T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ KAPALI KÜMELER
VE
GENELLEŞTİRİLMİŞ SÜREKLİ FONKSİYONLAR ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MURAD ÖZKOÇ

Danışman:
Doç. Dr. ZEKERİYA GÜNEY

TEMMUZ, 2002
MUĞLA

T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ KAPALI KÜMELER VE GENELLEŞTİRİLMİŞ SÜREKLİ FONKSİYONLAR ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MURAD ÖZKOÇ

Fen Bilimleri Enstitüsü'nce
"Yüksek Lisans"
Diploması Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir

Tezin Enstitü'ye Verildiği Tarih : 07.06.2002
Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 10.07.2002

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Zekeriya GÜNEY
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Hasan ÖZEKES
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ömer KÖSE

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Murat Barlas

Temmuz, 2002
MUĞLA

YEMİN

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum “Genelleştirilmiş Kapalı Kümeler ve Genelleştirilmiş Sürekli Fonksiyonlar Üzerine” adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlandığımı belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

06/06/2002

Murad ÖZKOÇ

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Her alanda gerçek bir bilim adamının yetişmesinin ne kadar zahmetli, zor ve uzun bir süreç olduğu, hemen hemen herkesçe az çok bilinir. Eğer bu alan, matematik gibi kendine has bir özelliği olan bir bilim olduğu düşünüldüğünde, bu sürecin önemi bir kat daha artmaktadır. İşte bu çalışma, ilgili sürecin bir basamağını oluşturmaktadır. Bu basamağın oluşmasının temel unsurları niteliğinde olan,

Doç. Dr. Zekeriya GÜNEY'e; her zaman her yönüyle örnek bir insan olduğu, çalışmalarımız boyunca yardımlarını hiç esirgemediği ve akademisyenlik yolunda elimden daima tuttuğu için,

Prof. Dr. Haruo MAKİ'ye; tez konumla ilgili makalelerini benden esirgemediği, sorularıma daima yanıt olduğu ve beni bu süreçte her zaman doğru bir şekilde yönlendirmeye çalıştığı için,

Özellikle araştırma görevlisi Fethi Nas, Tarık Demirel, Melda Mahlıçlı, Sevim Kaya başta olmak üzere diğer tüm çalışma arkadaşlarıma; gece gündüz tezin yazılmasında yardımcı oldukları ve madden ve manen hep destek oldukları için,

minnet, şükran ve teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ KAPALI KÜMELER
VE
GENELLEŞTİRİLMİŞ SÜREKLİ FONKSİYONLAR ÜZERİNE

ÖZKOÇ, Murad

Yüksek Lisans Tezi, Matematik

Temmuz, 2002

Bu çalışmada, ilk olarak 1970 yılında N.Levine tarafından ileri sürülen ve daha sonra W.Dunham tarafından ele alınan genelleştirilmiş kapalı kümeler ile kapalı kümeler ve 1991 yılında K.Balachandran, P.Sundaram ve H.Maki tarafından tanıtılan genelleştirilmiş sürekli fonksiyonlar ile sürekli fonksiyonlar arasındaki bazı özellikler incelenmiştir. Topolojik uzaylarda, kompaktlık ve GO-kompaktlık arasındaki benzerlikler ve farklılıklar irdelenmiştir. Ayrıca $T_{1/2}$ uzayının bazı özellikleri ile T_0, T_1,T_2,T_3,T_4 uzayları arasındaki ilişkiler ele alınmıştır.

ABSTRACT

ON GENERALIZED CLOSED SETS AND GENERALIZED CONTINUOUS MAPPINGS

ÖZKOÇ, Murad

M.Sc. in Mathematics

July, 2002

In this study, generalized closed sets and closed sets that had been introduced first by N.Levine in 1970 and then hold by W.Dunham; and some properties between generalized continuous functions and continuous functions that had been identified by K.Balachandran, P.Sundaram and H.Maki in 1991 were examined. Similarities and differences between the compactness and the GO-compactness in topological spaces were studied. On the other hand, some relationships between some properties of $T_{1/2}$ and T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 spaces are hold.

SEMBOLLER DİZİNİ

$\forall$	Her
$\exists$	En az bir
$\exists!$	Bir ve yalnız bir
$\backslash A$	A'nın tümleyeni
$P(X)$	X'in kuvvet kümesi
$\langle a_n \rangle$	a_n dizisi
$\langle f_n \rangle$	f_n fonksiyon dizisi
$f[A]$	A'nın f altındaki görüntüsü
$f^{-1}[A]$	A'nın f altındaki orijinali
f_A	f'nin A'ya kısıtlanmışı
$f \circ g$	f fonksiyonu ile g fonksiyonunun bileşkesi
$\lvert A \rvert$	A kümesinin kardinalitesi
$\aleph_0$	En küçük kardinal sayı
$\aleph_1(=c)$	Kontinium kuvveti
n	Norm
$n(x)(=\lVert x \rVert)$	x'in normu
(X,n)	Normlu uzay
d	Metrik
$d(x,y)$	x ile y arasındaki uzaklık
(X,d)	Metrik uzay
d_n	n normundan türetilen metrik
d_A	Alt metrik uzay
$d(a,A)$	a noktasının A kümesine uzaklığı
$d(A,B)$	A kümesi ile B kümesi arasındaki uzaklık
$d(A)$	A kümesinin çapı
$d \approx \delta$	d ve δ metrikleri denk
$S_\varepsilon(a)$	a noktasının ε-komşuluğu
$S_\varepsilon[a]$	a merkezli ε-yarıçaplı kapalı yuvar
τ_d	Açıklar ailesi (d metriğine göre)

$\mathcal{K}_d$	Kapalılar ailesi
τ	Topoloji
(X,τ)	Topolojik uzay
$\mathcal{K}^{\tau}(\mathcal{K})$	Kapalılar ailesi (τ' ya göre)
τ_g	g-açık kümelerin ailesi
$\mathcal{K}_g^{\tau}(\mathcal{K}_g)$	g-kapalı kümelerin ailesi (τ' ya göre)
$\mathcal{D}$	Diskret (ayrık) topoloji
I	İndiskret (ayrık olmayan) topoloji
τ_A	A'ya rölatif topoloji
τ^*	Dunham topolojisi
τ_k	Kofinit topoloji
$\mathcal{N}_x$	Komşuluklar ailesi
A^o	A'nın içi
A^d	A'nın dışı
$D(A)$	Türev kümesi
$\overline{A}$	A'nın kapanışı
A^s	A'nın sınırı
A^a	A'nın ayrılmışı
$\overline{A}^*$	A'nın g-kapanışı
$Y < X$	Y, X'in alt uzayı
$\langle \mathcal{A} \rangle$	$\mathcal{A}$ ailesinin doğurduğu topoloji
$(X,\tau) \cong (Y,\tau')$	(X,τ) ve (Y,τ') homeomorf uzaylar
T_o	T_o uzayı
$T_{1/2}$	$T_{1/2}$ uzayı
T_1	T_1 uzayı
T_2	T_2 uzayı
T_3	T_3 uzayı
$T_{3\,1/2}$	$T_{3\,1/2}$ uzayı
T_4	T_4 uzayı

KISALTMALAR DİZİNİ

a-fonk.	Açık fonksiyon
ay. uz.	Ayrılabilir uzay
Ban. uz.	Banach uzayı
bij.	Bijektif (1-1 örten)
bir. say. uz.	Birinci sayılabilir uzay
bir. sür.	Birlikte sürekli
büy. küme	Büyük küme
B-W öz.	Bolzano-Weierstrass özelliği
çar. top.	Çarpım topolojisi
den. bağ.	Denklik bağıntısı
deng. sür.	Dengeli sürekli
dim(X)	X'in boyutu
diz. komp.	Dizisel kompakt
diz. sür.	Dizisel sürekli
düz. sür.	Düzgün sürekli
düz. yak.	Düzgün yakınsak
g-kap.	Genelleştirilmiş kapalı küme
Haus. uz.	Haussdorf uzayı
home.	Homeomorfizm
h. y. yoğun	Her yerde yoğun
iki. say. uz.	İkinci sayılabilir uzay
inf	İnfimum
iz. fonk.	İzdüşüm fonksiyonu
izo.	İzomorfizm
kes. mon. ar.	Kesin olarak monoton artan
kes. mon. az.	Kesin olarak monoton azalan
k-fonk.	Kapalı fonksiyon
komp.	Kompakt
$\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$	$\mathcal{A}$ için L-say. ailesi
Leb. say.	Lebesque sayısı
Lin. uz.	Lindelöf uzayı

met. top. uz.	Metrik topolojik uzay
met. uz.	Metrik uzay
mon.	Monoton
mon. ar.	Monoton artan
mon. az.	Monoton azalan
n-mani.	n-manifold
nok. ay.	Nokta ayıran
nok. yak.	Noktasal yakınsak
nor.	Normal
reg.	Regüler
say. komp.	Sayılabilir kompakt
sın.	Sınırlı
s.k.ö.	Sonlu kesişim özelliği
srsz.	Süreksiz
sup	Supremum
sür.	Sürekli
top. uz.	Topolojik uzay
tüm. sın.	Tümden sınırlı
yak.	Yakınsak
yer. baz	Yersel baz
yer. komp.	Yersel kompakt

TABLOLAR LİSTESİ

SAYFA

BÖLÜM 1 : GİRİŞ

Bu çalışmada, N.Levine tarafından tanıtılan genelleştirilmiş kapalı kümeler kavramından yola çıkılarak, bu kavramın kapalı kümeler, sürekli fonksiyonlar ve kompaktlık kavramları ile arasındaki ilişkiler ele alınmıştır.

II. Bölümde ise, matematiğin simgesel aksiyomatik bir yapıya dönüştürülerek temellendirilmesini savunan David Hilbert (1862-1943)'in ekolüne sadık kalınarak temel kavramlar formel bir şekilde verilmiştir.

III. Bölümde de genelleştirilmiş kapalı kümeler, genelleştirilmiş sürekli fonksiyonlar, GO-kompaktlık tanımları ve bunlar arasındaki bir takım özellikler incelenmiştir. Çalışmamız, tüm bu elde edilen bilgiler ışığı altında yapılmış bir değerlendirmeyi ve bu konuyla ilgili yapılabilecek çalışmaları içeren sonuç bölümüyle sona ermiştir.

BÖLÜM 2 : TEMEL KAVRAMLAR

2.1 FONKSİYONLAR

2.1.1 Fonksiyonların Özellikleri

$f:X\rightarrow Y$, $y=f(x)$, $A_1,A_2 \subset X$, $B_1,B_2 \subset Y$, $\{A_i \mid i\in I\} \subset P(X)$, $\{B_i \mid i\in I\} \subset P(Y)$ olmak üzere,

1) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$

2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

3) $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$

4) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

5) $f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$

6) $f(\bigcap_i A_i) \subset \bigcap_i f(A_i)$

7) $A_1 \subset f^{-1} o f\, (A_1)$

8) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$

9) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

10) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

11) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

12) $f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$

13) $f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i)$

14) $B_1 \supset f o f^{-1}(B_1)$

15) $f^{-1}(\setminus B_1) = \setminus f^{-1}(B_1)$

2.2 METRİK UZAYLAR

2.2.1 Metrik Fonksiyon

$d:X^2 \rightarrow R$ metrik:$\Leftrightarrow$

$x,y,z \in X \Rightarrow [d(x,y) \geq 0)(d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y)(d(x,y)=d(y,x))(d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y))]$

2.2.2 Metrik Uzay

(X,d) metrik uzay:$\Leftrightarrow d:X^2 \rightarrow R$ metrik

2.2.3 İki Nokta Arasındaki Uzaklık

x ile y arasındaki uzaklık:$=d(x,y)$

2.3 Norm

(X,o) grup$\Rightarrow n:X \rightarrow R$ norm fonk.:$\Leftrightarrow$

$[x,y \in X \Rightarrow (n(x) \geq 0)(n(x)=0 \Leftrightarrow x=e)(n(x^{-1})=n(x))(n(xoy) \leq n(x)+n(y))]$

2.3.1 Normlu Uzay

(X,n) normlu uzay:$\Leftrightarrow n:X \rightarrow R$ norm fonk.

2.3.2 Norm Metriği

d_n, n normundan üretilen metrik:$\Leftrightarrow d_n:X^2 \rightarrow R$, $d_n(x,y)=n(xoy^{-1})$

2.3.3 Lineer Uzay Normu

X, R cismi üzerinde lineer uzay$\Rightarrow n:X \rightarrow R$ norm fonk.:$\Leftrightarrow$

$[x,y \in X,\ \lambda \in R \Rightarrow (n(x) \geq 0)(n(x)=0 \Leftrightarrow x=e)(n(\lambda x)=|\lambda| n(x))(n(xoy) \leq n(x)+n(y))]$

2.3.4 Euclidean Normlar

$$n:R^n \rightarrow R,\ n(x_1,\dots,x_n)=\|(x_1,\dots,x_n)\|=(x_1^2+\dots+x_n^2)^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

2.3.5. Euclidean Uzaklık

$d:R^n x R^n \to R,\ d(x,y)=\|x-y\|=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$

2.4 Alt Metrik Uzay

(A,d_A), (X,d)'nin alt uzayı:=(X,d) met. uz., $A\neq\emptyset$, $A\subset X$, $d_A:A^2\to R$, $d_A(x,y)=d(x,y)$

2.5 Bir Noktanın Bir Kümeye Uzaklığı

(X,d) met. uz., $A\subset X$, $a\in X\Rightarrow$

a noktasının A kümesine uzaklığı:=$d(a,A)$:=$\text{İnf}\{d(a,x) \mid x\in A\}$(1)

2.6 İki Küme Arasındaki Uzaklık

(X,d) met. uz., $A\subset X$, $B\subset X\Rightarrow$

A kümesi ile B kümesi arasındaki uzaklık:=$d(A,B)$:=$\text{İnf}\{d(x,y) \mid x\in A, y\in B\}$

2.7 Bir Kümenin Çapı

(X,d) met. uz., $A\subset X\Rightarrow$A kümesinin çapı:=$d(A)$:=$\text{Sup}\{d(x,y) \mid x,y\in A\}$

2.8 Sınırlı Küme, Sınırsız Küme

A sınırlı $\Leftrightarrow -\infty < d(A) < \infty$

A sınırsız $\Leftrightarrow$ A sınırlı değil $\Leftrightarrow (d(A)= -\infty \vee d(A)= \infty)$

2.8.1 Fonksiyon, Sınırsız Fonksiyon

(Y,d) met. uz.$\Rightarrow f:X\to(Y,d)$ sınırlı $\Leftrightarrow f[X]$ sınırlı $\Leftrightarrow d(f[X])\in R$

$f:X\to(Y,d)$ sınırsız $\Leftrightarrow f[X]$ sınırsız $\Leftrightarrow d(f[X])\in\{-\infty,\infty\}$

2.8.2 Sınırlı Metrikler

(X,d) met. uz.$\Rightarrow\{d(x,y) \mid (x,y)\in X^2\}$ görüntü kümesi, R^1 de sınırlı bir küme ise, buna sınırlı metrik, (X,d) uzayına da sınırlı metrik uzay denir.

$$d \text{ sınırlı} \Leftrightarrow |D(d[X^2])| < \infty$$

Teorem: Bir sınırlı metrik uzayın tüm alt uzayları sınırlıdır.[1]

İspat: Besbelli

2.9 Bir Noktanın ε-Komşuluğu

(X,d) met. uz., $a \in X$, $\varepsilon \in R^+ \Rightarrow$

a noktasının ε-komşuluğu:= $S_\varepsilon(a)$: $=\{ x \mid d(a,x)<\varepsilon, x \in X\}$

2.9.1 Bir Noktanın Komşulukları

(X,d) met. uz., $a \in A \subset X \Rightarrow A$, a'nın komş.:$\Leftrightarrow(\exists\varepsilon>0)(S_\varepsilon(a)\subset A)$

A, a'nın komş.:$\Leftrightarrow A\backslash\{a\}$, a'nın çıkarılmış komşuluğu

2.10 Açık Küme

(X,d) met. uz., $A\subset X \Rightarrow A$ açık $\Leftrightarrow (\forall a \in A)(\exists\varepsilon>0)(S_\varepsilon(a)\subset A) \Leftrightarrow [a\in A \Rightarrow \exists S_\varepsilon(a)\subset A]$

2.10.1 Açıklar Ailesi

$$\tau_d = \{ A \mid A \subset (X,d), a\in A \Rightarrow \exists S_\varepsilon(a) \subset A\}$$

1) $(Y,d_Y) \prec (X,d) \wedge A$, (X,d)'de açık $\Rightarrow A \cap Y$, (Y,d_Y)'de açık

2) $A\in\tau_d \Leftrightarrow [x\in A \Rightarrow A$, x'in komş.]

3) $A\in\tau_d \Leftrightarrow (\exists\mathcal{A}=\{ S_{\varepsilon_i}(x_i) \mid i\in I \Rightarrow (x_i\in X, \varepsilon_i>0)\})(A=\cup\mathcal{A})$

4) $[(\mathcal{A}\subset\tau_d)(\,|\mathcal{A}| < \aleph_0)\Rightarrow \cap\mathcal{A}\in\tau_d][\mathcal{A}\subset\tau_d \Rightarrow \cup\mathcal{A}\in\tau_d]$

2.10.2 Denk Metrikler

$(X,d),(X,\delta)$ met. uz.:$\Rightarrow$

d ve δ metrikleri denk:= ($d\approx\delta \Leftrightarrow \tau_d=\tau_\delta$)

2.10.3 İç Nokta, Bir Kümenin İçi

(a, A'nın iç noktası):$\Leftrightarrow(\exists\varepsilon>0)(S_\varepsilon(a)\subset A)$

A'nın içi:=A^o:=$\{ x \mid \exists S_\varepsilon(x)\subset A\}$

Teoremler

1) $A^o \subset A$

2) $A^o \in \tau_d$

3) $\mathcal{A}=\{B \mid B \subset A,\ B \in \tau_d\} \Rightarrow A^o = \max \mathcal{A},$

4) $A \in \tau_d \Leftrightarrow A = A^o$

5) $\mathcal{A}=\{B \mid B \subset A,\ B \in \tau_d\} \Rightarrow A^o = \cup \mathcal{A}$

6) $A \subset B \Rightarrow A^o \subset B^o$

7) $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$

8) $(A^o)^o = A^o$

2.10.4 Dış Nokta, Dış

(a, A'nın dış noktası)$:\Leftrightarrow (\exists \varepsilon>0)(S_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset)$

A'nın dışı$:= A^d := \{x \mid (\exists \varepsilon>0)(S_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset)\}$

Teorem

1) $A^d = (\ \setminus A)^o$

2.10.5 Sınır Noktası, Sınır

(a, A'nın sınır noktası)$:\Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(S_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \wedge S_\varepsilon(a) \cap (\ \setminus A) \neq \emptyset)$

$:\Leftrightarrow [\varepsilon>0 \Rightarrow (S_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \wedge S_\varepsilon(a) \cap (\ \setminus A) \neq \emptyset)]$

A'nın sınırı$:= A^s := \{x \mid \varepsilon>0 \Rightarrow (S_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \wedge S_\varepsilon(x) \cap (\ \setminus A) \neq \emptyset)\}$

Teoremler

1) $A^s = (\ \setminus A)^s$

2) $A^s = X \setminus (A^o \cup A^d)$

3) $X = A^o \cup A^s \cup A^d$

4) $A^o \cap A^d = A^d \cap A^s = A^s \cap A^o = \emptyset$

5) $A^o = \setminus (A^s \cup A^d)$

6) $A^d = \setminus (A^o \cup A^s)$

7) $A \setminus A^s = A^o$

8) $A \in \tau_d \Leftrightarrow (x \in A^s \Rightarrow x \notin A) \Leftrightarrow A^s \subset \setminus A$

2.10.6 Ayrık Nokta, Ayrılmış

(a, A'nın ayrık noktası):$\Leftrightarrow(\exists\varepsilon>0)((S_\varepsilon(a)\setminus\{a\})\cap A=\emptyset)$:$\Leftrightarrow(\exists\varepsilon>0)((S_\varepsilon(a)\cap A=\{a\})$

A'nın ayrılmışı:=A^a:=$\{x \mid (\exists\varepsilon>0)(S_\varepsilon(x)\cap A=\{a\})\}$

2.10.7 Yığılma Noktası, Türev Kümesi

(a, A'nın yığılma nok.):$\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0)((S_\varepsilon(a)\setminus\{a\})\cap A\neq\emptyset)$:$\Leftrightarrow(\varepsilon>0\Rightarrow(S_\varepsilon(a)\setminus\{a\})\cap A\neq\emptyset)$

A'nın türev kümesi:=D(A):=$\{x \mid (\forall\varepsilon>0)((S_\varepsilon(x)\setminus\{x\})\cap A\neq\emptyset)\}$

Teorem

1) $A\subset B\Rightarrow D(A)\subset D(B)$

2.10.8 Kapalı Kümeler

A kapalı $\Leftrightarrow$ $D(A)\subset A$

Kapalılar ailesi:$\mathcal{K}_d$:=$\{A \mid$ A kapalı$\}$

Teorem

1) $A\in\mathcal{K}_d$:$\Leftrightarrow$ $\setminus A\in\tau_d$

2.10.9 Kapalı ε-Komşuluk (Kapalı Yuvar)

(a merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar):=$S_\varepsilon[a]$:=$\{x \mid d(a,x)\leq\varepsilon\}$

1) $S_\varepsilon[a]\in\mathcal{K}_d$

2) $\mathcal{A}\subset\mathcal{K}_d\Rightarrow\cap\mathcal{A}\in\mathcal{K}_d$

3) $(\mathcal{A}\subset\mathcal{K}_d)(\,|\mathcal{A}|<\aleph_0)\Rightarrow\cup\mathcal{A}\in\mathcal{K}_d$

2.10.10 Kapanış, Değme Noktası

A'nın kapanışı:= $\overline{A}$:=$A\cup D(A)$

(a, A'nın değme noktası):$\Leftrightarrow a\in\overline{A}$

Teoremler

1) $a\in\overline{A}$ $\Leftrightarrow$ $(\forall\varepsilon>0)(S_\varepsilon(a)\cap A=\emptyset)$

2) $\overline{A}\in\mathcal{K}_d$

3) $A\subset B\Rightarrow\overline{A}\subset\overline{B}$

4) $A\in\mathcal{K}_d$:$\Leftrightarrow A=\overline{A}$

5) $\mathcal{A}=\{B \mid A\subset B,\ B\in\mathcal{K}_d\}\Rightarrow\overline{A}=\min\mathcal{A}$

6) $\mathcal{A}=\{B \mid A\subset B,\ B\in\mathcal{K}_d\}\Rightarrow\overline{A}=\cap\mathcal{A}$

7) $A\subset\overline{A}$

8) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

9) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$

10) $A^s=\overline{A}\cap(\setminus A)$

11) $A^s\in\mathcal{K}_d$

12) $A\in\mathcal{K}_d\Leftrightarrow A^s\subset A$

13) $\overline{A}=\setminus A^d$

14) $\overline{A}=A^o\cup A^s$

15) $\setminus\overline{A}=(\setminus A)^o$

2.10.11 Yoğunluk

A, her yerde yoğun:$\Leftrightarrow\overline{A}=X$

A, yoğun:$\Leftrightarrow(\overline{A})^o\neq\emptyset$

A, (hiçbir yerde) yoğun değil:$\Leftrightarrow(\overline{A})^o=\emptyset$

1) $\overline{A}=X\Leftrightarrow(A\subset B\wedge B\in\mathcal{K}_d\Rightarrow B=X)$

2) $\overline{A}=X\Leftrightarrow(A\cap B=\emptyset\wedge B\in\tau_d\Rightarrow B=\emptyset)$

3) $\overline{A}=X\Leftrightarrow(B\neq\emptyset\wedge B\in\tau_d\Rightarrow A\cap B\neq\emptyset)$

4) $(\overline{A})^o=\emptyset\Leftrightarrow[(B\neq\emptyset)(B\in\tau_d)\Rightarrow B\not\subset\overline{A}]$

5) $(\overline{A})^o=\emptyset\Leftrightarrow[(B\neq\emptyset)(B\in\tau_d)\Rightarrow(\exists C\subset B)(C\neq\emptyset)(C\in\tau_d)(C\cap\overline{A}=\emptyset)]$

6) $(\overline{A})^o=\emptyset\Leftrightarrow[(B\neq\emptyset)(B\in\tau_d)\Rightarrow(\exists C\subset B)(C\neq\emptyset)(C\in\tau_d)(C\cap A=\emptyset)]$

7) $A\in\mathcal{K}_d\Rightarrow(\overline{A}=X\Leftrightarrow(\overline{\setminus A})^o=\emptyset)$[1]

2.11 Ayrılmalar

2.11.1 Metrik Uzaylarda Diziler

a, (X,d)'de dizi:$\Leftrightarrow a:N\rightarrow X$ fonk.

