Derneği Yayınları , İstanbul

[45] Ekmekçioğlu, Mehmet , 1992 , *Trigonometrinin Tarihi Gelişimi* , M.E.B. Yayınları , İstanbul

[46] Boolos, G. , 1979 , *The Unprovability of Consistency (An Essay in Modal Logic)* , Cambridge University Press , Cambridge

[47] Bunch, B. , 1982 , *Mathematical Fallacies and Paradoxes* , Dover Publication , NewYork

[48] Curry, H.B. , 1977 , *Foundations of Mathematical Logic* , Dover Publication , NewYork

[49] Turquette, A.R. , 1950 , *Gödel and the Synthetic A Priori* , J. Phil. No.57

[50] Wang, H. , 1990 , Mind, Brain, Machine , Yearbook of the Kurt Gödel Society 1989 , Wien

[51] Penrose, Roger , 1997 , *Kralın Yeni Usu I-III* (Çev. Dereli, Tekin) , Tübitak Yayınları , Ankara

[52] Trakhtenbrot, B.A. , 1964 , Algoritmalar ve Otomatik Hesap Makinaları (Çev. Tuncer, Talat) , Türk Matematik Derneği Yayınları , İstanbul

[53] Klir, George S. , Folger, Tina A. , 1988 , *Fuzzy Sets-Uncertainity and Information* , Prentice Hall-Englewood Cliffs , NewJersey

Dr Kurt Gödel

School portrait of Kurt Gödel

Kurt Gödel as a young scholar

Maria Lutman-Kokoszyńska

Alfred Tarski and Kurt Gödel in Vienna, 1935

Portrait of Kurt Gödel, ca. 1962. Copyright © Alfred Eisenstaedt.

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Tufan TAŞKESEN
Doğum Yeri : Ankara
Doğum Yılı : 02.09.1976
Medeni Hali : Evli

EĞİTİM VE AKADEMİK BİLGİLER

Lise : 1990-1994, Aydın, Ortaklar Anadolu Öğretmen Lisesi
Lisans : 1994-1998, İzmir, Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği
Yabancı Dil : İngilizce

MESLEKİ BİLGİLER

1998-2001 : Araştırma Görevlisi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Muğla Üniversitesi, Muğla
2001-... : Öğretim Görevlisi, Muğla Meslek Yüksek Okulu, Muğla Üniversitesi, Muğla