$A:=\{(n,a(n))\mid n\in N,\ a(n)\in X\}=\{(1,a(1)),(2,a(2)),(3,a(3)),\ldots\}:=\langle a_1,a_2,a_3,\ldots\rangle:=\langle a_n\rangle$

2.11.2 Yakınsaklık

$\langle a_n \rangle$, (X,d)'de yakınsak:$\Leftrightarrow(\exists a\in X)(a_n\to a)$,

$$(a_n\to a):\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0)(\exists n_o\in N)(\exists a\in X)(n\geq n_o\Rightarrow d(a_n,a)<\varepsilon)^{(1)}$$

$$:\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0)(\exists n_o\in N)(\exists a\in X)(n\geq n_o\Rightarrow a_n\in S_\varepsilon(a))$$

1) $(a_n\to a)\Leftrightarrow(d(a_n,a)\to 0)$

2) $(a_n\to a \wedge a_n\to b)\Rightarrow a=b$

3) $(a_n\to a)\wedge(|\{a_n \mid n\in N\}|=\aleph_0)\Rightarrow a\in D(\{a_n \mid n\in N\})$

2.11.3 Cauchy Dizileri

$(\langle a_n\rangle$ Cauchy dizisi$):\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0)(\exists n_o\in N)(m,n\geq n_o\Rightarrow d(a_m,a_n)<0)$

1) $\langle a_n\rangle$ yakınsak $\Rightarrow$ $\langle a_n\rangle$ Cauchy dizisi

2.11.4 Tam Metrik Uzay

Tanım: Bir (X,d) metrik uzayında eğer her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya, bir tam metrik uzay denir.

$$(X,d) \text{ tam met. uz.}:\Leftrightarrow[(\langle a_n\rangle, (X,d)\text{'de Cauchy dizisi})\Rightarrow(\exists a\in X)(a_n\to a)]$$

1) $[(X,d) \text{ tam} \wedge Y\subset X]\Rightarrow[(Y,d_Y) \text{ tam} \Leftrightarrow Y\in\mathcal{K}_d]$

2) $((X,d) \text{ tam})(\mathcal{A}=\{A_n \mid (n\in N\Rightarrow(A_n\neq\emptyset)(A_n\subset X)(A_n\in\mathcal{K}_d)(A_{n+1}\subset A_n)(d(A_n)\to 0)\}\Rightarrow$
$|\cap\mathcal{A}|=1$

3) $\mathcal{A}=\{A_n \mid n\in N\Rightarrow(\overline{A_n})^o=\emptyset\}\Rightarrow|X\setminus(\cup\mathcal{A})|\neq\emptyset$

4) $((X,d) \text{ tam})(X=\cup\mathcal{A})(\mathcal{A}=\{A_n \mid n\in N\})\Rightarrow(\exists n\in N)((\overline{A_n})^o\neq\emptyset)$

2.12 Kategoriler

2.12.1 Banach Uzayları

B, Banach uzayı:=B, normlu, lineer, tam

1) $((X,d), \text{ Ban. uz.})(Y<X)(Y\in\mathcal{K}_d)\Rightarrow((Y,d_Y), \text{ Ban. uz.})$

2) $((X,d), \text{ Ban. uz.})(A\subset X)\Rightarrow[d(A)<\infty\Leftrightarrow(\exists a\in R)(x\in A\Rightarrow\|x\|\leq a)]^{(2)}$

2.13 Fonksiyonlarda Süreklilik ve Süreksizlik

2.13.1 Gerçel Tanım Kümeli ve Gerçel Değerli Fonksiyonlarda (GTGD) Sürekliliğe Dair Temel Kavramlar

$$f,\ \text{GTGD} \Leftrightarrow (A\subset R,\ B\subset R,\ f{:}A\to B) \Leftrightarrow f\in B^A$$

R^A da limitler:

$f\in R^A \Rightarrow$

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in A)(\exists b\in R)(0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon)$

$\Leftrightarrow [(n\in N\Rightarrow a_n\neq a)(a_n\to a)\Rightarrow(f(a_n)\to b)]$

2) $b \neq c \Rightarrow \lim f(x) \neq b \vee \lim f(x) \neq c$

3) $|\lim f(x)|=\lim|f|(x)$

$[f,g\in R^A,\ a\in D(A),\ c\in R]\Rightarrow$

4) $\lim f(x)+\lim g(x)=\lim(f+g)(x)$

5) $\lim f(x)-\lim g(x)=\lim(f-g)(x)$

6) $c.\lim f(x)=\lim(c.f)(x)$

7) $\lim f(x).\lim g(x)=\lim(f.g)(x)$

8) $[f,g\in R^A,\ a\in D(A),\ (x\in A\Rightarrow g(x)\neq 0)]\Rightarrow \lim f(x)/\lim g(x)=\lim(f/g)(x)$

Sağdan ve Soldan Limitler

$f(c+)=d \Leftrightarrow [(f{:}[a,b]\to R,\ c\in(a,b),\ (n\in N\Rightarrow c_n\in[c,b]),\ (c_n\to c))\Rightarrow(f(c_n)\to d)]$

$f(c-)=d \Leftrightarrow [(f{:}[a,b]\to R,\ c\in(a,b),\ (n\in N\Rightarrow c_n\in[a,c]),\ (c_n\to c))\Rightarrow(f(c_n)\to d)]$

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c+)=f(c-)$

Monotonluk ve Limitler

Monoton artan (mon. ar.), monoton azalan (mon. az.), kesin olarak monoton artan (kes. mon. ar.), kesin olarak monoton azalan (kes. mon. az.), monoton (mon.) fonksiyonlar:

$(A=(a,b),\ f\in R^A)\Rightarrow$

$(f,\ \text{mon. ar.}) \Leftrightarrow (x<y \Rightarrow f(x)\leq f(y))$

$(f,\ \text{mon. az.}) \Leftrightarrow (x<y \Rightarrow f(x)\geq f(y))$

$(f,\ \text{kes. mon. ar.}) \Leftrightarrow (x<y \Rightarrow f(x)<f(y))$

$(f,\ \text{kes. mon. az.}) \Leftrightarrow (x<y \Rightarrow f(x)>f(y))$

$(f,\ \text{mon.}) \Leftrightarrow (f,\text{mon. ar.}) \vee (f,\ \text{mon. az.}) \vee (f,\text{kes. mon. ar.}) \vee (f,\ \text{kes. mon. az.})$

1) $(f,\ \text{mon. ar.}) \Rightarrow [x\in(a,b)\Rightarrow f(x-)\leq f(x)\leq f(x+)] \wedge [x<y\Rightarrow f(x+)\leq f(y-)]$

2) $(f,\text{mon. az.}) \Rightarrow [x\in(a,b)\Rightarrow f(x-)\geq f(x)\geq f(x+)] \wedge [x<y\Rightarrow f(x+)\geq f(y-)]$

2.13.2 Alışılmış süreklilik ve süreksizlik (sür., srsz.)

$(f\in R^A,\ c\in A)\Rightarrow$

$(f,\ \text{c'de sür.}) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in A)(\ |x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(c)|<\varepsilon\ )$

$(f,\ \text{c'de srsz.}) \Leftrightarrow (\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x\in A)(\ |x-c|<\delta,\ |f(x)-f(c)|\geq\varepsilon\ )$

$(f,\ \text{sürekli}) \Leftrightarrow (\forall x\in A)(f{:}A\rightarrow R,\ \text{x'de sürekli})$

$(f,\ \text{süreksiz}) \Leftrightarrow (\exists x\in A)(f{:}A\rightarrow R,\ \text{x'de süreksiz})$

1) $(a\in D(A)) \wedge (f,\ \text{a'da sür.}) \Leftrightarrow (\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a))$

2) $(f,\ \text{a'da sür.}) \wedge (g\in R^{f[A]},\ f(a)\text{'da sür.}) \Rightarrow (\ g\circ f{:}A\rightarrow R,\ \text{a'da sür.})$

3) $(f,\ \text{sür.}) \wedge (\ g,\ \text{sür.}) \wedge (c\in R) \Rightarrow (\ |f|,\ f+g,\ f-g,\ c.f,\ f.g\ \text{sür.})$

4) $(f,\ \text{sür.}) \wedge (\ g,\ \text{sür.}) \wedge (\forall x\in A)(\ g(x)\neq 0) \Rightarrow (f/g,\ \text{sür.})$

2.13.3 Birinci Cinsten (Basit) Süreksizlik (b. c. srsz.), İkinci Cinsten Süreksizlik (i. c. srsz.) ve Kaldırılabilir Süreksizlik (k. srsz.)

$(f,\ \text{a'da b. c. srsz.}) \Leftrightarrow (f,\ \text{a'da srsz.}) \wedge (\exists!f(a+)) \wedge (\exists!f(a-))$

$(f,\ \text{a'da i. c. srsz.}) \Leftrightarrow (f,\ \text{a'da srsz.}) \wedge [(f(a+)\ \text{yok}) \vee (f(a-)\ \text{yok})]$

$(f,\ \text{a'da k. srsz.}) \Leftrightarrow (f,\ \text{a'da b. c. srsz.}) \wedge (f(a+)=f(a-)=\lim f(x))$

$f\in R^{(a,b)}\Rightarrow$

1) $(f,\ \text{mon.})\wedge(x\in(a,b))\Rightarrow(f,\ \text{x'de i. c. srsz. değil})\wedge(|\{x\mid x\in(a,b)\wedge f,\ \text{x'de srsz.}\}|\leq\aleph_0)$

2) $(\exists x\in(a,b))(f,\ \text{x'de i. c. srsz.})\Rightarrow(f,\ \text{mon. değil})$

$(f \in R^{[a,b]}) \wedge (c \in (a,b)) \wedge (f$, c'de sür.$) \Rightarrow$

3) $(\exists\delta>0)(\exists s\in R)(x\in(c-\delta,c+\delta)\Rightarrow f(x)\leq s) \wedge (\exists\delta>0)(\exists s\in R)(x\in(c-\delta,c+\delta)\Rightarrow s\leq f(x))$

4) $(f(c)>0) \Rightarrow (\exists\delta>0)(\forall x\in(a,b))(\,|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>0)$

5) $(f(c)<0) \Rightarrow (\exists\delta>0)(\forall x\in(a,b))(\,|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)<0)$

6) $(f(c-)=f(c)>0) \Rightarrow (\exists\delta>0)(\forall x\in(a,b))(-\delta< x-c \leq 0\Rightarrow f(x)>0)$

7) $(f(c+)=f(c)<0) \Rightarrow (\exists\delta>0)(\forall x\in(a,b))(0\leq x-c <\delta\Rightarrow f(x)<0)$

8) $(f(c-)=f(c)<0) \Rightarrow (\exists\delta>0)(\forall x\in(a,b))(c-\delta< x \leq c\Rightarrow f(x)<0)$

9) $(f(c+)=f(c)>0) \Rightarrow (\exists\delta>0)(\forall x\in(a,b))(c\leq x <c+\delta\Rightarrow f(x)>0)$

$(f \in R^{[a,b]}) \wedge (f$ sür.$) \Rightarrow$

10) $(f(a)<0<f(b)) \Rightarrow (\exists x\in(a,b))(f(x)=0)$

11) $(f(a)>0>f(b)) \Rightarrow (\exists x\in(a,b))(f(x)=0)$

12) $(f(a)<f(b)) \Rightarrow (\exists c\in(a,b))(f(a)<y<f(b)\Rightarrow f(c)=y)$

13) $(f(a)>f(b)) \Rightarrow (\exists c\in(a,b))(f(a)>y>f(b)\Rightarrow f(c)=y)$

14) $(\exists s\in R)(x\in[a,b]\Rightarrow f(x)\leq s) \wedge (\exists s\in R)(x\in[a,b]\Rightarrow |\,f(x)\,|\leq s) \wedge$

$(\exists c\in[a,b])(x\in[a,b]\Rightarrow f(x)\geq f(c)) \wedge (\exists c\in[a,b])(x\in[a,b]\Rightarrow f(x)\leq f(c))$

15) Ara Değer Teoremi (Bolzano):

$[y\in(f(a),f(b)) \vee y\in(f(b),f(a))] \Rightarrow (\exists x\in(a,b))(y=f(x))$

16) Weierstrass Teoremi:

$(\exists x_1,x_2\in[a,b])(f(x_1)=\text{Sup}f,\ f(x_2)=\text{İnf}f)$

2.13.4 Düzgün Süreklilik (düz. sür.)

$(f{:}A\rightarrow R$, düz. sür.$) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\forall x>0)(\exists\delta(\varepsilon)>0)(\forall x,y\in A)(\,|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon)$

$f{:}[a,b]\rightarrow R$ sür. $\Rightarrow f$, düz. sür.[3]

2.13.5 Metrik Uzaylarda Süreklilik ve Süreksizlik

$(X,d),(Y,d^*)$ met. uz., $f\in Y^X$, $c\in X \Rightarrow$

$(f$, c'de sür.$) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in X)(d(x,c)<\delta\Rightarrow d^*(f(x),f(c))<\varepsilon)$

$\Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(f[S_\delta(c)]\subset S_\varepsilon(f(c))$

$\Leftrightarrow (x_n\rightarrow c \Rightarrow f(x_n)\rightarrow f(c))$

$(f$, c'de srsz.$) \Leftrightarrow (\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x\in X)(d(x,c)<\delta,\ d^*(f(x),f(c))\geq\varepsilon)$

$\Leftrightarrow (\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x\in X)(f(x)\in f[S_\delta(c)],\ f(x)\notin S_\varepsilon(f(c))$

$\Leftrightarrow (\exists\langle x_n\rangle)(x_n\to c)(f(x_n)\not\to f(c))$

$(f$, sür.$) \Leftrightarrow (\forall x\in X)(f$, x'de sür.$)$

$\Leftrightarrow (\forall x\in X)(x_n\to x\Rightarrow f(x_n)\to f(x))$

$\Leftrightarrow [(A, (Y,d^*)$'da açık$)\Rightarrow(f^{-1}[A], (X,d)$'de açık$)]$

$\Leftrightarrow [(B, (Y,d^*)$'de kap.$)\Rightarrow(f^{-1}[B], (X,d)$'de kap.$)]$

$\Leftrightarrow (A\subset X\Rightarrow f[\overline{A}]\subset\overline{f[A]})$

$(f$, srsz.$) \Leftrightarrow (\exists x\in X)(f$, x'de srsz.$)$

$(f$, sür.$)(g$, sür.$)(A\subset X)(x\in A\Rightarrow f(x)=g(x)) \Rightarrow (x\in\overline{A}\Rightarrow f(x)=g(x))$

2.13.5.1 Düzgün Süreklilik (düz. sür.)

$(f$, düz. sür.$) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0)(\forall x,y\in X)(d(x,y)<\delta\Rightarrow d^*(f(x),f(y))<\varepsilon)$

$((X,d)$ met. uz.$)((Y,d^*)$ tam$)(A\subset X)(A$, h. y. yoğun$)(f$, düz. sür.$)\Rightarrow$

$(\exists!g\in Y^X)(g$, düz. sür.$)(x\in A\Rightarrow f(x)=g(x))$

2.14 İzometriler

$(f:(X,d)\to(Y,d^*)$ izo.$) \Leftrightarrow [x,y\in X\Rightarrow d(x,y)=d^*(f(x),f(y))]$

$f:(X,d)\to(Y,d^*)$ izo. $\Rightarrow f$, düz. sür.[3]

2.15 Lineer Fonksiyon Uzayları (LFU)

$$\left.\begin{array}{r} F=R^X=\{f \mid f:X\to R\} \\ +:F^2\to F,\ +(f,g)=f+g,\ f+g:F\to R,\ (f+g)(x)=f(x)+g(x) \\ \times:R\times F\to F,\ \times(\alpha,f)=\alpha.f,\ \alpha.f:F\to R,\ (\alpha.f)(x)=\alpha.f(x) \end{array}\right\}\Rightarrow R^X,\ \text{LFU}$$

2.16 Sınırlı Fonksiyonlar Uzayı

$S=\{f \mid f:X\to R,$ sınırlı$\}\Rightarrow S < R^X$ (S, R^X in lineer alt uzayı)

$$\left.\begin{array}{l} S=\{f \mid f:X\to R,\ \text{sınırlı}\} \\ \|.\|:S\to R,\ \|f\|=\sup|f(x)| \\ d^*:S^2\to R,\ d^*(f,g)=\|f-g\| \end{array}\right\} \Rightarrow (S,d^*),\ \text{Banach Uzayı}$$

2.16.1 Sınırlı Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

1) (X,d) met. uz.$\Rightarrow \mathcal{C}(X,R)=\{f \mid f:(X,d)\to R^1$, sınırlı, sürekli$\}< S < R^X$

2) $\mathcal{C}(X,R)$, S'nin lineer alt uzayı

3) $\mathcal{C}(X,R)$, (S,d^*)'da kapalı

4) $\mathcal{C}(X,R)$, Ban. uz.

2.17 R^X de Fonksiyon Dizilerinin Noktasal Yakınsaklığı

$\langle f_n\rangle$, f'ye nok. yak. $\Leftrightarrow f_n \xrightarrow{n} f \Leftrightarrow (x\in X \Rightarrow f_n(x)\to f(x)) \Leftrightarrow$

$(\forall x\in X)(\forall \varepsilon>0)(\exists n_o=n_o(x,\varepsilon)\in N)(\ n\geq n_o \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon)$

2.17.1 R^X de Fonksiyon Dizilerinin Düzgün Yakınsaklığı

$(\langle f_n\rangle$, düz. yak.$) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\forall x\in X)(\exists n_o(\varepsilon)\in N)(n\geq n_o \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon)$

$(f_n\to f$, düz. yak.$) \Leftrightarrow [(n_o^*(\varepsilon,x)=\min\{n_o(\varepsilon,x) \mid n\geq n_o \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\}) \wedge (\varepsilon>0) \Rightarrow$

$(C_\varepsilon=\{n_o^*(\varepsilon,x) \mid x\in X\}\subset N$, üstten sınırlı$)]$

1) $(\langle f_n\rangle$ düz. yak.$) \wedge (n\in N \Rightarrow f_n$, sür.$) \Rightarrow f=\lim f_n$ sür.

2) $(n\in N \Rightarrow f_n$ sürekli$) \wedge (\forall x,y\in X,\ x\to y \Rightarrow (\exists! \lim f_n(x)) \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to y} f_n(x)) = \lim_{x\to y}(\lim_{n\to\infty} f_n(x))$$

2.17.2 $\mathcal{C}(X,R)$'de Yakınsaklık, Norma Göre Yakınsaklık

$(\langle f_n\rangle$, $\mathcal{C}(X,R)$'de f'ye yakınsar$) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists n_o\in N)(n\geq n_o \Rightarrow d^*(f_n,f)<\varepsilon)$

$\Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists n_o\in N)(n\geq n_o \Rightarrow \|f_n-f\|=\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon)$

$(n\in N \Rightarrow f_n\in\mathcal{C}(X,R)) \Rightarrow [\langle f_n\rangle$ yak. $\Leftrightarrow \langle f_n\rangle$ düz. yak.$]$

2.18 Bir (X,d) Metrik Uzayının Tamlanmışı

1) ((X,d) met. uz.)($a\in X$)(f_b:X→R)($f_b(x)=d(x,b)-d(x,a)$)⇒$f_b\in \mathcal{C}$(X,R)

2) g:(X,d)→$\mathcal{C}$(X,R), $g(x)=f_x$ izometri

((X,d) met. uz.)($a\in X$)(f_b:X→R)($f_b(x)=d(x,b)-d(x,a)$))(g:(X,d)→$\mathcal{C}$(X,R))($g(x)=f_x$)

:⇒X'in tamlanışı:=$X^*:=\overline{g[X]}$

3) X^*, tam.

2.19 Doğal İzometri

((X,d), met. uz.)((Y,δ), tam met. uz.)(f:X^*→Y izo.)(h:X→Y izo.)(g:(X,d)→$\mathcal{C}$(X,R))

($g(x)=f_x$)⇒f:X^*→Y doğal izometri:⇔($x\in X$⇒$f(g(x))=h(x)$)

1) ((X,d), met. uz.)((Y,δ), tam met. uz.)(f:X^*→Y izo.)(h:X→Y izo.)

(g:(X,d)→$\mathcal{C}$(X,R)) ($g(x)=f_x$) ⇒∃f:X^*→Y doğal izometri[(2)]

2.20 Topoloji

(τ, X için top.):⇔($\tau\subset P(X)$)[($\mathcal{A}\subset\tau$)($|\mathcal{A}|<\aleph_0$)⇒$\cap\mathcal{A}\in\tau$]($\mathcal{A}\subset\tau$ ⇒$\cup\mathcal{A}\in\tau$)

2.20.1 Topolojik Uzay

((X,τ) top. uz.):⇔(τ, X için top.)

Teoremler

1) ((X,τ_1) top. uz.)((X,τ_2) top. uz.)⇒((X, $\tau_1\cap\tau_2$) top.uz.)

2) $\mathcal{T}=\{\tau \mid (X,\tau)$ top. uz.$\}$⇒(X,$\cap\mathcal{T}$) top. uz.

3) ((X,τ) top. uz.)($Y\subset X$)($\tau_Y=\{A\cap Y \mid A\in\tau\}$)⇒(Y,$\tau_Y$) top. uz.

2.20.2 Açık Küme

(A, (X,τ)'da açık):⇔$A\in\tau$

2.20.3 Kapalı Küme

(A, (X,τ)'da kapalı):⇔ $\backslash A\in\tau$

2.20.4 Kapalılar Ailesi

$\mathcal{K}^{\tau}:=\{A \mid \backslash A\in\tau\}$

1) (X,τ) top. uz.$\Rightarrow(\emptyset\in\mathcal{K})(X\in\mathcal{K})(A,B\in\mathcal{K}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{K})(\mathcal{A}\subset\mathcal{K}\Rightarrow\cap\mathcal{A}\in\mathcal{K})$

2.20.5 Alt Uzay

$((Y,\tau_Y)$, (X,τ)'nun alt top. uz.$):\Leftrightarrow((X,\tau)$ top. uz.$)(Y\subset X)(\tau_Y=\{A\cap Y \mid A\in\tau\})$

2.20.6 Komşuluk

$(B$, x'in komşuluğu$):\Leftrightarrow(\exists A\in\tau)(x\in A\subset B)$

1) $(x\in A)(A\in\tau)\Rightarrow(A$, x'in komşuluğu$)$

2.20.7 Komşuluklar Ailesi

$\mathcal{N}_x:=\{B \mid (\exists A\in\tau)(x\in A\subset B)\}$

Teoremler

1) $\mathcal{N}_x\neq\emptyset$

2) $B\in\mathcal{N}_x\Rightarrow x\in B$

3) $A,B\in\mathcal{N}_x\Rightarrow A\cap B\in\mathcal{N}_x$

4) $(A\in\mathcal{N}_x, A\subset B)\Rightarrow B\in\mathcal{N}_x$

5) $B\in\mathcal{N}_x\Rightarrow(\exists A\subset B)(A\in\mathcal{N}_x)(y\in A\Rightarrow A\in\mathcal{N}_y)$

2.20.8 İç Nokta, İç

$(x$, A'nın iç noktası$):\Leftrightarrow(\exists U\in\tau)(x\in U\subset A)$

A'nın içi$:=A^o:=\{x \mid (\exists U\in\tau)(x\in U\subset A)\}$

1) $A\subset B\Rightarrow A^o\subset B^o$

2) $A^o=\cup\{U \mid U\subset A, U\in\tau\}$

3) $A^o=\max\{U \mid U\subset A, U\in\tau\}$

4) $A^o\in\tau$

5) $A\in\tau\Leftrightarrow A=A^o$

6) $(X^o=X)(\emptyset^o=\emptyset)(A^o\subset A)((A\cap B)^o=A^o\cap B^o)((A^o)^o=A^o)$

2.20.9 Dış Nokta, Dış

(x, A'nın dış noktası)$:\Leftrightarrow(\exists U\in\tau)(x\in U\subset \setminus A):\Leftrightarrow$(x, $\setminus$A'nın iç noktası)

A'nın dışı$:=A^d:=\{x \mid (\exists U\in\tau)(x\in U\subset \setminus A)\}=(\setminus A)^o$

2.20.10 Sınır Noktası, Sınır

(x, A'nın sınır noktası)$:\Leftrightarrow[x\in U\in\tau\Rightarrow(U\not\subset A,\ U\not\subset \setminus A)]$

A'nın sınırı$:=A^s:=\{x \mid x\in U\in\tau\Rightarrow(U\not\subset A,\ U\not\subset \setminus A)\}$

Teoremler

1) $A^s=\setminus(A^o\cup A^d)$

2) $X=A^o\cup A^d\cup A^s$

3) $A^o\cap A^d=A^d\cap A^s=A^s\cap A^o=\emptyset$

2.20.11 Ayrık Nokta, Ayrılmış

(x, A'nın ayrık noktası)$:\Leftrightarrow(x\in A)((\exists U\in\tau)(x\in U\in\tau)(U\setminus\{x\})\cap A=\emptyset)$

A'nın ayrılmışı$:=A^a:=\{x \mid (x\in A)((\exists U\in\tau)(x\in U\in\tau)(U\setminus\{x\})\cap A=\emptyset)\}$

2.20.12 Yığılma Noktası, Türev Kümesi

(x, A'nın yığılma noktası)$:\Leftrightarrow(x\in U\in\tau\Rightarrow(U\setminus\{x\})\cap A\neq\emptyset)$

A'nın türev kümesi$:=D(A):=\{x \mid x\in U\in\tau\Rightarrow(U\setminus\{x\})\cap A\neq\emptyset\}$

Teoremler

1) $A\subset B\Rightarrow D(A)\subset D(B)$

2) $A\in\mathcal{K}\Leftrightarrow D(A)\subset A$

3) $A^a\cap D(A)=\emptyset$

4) $A\in\mathcal{K}\Rightarrow(A=A^o\cup A^s)(A^o\cap A^s)$

2.20.13 Değme Noktası, Kapanış

(x, A'nın değme noktası)$:\Leftrightarrow(x\in U\in\tau\Rightarrow U\cap A\neq\emptyset)$

A'nın kapanışı$:=\overline{A}:=\{x \mid x\in U\in\tau\Rightarrow U\cap A\neq\emptyset\}$

Teoremler

1) $\overline{A}=A\cup D(A)$

2) $A\subset B\Rightarrow\overline{A}\subset\overline{B}$

3) $\overline{A}=\cap\{\,K\mid A\subset K,\ \setminus K\in\tau\}$

4) $\overline{A}=\min\{\,K\mid A\subset K,\ \setminus K\in\tau\}$

5) $\overline{A}\in\mathcal{K}$

6) $A\in\mathcal{K}\Leftrightarrow A=\overline{A}$

7) $\overline{A}=A^{o}\cup A^{s}$

8) $(\overline{\varnothing}=\varnothing)(\overline{X}=X)(A\subset\overline{A})(\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B})(\overline{\overline{A}}=\overline{A})$

İspat: 1. $\left.\begin{array}{r}\varnothing\text{ kapalı}\\ \text{teo.}(6)\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{\varnothing}=\varnothing,$

2. $\overline{A}=A\cup D(A)\Rightarrow A\subset\overline{A},$

3.
$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A\subset A\cup B\\ \text{teo.}(2)\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{A}\subset\overline{A\cup B}\\ \left.\begin{array}{l}B\subset A\cup B\\ \text{teo.}(2)\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{B}\subset\overline{A\cup B}\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}\\
\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A\subset\overline{A}\\ B\subset\overline{B}\end{array}\right\}\Rightarrow A\cup B\subset\overline{A}\cup\overline{B}\\ \text{teo.}(1)\Rightarrow\overline{A}\cup\overline{B}\text{ kapalı}\\ \text{teo.}(2)\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{A\cup B}\subset\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}\\
\Rightarrow\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}
\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cup B}$$

4. $\left.\begin{array}{r}\text{teo.}(5)\Rightarrow\overline{A}\text{ kapalı}\\ \text{teo.}(6)\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{\overline{A}}=\overline{A}$

9) (Kuratowski Kapanış Aksiyomlarına dair)Teorem: $X(\neq\emptyset)$ herhangi bir küme olmak üzere, bir $k:P(X)\to P(X)$ fonksiyonu, $\forall A,B\in P(X)$ için,

1. $k(\emptyset)=\emptyset$, 2. $A\subset k(A)$, 3. $k(A\cup B)=k(A)\cup k(B)$, 4. $k(k(A))=k(A)$

koşullarını sağlarsa, $\forall A\in X$ için $k(A)=\overline{A}$ (A'nın kapanışı) olacak şekilde X üzerinde bir ve yalnız bir τ topolojisi vardır.

İspat: $\tau = \{ A \mid \backslash A = k(\backslash A),\ A\subset X\}$, X üzerinde bir topolojidir. Bunu kanıtlamak için (teo.2.20.4-1 gereğince) $\mathcal{K} = \{ K \mid \backslash K\in\tau\}=\{ K \mid K=k(K)\}$ ailesinin tam olarak τ-kapalılardan oluştuğunu göstermek yeter.

i) $1.\Rightarrow \emptyset\in\tau,\quad 2.\Rightarrow X\subset k(X)\Rightarrow X=k(X)\Rightarrow X\in\mathcal{K}$

ii) $\left.\begin{aligned} &A,B\in\tau \\ &3. \end{aligned}\right\} \Rightarrow A\cup B=k(A)\cup k(B)=k(A\cup B)\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{K}$

iii) $\left.\begin{aligned} &A\subset B \\ &3. \end{aligned}\right\} \Rightarrow B=A\cup B\Rightarrow k(B)=k(A\cup B)=k(A)\cup k(B)\Rightarrow$

$\Rightarrow k(A)\subset k(B) \,/\!/\, A\subset B \Rightarrow k(A)\subset k(B)\ldots(*)$

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{aligned} &\mathcal{A}=\{A_k \mid k\in I\}\subset\mathcal{K}\Rightarrow \cap\mathcal{A}\subset A_k \\ &(*) \end{aligned}\right\} \Rightarrow k(\cap\mathcal{A})\subset k(A_k)=A_k\Rightarrow k(\cap\mathcal{A})\subset\cap A_k=\cap\mathcal{A} \\ 2.\Rightarrow \cap\mathcal{A}\subset k(\cap\mathcal{A}) \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow \cap\mathcal{A}=k(\cap\mathcal{A}) \Rightarrow \cap\mathcal{A}\in\mathcal{A}$

i), ii), iii) $\Rightarrow \tau = \{ U \mid \backslash U\in\mathcal{K}\}$, X üzerinde top.

Şimdi, $\mathcal{B}=\{K \mid A\subset K,\ K\in\mathcal{K}\}$ olmak üzere, $A\in X \Rightarrow k(A) = \min\mathcal{B} = \overline{A}$ olduğunu (yani k(A)'nın A'yı kapsayan en küçük kapalı küme olup A'nın kapanışına eşit olduğunu) göstermeliyiz.

$\left.\begin{aligned} &K\in\mathcal{B}\Rightarrow(A\subset K,\ K\in\mathcal{K})\Rightarrow K=A\cup K,\ K=k(K) \\ &3. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$K=k(K)=k(A\cup K)=k(A)\cup k(K)=k(A)\cup K\ldots(*)$

$$\left.\begin{aligned} &(*)\Rightarrow k(A)\subset K \\ &\left.\begin{aligned} &4.\Rightarrow k(k(A))=k(A)\Rightarrow k(A)\in\mathcal{K} \\ &2.\Rightarrow A\subset k(A) \end{aligned}\right\} \Rightarrow k(A)\in\mathcal{B} \end{aligned}\right\} \Rightarrow k(A) = \min\mathcal{B}$$

2.20.4 Yoğun, Heryerde Yoğun, Hiçbir Yerde Yoğun Olmayan Kümeler

A yoğun $\Leftrightarrow (\overline{A})^{o} \neq \emptyset$

A her yerde yoğun $\Leftrightarrow \overline{A} = X$

A hiçbir yerde yoğun değil $\Leftrightarrow (\overline{A})^{o} = \emptyset$

2.21 Diziler

(a_n, (X,τ)'da dizi):$\Leftrightarrow$(a_n:N$\rightarrow$X fonksiyon):$\Leftrightarrow$

$a_n:=\{(n,a(n)) \mid n\in N\}:=\{(1,a(1)),(2,a(2)),(3,a(3)),...\}:=\langle a_1,a_2,a_3,...\rangle:=\langle a_n\rangle$

1) $\langle a_n\rangle \neq \{a_n \mid n\in N\}$

(**Örn.:** $\langle(-1)^n\rangle = \langle(-1,-1),(-1,1),(-1,-1),...\rangle := \langle -1,1,-1,...\rangle \neq \{-1,1\}=\{(-1)^n \mid n\in N\}$)

2.21.1 Dizilerin Yakınsaklığı

$(a_n\rightarrow a):\Leftrightarrow(\forall U\in \mathcal{N}_a)(\exists n_o\in N)(n \geq n_o \Rightarrow a_n\in U)$

$(\langle a_n\rangle$, (X,τ)'da yak.)$:\Leftrightarrow(\exists a\in X)(a_n\rightarrow a):\Leftrightarrow\{a \mid a_n\rightarrow a\} \neq \emptyset$

2.22 Baz

$\mathcal{B}$, τ-baz:$\Leftrightarrow(\mathcal{B}\subset \tau)[A\in\tau\Rightarrow(\exists \mathcal{A}\subset \mathcal{B})(A=\cup \mathcal{A})]$

1) $\mathcal{B}\subset \tau$ baz $\Leftrightarrow [x\in A\in\tau \Rightarrow(\exists B\in \mathcal{B})(x\in B\subset A)]$

2) ((X,τ) top. uz.)($\mathcal{B}$, τ-baz)($\mathcal{B}\subset \mathcal{B}^* \subset \tau$)$\Rightarrow$($\mathcal{B}^*$, τ-baz)

3) ($\exists\tau\subset$ P(X))((X,τ) top. uz.)($\mathcal{B}$, τ-baz) $\Leftrightarrow$ $(X=\cup \mathcal{B})(A,B\in \mathcal{B}\Rightarrow(\exists \mathcal{A}\subset \mathcal{B})(A\cap B=\cup \mathcal{A}))$

4) $a\in D(A) \Leftrightarrow (a\in B\in \mathcal{B}\Rightarrow A\cap (B\setminus\{a\}) \neq \emptyset)$

5) $(a_n\rightarrow a) \Leftrightarrow (\exists n_o\in N)(\forall B)(a\in B\in \mathcal{B})(n \geq n_o\Rightarrow n\in B)$

2.22.1 Alt Baz

((X,τ) top. uz., $\mathcal{A}\subset\tau$)$\Rightarrow$($\mathcal{A}$, τ-alt baz)$\Leftrightarrow$($\mathcal{B}=\{\cap \mathcal{A}^* \mid |\mathcal{A}^*| < \aleph_o, \mathcal{A}^*\subset \mathcal{A}\}$, τ-baz)

1) ($\mathcal{A}$, τ_1 ve τ_2-alt baz) $\Rightarrow \tau_1=\tau_2$

2) ($X \neq \emptyset$, $\mathcal{A}\subset$P(X))$\Rightarrow$($\exists!\tau\subset$ P(X))((X,τ) top.uz.)($\mathcal{A}$, τ için alt baz)

2.22.2 Bir Aileden Üretilen Topoloji

$X \neq \emptyset, \mathcal{A} \subset P(X) \Rightarrow \mathcal{A}$'nın ürettiği top.:= $\tau_{\mathcal{A}}$:=$\{ \cup \mathcal{B}^* \mid \mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}=\{ \cap \mathcal{A}^* \mid |\mathcal{A}^*| < \aleph_0, \mathcal{A}^* \subset \mathcal{A} \}\}:=\langle \mathcal{A} \rangle$

1) $\mathcal{T} = \{\tau \mid (X,\tau) \text{ top. uz.}, \mathcal{A} \subset \tau\} \Rightarrow \tau_{\mathcal{A}} = \cap \mathcal{T}$

2.22.3 Yersel (Lokal) Bazlar

$(\mathcal{B}_a$, a'da yer. baz$) \Leftrightarrow (B \in \mathcal{B}_a \Rightarrow a \in B)[a \in A \in \tau \Rightarrow (\exists B \in \mathcal{B}_a)(B \subset A)]$

1) $((X,\tau)$ top. uz.$)(\mathcal{B}, \tau$-baz$)(a \in X) \Rightarrow (\mathcal{B}_a = \{B \mid a \in B \in \mathcal{B}\}$ a'da yer. baz)

2) $a \in D(A) \Leftrightarrow (B \in \mathcal{B}_a \Rightarrow A \cap (B \setminus \{a\}) \neq \emptyset)$

3) $(a_n \to a) \Leftrightarrow (\exists n_o \in N)(\forall B)(a \in B \in \mathcal{B}_a)(n \geq n_o \Rightarrow n \in B)$ [1,2,4]

2.23 Topolojiler Kafesi

1) $[\mathcal{T} = \{\tau \mid (X,\tau) \text{ top. uz.}\} \subset P(P(X)), \subset = \{(\tau_1,\tau_2) \mid \tau_1 \subset \tau_2\}] \Rightarrow (\mathcal{T}, \subset)$, kafes

$\text{İnf}\{\tau_1,\tau_2\} = \tau_1 \cap \tau_2$, $\text{Sup}\{\tau_1,\tau_2\} = \langle \tau_1 \cup \tau_2 \rangle$

2.24 Süreklilik-Süreksizlik

Tanım: $(X,\tau),(Y,\tau')$ topolojik uzaylar, f:X→Y bir fonksiyon olmak üzere eğer (Y,τ') uzayındaki her açık kümenin, f altında (X,τ) uzayındaki orijinali de açık küme ise, f fonksiyonuna τ-τ' sürekli fonksiyon, veya (kısaca) sürekli fonksiyon (sür. fonk.) denir.

Sürekli olmayan fonksiyonlara da süreksiz fonksiyon denir.

$$(f:X \to Y, \tau\text{-}\tau' \text{ sür.}) :\Leftrightarrow (U \in \tau' \Rightarrow f^{-1}[U] \in \tau)$$

$$(f:X \to Y, \tau\text{-}\tau' \text{ süreksiz.}) :\Leftrightarrow (\exists U \in \tau')(f^{-1}[U] \notin \tau)$$

Örnek: $X=\{a,b,c,d\}$, $\tau=\{\emptyset,X,\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{b\}\}$, $Y=\{1,2,3,4,5\}$, $\tau'=\{\emptyset,Y,\{1,2,3\}\}$ ve $f=\{(a,1),(b,3),(c,3),(d,5)\}$ ise, $f^{-1}[\emptyset]=\emptyset \in \tau$, $f^{-1}[Y]=X \in \tau$, $f^{-1}[\{1,2,3\}]=\{a,b,c\} \in \tau$, yani, $U \in \tau' \Rightarrow f^{-1}[U] \in \tau$ olduğundan, f fonksiyonu τ-τ' süreklidir. Buna karşın, g:X→Y, $g=\{(a,1),(b,4),(c,3),(d,4)\}$ fonksiyonu, τ-τ' süreksizdir. Çünkü $\{1,2,3\} \in \tau'$ fakat $f^{-1}[\{1,2,3\}]=\{a,c\} \notin \tau$, yani $(\exists U \in \tau')(f^{-1}[U] \notin \tau)$ olmaktadır.

Teoremler

1) ($\mathcal{B}$, τ'-baz) $\Rightarrow$ [$f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ sür. $\Leftrightarrow$ ($B\in\mathcal{B}\Rightarrow f^{-1}[B]\in\tau$)]

2) ($\mathcal{A}$, τ'-alt baz) $\Rightarrow$ [$f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ sür. $\Leftrightarrow$ ($A\in\mathcal{A}\Rightarrow f^{-1}[A]\in\tau$)]

3) $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ sür. $\Leftrightarrow$ ($K\in\mathcal{K}^{\tau'}\Rightarrow f^{-1}[K]\in\mathcal{K}$) $\Leftrightarrow$ ($\backslash K\in\tau'\Rightarrow \backslash f^{-1}[K]\in\tau$)

4) $(X,\tau),(Y,\tau')$ topolojik uzaylar olmak üzere, bir $f:X\to Y$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart, her $A\subset X$ için, A'nın kapanışının f altındaki görüntüsünün, A'nın f altındaki görüntüsünün kapanışı tarafından kapsanmasıdır.

$$f:(X,\tau)\to(Y,\tau') \text{ sür.} \Leftrightarrow (A\subset X \Rightarrow f[\overline{A}]\subset\overline{f[A]})$$

İspat:

i) $\Rightarrow$:

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} A\subset X\Rightarrow \overline{f[A]}\in\mathcal{K}^{\tau'} \\ f \text{ sür.} \\ \text{teo.(3)} \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1}\left[\overline{f[A]}\right]\in\mathcal{K} \\ \text{teo.}(*) \\ f[A]\subset\overline{f[A]} \Rightarrow A\subset f^{-1}\left[f[A]\right]\subset f^{-1}\left[\overline{f[A]}\right] \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{A}\subset f^{-1}\left[\overline{f[A]}\right] \Rightarrow f[\overline{A}]\subset\overline{f[A]}$$

ii) $\Leftarrow$:

$$\left.\begin{array}{r} B\in\mathcal{K}^{\tau'}\Rightarrow A=f^{-1}[B]\subset X \\ \text{Hip.} \end{array}\right\} \Rightarrow f\left[\overline{f^{-1}[B]}\right]\subset\overline{f[f^{-1}[B]]}=\overline{B}=B\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \overline{f^{-1}[B]}\subset f^{-1}[B]\Rightarrow f^{-1}[B]\in\mathcal{K}^{\tau} \\ \text{teo.(3)} \end{array}\right\} \Rightarrow f, \text{ sür.}$$

5) $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ sür. $\Leftrightarrow$ [$A\subset X\Rightarrow \overline{f^{-1}[A]}\subset f^{-1}[\overline{A}]$]

6) $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ sür. $\Leftrightarrow$ [$A\subset Y\Rightarrow f^{-1}[A^{\circ}]\subset f^{-1}[A]^{\circ}$]

7) $(X,\tau),(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2)$ topolojik uzaylar olmak üzere, eğer $f:(X,\tau)\to(X_1,\tau_1)$ ve $g:(X_1,\tau_1)\to(X_2,\tau_2)$ fonksiyonları sürekli ise $gof:(X,\tau)\to(X_2,\tau_2)$ bileşke fonksiyonu da süreklidir.

$$[f:(X,\tau)\to(X_1,\tau_1) \text{ sür.}, g:(X_1,\tau_1)\to(X_2,\tau_2) \text{ sür.}]\Rightarrow gof:(X,\tau)\to(X_2,\tau_2) \text{ sür.}$$

İspat:
$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} A\in\tau_2 \\ g \text{ sür.} \end{array}\right\} \Rightarrow g^{-1}[A]\in\tau_1 \\ f \text{ sür.} \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1}[g^{-1}[A]]\in\tau \,\Big/\, gof \text{ sürekli}$$

8) $(X,\tau_1),(X,\tau_2),(Y,\tau)$ topolojik uzaylar olmak üzere, eğer $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau)$ ve $f:(X,\tau_2)\to(Y,\tau)$ sürekli ise, $f:(X,\tau_1\cap\tau_2)\to(Y,\tau)$ de süreklidir.

$$[f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau)\text{ sür.}, f:(X,\tau_2)\to(Y,\tau)\text{ sür.}]\Rightarrow f:(X,\tau_1\cap\tau_2)\to(Y,\tau)\text{ sür.}$$

İspat:
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A\in\tau\\ f\text{ sür.}\end{array}\right\}\Rightarrow f^{-1}[A]\in\tau_1\\[2ex] \left.\begin{array}{l}A\in\tau\\ f\text{ sür.}\end{array}\right\}\Rightarrow f^{-1}[A]\in\tau_2\end{array}\right\}\Rightarrow f^{-1}[A]\in\tau_1\cap\tau_2 \Big/ f:(X,\tau_1\cap\tau_2)\to(Y,\tau)\text{ sür.}$$

9) $(X,\tau),(Y,\tau')$ topolojik uzaylar, $A\subset X$, τ_A, τ'nun A'ya rölativ topolojisi, f_A'da, f'nin A'ya kısıtlanması olmak üzere, eğer $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ sürekli ise, $f_A:(A,\tau_A)\to(Y,\tau')$ da süreklidir.

$$[f:(X,\tau)\to(Y,\tau')\text{ sür.}, A\subset X]\Rightarrow f_A:(A,\tau_A)\to(Y,\tau')\text{ sür.}$$

İspat:
$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}B\in\tau'\\ f\text{ sür.}\end{array}\right\}\Rightarrow f^{-1}[B]\in\tau\\ A\subset X\end{array}\right\}\Rightarrow(A\cap f^{-1}[B])\in\tau_A \Big/ f_A\text{ sür.}$$

10) $(X,\tau),(Y,\tau')$ top. uzaylar, $\tau'_{f[X]}$, τ' ın $f[X]$'e rölativ topolojisi olmak üzere, eğer $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ sürekli ise, $f:(X,\tau)\to(f[X],\tau'_{f[X]})$ de süreklidir.

$$[f:(X,\tau)\to(Y,\tau')\text{ sür.}]\Rightarrow f:(X,\tau)\to(f[X],\tau'_{f[X]})\text{ sür.}$$

2.24.1 Bir Fonksiyon Ailesinin Türettiği Topoloji

$$(\mathcal{T}=\{(X_k,\tau_k)\mid k\in I\Rightarrow(X_k,\tau_k)\text{ top. uz.}\})(\mathcal{F}=\{f_k\mid k\in I\Rightarrow f_k:X\to(X_k,\tau_k)\})(X\neq\emptyset)$$

$(\mathcal{A}_k=\{f_k^{-1}[A]\mid A\in\tau_k\})(\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_k\mid k\in I\})\Rightarrow\mathcal{F}$'nin X'de türettiği topoloji:= $\tau:=\langle\cup\mathcal{A}\rangle$

1) $\mathcal{S}=\{\sigma\mid((X,\sigma)\text{ top. uz.})(k\in I\Rightarrow f_k:X\to(X_k,\tau_k),\ \sigma\text{-}\tau_k\text{ sür.})\}\Rightarrow\tau=\min\mathcal{S}\Leftrightarrow$ $(\tau\in S)(\sigma\in S\Rightarrow\tau\subset\sigma)$

2.24.2 Bölüm Topolojileri, Bölüm Uzayları

Teorem

$((X,\tau)$, top. uz. $)(\beta$, den. bağ.$)(\tau_\beta=\{A\mid A\subset X/_\beta,\ q^{-1}[A]\in\tau\})\Rightarrow((X/_\beta,\tau_\beta)$, top. uz.$)$

$X/_\beta$ üzerinde τ'ya göre bölüm topolojisi:= $\tau_\beta=\{A\mid A\subset X/_\beta,\ q^{-1}[A]\in\tau\}$

(X,τ)'nun β'ya göre bölüm uzayı:=$(X/_\beta,\tau_\beta)$

1) $\mathcal{T}=\{\sigma \mid q:X\to X/_{\beta},\ q(x)=[x]\ \tau\text{-}\sigma \text{ sür.}\} \Rightarrow \tau_{\beta}=\max \mathcal{T}$

2) (Bölüm teoremi): (f:X→Y, τ-τ' sür.) ⇒

$(\exists!i,\ 1\text{-}1,\ \text{sür.})(\exists!r,\ 1\text{-}1 \text{ örten, sür.})(\exists!q,\ \text{örten, sür.})(f = i\circ r\circ q)$

2.24.3 Noktasal Süreklilik

$$f:(X,\tau)\to(Y,\tau'),\ a\in X\Rightarrow(f,\ \text{a'da sür.}):\Leftrightarrow[f(a)\in B\in\tau'\Rightarrow(\exists A\in\tau)(a\in A\subset f^{-1}[B])]$$
$$:\Leftrightarrow[f(a)\in B\in\tau'\Rightarrow(\exists A\in\tau)(f[A]\subset B)]$$
$$:\Leftrightarrow(B\in\mathcal{N}_{f(a)}\Rightarrow f^{-1}[B]\in\mathcal{N}_a)$$
$$:\Leftrightarrow[B\in\mathcal{N}_{f(a)}\Rightarrow a\in(f^{-1}[B])^{o}]$$

Örnek: X={a,b,c}, Y={b,c,d}, τ={Ø,X,{a,c}}, τ'={Ø,Y,{b},{c,d}} olmak üzere, $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$, f={(a,d),(b,c),(c,d)} fonksiyonu a'da süreklidir. Çünkü, f(a)=d'yi içeren τ'-açıklar, {c,d},Y ve f^{-1}[{c,d}] = f^{-1}[Y]=X olup, açıkça tüm uzay, a'yı içeren, {a,c} ve X açıklarını (yani en az bir açığı) kapsamaktadır. Benzer şekilde, f fonksiyonu b ve d noktalarında da süreklidir.

g={(a,d),(b,b),(c,d)} fonksiyonu, a ve c'de sürekli fakat b'de sürekli değildir.

h={(a,b),(b,b),(c,d)} fonksiyonunun a noktasında sürekli olup olmadığını inceleyelim h(a)=b olup, b'yi içeren τ'-açık kümeler {b} ve Y'dir. Fakat h^{-1}[{b}]={a,b}'nin kapsadığı ve a'yı içeren hiçbir τ-açık küme olmadığından, h fonksiyonu, a'da sürekli değildir.
Benzer şekilde fonksiyon b ve c noktalarında da sürekli değildir.

1) (f:X→Y sür.) ⇔ (x∈X⇒f, x'de sür.)

2.24.4 Dizisel Süreklilik

Tanım: $(X,\tau),(Y,\tau')$ topolojik uzaylar, $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ bir fonksiyon olmak üzere, eğer (X,τ) uzayında a'ya yakınsayan her $\langle a_n\rangle$ dizisi için, $\langle f(a_n)\rangle$ dizisi de, (Y,τ') uzayında f(a)'ya yakınsıyorsa, f fonksiyonuna a noktasında dizisel sürekli (diz. sür.) denir.

$$(f,\ \text{a'da diz. sür.}) \Leftrightarrow [(a_n\to a) \Rightarrow (f(a_n)\to f(a))]$$

Teorem

1) f, a'da sür. ⇒ f, a'da diz. sür.

2.24.5 Açık Fonksiyonlar (a-fonk.)

$$(f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\tau'),\text{ a-fonk.}) \Leftrightarrow (A\in\tau \Rightarrow f[A]\in\tau')$$

1) $(f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\tau'),\text{ a-fonk.}) \Leftrightarrow (B\in\mathcal{B}\Rightarrow f[B]\in\tau')$

2) $(f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\tau'),\text{ a-fonk.}) \Leftrightarrow (A\subset X \Rightarrow f[A^{o}]\subset f[A]^{o})$

3) f, bij. $\Rightarrow$ (f, a-fonk. $\Leftrightarrow f^{-1}$ sür.)

4) $(f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\tau_1)\text{ açık})(g:(Y,\tau_1)\rightarrow(Z,\tau_2)\text{ açık}) \Rightarrow (g\circ f:(X,\tau)\rightarrow(Z,\tau_2)\text{ açık})$

İspat:
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}A\in\tau\\ f,\text{ açık}\end{array}\right\}\Rightarrow f[A]\in\tau_1\\ \qquad\qquad\qquad g,\text{ açık}\end{array}\right\}\Rightarrow g[f[A]]=(g\circ f)[A]\in\tau_2 \Big/ g\circ f,\text{ açık}$$

5) $(f=i\circ r\circ q:(X,\tau)\rightarrow(Y,\tau')\text{ sür., açık}) \Rightarrow (i\text{ açık})(r\text{ açık})(q\text{ açık})$

İspat:
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}A\in\tau\\ f=i\circ r\circ q,\ \tau\text{-}\tau'\text{ açık}\end{array}\right\}\Rightarrow f[A]\in\tau'\\ \qquad i:f[A]\rightarrow Y,\ \tau'_{f[X]}\text{-}\tau'\text{ sür.}\end{array}\right\}\Rightarrow i^{-1}[f[A]]\in\tau'_{f[X]}\\ \qquad\qquad r:X_{/\beta}\rightarrow f[X],\ \tau_\beta\text{-}\tau'_{f[X]}\text{ sür.}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$r^{-1}[i^{-1}[f[A]]]=q[A]\in\tau_\beta \Big/ q,\ \tau\text{-}\tau_\beta\text{ açık}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}A\in\tau_\beta\\ q:X\rightarrow X/_\beta,\ \tau\text{-}\tau_\beta\text{ sür.}\end{array}\right\}\Rightarrow q^{-1}[A]\in\tau\\ \qquad f:X\rightarrow Y,\ \tau\text{-}\tau'\text{ açık}\end{array}\right\}\Rightarrow f[q^{-1}[A]]\in\tau'\\ \qquad\qquad i:f[A]\rightarrow Y,\ \tau'_{f[X]}\text{-}\tau'\text{ sür.}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow i^{-1}[f[q^{-1}[A]]]=r[A]\in\tau'_{f[X]} \Big/ r,\ \tau_\beta\text{-}\tau'_{f[X]}\text{ açık.}$$

$$\left.\begin{array}{l}A\in\tau'_{f[X]}\Rightarrow(\exists U\in\tau')(A=f[X]\cap U)\\ \left.\begin{array}{r}f:X\rightarrow Y,\ \tau\text{-}\tau'\text{ açık}\\ X\in\tau\end{array}\right\}\Rightarrow f[X]\in\tau'\end{array}\right\}\Rightarrow i[A]=A\in\tau' \Big/ i,\ \tau'_{f[X]}\text{-}\tau'\text{ açık}$$

2.24.6 Kapalı Fonksiyonlar (k-fonk.)

$$(f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\tau'),\text{ k-fonk.}) \Leftrightarrow (A\in\mathcal{K}\Rightarrow f[A]\in\mathcal{K}') \Leftrightarrow (\setminus A\in\tau \Rightarrow \setminus f[A]\in\tau')$$

1) $(f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\tau'),\text{ k-fonk.}) \Leftrightarrow (A\subset X \Rightarrow \overline{f[A]}\subset f[\overline{A}\,])$

İspat:

i)⇒:
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r} f,\text{ k-fonk.}\\ A\subset X\Rightarrow \overline{A}\in\mathcal{K}\end{array}\right\}\Rightarrow f[\overline{A}]\in\mathcal{K}\\ \qquad A\subset\overline{A}\Rightarrow f[A]\subset f[\overline{A}]\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{f[A]}\subset f[\overline{A}]$$

ii)⇐:
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r} A\in\mathcal{K}\Rightarrow A=\overline{A}\Rightarrow f[A]=f[\overline{A}]\\ A\subset X\Rightarrow \overline{f[A]}\subset f[\overline{A}]\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{f[A]}\subset f[A]\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f[A]\subset\overline{f[A]}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{f[A]}=f[A]\Rightarrow f[A]\in\mathcal{K}' \Big/ f,\text{ k-fonk.}$$

2.24.7 Homeomorfizmler ve Homeomorfik Uzaylar (Topolojik Denklik)

$f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$, home. $\Leftrightarrow$ (f, bij.)(f, sür.)(f, a-fonk.)

$(X,\tau),(Y,\tau')$, home. top. uz. $\Leftrightarrow$ ($\exists f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$, home.)$:\Rightarrow (X,\tau)\cong(Y,\tau')$

1) ($f:X\to Y$, 1-1 örten) $\Rightarrow$ [(f, home.) $\Leftrightarrow$ (f, sür.)(f^{-1}, sür.)]

2) $\mathcal{T}=\{(X_k,\tau_k)\mid k\in I\Rightarrow(X_k,\tau_k)$ top. uz.$\}\Rightarrow \beta=\{((X,\tau),(Y,\tau'))\mid (X,\tau),(Y,\tau')$ home.$\}$, $\mathcal{T}$'da den. bağ.

3) $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ home. $A\subset X\Rightarrow f_A:(A,\tau_A)\to(f[A],\tau'_{f[A]})$ home.

4) $(X,d),(Y,d')$ izo. met. uz. $\Rightarrow (X,\tau_d)\cong(Y,\tau_{d'})$

5) ($f=i\circ r\circ q:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ sür., açık) $\Rightarrow$ r, home.

2.24.8 Topolojik Değişmezler

$f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ home.$\Rightarrow$

$A\in\mathcal{N}(x)\Rightarrow f[A]\in\mathcal{N}(f(x))$,	$A\in\tau\Rightarrow f[A]\in\tau'$,	$A\in\mathcal{K}\Rightarrow f[A]\in\mathcal{K}'$,
$f[A^o]=(f[A])^o$,	$f[\overline{A}]=\overline{f[A]}$,	$f[D(A)]=D(f[A])$,
$f[A^s]=(f[A])^s$,	$f[A^d]=(f[A])^d$,	$\lvert A\rvert=\lvert f[A]\rvert$ (1,2,4,6)

((X,τ), homojen)($f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$, home.) $\Rightarrow$ ((Y,τ'), homojen)

2.24.9 Manifold

((X,τ) n-mani.) $\Leftrightarrow$ [$(x\in X)\Rightarrow(\exists A\in\tau)(x\in A)(\exists f:A\to R^n$ home.$)$](7)

2.24.10 Çarpım Uzayları

1) $((X,\tau),(Y,\tau'))$ top. uz)($\mathcal{B}=\{AxA' \mid A\in\tau, A'\in\tau'\}$)$\Rightarrow$((XxY,$Ç$) top. uz.)($\mathcal{B}$, $Ç$ için baz)

(X,τ), (Y,τ')'dan üretilen çarpım top.:= $\mathcal{B}=\{AxA' \mid A\in\tau, A'\in\tau'\}$'yi baz alan $Ç$ top.

2) $\mathcal{T}=\{\sigma \mid İ_1:XxY\to X, İ_1(x,y)=x\ \sigma\text{-}\tau$ sür., $İ_2:XxY\to Y, İ_2(x,y)=y\ \sigma\text{-}\tau'$ sür.$\}\Rightarrow$

$Ç=\tau x\tau'=\min\mathcal{T}=\cap\,\mathcal{T}$

3) $\mathcal{A}=\{AxY \mid A\in\tau\}\cup\{XxA' \mid A'\in\tau'\}\Rightarrow[\psi=\langle\mathcal{A}\rangle\Leftrightarrow\psi=\tau x\tau']\Leftrightarrow\tau x\tau'=\langle\mathcal{A}\rangle$

2.24.11 Bir Değişkene Göre Sürekli Olmak, Birlikte Süreklilik

$(X,\tau),(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2)$ topolojik uzaylar, $f:X_1xX_2\to X$, $z=f(x,y)$:$\Rightarrow$

f, x'e göre sürekli:=($a\in X_2\Rightarrow f_a:X_1\to X$, $f_a(x)=f(x,a)$ τ_1-τ sürekli)

f, y'ye göre sürekli:=($a\in X_1\Rightarrow {}_af:X_2\to X$, ${}_af(x)=f(a,x)$ τ_2-τ sürekli)

f, bir. sür.:=f, $\tau_1x\tau_2$-τ sürekli.

Örnek: $X_1=\{a,b,c\}$, $\tau_1=\{\emptyset,X_1,\{a\}\}$, $X_2=\{d,e\}$, $\tau_2=\{\emptyset,X_2,\{d\}\}$, $X=\{1,2,3\}$,

$\tau=\{\emptyset,X,\{1,2\}\}$, $X_1xX_2=\{(a,d),(a,e),(b,d),(b,e),(c,d),(c,e)\}$, $f:X_1xX_2\to X$,

$f=\{((a,d),1),((a,e),1),((b,d),2),((b,e),2),((c,d),2),((c,e),2)\}$ olsun.

$f_d=f_e=\{(a,1),(b,2),(c,2)\}$ olup her iki fonksiyon da τ_1-τ sürekli olduğundan, f fonksiyonu birinci değişkene göre süreklidir.

${}_af=\{(d,1),(e,1)\}$, ${}_bf={}_cf=\{(d,2),(e,2)\}$ olup her üç fonksiyon da τ_2-τ sürekli olduğundan, f fonksiyonu, ikinci değişkene göre de süreklidir.

$\tau_1x\tau_2=\{\emptyset,X_1xX_2,X_1x\{d\},\{a\}xX_2,\{a\}x\{d\},(X_1x\{d\})\cup(\{a\}xX_2)\}$ ve $f^{-1}[\emptyset]=\emptyset\in\tau_1x\tau_2$, $f^{-1}[X]=f^{-1}[\{1,2\}]=X_1xX_2\in\tau_1x\tau_2$ olduğundan, f fonksiyonu $\tau_1x\tau_2$-τ sürekli olup, birinci ve ikinci değişkenlere göre birlikte süreklidir.

Teoremler

1) $(X,\tau),(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2)$ topolojik uzaylar, $f:X_1xX_2\to X$, $z=f(x,y)$ iki değişkenli bir fonksiyon olmak üzere, eğer f, birinci ve ikinci değişkenlere göre birlikte sürekli ise, hem birinci değişkene göre sürekli hem de ikinci değişkene göre süreklidir.

$((X,\tau),(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2)$ top. uz.)($f:X_1xX_2\to X$, $z=f(x,y)$ bir. sür.) $\Rightarrow$

(f, x'e göre sür.)(f, y'ye göre sür.)

İspat:

$$\left.\begin{array}{r} f,\ \tau_1 x \tau_2\text{-}\tau \text{ sürekli} \Rightarrow [A\in\tau \Rightarrow f^{-1}[A]\in\tau_1 x\tau_2] \\ \mathcal{B}=\{\, UxV \mid U\in\tau_1,\ V\in\tau_2\} \Rightarrow \tau_1 x\tau_2 = \langle \mathcal{B} \rangle = \{\cup\mathcal{A} \mid \mathcal{A}\subset\mathcal{B}\} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow[A\in\tau\Rightarrow(\exists\mathcal{A}\subset\mathcal{B})(f^{-1}[A]=\cup\mathcal{A})] \\ \mathcal{A}\subset\mathcal{B}\Rightarrow(\exists\mathcal{A}_1\subset\tau_1)(\exists\mathcal{A}_2\subset\tau_2)(\mathcal{A}=\{\, UxV \mid U\in\mathcal{A}_1,\ V\in\mathcal{A}_2\}) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow[A\in\tau\Rightarrow(\exists\mathcal{A}_1\subset\tau_1)(\exists\mathcal{A}_2\subset\tau_2)[f^{-1}[A]=\cup\mathcal{A}=(\cup\mathcal{A}_1)x(\cup\mathcal{A}_2)=$$

$$\left.\begin{array}{r} \{(x,y)\mid x\in\cup\mathcal{A}_1,\ y\in\cup\mathcal{A}_2\}=\{(x,y)\mid(\exists U\in\mathcal{A}_1\subset\tau_1)(x\in U)(\exists V\in\mathcal{A}_2\subset\tau_2)(y\in V)\}] \\ y\in X_2\Rightarrow f_y^{-1}[A]=\{x\mid f_y(x)=f(x,y)\in A\} \\ x\in X_1\Rightarrow {}_xf^{-1}[A]=\{y\mid {}_xf(y)=f(x,y)\in A\} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(y\in X_2\Rightarrow f_y^{-1}[A]\in\tau_1)(x\in X_1\Rightarrow {}_xf^{-1}[A]\in\tau_2)$$

$(f$, x'e göre sür.$)(f$, y'ye göre sür.$)$

2) $(\exists(X,\tau),(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2)$ top. uz.$)(\exists f{:}X_1xX_2\to X,\ z=f(x,y))$

$(f$, x'e göre sür.$)(f$, y'ye göre sür.$)(f$, bir. sür. değil$)$

İspat: $X_1=\{a,b\}$, $\tau_1=\{\emptyset,X_1,\{a\}\}$, $X_2=\{c,d\}$, $\tau_2=\{\emptyset,X_2,\{d\}\}$, $X=\{1,2,3\}$, $\tau=\{\emptyset,X,\{1\}\}$,

$X_1xX_2=\{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)\}$, $f{:}X_1xX_2\to X$,

$f=\{((a,c),1),(a,d),1),((b,c),2),((b,d),2)\}$ olsun.

$f_c=\{(a,1),(b,2)\}=f_d$ olup her iki fonksiyon da τ_1-τ sürekli olduğundan, f fonksiyonu birinci değişkene göre süreklidir.

${}_af=\{(c,1),(d,1)\}$, ${}_bf=\{(c,2),(d,2)\}$ olup her iki fonksiyon da τ_2-τ sürekli olduğundan, f fonksiyonu, ikinci değişkene göre de süreklidir.

Fakat, $\{1\}\in\tau$ olduğu halde, $f^{-1}[\{1\}]=\{(a,c),(a,d)\}\notin\tau_1x\tau_2=\{\emptyset,X_1xX_2,X_1x\{d\},\{a\}xX_2,\{a\}x\{d\},(X_1x\{d\})\cup(\{a\}xX_2)\}$ olduğundan f fonksiyonu $\tau_1x\tau_2$-τ sürekli (yani birlikte sürekli) değildir.

3) $(f{:}X_1xX_2\to X$ bir. sür.$)\Leftrightarrow[(x_n\to x)(y_n\to y)\Rightarrow(f(x_n,y_n)\to f(x,y))]$

2.25 Tychonoff Sonsuz Çarpım Uzayları

Tanım: $(\,|I|\geq\aleph_0)(\mathcal{K}=\{X_k\mid k\in I\Rightarrow X_k\neq\emptyset\})(\mathcal{T}=\{(X_k,\tau_k)\mid k\in I\Rightarrow(X_k,\tau_k)$ top. uz.$\})$

$(\,X=\Pi\mathcal{K}=\Pi X_k=\{(x_k\mid k\in I)\mid k\in I\Rightarrow x_k\in X_k\}){:}\Rightarrow$

Tychonoff çarpım topolojisi:=τ:=min$\{\tau_i\mid i\in I\Rightarrow \dot{I}_i{:}\Pi\mathcal{K}\to X_i,\ \dot{I}_i((x_k))=x_i\ \tau\text{-}\tau_i\}$

Tychonoff çarpım topolojik uzayı:=(X,τ)

2.25.1 Çarpım Topolojisi İçin Saptanmış Alt Baz

1) $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_k \mid k\in I\Rightarrow \mathcal{A}_k=\{\dot{I}_k^{-1}[A] \mid A\in\tau_k\}\} \Rightarrow \cup\mathcal{A}$, τ çar. top. için alt baz.

τ çar. top. için saptanmış alt baz:$=\cup\mathcal{A}$

2.25.2 Çarpım Topolojisi İçin Saptanmış Baz

$\cup\mathcal{A}$, saptanmış alt baz:$\Rightarrow$

τ çar. top. için saptanmış baz:$=\mathcal{B}=\{\cap\mathcal{A}' \mid \mathcal{A}'\subset\cup\mathcal{A}, |\mathcal{A}'|<\aleph_0\}$

Teoremler

1) $((X,\tau)$, $\mathcal{T}=\{(X_k,\tau_k) \mid k\in I\Rightarrow(X_k,\tau_k)$ top. uz.$\}$ için çar. top. uz.$)((Y,\sigma)$, top. uz.$)$

$(i\in I\Rightarrow \dot{I}_i:\Pi\mathcal{K}\to X_i$, $\dot{I}_i((x_k))=x_i$, i, iz. fonk.$)\Rightarrow$

$[(f:Y\to X$, σ-τ sür.$)\Leftrightarrow(i\in I\Rightarrow \dot{I}_i\circ f:Y\to X_i$, σ-τ_i sür.$)]$

2) $i\in I\Rightarrow(\dot{I}_i:\Pi\mathcal{K}\to X_i$, $\dot{I}_i((x_k))=x_i$ sür., açık$)$

3) $(a_n=(a_{in} \mid i\in I)\to a=(a_i \mid i\in I))\Rightarrow[i\in I\Rightarrow(\dot{I}_i(a_n)=\dot{I}_i((a_{in} \mid i\in I))=a_{in}\to\dot{I}_i(a)=\dot{I}_i((a_i \mid i\in I))=a_i)]$

4) $(\mathcal{K}=\{X_k \mid k\in I\})(\mathcal{T}=\{(X_k,\tau_k) \mid k\in I\Rightarrow(X_k,\tau_k)$ top.uz.$\})(X=\Pi\mathcal{K})$

$\Rightarrow(\exists(X,\sigma)$, top. uz.$)(\mathcal{B}=\{\Pi A_k \mid k\in I, A_k\in\tau_k\}$, σ için baz.$)$

5) 4. de $\mathcal{B}$ ailesini baz aldığı bildirilen σ topolojisi, (sonlu çarpım topolojilerinde olduğu gibi) τ çarpım topolojisine eşit olmayabilir.

Tychonoff Çarpım Teoremi

6) $(\mathcal{K}=\{X_k \mid k\in I\})(\mathcal{T}=\{(X_k,\tau_k) \mid k\in I\Rightarrow(X_k,\tau_k)$ komp. top. uz.$\})(X=\Pi\mathcal{K})$

$(\tau:=\min\{\tau_i \mid i\in I\Rightarrow\dot{I}_i:\Pi\mathcal{K}\to X_i$, $\dot{I}_i((x_k))=x_i$ τ-τ_i sür.$\})\Rightarrow(X,\tau)$ komp.

7) $(\mathcal{K}=\{X_k \mid k\in I\})(\mathcal{T}=\{(X_k,\tau_k) \mid k\in I\Rightarrow(X_k,\tau_k)$ top. uz.$\})(X=\Pi\mathcal{K})$

$(\tau:=\min\{\tau_i \mid i\in I\Rightarrow\dot{I}_i:\Pi\mathcal{K}\to X_i$, $\dot{I}_i((x_k))=x_i$ τ-τ_i sür.$\})((X,\tau)$ komp.$)\Rightarrow$

$[k\in I\Rightarrow(X_k,\tau_k)$, komp.$)$ (2,4)

2.26 Topolojik Uzaylarda Kompaktlık

2.26.1 Örtü, Alt Örtü,Açık Örtü

$\mathcal{A}$, A'nın örtüsü $\Leftrightarrow A\subset\cup\mathcal{A}\Leftrightarrow[x\in A\Rightarrow(\exists B)(x\in B\in\mathcal{A})]$

$\mathcal{A}$, X'in örtüsü $\Leftrightarrow X=\cup\mathcal{A}\Leftrightarrow[x\in X\Rightarrow(\exists B)(x\in B\in\mathcal{A})]$

$\mathcal{A}$, A'nın açık örtüsü $\Leftrightarrow\mathcal{A}\subset\tau$, $A\subset\cup\mathcal{A}$

$\mathcal{A}$, X'in açık örtüsü $\Leftrightarrow \mathcal{A} \subset \tau$, $X = \cup \mathcal{A}$

$\mathcal{B}$, alt örtü $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{A}$, A'nın örtüsü, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, $A \subset \cup \mathcal{B}$)

2.26.2 Kompakt Kümeler

A, (X,τ)'da komp. $\Leftrightarrow [(\mathcal{A} \subset \tau, A \subset \cup \mathcal{A}) \Rightarrow (\exists \mathcal{B})(\mathcal{B} \subset \mathcal{A}, |B| < \aleph_0, A \subset \cup \mathcal{B})]$

1) $(A \subset X, \tau_1 \subset \tau_2$, A, (X,τ_2)'de komp.$) \Rightarrow$ A, (X,τ_1)'de komp.

2) $((X,\tau),(Y,\tau_1)$ top. uz.$)(f: X \to Y$ τ-τ_1 sür.$)(A \subset X)$(A komp.) $\Rightarrow f[A]$ komp.

3) $\mathcal{A} = \{A_k \mid k \in I \Rightarrow (A_k \subset R, A_k$ komp.$)\} \Rightarrow \cup \mathcal{A}$ komp.

4) $((X,\tau)$ top. uz.$)(\mathcal{A} := \{A_k \mid k \in I \neq \emptyset \Rightarrow (A_k \subset \mathcal{K}^{\tau}, A_k$ komp.$)\} \subset P(X)) \Rightarrow \cap \mathcal{A}$ komp.

2.26.3 Kompakt Topolojik Uzay

(X,τ) komp. $\Leftrightarrow [(\mathcal{A} \subset \tau, X = \cup \mathcal{A}) \Rightarrow (\exists \mathcal{B})(\mathcal{B} \subset \mathcal{A}, |\mathcal{B}| < \aleph_0, X = \cup \mathcal{B})]$

1) A, (X,τ)'da komp. $\Leftrightarrow (A,\tau_A)$ komp.

2) $((X,\tau)$ top. uz.$)(A \subset Y \subset X) \Rightarrow [$(A, (X,τ_Y)'de komp.) $\Leftrightarrow$ (A, (X,τ)'da komp.)$]$

3) $((X,\tau)$ komp.$)(A \subset X)$(A kapalı) $\Rightarrow$ A, (X,τ)'da komp.

4) $((X,\tau)$ komp.$)(A \in \mathcal{K}) \Rightarrow (A,\tau_A)$ komp.

5) $((X,\tau), T_2)(A \subset X)$(A, komp.) $\Rightarrow A \in \mathcal{K}$

6) $((X,\tau), T_2)(A \subset X)(B \subset X) \Rightarrow (\exists U)(\exists V)(A \subset U, B \subset V, U \cap V = \emptyset, U \in \tau, V \in \tau)$

7) $((X,\tau), T_2)((X,\tau)$, komp.$) \Rightarrow ((X,\tau)$, normal)

8) $((X,\tau)$, komp.$)((Y,\tau')$, komp. $T_2)(f:(X,\tau) \to (Y,\tau')$, 1-1, sür.$) \Rightarrow (X,\tau) \cong (f[X],\tau'_{f[X]})$

2.26.4 Bir Küme Ailesinin Sonlu Kesişim Özelliği

$\mathcal{A}$, s.k.ö. $\Leftrightarrow [(\mathcal{B} \subset \mathcal{A}, |\mathcal{B}| < \aleph_0) \Rightarrow \cap \mathcal{B} \neq \emptyset]$

1) (X,τ) komp. $\Leftrightarrow [(\mathcal{A} = A_k \mid k \in I \Rightarrow \backslash A_k \in \tau\}, \mathcal{A}$, s.k.ö.$) \Rightarrow \cap \mathcal{A} \neq \emptyset]$

$\Leftrightarrow [(\mathcal{A} = \{A_k \mid k \in I \Rightarrow \backslash A_k \in \tau\}, \cap \mathcal{A} = \emptyset) \Rightarrow (\exists \mathcal{B})(\mathcal{B} = \{A_{k1},\ldots,A_{kn}\} \subset \mathcal{A}, \cap \mathcal{B} = \emptyset)]$ [1,2]

2.26.5 Baz'sal Ve Altbaz'sal Açık Örtüler

$((X,\tau)$, top. uz.$)(\mathcal{B}$, τ için baz$)(\mathcal{B}'$, τ için alt baz$) \Rightarrow$

$\mathcal{A}$, bazsal açık örtü:=($\mathcal{A}$, örtü)($\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$)

$\mathcal{A}$, alt bazsal açık örtü:=($\mathcal{A}$, örtü)($\mathcal{A} \subset \mathcal{B}'$)

1) (X,τ) komp. $\Leftrightarrow [(X=\cup\mathcal{A}, \mathcal{A}\subset\mathcal{B})\Rightarrow(\exists\,\mathcal{A}_1)(\mathcal{A}_1=\{A_1,\ldots,A_n\}\subset\mathcal{A}, X=\cup\mathcal{A}_1)]$

2.26.7 Bazlar, Kapalı Alt Bazlar

$\mathcal{B}$ kapalı baz $\Leftrightarrow \mathcal{A}=\{U \mid \backslash U\in\mathcal{B}\}$ açık baz

$\mathcal{B}$ kapalı alt baz $\Leftrightarrow \mathcal{A}=\{U \mid \backslash U\in\mathcal{B}\}$ açık alt baz

1) (X,τ) komp. $\Leftrightarrow [(\mathcal{B}$ kapalı alt baz$)(\mathcal{A}$, s.k.ö.$))(\mathcal{A}\subset\mathcal{B}) \Rightarrow \cap\mathcal{A}\neq\emptyset]$

2) (Heine–Borel)$(A\subset R) \Rightarrow [(A\in\mathcal{K})(d(A)<\infty) \Rightarrow A$, komp.$]$

3) $(A\subset R) \Rightarrow [A$, komp. $\Rightarrow (A\in\mathcal{K})(d(A)<\infty)]$

4) $((X,\tau_d)$, met. top. uz.$)(A\subset X) \Rightarrow [A$, komp. $\Rightarrow (A\in\mathcal{K})(d(A)<\infty)]$

5) $((X,\tau)$, komp.$)((Y,\tau_d)$, met. top. uz.$)(f{:}X\to Y$ sür.$) \Rightarrow f$, sın.

6) $((X,\tau)$, komp.$)(f{:}X\to R^1$ sür.$) \Rightarrow (\exists a,b\in X)(\,f(a)=\max f[X]\,)(\,f(b)=\min f[X]\,)$

7) $((X,\tau)$, komp.$)(n\in N \Rightarrow f_n{:}X\to R^1$, sür., mon.$)(f{:}X\to R^1$ sür.$)(f_n\to f$, nok. yak.$) \Rightarrow$ $(f_n\to f$, düz. yak.$)$

2.26.8 Dizisel Kompaktlık (diz. komp.)

$((X,\tau)$, top. uz.$)(A\subset X) \Rightarrow$

A, diz. komp.$:=[\langle a_n\rangle$, A'da dizi$\Rightarrow(\exists\langle b_n\rangle<\langle a_n\rangle)(\exists b\in A)(b_n\to b)]$

1) $((X,\tau),(Y,\tau')$ top. uz.$)(f{:}X\to Y$ sür.$)(A\subset X)(A$ diz. komp.$) \Rightarrow f[A]$, diz. komp.

İspat: $\langle y_n\rangle$, $f[A]$'da dizi $\Rightarrow \{y_n \mid n\in N\}\subset f[A]$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow(\exists\langle x_n\rangle)(\{x_n \mid n\in N\}\subset A,\ f(x_n)=y_n)\\ A,\ \text{diz. komp.}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}(\exists\langle x_{in}\rangle)(\exists x)(\langle x_{in}\rangle<\langle x_n\rangle,\ x_{in}\to x,\ x\in A)\\ f,\ \text{sür.}\Rightarrow f,\ \text{diz. sür.}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$f(x_{in})\to f(x)\in f[A]$, $\langle f(x_{in})\rangle<\langle f(x_n)\rangle=\langle y_n\rangle \Rightarrow f[A]$, diz. komp.

2) $(\exists(X,\tau)$, top. uz.$)(\exists A\subset X)(A$, komp.$)(A$, diz. komp. değil$)(\exists B\subset X)(B$, diz. komp.$)$ $(B$, komp. değil$)$

3) $((X,\tau)$, top. uz.$)(A\subset X)(A\in\mathcal{K}^{\tau}) \Rightarrow A$, diz. komp.[(2)]

2.26.9 Sayılabilir Kompaktlık (say. komp.)

$((X,\tau)$ top. uz.$)(A\subset X)\Rightarrow A$, say. komp.$\Leftrightarrow [(B\subset A, |B|\geq \aleph_0)\Rightarrow(\exists x)x\in A\cap D(B)]$

1) $((X,\tau)$ say. komp.$)(A\subset X)(A\in\mathcal{K})\Rightarrow A$, say. komp.

2) $(\exists f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\tau')$ sür.$)(\exists A)(A$, say. komp.$)(f[A]$, say. komp. değil$)$

3) $((X,\tau)$ top. uz.$)(A\subset X)(A$ komp.$)\Rightarrow A$, say. komp.

İspat: $B\subset A, D(B)\cap A=\emptyset \Rightarrow (\forall x\in A)(\exists \mathcal{U}_x\in\tau)[(\mathcal{U}_x\setminus\{x\})\cap B=\emptyset, x\in\mathcal{U}_x]$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}\Rightarrow\mathcal{A}=\{U_x \mid x\in A\}, B\subset A\subset\cup\mathcal{A}\\ A \text{ komp.}\end{array}\right\}\Rightarrow(\exists\mathcal{A}_1)(\mathcal{A}_1=\{\mathcal{U}_1,\ldots,\mathcal{U}_k\}, B\subset A\subset\cup\mathcal{A}_1)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad i\in\{1,\ldots k\}\Rightarrow|B\cap\mathcal{U}_i|\leq 1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$|B|\leq k\Rightarrow B$ sonlu /

/ $B\subset A$, B sonsuz $\Rightarrow D(B)\cap A\neq\emptyset$ /

/ A, say. komp.

4) $((X,\tau)$ top. uz.$)(A\subset X)(A$, diz. komp.$)\Rightarrow A$, say. komp.

5) $(A$, diz. komp.$)(A\subset\cup\mathcal{A})(\mathcal{A}\subset\tau)(|\mathcal{A}|\geq\aleph_0)\Rightarrow(\exists\mathcal{A}^*\subset\mathcal{A})(|\mathcal{A}^*|<\aleph_0)(A\subset\cup\mathcal{A}^*)$

6) $((X,\tau)$ say. komp.$)(\tau_1\leq\tau)\Rightarrow(X,\tau_1)$, say. komp.

7) $(\mathcal{A}\subset\tau)(X=\cup\mathcal{A})(|\mathcal{A}|\leq\aleph_0)\Rightarrow(\exists\mathcal{A}^*\subset\mathcal{A})(|\mathcal{A}^*|<\aleph_0)(X=\cup\mathcal{A}^*)\Rightarrow(X,\tau)$ say. komp.

8) (X,τ) $T_1\Rightarrow$

$[(X,\tau)$ say. komp. $\Leftrightarrow[(\mathcal{A}\subset\tau)(X=\cup\mathcal{A})(|\mathcal{A}|\leq\aleph_0)\Rightarrow(\exists\mathcal{A}^*)\subset\tau)(|\mathcal{A}^*|<\aleph_0)(X=\cup\mathcal{A}^*)]$

9) (X,τ) iki. say. $T_1\Rightarrow[(X,\tau)$ komp. $\Leftrightarrow(X,\tau)$ say. komp.$]$

10) (Tychonoff)$[i\in I\Rightarrow(X_i,\tau_i)$ komp.$]\Rightarrow(\Pi X_i,\Pi\tau_i)$ komp.

11) (Genelleştirilmiş Heine-Borel) $(A\subset R^n)\Rightarrow[(A\in\mathcal{K})(d(A)<\infty)\Rightarrow A$, komp.$]$

2.26.10 Yersel Kompaktlık (yer. komp.)

(X,τ) yer. komp. $\equiv[x\in X\Rightarrow(\exists U\in\mathcal{N}_x)(U$ komp.$)]$

1) (X,τ) komp. $\Rightarrow(X,\tau)$ yer. komp.

2) $(\exists(X,\tau))[(X,\tau)$ yer. komp, (X,τ) komp. değil$]$

3) (X,τ) yer. komp. $\Leftrightarrow[x\in X\Rightarrow(\exists\mathcal{B}_x)(\mathcal{B}_x$, yer. baz, $A\in\mathcal{B}_x\Rightarrow\overline{A}$ komp.$)]$

4) $[(X,\tau)$ yer. komp., $\setminus A\in\tau]\Rightarrow(A,\tau_A)$ yer. komp.[1,2]

2.27 Yerleştirme

(X,τ), (Y,τ')'ya yerleştirilmiş:= $(\exists A\subset Y)((X,\tau)\simeq(A,\tau'_A))$

2.28 Kompaktifikasyon

(Y,τ'), (X,τ)'nun kompaktifikasyonu:= (X,τ), (Y,τ')'ya yerleştirilmiş

2.28.1 Tek-Nokta Kompaktifikasyonu

1) $[(X,\tau)$ top. uz., $x\in X \Rightarrow s\neq x$, $X_s=X\cup\{s\}$, $\tau_s=\tau\cup\{X_s\backslash A \mid A,\ (X,\tau)$'da komp.$\}]$

$\Rightarrow (X_s,\tau_s)$ top. uz.

2) (X_s,τ_s), (X,τ)'nun kompaktifikasyonudur.

İspat: $\mathcal{A}\subset\tau_s$, $X_s=\cup\mathcal{A}\Rightarrow X_s\in\mathcal{A}\Rightarrow \{X_s\}$, $\mathcal{A}$ için bir sonlu alt örtüdür.

$\mathcal{A}\subset\tau_s\Rightarrow (U\in\mathcal{A}\Rightarrow (U\in\tau \vee s\in U)$,

$$\left.\begin{array}{l} X_s\subset\cup\mathcal{A}\Rightarrow(\exists K)(s\in X_s\backslash K\in\mathcal{A};\ K,\ (X,\tau)\text{'da komp.}) \\ \qquad\qquad \mathcal{A}^*=\{U\cap K \mid U\in\mathcal{A}\}\Rightarrow K\subset\cup\mathcal{A}^* \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$(\exists\mathcal{A}_1=\{U_1\cap K,\dots,U_k\cap K\})(\mathcal{A}_1\subset\mathcal{A}^*,\ K\subset\cup\mathcal{A}_1=(\cup\mathcal{A}_2)\cap K,\ \mathcal{A}_2=\{U_1,\dots,U_k\}\subset\mathcal{A})$

$\Rightarrow K\subset\cup\mathcal{A}_2$

$\Rightarrow (X_s\backslash K)\cup K=X_s\subset\cup\mathcal{A}_3,\ \mathcal{A}_3=\{X_s\backslash K,U_1,\dots,U_k\}\subset\mathcal{A}$ /

(X_s,τ_s) komp.

$[(X,\tau)$ top. uz., $x\in X\Rightarrow s\neq x$, $X_s=X\cup\{s\}$, $\tau_s=\tau\cup\{X_s\backslash A \mid A,\ (X,\tau)$'da komp.$\}]:\Rightarrow$

(X,τ)'nun tek-nokta kompaktifikasyonu:=(X_s,τ_s)

1) (X,τ) yer. komp. Haus. uz. $\Rightarrow (X_s,\tau_s)$ komp. Haus. uz.

2) (X,τ) yer. komp. Haus. uz. $\Leftrightarrow s\in X_s^a$

3) $((X,\tau)$ yer. komp. Haus. uz.$)(Y\subset X)((Y,\tau_Y)$ komp.$)(Y\subset A\in\tau)(A\neq X)\Rightarrow$

$(\exists f:X\to[0,1])(f[Y]=\{0\})(f[\ \backslash A]=\{1\})$[1]

2.29 Metrik Uzaylarda Kompaktlık

Önce R^1 bir boyutlu Euclid uzayında, kompaktlığa dair reel analizin temel teoremlerini veriyoruz.

Teoremler

Borel-Lebesgue Lemması (Emile Borel (1871-1938), Henri Lebesgue (1875-1945))

1) $(A \subset R^1)(A$, kapalı$)(A$, sın.$) \Rightarrow (A$, komp.$)$

Heine-Borel Teoremi (Eduard Heine (1821-1881))

2) $A \subset R^1 \Rightarrow [(A$, kap.$)(A$, sın.$) \Leftrightarrow (A$, komp.$)]$

3) $((X,d)$, met. uz.$)(A \subset X)(A$, kom.$) \Rightarrow (A \in \mathcal{K}_d)(d(A) < \infty)$

4) $(\exists (X,d)$, met. uz.$)(\exists A \subset X)(A \in \mathcal{K}_d)(d(A) < \infty))(A$, komp. değil$)$

5) $(A \subset R^1) \Rightarrow [(A$, komp.$) \Leftrightarrow ((B \subset A)(\mid B \mid \geq \aleph_0) \Rightarrow A \cap D(B) \neq \emptyset)]$

Bolzano–Weierstrass Teoremi (Bernard Bolzano (1781-1848), Karl Weierstrass (1815-1897))

6) $(A \subset R^1)(d(A) < \infty)(\mid A \mid \geq \aleph_0) \Leftrightarrow D(A) \neq \emptyset$

Genişletilmiş Bolzano–Weierstrass Teoremi

7) $(B \subset R^n)(\backslash B \in \mu^n)(0 < d(B) < \infty) \Rightarrow [(A \subset B)(\mid A \mid \geq \aleph_0) \Rightarrow D(A) \cap B \neq \emptyset]$

Bolzano–Weierstrass (B-W) Özelliği

$[(X,d)$, B-W met. uz.$] \Leftrightarrow [(A \subset X)(\mid A \mid \geq \aleph_0) \Rightarrow D(A) \neq \emptyset]$

8) $((X,d)$, diz. komp.$) \Leftrightarrow ((X,d)$, B-W met. uz.$)$

9) (X,d), komp. $\Rightarrow (X,d)$, B-W met. uz.

2.29.1 Örtülerin Lebesgue Sayıları (L-Say.)

$$(\mathcal{A} \subset \tau_d)(X = \cup \mathcal{A}) \Rightarrow$$

l, $\mathcal{A}$ için L-say.$:\Leftrightarrow [(B \subset X)(d(B) < l) \Rightarrow (\exists A \in \mathcal{A})(B \subset A)]$

$\mathcal{A}$ için L-say. ailesi$:= \mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \{\, l \mid (l \in R_+)[(B \subset X)(d(B) < l) \Rightarrow (\exists A \in \mathcal{A})(B \subset A)]\}$

2.29.2 Örtüye Göre Büyük Küme

$((X,d)$ met. uz.$)(\mathcal{A} \subset \tau_d)(X = \cup \mathcal{A})(B \subset X) :\Rightarrow (B, \mathcal{A}$'ya göre büy. küme$) :\Leftrightarrow (A \in \mathcal{A} \Rightarrow B \not\subset A)$

A'ya göre büy. küme ailesi$:= \mathcal{B}_{\mathcal{A}} = \{\, B \mid B \subset X, (A \in \mathcal{A} \Rightarrow B \not\subset A)\}$

$a = \text{İnf}\{\, d(B) \mid B \in \mathcal{B}_{\mathcal{A}}\} \Rightarrow$

1) $\mathcal{B}_{\mathcal{A}} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{A}} = R_+$

2) $(\mathcal{B}_{\mathcal{A}} \neq \emptyset)(a = \infty) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{A}} = R_+$

3) $(\mathcal{B}_{\mathcal{A}} \neq \emptyset)(0 < a < \infty) \Rightarrow a \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$

4) $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{A}} \Rightarrow |B| \geq 2$

5) $a=0 \Rightarrow [n \in N \Rightarrow (\exists B_n \in \mathcal{B}_{\mathcal{A}})(0 < d(B_n) < 1/n)]$

2.29.3 Lebesgue Örtülüş Lemması

1) $((X,d), \text{diz. komp.})(\mathcal{A} \subset \tau_d)(X = \cup \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{A}} \neq \emptyset^{(2)}$

2.30 ε -Ağlar

$((X,d), \text{met. uz.})(A \subset X)(|A| < \aleph_0)(\varepsilon \in R^+) :\Rightarrow (A, \varepsilon\text{-ağ}) :\Leftrightarrow [x \in X \Rightarrow (\exists a \in A)(d(x,a) < \varepsilon)]$

$:\Leftrightarrow [x \in X \Rightarrow (\exists a \in A)(x \in S_\varepsilon(a))] :\Leftrightarrow [X = \cup \{S_\varepsilon(a) \mid a \in A\}]$

2.31 Tümden Sınırlılık

$$[(X,d), \text{tüm. sın. met. uz.}] \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists A \subset X)(A, \varepsilon\text{-ağ})$$

1) $((X,d) \text{ met. uz.})(A \subset X) :\Rightarrow (A, \text{tüm. sın.}) \Leftrightarrow (\overline{A}, \text{tüm. sın.})$

2) $[(X,d), \text{tüm. sın.}] \Rightarrow [(X,d), \text{sın.}]$

3) $\exists (X,d)$ sın., tüm. sın. değil

4) $(A \subset R^n) \Rightarrow [(A, \text{sın.}) \Leftrightarrow (A, \text{tüm. sın.})]$

5) $[(X,d), \text{diz. komp.}] \Rightarrow [(X,d), \text{tüm. sın.}]$

6) $[(X,d), \text{diz. komp.}] \Rightarrow [(X,d), \text{komp.}]$

7) $((X,d), \text{komp.}) \Leftrightarrow ((X,d), \text{diz. komp.}) \Leftrightarrow ((X,d), \text{B-W öz.})$

8) $((X,d), \text{komp.}) \Leftrightarrow ((X,d), \text{ayrıl.})$

9) $((X,d), \text{komp.})(f:(X,d) \to (Y,d^*), \text{sür.}) \Rightarrow (f, \text{düz. sür.})$

İspat: $\left.\begin{array}{r} f:(X,d) \to (Y,d^*), \text{sür.} \\ \cup \mathcal{A} = X \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} f^{-1}[S_{\varepsilon/2}(f(x))] \in \tau_d \Rightarrow (\mathcal{A} = \{f^{-1}[S_{\varepsilon/2}(f(x))] \mid x \in X\} \subset \tau_d)(\varepsilon > 0 \Rightarrow S_{\varepsilon/2}(f(x)) \in \tau_{d^*}) \\ \text{teo.}(7) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} (X,d), \text{kom.} \Rightarrow (\exists \delta > 0)(\delta \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}) \\ (a,b \in X)(d(a,b) < \delta) \end{array}\right\} \Rightarrow (\exists f^{-1}[S_{\varepsilon/2}(f(x))] \in \mathcal{A})(\{a,b\} \subset f^{-1}[S_{\varepsilon/2}(f(x))]) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{f(a),f(b)\}\subset S_{\varepsilon/2}(f(x)) \Rightarrow d^*(f(a),f(b))<\varepsilon$ / f, düz. sür.

10) ((X,d), kom.) $\Leftrightarrow$ ((X,d), tam)((X,d), tüm. sın.)

11) $A\in\mathcal{K}_d \Rightarrow$ [(A,d_A), komp. $\Leftrightarrow$ (A,d_A), tüm. sın.]

12) ((X,d) Ban. uz.)(dim(X) < ∞) $\Leftrightarrow$ [$(Y\subset X)((Y,d_Y)$ sın.) $\Rightarrow$ ((Y,d_Y) tüm. sın.)][1,2]

2.32 Dengeli Süreklilik (Equicontinuous)

((X,d) komp.)($\mathcal{F}=\{ f \mid f{:}X\to\mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) sür.$\}$)($A\subset\mathcal{F}$)($A\neq\emptyset$) $\Rightarrow$

[(A, deng. sür.):$\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0)(\forall f\in A)(\forall x,y\in X)(\exists\delta>0)(d(x,y)<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon)$]

2.33 Ascoli (Arzela) Teoremi

((X,τ) homojen) $\Leftrightarrow$ [$(a,b\in X) \Rightarrow (\exists f{:}X\to X$, home.)($f(a)=b$)][2]

2.34 Homojenlik

((X,τ) homojen) $\Leftrightarrow$ [$(a,b\in X) \Rightarrow (\exists f{:}X\to X$, home.)($f(a)=b$)][8]

2.35 Ayrılabilirlik

2.35.1 T_0 Uzayları

2.35.1.1 Tanım: Bir (X,τ) topolojik uzayında her farklı nokta çiftine karşılık, bunlardan birini içeren, diğerini içermeyen bir açık küme varsa, bu (X,τ) uzayına bir T_0 uzayı denir.

$$((X,\tau), T_0){:}\Leftrightarrow[(a,b\in X)(a\neq b) \Rightarrow (\exists A\in\tau)[(a\in A)(b\notin A) \vee (b\in A)(a\notin A)]]$$

$$:\Leftrightarrow[(a,b\in X)(a\neq b) \Rightarrow (\exists A\in\tau)(\ |A\cap\{a,b\}| = 1\ )]$$

$$:\Leftrightarrow[(a,b\in X)(a\neq b) \Rightarrow (\exists x\in\{a,b\})(\exists A\in\tau)(\{x\}\subset A)(\{a,b\}\setminus\{x\}\not\subset A)$$

$$:\Leftrightarrow[(a,b\in X)(a\neq b) \Rightarrow [(X\setminus\{b\}\in\mathcal{N}(a)) \vee (X\setminus\{a\}\in\mathcal{N}(b))]$$

2.35.1.2 Örnek: $X=\{a,b\}$, $\tau_1=\mathcal{I}=\{\emptyset,X\}$, $\tau_2=\{\emptyset,X,\{a\}\}$, $\tau_3=\{\emptyset,X,\{b\}\}$, $\tau_4=\mathcal{D}=P(X)$ üzere, $(X,\tau_1),(X,\tau_2),(X,\tau_3),(X,\tau_4)$ uzaylarından birincisi hariç, diğer üçü T_0 uzayıdır.

2.35.1.3 Teorem: (X,τ) bir T_0 uzay ise, τ'yu kapsayan her σ topolojisi için (X,σ)'da T_0'dır.

$$((X,\tau), T_0)(\tau\subset\sigma) \Rightarrow (X,\sigma), T_0$$

İspat: Tanımdan.

2.35.2 T_1 Uzayları (Frechet Uzayı)

2.35.2.1 Tanım: Bir (X,τ) topolojik uzayında, her farklı a,b nokta çiftine karşılık, a'yı içeren b'yi içermeyen bir A açık kümesi ve b'yi içeren a'yı içermeyen bir B açık kümesi varsa, bu (X,τ) uzayına bir T_1 uzayı denir.

$$((X,\tau), T_1):\Leftrightarrow[(a,b\in X)(a\neq b) \Rightarrow (\exists A\in\tau)(\exists B\in\tau)(a\in A)(b\notin A)(b\in B)(a\notin B)]$$

$$:\Leftrightarrow[(a,b\in X)(a\neq b) \Rightarrow (\exists A\in\tau)(a\in A)(b\notin A)]$$

$$:\Leftrightarrow[(a,b\in X)(a\neq b) \Rightarrow (\forall x\in\{a,b\})(\exists A\in\tau)(\{x\}\subset A)(\{a,b\}\setminus\{x\}\not\subset A)$$

2.35.2.2 Örnek: Örnek 2.35.1.2'deki uzaylardan yalnızca (X,τ_4) bir T_1 uzayıdır.

Teoremler

1) $((X,\tau), T_1)(\tau\subset\sigma) \Rightarrow (X,\sigma), T_1$

2) $((X,\tau), T_1) \Rightarrow ((X,\tau), T_0)$

İspat: $((X,\tau), T_1):\Rightarrow[(a,b\in X)(a\neq b) \Rightarrow (\exists A\in\tau)(a\in A)(b\notin A)]$

$\Rightarrow [(a,b\in X)(a\neq b) \Rightarrow (\exists A\in\tau)[(a\in A)(b\notin A) \vee (b\in A)(a\notin A)]:\Rightarrow((X,\tau), T_0)$

3) $\exists(X,\tau), T_0, T_1$ değil

2.35.2.3 Örnek: Örnek 2.35.1.2'deki uzaylardan, (X,τ_2) ve (X,τ_3) uzayları, T_0 oldukları halde, T_1 değildirler.

4) $((X,\tau), T_1) \Leftrightarrow [a\in X \Rightarrow \{a\}\in\mathcal{K}] \Leftrightarrow [a\in X \Rightarrow X\setminus\{a\}\in\tau]$

İspat: i)$\Rightarrow$: $((X,\tau), T_1):\Rightarrow[(a,b\in X)(a\neq b) \Rightarrow (\exists A\in\tau)(a\in A)(b\notin A)] \Rightarrow$

$[x\in X\setminus\{b\} \Rightarrow (\exists A\in\tau)(x\in A\subset X\setminus\{b\})] \Rightarrow X\setminus\{b\}\in\tau \Rightarrow \{b\}\in\mathcal{K}$

ii)$\Leftarrow$: $[a\in X \Rightarrow \{a\}\in\mathcal{K}] \Rightarrow [a\in X \Rightarrow X\setminus\{a\}\in\tau] \Rightarrow$

$[(a,b\in X)(a\neq b) \Rightarrow (A=X\setminus\{a\}\in\tau)(b\in A)(a\notin A)] \Rightarrow ((X,\tau), T_1)$

5) (X,m,τ) bir top. grup $\Rightarrow (X,\tau), T_1$

İspat: $\left.\begin{array}{r} y\in X \Rightarrow L_y:(X,\tau)\to(X,\tau),\ L_y(x)=yx \text{ home.} \\ X\setminus\{e\}\in\tau \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{r} L_y[X\setminus\{e\}]=X\setminus\{y\}\in\tau \\ \text{teo.}(4) \end{array}\right\} \Rightarrow (X,\tau), T_1$

6) $((X,m)$ grup$)((X,\tau)$ top. uz.$)(m:X\text{x}X\to X,\ m(x,y)=xmy\ \tau\text{x}\tau\text{-}\tau$ sür.$)$

$(i:X\to X,\ i(x)=x^{-1}\ \tau\text{-}\tau$ sür.$)((X,\tau), T_0) \Rightarrow (X,\tau), T_1$

İspat: $$\left.\begin{array}{l}(a\in X)(a\neq e)\\ (X,\tau)\text{ ,}T_0\end{array}\right\}\Rightarrow[(X\setminus\{e\}\in\mathcal{N}(a))\vee(X\setminus\{a\}\in\mathcal{N}(e))]$$

$$\left.\begin{array}{r}[(X\setminus\{e\}\in\mathcal{N}(a))\vee(X\setminus\{a\}\in\mathcal{N}(e))]\\ L_y:(X,\tau)\to(X,\tau),\ L_y(x)=yx\text{ home.}\Rightarrow L_{a-1}[X\setminus\{a\}]=X\setminus\{e\}\in\mathcal{N}(a^{-1})\\ i:X\to X,\ i(x)=x^{-1},\text{ home.}\Rightarrow i[X\setminus\{e\}]=X\setminus\{e\}\in\mathcal{N}(a)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$[X\setminus\{a\}\in\mathcal{N}(e)\Rightarrow i\circ L_{a-1}[X\setminus\{a\}]=X\setminus\{e\}\in\mathcal{N}(a)]$

$a\in X\setminus\{e\}\Rightarrow X\setminus\{e\}\in\mathcal{N}(a)]$

$$\left.\begin{array}{r}X\setminus\{e\}\in\tau\Rightarrow\{e\}\in\mathcal{K}\\ \text{teo.(4), teo.(5)}\end{array}\right\}\Rightarrow(X,\tau),\ T_1$$

6) $((X,\tau),\ T_1)(A\subset X)(\,|A|<\aleph_0)\Rightarrow A\in\mathcal{K}$

7) $((X,\tau),\ T_1)\Leftrightarrow\tau_k\subset\tau$ (τ_k : kofinit top.)

İspat: i)$\Rightarrow$: $$\left.\begin{array}{r}((X,\tau),\ T_1)(\text{teo.}(4))\Rightarrow(x\in X\Rightarrow\{x\}\in\mathcal{K}^\tau)\Rightarrow(\,|B|<\aleph_0\Rightarrow\setminus B\in\tau)\\ A\in\tau_k\Rightarrow|\setminus A|<\aleph_0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\setminus(\setminus A)=A\in\tau$

$\tau_k\subset\tau$

ii)$\Leftarrow$: $$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}x\in X\Rightarrow|\{x\}|=1<\aleph_0\Rightarrow X\setminus\{x\}\in\tau_k\\ \tau_k\subset\tau\Rightarrow(X,\tau),\ T_1\end{array}\right\}\Rightarrow X\setminus\{x\}\in\tau\Rightarrow\{x\}\in K^\tau\\ \text{teo.}(4)\end{array}\right\}$$

8) $\tau_k=\min\{\,\tau\mid(X,\tau),\ T_1\}$

9) $((X,\tau),\ T_1)(\emptyset\neq Y\subset X\,)\Rightarrow((Y,\tau_Y),\ T_1)$

İspat: $$\left.\begin{array}{r}x\in Y\subset X\\ (X,\tau),\ T_1\end{array}\right\}\Rightarrow X\setminus\{x\}\in\tau\Rightarrow Y\cap(X\setminus\{x\})=Y\setminus\{x\}\in\tau_Y\Rightarrow(Y,\tau_Y),\ T_1$$

10) $|X|<\aleph_0\Rightarrow[(X,\tau),\ T_1\Leftrightarrow\tau=\mathcal{D}:=P(X)]$

11) $((X,\tau),\ T_1)(A\subset X)(\,|A|<\aleph_0)\Rightarrow D(A)=\emptyset$

İspat: $((X,\tau),\ T_1)(A\subset X)(\,|A|<\aleph_0)\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r}(A\in\mathcal{K})(x\in A\Rightarrow A\setminus\{x\}\in\mathcal{K})\Rightarrow x\in X\setminus(A\setminus\{x\})\in\tau\\ (X\setminus(A\setminus\{x\}))\cap A=\emptyset\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow x\notin D(A)$

$$\left.\begin{array}{r}x\in A\Rightarrow x\notin D(A)\\ A\in\mathcal{K}\Rightarrow D(A)\subset A\end{array}\right\}\Rightarrow D(A)=\emptyset$$

12) $((X,\tau),\ T_1)(A\subset X)(a\in X) \Rightarrow [a\in D(A) \Leftrightarrow (a\in U\in\tau \Rightarrow |\,U\cap A\,| \geq \aleph_0)]$

İspat: i)⇒: $\left.\begin{array}{r} (a\in U\in\tau)(\,|\,U\cap A\,| < \aleph_0)(B=(U\setminus\{a\})\cap A) \Rightarrow |\,B\,| < \aleph_0 \\ (X,\tau),\ T_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} (\setminus B\in\tau)(U\cap(\setminus B)\in\tau) \\ a\in U\cap(\setminus B) \\ A\cap(U\cap(\setminus B))=A\cap(U\cap(\setminus[(U\setminus\{a\})\cap A])\subset\{a\} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$a\notin D(A)$ /

/ $a\in D(A) \Rightarrow (a\in U\in\tau \Rightarrow |\,U\cap A\,| \geq \aleph_0)$

ii)⇐: Besbelli.

13) $((X,\tau),\ T_1)((X,\tau) \simeq (Y,\sigma)) \Rightarrow ((Y,\sigma),\ T_1)$

2.35.3 T_2 Uzayları (Hausdorff Uzayları)

$$((X,\tau),\ T_2) :\Leftrightarrow [(a,b\in X)(a\neq b) \Rightarrow (\exists A\in\tau)(\exists B\in\tau)(a\in A)(b\in B)(A\cap B=\emptyset)]$$

2.35.3.1 Örnek: Örnek 2.35.1.2'deki uzaylardan yalnızca diskret olanı T_2'dir.

2.35.3.2 Teoremler

1) $((X,\tau),\ T_2) \Rightarrow ((X,\tau),\ T_1) \Rightarrow ((X,\tau),\ T_0)$

2) $\exists(X,\tau),\ T_1,\ T_2$ değil

3) (X,m,τ) top. grup $\Rightarrow (X,\tau),\ T_2$

4) $((X,\tau),\ T_2)(\langle a_n\rangle,\ (X,\tau)$'da yak.$) \Rightarrow |\,\{\,x \mid a_n\to x\,\}\,| = 1$

İspat: $\left.\begin{array}{r} (X,\tau),\ T_2)(a,b\in X)(a\neq b) \Rightarrow (\exists A\in\tau)(\exists B\in\tau)(a\in A)(b\in B)(A\cap B=\emptyset) \\ (a_n\to a)(a_n\to b) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists n_o\in N)(n\geq n_o \Rightarrow a_n\in A)(\exists n_1\in N)(n\geq n_1 \Rightarrow a_n\in B)(A\cap B=\emptyset)$

$\Rightarrow n\geq m=\max\{n_o,n_1\} \Rightarrow a_n\in A\cap B=\emptyset)$ /

/ çelişki. /

/ a=b.

5) $((X,\tau),$ bir. say.$) \Rightarrow [(X,\tau),\ T_2 \Leftrightarrow ((\langle a_n\rangle,\ (X,\tau)$'da yak.$) \Rightarrow |\,\{\,x \mid a_n\to x\,\}\,| = 1)]$

İspat: i)⇒: teo.(4)

ii)⇐: $(X,\tau),\ T_2$ değil $\Rightarrow (\exists a,b\in X)(a\neq b)[(a\in A\in\tau)(b\in B\in\tau) \Rightarrow A\cap B\neq\emptyset]$

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{B}_a=\{A_n \mid n\in N \Rightarrow A_{n+1}\subset A_n\} \\ \\ \mathcal{B}_b=\{B_n \mid n\in N \Rightarrow B_{n+1}\subset B_n\}\end{array}\right\} \Rightarrow (n\in N \Rightarrow A_n\cap B_n \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists\langle a_n\rangle)(a_n\in A_n\cap B_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_n\to a)(a_n\to b) \Rightarrow |\{ x \mid a_n\to x \}| = 1 \,/\, |\{ x \mid a_n\to x \}| = 1 \Rightarrow (X,\tau),\ T_2$$

6) $((X,\tau),\ T_2)(Y\subset X) \Rightarrow (Y,\tau_Y),\ T_2$

İspat: $((X,\tau),\ T_2)(a,b\in Y\subset X)(a\neq b) \Rightarrow (\exists A\in\tau)(\exists B\in\tau)(a\in A)(b\in B)(A\cap B = \emptyset)$

$\Rightarrow (Y\cap A\in\tau_Y)(Y\cap B\in\tau_Y)((Y\cap A)\cap(Y\cap B)=Y\cap A\cap B = \emptyset) \,/\, (Y,\tau_Y),\ T_2$

7) $((X,\tau),\ T_2)((X,\tau)\simeq(Y,\sigma)) \Rightarrow ((Y,\sigma),\ T_2)$

8) $((X,\tau),\ T_2)(\tau\subset\sigma) \Rightarrow (X,\sigma),\ T_2$

9) $((X,\tau)$, top.uz.$)(Y,\sigma),\ T_2)(f{:}X\to Y$, sür.$)(g{:}X\to Y$, sür.$)\Rightarrow\{x \mid f(x)=g(x)\}\in\mathcal{K}^{\tau}$ (1,2,4,6)

2.35.3.3 Nokta Ayıran Fonksiyonlar

$$\mathcal{A}=\{f \mid f{:}X\to Y\},\ \text{nok. ay.} \Leftrightarrow [(a,b\in X)(a\neq b) \Rightarrow (\exists f\in\mathcal{A})(f(a)\neq f(b))]$$

1) $\mathcal{C}(X,R)$ nok. ay. $\Rightarrow (X,\tau),\ T_2$

İspat:
$$\left.\begin{array}{l}(\mathcal{C}(X,R)\ \text{nok. ay.})(a,b\in X)(a\neq b) \Rightarrow (\exists f\in\mathcal{C}(X,R))(f(a)\neq f(b)) \\ (R^1,\ T_2)(f(a),f(b)\in R) \Rightarrow (\exists A,B\in\mu)(f(a)\in A)(f(b)\in B)(A\cap B=\emptyset)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$(f^{-1}[A],f^{-1}[B]\in\tau)(a\in f^{-1}[A])(b\in f^{-1}[B])(f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B] = \emptyset) \,/\, (X,\tau),\ T_2$ (8)

2.35.4 Regüler Uzaylar

$$(X,\tau),\ \text{reg.} \Leftrightarrow [(K\in\mathcal{K}^{\tau})(a\in X\setminus K) \Rightarrow (\exists A,B\in\tau)(K\subset A)(a\in B)(A\cap B=\emptyset)]$$

2.35.4.1 Örnek: $X=\{a,b\}$, $\tau_1=\mathcal{I}=\{\emptyset,X\}$, $\tau_2=\{\emptyset,X,\{a\}\}$, $\tau_3=\{\emptyset,X,\{b\}\}$, $\tau_4=\mathcal{D}=P(X)\Rightarrow$

$(X,\tau_1),(X,\tau_4)$ reg., $(X,\tau_2),(X,\tau_3)$ reg. değil.

$X=\{a,b,c\}$, $\tau_{10}=\{\emptyset,X,\{a\},\{b,c\}\}$, $\tau_{13}=\{\emptyset,X,\{b\},\{a,c\}\}$, $\tau_{16}=\{\emptyset,X,\{c\},\{a,b\}\},\ldots,\tau_{29}\Rightarrow$

$(X,\mathcal{I}),(X,\mathcal{D}),(X,\tau_{10}),(X,\tau_{13}),(X,\tau_{16})$ reg. (fakat T_1 değillerdir!), diğerleri reg. değildir.

1) $((X,\tau)$, reg.$)(Y\subset X) \Rightarrow ((Y,\tau_Y)$, reg.$)$

2) $((X,\tau)$, reg.$)((X,\tau)\simeq(Y,\sigma)) \Rightarrow ((Y,\sigma)$, reg.$)$

2.35.5 T_3 Uzayları

$((X,\tau), T_3) \Leftrightarrow ((X,\tau), T_1)((X,\tau), \text{reg.}) \Leftrightarrow [(a,b\in X)(a\neq b) \Rightarrow (\exists A\in\tau)(a\in A)(b\notin A)]$

$[(K\in\mathcal{K}^{\tau})(a\in X\setminus K) \Rightarrow (\exists A,B\in\tau)(K\subset A)(a\in B)(A\cap B=\emptyset)]$

Örnek: Her metrik uzay T_3'tür.

1) $((X,\tau), T_3) \Rightarrow ((X,\tau), T_2)$

İspat:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}(a,b\in X)(a\neq b)\\ (X,\tau), T_3) \Rightarrow ((X,\tau), T_1)\end{array}\right\} \Rightarrow (\{a\}\in\mathcal{K})(b\notin\{a\})\\ \qquad\qquad ((X,\tau), T_3) \Rightarrow ((X,\tau), \text{reg.})\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\exists A,B\in\tau)(\{a\}\subset A)(b\in B)(A\cap B=\emptyset)]$

$\Rightarrow (\exists A,B\in\tau)(a\in A)(b\in B)(A\cap B=\emptyset) \big/ (X,\tau), T_2$

2.35.6 Normal Uzaylar

(X,τ) nor. $\Leftrightarrow [(K,L\in\mathcal{K})(K\cap L=\emptyset) \Rightarrow (\exists A,B\in\tau)(K\subset A)(L\subset B)(A\cap B=\emptyset)]$

2.35.6.1 Örnek: $X=\{a,b\}$ kümesi ile oluşturulan tüm topolojik uzaylar normaldir. $X=\{a,b,c\}$ üzerinde oluşturulan tüm topolojik uzaylar ($\tau_{20},\tau_{21},\tau_{22}$ hariç) normaldir.

1) (X,τ) nor. $\Leftrightarrow [(K\in\mathcal{K})(K\subset A\in\tau) \Rightarrow (\exists B\in\tau)(K\subset B\subset \overline{B}\subset A)]$

İspat: i)$\Rightarrow$:

$$\left.\begin{array}{r}(K\in\mathcal{K})(K\subset A\in\tau) \Rightarrow (\setminus A\in\mathcal{K})(\setminus A\cap K=\emptyset)\\ (X,\tau)\text{ nor.}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}(\exists U,B\in\tau)(\setminus A\subset U)(K\subset B)(U\cap B=\emptyset \Rightarrow (\exists U,B\in\tau)(\setminus U\subset A)(K\subset B)(B\subset \setminus U)\\ \setminus U\in\mathcal{K}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$(\exists U,B\in\tau)(K\subset B\subset \overline{B}\subset \setminus U\subset A) \Rightarrow (\exists B\in\tau)(K\subset B\subset \overline{B}\subset A)$.

ii)$\Leftarrow$:

$$\left.\begin{array}{r}(K,L\in\mathcal{K})(K\cap L=\emptyset) \Rightarrow (K\in\mathcal{K})(K\subset \setminus L\in\tau)\\ \text{Hip}\end{array}\right\} \Rightarrow (\exists B\in\tau)(K\subset \overline{B}\subset B\subset \setminus L) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}(\exists B\in\tau)(L\subset \setminus\overline{B})(B\cap \setminus\overline{B}=\emptyset)\\ \setminus\overline{B}\in\tau\end{array}\right\} \Rightarrow (\setminus\overline{B}, B\in\tau)(K\subset B)(L\subset \setminus\overline{B})(B\cap \setminus\overline{B}=\emptyset) \big/ (X,\tau)\text{ nor.}$$

2) $((X,\tau), \text{nor.})((X,\tau) \simeq (Y,\sigma)) \Rightarrow ((Y,\sigma), \text{nor.})$

3) (Uryson Lemması)

$((X,\tau) \text{ normal}) \Rightarrow [(K,L\in\mathcal{K}^{\tau})(K\cap L=\emptyset)\Rightarrow(\exists f{:}X\rightarrow[0,1] \text{ sür.})(f[K]=\{0\})(f[L]=\{1\})]$

4) $[((X,\tau) \text{ top. uz.})(K,L\in\mathcal{K}^{\tau})(K\cap L=\emptyset)\Rightarrow(\exists f{:}X\rightarrow[0,1] \text{ sür.})(f[K]=\{0\})(f[L]=\{1\})]$

$\Rightarrow ((X,\tau) \text{ nor.})$

5) $((X,\tau) \text{ nor.}) \Leftrightarrow [(K,L\in\mathcal{K}^{\tau})(K\cap L=\emptyset)\Rightarrow(\exists f{:}X\rightarrow[0,1] \text{ sür.})(f[K]=\{0\})(f[L]=\{1\})]$

6) $((X,\tau) \text{ nor.}) \Leftrightarrow [(K,L\in\mathcal{K}^{\tau})(K\cap L=\emptyset)\Rightarrow(\exists f{:}X\rightarrow[a,b] \text{ sür.})(f[K]=\{a\})(f[L]=\{b\})]$

7) (Tietze genişletme teoremi):

$((X,\tau), \text{ nor.})(K\in\mathcal{K})(f{:}K\rightarrow[a,b] \text{ sür.}) \Rightarrow (\exists f^{*}{:}X\rightarrow[a,b] \text{ sür.})(x\in K \Rightarrow f(x)=f^{*}(x))$

8) $((X,\tau) \text{ reg.})((X,\tau) \text{ Lin. uz.}) \Rightarrow (X,\tau), \text{ nor.}$

2.35.7 T_4 Uzayları

$((X,\tau), T_4) \Leftrightarrow ((X,\tau), T_1)((X,\tau), \text{nor.}) \Leftrightarrow [(a,b\in X)(a\neq b) \Rightarrow (\exists A\in\tau)(a\in A)(b\notin A)] \Leftrightarrow$
$[(K,L\in\mathcal{K})(K\cap L=\emptyset) \Rightarrow (\exists A,B\in\tau)(K\subset A)(L\subset B)(A\cap B=\emptyset)]$

Örnek: Her metrik uzay T_4'tür.

1) $((X,\tau), T_4) \Rightarrow ((X,\tau), T_3)$

İspat:
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}(K\in\mathcal{K})(a\notin K)\\(X,\tau), T_4\Rightarrow(X,\tau), T_1\end{array}\right\}\Rightarrow(\{a\}\in\mathcal{K})(\{a\}\cap K=\emptyset)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad (X,\tau), T_4\Rightarrow(X,\tau), \text{nor}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow (\exists A,B\in\tau)(a\in\{a\}\subset A)(K\subset B)(A\cap B)=\emptyset \Big/ (X,\tau), \text{ reg.}$

2) $((X,\tau), T_4)(K\in\mathcal{K}^{\tau}) \Rightarrow (K,\tau_K), T_4$

2.35.8 Tam Regüler Uzaylar

$(X,\tau), \text{ tam reg.} \Leftrightarrow [(a\notin K\in\mathcal{K}) \Rightarrow (\exists f{:}X\rightarrow[0,1] \text{ sür.})(f(a)=0)(f[K]=\{1\})]$

1) $(X,\tau), \text{ tam reg.} \Rightarrow (X,\tau), \text{ reg.}$

İspat:
$$\left.\begin{array}{r}(X,\tau), \text{ tam reg.} \Leftrightarrow [(a\notin K\in\mathcal{K}) \Rightarrow (\exists f{:}X\rightarrow[0,1] \text{ sür.})(f(a)=0)(f[K]=\{1\})]\\ \text{teo.}(2.35.3.2\text{-}6) \Rightarrow [0,1], T_2 \Rightarrow (\exists A,B\in\tau)(0\in A)(1\in B)(A\cap B=\emptyset)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$(f^{-1}[A]\in\tau)(f^{-1}[B]\in\tau)(a\in A)(K\subset B)((f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]=\emptyset) \Big/ (X,\tau), \text{ reg.}$

2) $(X,\tau), \text{ nor.} \Rightarrow [(X,\tau), \text{ reg.} \Leftrightarrow (X,\tau), \text{ tam reg.}]$

3) $((X,\tau)$, tam reg.$)(Y \subset X) \Rightarrow (Y,\tau_Y)$, tam reg.

4) $((X,\tau)$, tam reg.$)((X,\tau) \simeq (Y,\sigma)) \Rightarrow ((Y,\sigma)$, tam reg.$)$

2.35.9 $T_{3\,1/2}$ Uzayları (Tychonoff Uzayları)

(X,τ), $T_{31/2} \Leftrightarrow ((X,\tau)$, tam reg.$)((X,\tau), T_1)$

1) (X,τ), $T_4 \Leftrightarrow (X,\tau)$, $T_{31/2}$

2) (X,τ), $T_{31/2} \Rightarrow (X,\tau)$, T_3 (1,2,4,6)

2.35.10 1 , 2 ve 3 Elemanlı Kümelerde Olası Tüm Topolojiler

1) $X_1 = \{a\}$

$\sigma = \{\emptyset, X_1\}$;

2) $X_2 = \{a,b\}$

$\rho_1 = \{\emptyset, X_2\}$, $\rho_2 = \{\emptyset, X_2, \{a\}\}$, $\rho_3 = \{\emptyset, X_2, \{b\}\}$, $\rho_4 = \{\emptyset, X_2, \{a\}, \{b\}\}$;

3) $X_3 = \{a,b,c\}$

$\tau_1 = \{\emptyset, X_3\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, X_3, \{a\}\}$, $\tau_3 = \{\emptyset, X_3, \{b\}\}$, $\tau_4 = \{\emptyset, X_3, \{c\}\}$, $\tau_5 = \{\emptyset, X_3, \{a,b\}\}$,

$\tau_6 = \{\emptyset, X_3, \{b,c\}\}$, $\tau_7 = \{\emptyset, X_3, \{a,c\}\}$, $\tau_8 = \{\emptyset, X_3, \{a\}, \{a,b\}\}$, $\tau_9 = \{\emptyset, X_3, \{a\}, \{a,c\}\}$,

$\tau_{10} = \{\emptyset, X_3, \{a\}, \{b,c\}\}$, $\tau_{11} = \{\emptyset, X_3, \{b\}, \{a,b\}\}$, $\tau_{12} = \{\emptyset, X_3, \{b\}, \{b,c\}\}$,

$\tau_{13} = \{\emptyset, X_3, \{b\}, \{a,c\}\}$,

$\tau_{14} = \{\emptyset, X_3, \{c\}, \{a,c\}\}$, $\tau_{15} = \{\emptyset, X_3, \{c\}, \{b,c\}\}$, $\tau_{16} = \{\emptyset, X_3, \{c\}, \{a,b\}\}$,

$\tau_{17} = \{\emptyset, X_3, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$, $\tau_{18} = \{\emptyset, X_3, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}\}$, $\tau_{19} = \{\emptyset, X_3, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}\}$,

$\tau_{20} = \{\emptyset, X_3, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$, $\tau_{21} = \{\emptyset, X_3, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$,

$\tau_{22} = \{\emptyset, X_3, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$, $\tau_{23} = \{\emptyset, X_3, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$,

$\tau_{24} = \{\emptyset, X_3, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$, $\tau_{25} = \{\emptyset, X_3, \{a\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$,

$\tau_{26} = \{\emptyset, X_3, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$, $\tau_{27} = \{\emptyset, X_3, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$,

$\tau_{28} = \{\emptyset, X_3, \{b\}, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$, $\tau_{29} = P(X_3)$.

	T_0	$T_{1/2}$	T_1	T_2	Reg.	T_3	Tychonoff	Nor.	T_4	Tam Reg.	Urysohn
(X_1,σ)	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
(X_2,ρ_1)	-	-	-	-	+	-	-	+	-	+	+
(X_2,ρ_2)	+	+	-	-	-	-	-	+	-	-	+
(X_2,ρ_3)	+	+	-	-	-	-	-	+	-	-	+
(X_2,ρ_4)	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
(X_3,τ_1)	-	-	-	-	+	-	-	+	-	+	+
(X_3,τ_2)	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+
(X_3,τ_3)	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+
(X_3,τ_4)	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+
(X_3,τ_5)	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+
(X_3,τ_6)	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+
(X_3,τ_7)	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+
(X_3,τ_8)	+	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+
(X_3,τ_9)	+	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+
(X_3,τ_{10})	-	-	-	-	+	-	-	+	-	+	+
(X_3,τ_{11})	+	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+
(X_3,τ_{12})	+	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+
(X_3,τ_{13})	-	-	-	-	+	-	-	+	-	+	+
(X_3,τ_{14})	+	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+
(X_3,τ_{15})	+	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+
(X_3,τ_{16})	-	-	-	-	+	-	-	+	-	+	+
(X_3,τ_{17})	+	+	-	-	-	-	-	+	-	-	+
(X_3,τ_{18})	+	+	-	-	-	-	-	+	-	-	+
(X_3,τ_{19})	+	+	-	-	-	-	-	+	-	-	+
(X_3,τ_{20})	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
(X_3,τ_{21})	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
(X_3,τ_{22})	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
(X_3,τ_{23})	+	+	-	-	-	-	-	+	-	-	+
(X_3,τ_{24})	+	+	-	-	-	-	-	+	-	-	+
(X_3,τ_{25})	+	+	-	-	-	-	-	+	-	-	+
(X_3,τ_{26})	+	+	-	-	-	-	-	+	-	-	+
(X_3,τ_{27})	+	+	-	-	-	-	-	+	-	-	+
(X_3,τ_{28})	+	+	-	-	-	-	-	+	-	-	+
(X_3,τ_{29})	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Tablo 2.35.11 1 , 2 ve 3 elemanlı uzaylarda olası tüm topolojilerden ayırma aksiyomlarını sağlayanların ve sağlamayanların tablosu

2.36 Sayılabilirlik

2.36.1 Birinci sayılabilir uzaylar (bir. say. uz.)

(X,τ), bir. say. uz.:$\Leftrightarrow[a\in X\Rightarrow(\exists\mathcal{B}_a$, a'da yer. baz$)(\,|\mathcal{B}_a|\leq\aleph_0)]$

$:\Leftrightarrow[a\in X\Rightarrow(\exists\mathcal{B}_a\subset\tau)(B\in\mathcal{B}_a\Rightarrow a\in B)[a\in A\in\tau\Rightarrow(\exists B\in\mathcal{B}_a)(B\subset A)]$

1) $((X,\tau)$, bir. say. uz.$)(Y\subset X)\Rightarrow(Y,\tau_Y)$ bir. say. uz.

İspat:

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}a\in Y\\ Y\subset X\end{array}\right\}\Rightarrow a\in X\\ (X,\tau),\text{ bir. say. uz.}\end{array}\right\}\Rightarrow(\exists\mathcal{B}_a,\text{ a'da yer. baz})(\,|\mathcal{B}_a|\leq\aleph_0)\\ \text{teo.}(*)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$(\mathcal{B}_a^{*}=\{Y\cap A\mid A\in\mathcal{B}_a\}$, a'da τ_Y yer. baz$)(\,|\mathcal{B}_a|\leq\aleph_0)\Rightarrow(Y,\tau_Y)$ bir. say. uz.

2) $((X,\tau)$, bir. say. uz.$)((X,\tau)\not\approx(Y,\sigma))\Rightarrow(Y,\sigma)$ bir. say. uz.

2.36.1.1 İç İçe Yersel Baz

$((X,\tau)$, top. uz.$)(a\in X)(\mathcal{B}_a=\{B_n\mid n\in N\}$, a'da say. yer. baz$):\Rightarrow$

$\mathcal{B}_a$, a'da iç içe yer. baz:$\Leftrightarrow(n\in N\Rightarrow B_{n+1}\subset B_n)$

1) $((X,\tau)$, top. uz.$)(a\in X)(\mathcal{B}_a=\{B_n\mid n\in N\}$, a'da say. yer. baz$)\Rightarrow\exists\mathcal{B}_a^{*}$, a'da iç içe baz

2) $((X,\tau)$, bir. say. uz.$)(a\in X)\Rightarrow\exists\mathcal{B}_a$, a'da iç içe baz

3) $((X,\tau)$, top. uz.$)(a\in X)(\mathcal{B}_a=\{B_n\mid n\in N\}$, a'da iç içe baz$)(a_n\in B_n)\Rightarrow a_n\to a$

İspat:

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}a\in A\in\tau\\ \mathcal{B}_a,\text{ a'da yer. baz}\end{array}\right\}\Rightarrow(\exists m\in N)(B_m\subset A)\\ \mathcal{B}_a,\text{ a'da iç içe baz}\end{array}\right\}\Rightarrow[n\geq m\Rightarrow a_n\in B_m\subset A]\Big/a_n\to a$$

4) $((X,\tau)$, bir. say.uz.$)((Y,\sigma)$, top.uz.$)(f:X\to Y)(a\in X)\Rightarrow$

$[f$, a'da sür. $\Leftrightarrow f$, a'da diz. sür.$]$

İspat: i) $\Rightarrow$: teo.$(*)$

ii) $\Leftarrow$:

$$\left.\begin{array}{r}f,\text{ a'da sür. değil}\\ \mathcal{B}_a=\{B_n\mid n\in N\},\text{ a'da iç içe baz}\end{array}\right\}\Rightarrow(\exists A\in\sigma)(f(a)\in A)(n\in N\Rightarrow B_n\not\subset f^{-1}[A])\Rightarrow$$

$\Rightarrow[n\in N\Rightarrow(\exists a_n\in B_n)(a_n\notin f^{-1}[A])]\Rightarrow[n\in N\Rightarrow(\exists a_n\in B_n)(f(a_n)\notin A)]\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow(\exists\langle a_n\rangle)(a_n\to a)(f(a_n)\not\to f(a))\\ \text{teo.}(*)\end{array}\right\}\Rightarrow f,\text{ a'da diz. sür. değil}\Big/f,\text{ a'da diz. sür.}\Rightarrow f,\text{ a'da sür.}$$

2.36.2 İkinci Sayılabilir Uzaylar (iki. say. uz.)

(X,τ), iki. say. uz. : $\Leftrightarrow (\exists \mathcal{B} \subset \tau)(\mathcal{B}$, baz$)(|\mathcal{B}| \leq \aleph_0)$

1) $(X,\mathcal{D})$ disk. top. uz. $\Rightarrow [(X,\mathcal{D})$, iki. say. uz. $\Leftrightarrow |X| \leq \aleph_0]$

2) (X,τ), iki. say. uz. $\Rightarrow (X,\tau)$, bir. say. uz.

3) $((X,\tau)$, iki. say. uz.$)(Y\subset X) \Rightarrow (Y,\tau_Y)$, iki. say. uz.

4) $((X,\tau)$, iki. say. uz.$)((X,\tau) \not\approx (Y,\sigma)) \Rightarrow (Y,\sigma)$, iki. say. uz.

2.36.2.1 Örtü, Sayılabilir Örtü, Sayılabilir Örtüye İndirgenebilir Örtü

$\mathcal{A}$, A için örtü : $\Leftrightarrow (\mathcal{A} \subset P(X))(A \subset \cup \mathcal{A})$

$\mathcal{A}$, A için açık örtü : $\Leftrightarrow (\mathcal{A} \subset \tau)(A \subset \cup \mathcal{A})$

$\mathcal{A}$, A için sayılabilir bir örtüye indirgenebilir örtü : $\Leftrightarrow (\mathcal{A} \subset P(X))(A \subset \cup \mathcal{A})$ $(\exists \mathcal{A}^* \subset \mathcal{A})(A \subset \cup \mathcal{A}^*)(|\mathcal{A}^*| \leq \aleph_0)$

1) (Lindelöf (1)):

$((X,\tau)$, iki. say.uz.$)(A\subset X)(\mathcal{A}\subset\tau)(A\subset \cup \mathcal{A}) \Rightarrow (\exists \mathcal{A}^* \subset \mathcal{A})(A \subset \cup \mathcal{A}^*)\ (|\mathcal{A}^*| \leq \aleph_0)$

2) (Lindelöf (2)):

$((X,\tau)$, iki. say. uz.$)(\mathcal{B}$, baz$) \Rightarrow (\exists \mathcal{B}^* \subset \mathcal{B})(\mathcal{B}^*$, baz$)(|\mathcal{B}^*| \leq \aleph_0)$

2.36.2.2 Lindelöf Uzayları

(X,τ), Lin. uz. : $\Leftrightarrow [(\mathcal{A} \subset \tau)(X = \cup \mathcal{A}) \Rightarrow (\exists \mathcal{A}^* \subset \mathcal{A})(X = \cup \mathcal{A}^*)(|\mathcal{A}^*| \leq \aleph_0)]$

1) $(X,\mathcal{D})$, Lin. uz. $\Leftrightarrow |X| \leq \aleph_0$

2) $((X,\mathcal{D})$, Lin. uz.$)((Y,\sigma)$, top. uz.$)(f{:}X \to Y$ sür.$) \Rightarrow (f[X],\sigma_{f[X]})$ Lin. uz.

3) $((X,\tau)$, Lin. uz.$)(Y \in \mathcal{K}) \Rightarrow (Y,\tau_Y)$, Lin. uz.

2.36.2.3 Ayrılabilir Uzaylar

(X,τ), ay. uz. : $\Leftrightarrow (\exists A\subset X)(\overline{A} = X)$

1) (X,τ), iki. say. uz. $\Rightarrow (X,\tau)$, ay. uz.

2) $(\exists (X,\tau)$, ay. uz.$)((X,\tau)$, iki. say. uz. değil$)$

3) $((X,d)$, met. uz.$)((X,\tau_d)$, ayrıl.$) \Rightarrow (X,\tau_d)$, iki. say. uz.

4) $(X,\mathcal{D})$, ay. uz. $\Leftrightarrow |X| \leq \aleph_0$

5) $(\exists (X,\tau)$, ay. uz.$)(\exists Y\subset X)((Y,\tau_Y)$, ay. uz. değil$)$ [2,4,6]

BÖLÜM 3

3.1 Genelleştirilmiş Kapalı Kümeler

3.1.1 Tanım: (X,τ) topolojik uzay, $A\subset X$ olmak üzere, eğer A'yı kapsayan her τ-açık küme, A'nın kapanışını da kapsarsa, A'ya, (X,τ) uzayında bir genelleştirilmiş kapalı (kısaca g-kapalı veya g-kap.) küme denir. Bir (X,τ) uzayındaki tüm g-kapalı kümelerin ailesi $\mathcal{K}_g^{\tau}$ simgesiyle veya (bir karışıklığa yol açmayacaksa) $\mathcal{K}_g$ simgesiyle gösterilecektir.[9]

$$A\in\mathcal{K}_g :\Leftrightarrow (A\subset U\in\tau \Rightarrow \overline{A}\subset U)$$

$$\mathcal{K}_g=\{\, A \mid A\subset U\in\tau \Rightarrow \overline{A}\subset U\}$$

3.1.2 Örnek: $X=\{a,b,c\}$, $\tau=\{\emptyset,X,\{a,b\},\{b,c\},\{b\}\}$, $\sigma=\{\emptyset,X,\{a,b\},\{c\}\}$,

$\rho=\{\emptyset,X,\{a\}\} \Rightarrow \mathcal{K}_g^{\tau}=\mathcal{K}=\{\emptyset,X,\{c\},\{a\},\{a,c\}\}$, $\mathcal{K}_g^{\sigma}=\mathcal{K}_g^{\mathcal{D}}=\mathcal{K}_g^{\mathcal{I}}$, $\mathcal{K}_g^{\rho}=P(X)\setminus\{\{a\}\}\supset\mathcal{K}^{\rho}$

3.1.3 Sonuçlar:

1) Her kapalı küme g-kapalıdır.

$$A\in\mathcal{K}\Rightarrow A\in\mathcal{K}_g$$

$$\mathcal{K}\subset\mathcal{K}_g$$

İspat: $\left.\begin{array}{r} A\in\mathcal{K}\Rightarrow A=\overline{A} \\ A\subset U\in\tau \end{array}\right\}\Rightarrow \overline{A}\subset U \,/\, A\in\mathcal{K}_g \,/\, \mathcal{K}\subset\mathcal{K}_g.$

2) g-kapalı bir küme kapalı olmayabilir.

$$(\exists(X,\tau)\text{ top. uz.})(\exists A\in\mathcal{K}_g\subset P(X))(A\notin\mathcal{K})$$

$$(\exists(X,\tau)\text{ top. uz.})(\mathcal{K}_g\not\subset\mathcal{K})$$

İspat: Örnek 3.1.2'deki (X,ρ) uzayında $(\{a,b\}\in\mathcal{K}_g)(\{a,b\}\notin\mathcal{K})\Rightarrow(\mathcal{K}_g\not\subset\mathcal{K})$.

3) Herhangi iki g-kapalı kümenin birleşimi g-kapalıdır.

$$A,B\in\mathcal{K}_g\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{K}_g$$

İspat: $\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r} A\cup B\subset U\in\tau\Rightarrow(A\subset U)(B\subset U) \\ A,B\in\mathcal{K}_g \end{array}\right\}\Rightarrow(\overline{A}\subset U)(\overline{B}\subset U)\Rightarrow\overline{A}\cup\overline{B}\subset U \\ \hfill \overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cup B}\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\overline{A\cup B}\subset U \,/\, A\cup B\in\mathcal{K}_g.$

4) Bir (X,τ) topolojik uzayında herhangi iki g-kapalı kümenin kesişimi g-kapalı olmayabilir.

$$(\exists(X,\tau)\text{ top.uz.})(\exists A,B\in\mathcal{K}_g\subset P(X))(A\cap B\notin\mathcal{K}_g)$$

İspat: Örnek 3.1.2'deki (X,ρ) uzayında $(\{a,b\},\{a,c\}\in\mathcal{K}_g^{\rho})(\{a,b\}\cap\{a,c\}=\{a\}\notin\mathcal{K}_g^{\rho})$.

5) $X\neq\emptyset$ herhangi bir küme olmak üzere, $(X,\mathcal{D})$ diskret topolojik uzayında her alt küme g-kapalıdır.(ve o halde her g-kapalı küme kapalıdır.)

$$\mathcal{D}=P(X)\Rightarrow[A\subset X\Rightarrow(A,\text{ g-kap.})]\Leftrightarrow(\mathcal{K}_g^{\mathcal{D}}=P(X))$$

İspat: $(\mathcal{D}=P(X))(A\subset X)\Rightarrow A=\overline{A}\Rightarrow(\mathcal{K}_g^{\mathcal{D}}=\{A\mid A\subset U\in\mathcal{D}\Rightarrow\overline{A}\subset U\}=P(X)=\mathcal{K}^{\mathcal{D}})$.

6) $X\neq\emptyset$ herhangi bir küme olmak üzere, $(X,\mathcal{I})$ indiskret topolojik uzayında her alt küme g-kapalıdır.

$$\mathcal{I}=\{\emptyset,X\}\Rightarrow(\mathcal{K}_g^{\mathcal{I}}=P(X))$$

İspat: $(\mathcal{I}=\{\emptyset,X\})(A\subset X)\Rightarrow(\mathcal{K}_g^{\mathcal{I}}=\{A\mid A\subset X\Rightarrow\overline{A}=X\subset X\}=P(X))$.

3.2 Genelleştirilmiş Açık Kümeler

3.2.1 Tanım: (X,τ) bir topolojik uzay, $A\subset X$ olmak üzere, eğer A'nın tümleyeni g-kapalı ise A'ya (X,τ) uzayında bir genelleştirilmiş açık (kısaca g-açık) küme denir. (X,τ) uzayındaki tüm g-açık kümelerin ailesi τ_g ile gösterilecektir.(9)

$$(A,\text{ g-açık}):\Leftrightarrow(\setminus A,\text{ g-kap.}):\Leftrightarrow(\setminus A\in\mathcal{K}_g):\Leftrightarrow(A\in\tau_g)$$

$$\tau_g:=\{A\mid\setminus A\in\mathcal{K}_g\}$$

3.2.2 Örnek: Örnek 3.1.2'deki, (X,τ), (X,σ), (X,ρ), $(X,\mathcal{D})$ ve $(X,\mathcal{I})$ uzaylarında,

$\tau_g=\tau=\{\emptyset,X,\{a,b\},\{b,c\},\{b\}\}$, $\sigma_g=\mathcal{D}_g=\mathcal{I}_g=P(X)$, $\rho_g=P(X)\setminus\{\{b,c\}\}\supset\rho$

3.2.3 Sonuçlar:

1) Her açık küme g-açıktır.

$$A\in\tau\Rightarrow A\in\tau_g$$

$$\tau\subset\tau_g$$

İspat: $\left.\begin{array}{r}A\in\tau\Rightarrow\setminus A\in\mathcal{K}^{\tau}\\ \mathcal{K}^{\tau}\subset\mathcal{K}_g^{\tau}\end{array}\right\}\Rightarrow\setminus A\in\mathcal{K}_g^{\tau}\Rightarrow A\in\tau_g\,/\,\tau\subset\tau_g.$

2) g-açık bir küme açık olmayabilir.

$$(\exists(X,\tau))(\exists A\in\tau_g\subset P(X))(A\notin\tau)$$

$$(\exists(X,\tau)\text{ top. uz.})(\tau_g\not\subset\tau)$$

İspat: Örnek 3.1.2'deki (X,ρ) uzayında $(\{b\}\in\rho_g)(\{b\}\notin\rho) \Rightarrow (\rho_g \not\subset \rho)$.

3) Herhangi iki g-açık kümenin kesişimi g-açıktır.

$$A,B\in\tau_g \Rightarrow A\cap B\in\tau_g$$

İspat:
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r} A,B\in\tau_g \Rightarrow \backslash A,\backslash B\in \mathcal{K}_g \\ \text{Sonuç(3.2.3-3)}\end{array}\right\} \Rightarrow (\backslash A\cup\backslash B)\in\mathcal{K}_g \\ (\backslash A\cup\backslash B)=\backslash(A\cap B)\end{array}\right\} \Rightarrow \backslash(A\cap B)\in\mathcal{K}_g \Rightarrow A\cap B\in\tau_g.$$

4) Bir (X,τ) topolojik uzayında herhangi iki g-açık kümenin birleşimi g-açık olmayabilir.

$$(\exists(X,\tau))(\exists A,B\in\tau_g\subset P(X))(A\cup B\notin\tau_g).$$

İspat: Örnek3.1.2'deki (X,ρ) uzayında $(\{b\},\{c\}\in\rho_g)(\{b\}\cup\{c\}=\{b,c\}\notin\rho) \Rightarrow (\rho_g\not\subset\rho)$

5) Diskret topolojik uzayda, her alt küme g-açıktır.

$$(X,\mathcal{D})\text{ diskret} \Rightarrow \mathcal{D}_g = P(X)$$

İspat:
$$\left.\begin{array}{r} A\subset X \Rightarrow \backslash A\in P(X) \\ \text{Sonuç(3.13-5)} \Rightarrow \mathcal{K}_g{}^{\mathcal{D}}= P(X)\end{array}\right\} \Rightarrow \backslash A\in\mathcal{K}_g{}^{\mathcal{D}} \Rightarrow A\in\mathcal{D}_g \,/\, P(X)=\mathcal{D}_g$$

6) İndiskret topolojik uzayda her alt küme g-açıktır.

$$(X,I)\text{ indiskret} \Rightarrow I_g = P(X)$$

İspat: $(A\subset X)$(Sonuç 3.1.3-6) $\Rightarrow A\in\mathcal{K}_g{}^{I}= P(X) \Rightarrow \backslash A\in P(X) \Rightarrow \backslash A\in I_g = P(X)$.

3.3 Dunham Kapanışı (g-kapanışı), $\overline{A}^{*}$

3.3.1 Tanım: (X,τ) topolojik uzay, $A\subset X$ olmak üzere, A kümesini kapsayan tüm g-kapalı kümeler ailesinin kesişimine, A'nın Dunham (anlamında) kapanışı, veya g-kapanışı denir; $\overline{A}^{*}(=Cl^{*}(A))$ şeklinde gösterilir.[10]

$$A\text{'nın g-kapanışı}:=\overline{A}^{*}:=\cap\{B \mid A\subset B\in\mathcal{K}_g\}$$

3.3.1 Dunham Topolojik Uzayları

3.3.1.1 Teorem: (X,τ) topolojik uzay, $A,B\subset X$ olmak üzere,

i) $\overline{\varnothing}^{*}=\varnothing$, **ii)** $A\subset\overline{A}^{*}$, **iii)** $\overline{A\cup B}^{*}=\overline{A}^{*}\cup\overline{B}^{*}$, **iv)** $Cl^{*}(Cl^{*}(A))=Cl^{*}(A)$

3.3.1.2 Teorem: (X,τ) topolojik uzay olmak üzere,

$\tau^{*}=\{U \mid \overline{\backslash U}^{*}=\backslash U, U\subset X\}\subset P(X)$ ailesi, X üzerinde bir topolojidir.

İspat: Teorem 3.3.1.1

3.3.1.3 Tanım: Boş olmayan bir X kümesi üzerindeki $\tau^* = \{U \mid \overline{\backslash U}^{\,*} = \backslash U,\ U\subset X\}$ topolojisine Dunham topolojisi, (X,τ^*) topolojik uzayına da Dunham uzayı denir.

Örnek: $X = \{a,b,c\}$, $\tau = \{\emptyset,X,\{a,b\}\}$, $\mathcal{K}=\{\emptyset,X,\{c\}\}$, $\mathcal{K}_g^{\tau} = \{\emptyset,X,\{c\},\{a,c\},\{b,c\}\}$ olmak üzere $\tau^* = \{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ olur.

Sonuçlar;

1) (X,τ) topolojik uzay, (X,τ^*) buna ilişkin Dunham topolojik uzay olmak üzere, X'in bir A alt kümesinin, (X,τ^*)'daki $\overline{A}$ kapanışı, (X,τ)'daki $\overline{A}^{\,*}$ Dunham kapanışına eşittir.

$$\overline{A}=\overline{A}^{\,*}$$

2) (X,τ) topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. A kümesinin g-kapalı olması için gerek yeter koşul $\overline{A}^{\,*}=A$ olmasıdır.

$$A\in\mathcal{K}_g \Leftrightarrow \overline{A}^{\,*}= A$$

3.4 Genelleştirilmiş Sürekli Fonksiyonlar

3.4.1 Tanım: $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar, $f:X\rightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere, eğer (Y,σ) uzayındaki her kapalı kümenin f altındaki orijinali (X,τ) uzayında g-kapalı ise, f fonksiyonuna τ-σ genelleştirilmiş sürekli veya kısaca g-sürekli fonksiyon denir. Aksi halde, yani en az bir σ-kapalı kümenin f altındaki orijinali g-kapalı değilse, f fonksiyonu g-sürekli değildir.(9)

$$(f,\ \text{g-sür.}):\Leftrightarrow(A\in\mathcal{K}^{\sigma}\Rightarrow f^{-1}[A]\in\mathcal{K}_g^{\tau})$$

$$(f,\ \text{g-sür. değil}):\Leftrightarrow(\exists A\in\mathcal{K}^{\sigma})(f^{-1}[A]\notin\mathcal{K}_g^{\tau})$$

3.4.2 Örnek: $X = \{a,b,c\}$, $\tau = \{\emptyset,X,\{a,c\},\{b,c\},\{c\}\}$, $Y = \{1,2,3,4\}$, $\sigma = \{\emptyset,Y,\{2,3\},\{3,4\},\{2,3,4\},\{3\}\}$ olsun.

$\mathcal{K}^{\tau} = \{\emptyset,X,\{b\},\{a\},\{a,b\}\}$, $\mathcal{K}_g^{\tau} = \mathcal{K}^{\tau} \cup \{\{c\}\}$,

$\mathcal{K}^{\sigma} = \{\emptyset,Y,\{1,4\},\{1,2\},\{1\},\{1,2,3\}\}$, $\mathcal{K}_g^{\sigma} = \mathcal{K}^{\sigma} \cup \{\{1,3\},\{2,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\}\}$ olur.

$f{:}X\rightarrow Y,\ f=\{(a,4),(b,4),(c,1)\} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{ll} \emptyset\in\mathcal{K}^{\sigma} & \Rightarrow f^{-1}[\emptyset]=\emptyset\in\mathcal{K}_g^{\tau} \\ Y\in\mathcal{K}^{\sigma} & \Rightarrow f^{-1}[Y]=X\in\mathcal{K}_g^{\tau} \\ \{1,4\}\in\mathcal{K}^{\sigma} & \Rightarrow f^{-1}[\{1,4\}]=X\in\mathcal{K}_g^{\tau} \\ \{1,2\}\in\mathcal{K}^{\sigma} & \Rightarrow f^{-1}[\{1,2\}]=\{c\}\in\mathcal{K}_g^{\tau}(\notin\mathcal{K}^{\tau}) \\ \{1\}\in\mathcal{K}^{\sigma} & \Rightarrow f^{-1}[\{1\}]=\{c\}\in\mathcal{K}_g^{\tau} \\ \{1,2,3\}\in\mathcal{K}^{\sigma} & \Rightarrow f^{-1}[\{1,2,3\}]=\{c\}\in\mathcal{K}_g^{\tau} \end{array}\right\} \Rightarrow (A\in\mathcal{K}^{\sigma}\Rightarrow f^{-1}[A]\in\mathcal{K}_g^{\tau})$$

(f, g-sür.)

(f,sür.değil)

$g{:}X\rightarrow Y,\ g=\{(a,2),(b,2),(c,3)\} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{ll} \emptyset\in\mathcal{K}^{\sigma} & \Rightarrow g^{-1}[\emptyset]=\emptyset\in\mathcal{K}^{\tau}\subset\mathcal{K}_g^{\tau} \\ Y\in\mathcal{K}^{\sigma} & \Rightarrow g^{-1}[Y]=X\in\mathcal{K}^{\tau}\subset\mathcal{K}_g^{\tau} \\ \{1,4\}\in\mathcal{K}^{\sigma} & \Rightarrow g^{-1}[\{1,4\}]=\emptyset\in\mathcal{K}^{\tau}\subset\mathcal{K}_g^{\tau} \\ \{1,2\}\in\mathcal{K}^{\sigma} & \Rightarrow g^{-1}[\{1,2\}]=\{a,b\}\in\mathcal{K}^{\tau}\subset\mathcal{K}_g^{\tau} \\ \{1\}\in\mathcal{K}^{\sigma} & \Rightarrow g^{-1}[\{1\}]=\emptyset\in\mathcal{K}^{\tau}\subset\mathcal{K}_g^{\tau} \\ \{1,2,3\}\in\mathcal{K}^{\sigma} & \Rightarrow g^{-1}[\{1,2,3\}]=X\in\mathcal{K}^{\tau}\subset\mathcal{K}_g^{\tau} \end{array}\right\} \Rightarrow (A\in\mathcal{K}^{\sigma}\Rightarrow g^{-1}[A]\in\mathcal{K}^{\tau}\subset\mathcal{K}_g^{\tau})$$

(g, sür.)

(g, g-sür.)

$h{:}X\rightarrow Y,\ h=\{(a,1),(b,2),(c,4)\}\Rightarrow(\{1,4\}\in\mathcal{K}^{\sigma})(h^{-1}[\{1,4\}]=\{a,c\}\notin\mathcal{K}^{\tau}\subset\mathcal{K}_g^{\tau})$

(h, sür. değil)

(h, g-sür. değil)

X'den Y'ye sürekli olmayan fakat g-sürekli olan bir fonksiyon ise, yoktur.

3.4.3 Sonuçlar:

1) $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar, $f{:}X\rightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere, eğer f fonksiyonu sürekli ise, g-süreklidir.

(f, sür.) $\Rightarrow$ (f, g-sür.)

İspat:
$$\left.\begin{array}{r} (f,\text{ sür.})\Rightarrow[A\in\mathcal{K}^{\sigma}\Rightarrow f^{-1}[A]\in\mathcal{K}^{\tau}] \\ \mathcal{K}^{\tau}\subset\mathcal{K}_g^{\tau} \end{array}\right\}\Rightarrow[A\in\mathcal{K}^{\sigma}\Rightarrow f^{-1}[A]\in\mathcal{K}_g^{\tau}]\Rightarrow(f,\text{ g-sür.}).$$

2) Bir $f{:}X\rightarrow Y$ fonksiyonu g-sürekli değilse, sürekli de değildir.

(f, g-sür. değil) $\Rightarrow$ (f, sür. değil)

İspat: [(f, sür.) $\Rightarrow$ (f, g-sür.)]:$\Leftrightarrow$[(f, g-sür. değil) $\Rightarrow$ (f, sür. değil)].

3) g-sürekli bir fonksiyon sürekli olmayabilir.

$$(\exists (X,\tau),(Y,\sigma) \text{ top. uz.})(\exists f{:}X\rightarrow Y)(f, \text{ g-sür.})(f, \text{ sür. değil})$$

İspat: Örnek3.4.2'deki f fonksiyonu g-sürekli, fakat sürekli değildir.

4) $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar olmak üzere, bir $f{:}X\rightarrow Y$ fonksiyonunun g-sürekli olması için gerek ve yeter şart, her σ-açık kümenin, f altındaki orijinalinin, (X,τ) uzayında g-açık olmasıdır.

$$(f{:}(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma), \text{ g-sür.}) \Leftrightarrow (A\in\sigma \Rightarrow f^{-1}[A]\in\tau_g)$$

İspat:

i)⇒: $\left.\begin{array}{r} (f, \text{ g-sür.}){:}\Rightarrow(B\in\mathcal{K}^{\sigma}\Rightarrow f^{-1}[B]\in\mathcal{K}_g^{\tau}) \\ A\in\sigma\Rightarrow \backslash A\in\mathcal{K}^{\sigma} \end{array}\right\}\Rightarrow f^{-1}[\backslash A]\in\mathcal{K}_g^{\tau}\Rightarrow \backslash f^{-1}[\backslash A]=f^{-1}[A]\in\tau_g$

ii)⇐: $\left.\begin{array}{r} (A\in\sigma\Rightarrow f^{-1}[A]\in\tau_g) \\ B\in\mathcal{K}^{\sigma}\Rightarrow \backslash B\in\sigma \end{array}\right\}\Rightarrow f^{-1}[\backslash B]=\backslash f^{-1}[B]\in\tau_g\Rightarrow f^{-1}[B]\in\mathcal{K}_g^{\tau}$ / f, g-sür.

5) $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar olmak üzere, eğer bir $f{:}X\rightarrow Y$ fonksiyonu g-sürekli ise, X'in her A alt kümesi için, A'nın Dunham anlamındaki kapanışının f altındaki görüntüsü, A'nın f altındaki görüntüsünün kapanışı tarafından kapsanır.

$$f{:}(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma), \text{ g-sür.}{:}\Rightarrow[A\subset X\Rightarrow f[\overline{A}^{*}]\subset\overline{f[A]}]$$

İspat: $\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} f{:}(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma), \text{ g-sür.}{:}\Rightarrow(B\in\mathcal{K}^{\sigma}\Rightarrow f^{-1}[B]\in\mathcal{K}_g^{\tau}) \\ A\subset X\Rightarrow \overline{f[A]}\in\mathcal{K}^{\sigma} \end{array}\right\}\Rightarrow f^{-1}[\overline{f[A]}]\in\mathcal{K}_g^{\tau} \\ A\subset X\Rightarrow f[A]\subset\overline{f[A]}\Rightarrow A\subset f^{-1}[\overline{f[A]}] \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \overline{A}^{*}\subset f^{-1}[f[A]\Rightarrow f[\overline{A}^{*}]\subset f[A]$.

6) $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar, $f{:}X\rightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere, X'in her A alt kümesi için, A'nın Dunham anlamındaki kapanışının f altındaki görüntüsü, A'nın f altındaki görüntüsünün kapanışı tarafından kapsanıyorsa, f fonksiyonunun g-sürekli olması gerekmez.

$$(\exists(X,\tau),(Y,\sigma) \text{ top. uz.})(\exists f{:}(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma) \text{ g-sür. değil})[A\subset X\Rightarrow f[\overline{A}^{*}]\subset\overline{f[A]}]$$

İspat: $X=\{a,b,c\}$, $\tau=\{\emptyset,X,\{b\}\}$, $Y=\{1,2,3,4\}$, $\sigma=\{\emptyset,Y,\{2,3\}\}$, $f=\{(a,2),(b,1),(c,3)\}$ için, $\mathcal{K}^{\tau}=\{\emptyset,X,\{a,c\}\}$, $\mathcal{K}^{\sigma}=\{\emptyset,Y,\{1,4\}\}$ ve $\mathcal{K}_g^{\tau}=\{\emptyset,X,\{a\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$ olur.

$$\overline{\varnothing}^* = \bigcap\{\emptyset,\{a\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},X\} = \emptyset \Rightarrow f[\overline{\varnothing}^*] = f[\emptyset] = \emptyset$$

$$\overline{\{a\}}^* = \bigcap\{\{a\},\{a,b\},\{a,c\},X\} = \{a\} \Rightarrow f[\overline{\{a\}}^*] = f[\{a\}] = \{2\}$$

$$\overline{\{b\}}^* = \bigcap\{\{a,b\},\{a,c\},X\} = \{b\} \Rightarrow f[\overline{\{b\}}^*] = f[\{b\}] = \{1\}$$

$$\overline{\{c\}}^* = \bigcap\{\{c\},\{a,c\},\{b,c\},X\} = \{c\} \Rightarrow f[\overline{\{c\}}^*] = f[\{c\}] = \{3\}$$

$$\overline{\{a,b\}}^* = \bigcap\{\{a,b\},X\} = \{a,b\} \Rightarrow f[\overline{\{a,b\}}^*] = f[\{a,b\}] = \{1,2\}$$

$$\overline{\{b,c\}}^* = \bigcap\{\{b,c\},X\} = \{b,c\} \Rightarrow f[\overline{\{b,c\}}^*] = f[\{b,c\}] = \{1,3\}$$

$$\overline{\{a,c\}}^* = \bigcap\{\{a,c\},X\} = \{a,c\} \Rightarrow f[\overline{\{a,c\}}^*] = f[\{a,c\}] = \{2,3\}$$

$$\overline{X}^* = \bigcap\{X\} = X \Rightarrow f[\overline{X}^*] = f[X] = \{1,2,3\}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\overline{f[\varnothing]} = \overline{\varnothing} = \varnothing \supset \varnothing = f[\overline{\varnothing}^*] \\
\overline{f[\{a\}]} = \overline{\{2\}} = Y \supset \{2\} = f[\overline{\{a\}}^*] \\
\overline{f[\{b\}]} = \overline{\{1\}} = \{1,4\} \supset \{1\} = f[\overline{\{b\}}^*] \\
\overline{f[\{c\}]} = \overline{\{3\}} = Y \supset \{3\} = f[\overline{\{c\}}^*] \\
\overline{f[\{a,b\}]} = \overline{\{1,2\}} = Y \supset \{1,2\} = f[\overline{\{a,b\}}^*] \\
\overline{f[\{b,c\}]} = \overline{\{1,3\}} = Y \supset \{1,3\} = f[\overline{\{b,c\}}^*] \\
\overline{f[\{a,c\}]} = \overline{\{2,3\}} = Y \supset \{2,3\} = f[\overline{\{a,c\}}^*] \\
\overline{f[X]} = X = \{1,2,3\} \supset \{1,2,3\} = f[\overline{X}^*]
\end{array}\right\} \Rightarrow [A\subset X \Rightarrow f[\overline{A}^*] \subset \overline{f[A]}]$$

$\{1,4\}\in\mathcal{K}^\sigma$ fakat $f^{-1}[\{1,4\}] = \{b\} \notin \mathcal{K}_g^\tau$ olduğundan f fonksiyonu g-sürekli değildir.

7) $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar, $f{:}X\to Y$ bir fonksiyon olmak üzere, X'in her A alt kümesi için, A'nın Dunham kapanışının f altındaki görüntüsünün, A'nın f altındaki görüntüsünün kapanışı tarafından kapsanması için gerek ve yeter şart, her $x\in X$ için $f(x)$'i içeren her V açık kümesine karşılık, $f[U]\subset V$ olacak şekilde bir V g-açık kümesinin olmasıdır.

$$[A\subset X \Rightarrow f[\overline{A}^*] \subset \overline{f[A]}] \Leftrightarrow [(x\in X)(f(x)\in V\in\sigma) \Rightarrow (\exists U\in\tau_g)(x\in U)(f[U]\subset V)]$$

İspat:

i)⇒:

$$\left.\begin{array}{r}
(x\in X)(f(x)\in V\in\sigma) \Rightarrow x\notin f^{-1}[\setminus V]\subset X \\
\\
A\subset X \Rightarrow f[\overline{A}^*] \subset \overline{f[A]}
\end{array}\right\} \Rightarrow f\left((\overline{f^{-1}[\setminus V]})^*\right) \subset \overline{f[f^{-1}[\setminus V]]} \subset \setminus V$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow (\overline{f^{-1}[\backslash V]})^* \subset f^{-1}[\backslash V] \\ x\notin f^{-1}[\backslash V] \end{array}\right\} \Rightarrow x\notin(\overline{f^{-1}[\backslash V]})^* \Rightarrow (\exists U\in\tau_g)(x\in U)(U\cap f^{-1}[\backslash V]=\emptyset)$$

$$\Rightarrow (\exists U\in\tau_g)(x\in U)(f[U]\subset f\left(f^{-1}[\backslash V]\right)\subset V)$$

ii) $\Leftarrow$:

$$\left.\begin{array}{r}(A\subset X)(y\in f[\overline{A}^*]) \Rightarrow [y\in V\in\sigma \Rightarrow (\exists x\in \overline{A}^*\subset X)(y=f(x)\in V\in\sigma)] \\ \text{Hip.}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}(\exists U\in\tau_g)(x\in U)(f[U]\subset V)\\ x\in\overline{A}^*\end{array}\right\}\Rightarrow (U\cap A\neq\emptyset)(f[A]\cap V\neq\emptyset)\Rightarrow y\in\overline{f[A]}$$

$$f[\overline{A}^*]\subset\overline{f[A]}$$

8) (X,τ),(Y,σ) topolojik uzaylar, (X,τ^*), (X,τ)'ya ilişkin Dunham topolojik uzay, f:X→Y bir fonksiyon olmak üzere, X'in her A alt kümesi için, A'nın Dunham kapanışının f altındaki görüntüsünün, A'nın f altındaki görüntüsünün kapanışı tarafından kapsanması için gerek ve yeter şart, f fonksiyonunun, τ^*-σ sürekli olmasıdır.

$$[A\subset X \Rightarrow f[\overline{A}^*]\subset \overline{f[A]}] \Leftrightarrow (f:(X,\tau^*)\to(X,\tau),\ \text{sür.})$$

İspat: teo.(5) ve teo.(7)' den görülür.

3.5 $T_{1/2}$ Uzayları

3.5.1 Tanım: Bir (X,τ) topolojik uzayında, eğer her g-kapalı küme, (aynı zamanda) τ-kapalı ise, bu (X,τ) uzayına bir $T_{1/2}$ uzayı denir.[11,12]

$$[(X,\tau),\ T_{1/2}]:\Leftrightarrow(A\in\mathcal{K}_g^{\tau}\Rightarrow A\in\mathcal{K}^{\tau}):\Leftrightarrow(\mathcal{K}_g^{\tau}\subset\mathcal{K}^{\tau})$$

3.5.2 Örnek: $X=\{a,b,c\}$, $\tau=\{\emptyset,X,\{a,b\},\{b,c\},\{b\}\}$, $\sigma=\{\emptyset,X,\{a,b\},\{c\}\}$, $\rho=\{\emptyset,X,\{a\}\}$ alınırsa örnek 3.1.2 gereğince,

$$\mathcal{K}_g^{\tau}=\mathcal{K}^{\tau}=\{\emptyset,X,\{c\},\{a\},\{a,c\}\},\ \mathcal{K}_g^{\mathcal{D}}=\mathcal{K}^{\mathcal{D}}=P(X)$$

olduğundan, (X,τ) ve $(X,\mathcal{D})$ (diskret) topolojik uzayları, $T_{1/2}$ uzaylardır. Fakat, $\mathcal{K}_g^{\sigma}=P(X)\neq\mathcal{K}^{\sigma}=\sigma$, $\mathcal{K}_g^{I}=P(X)\neq\mathcal{K}^{I}=\{\emptyset,X\}$, $\mathcal{K}_g^{\rho}=P(X)\backslash\{\{a\}\}\neq\mathcal{K}^{\rho}=\{\emptyset,X,\{b,c\}\}$ olduğundan, (X,σ),(X,ρ) ve (X,I) uzayları $T_{1/2}$ değillerdir.

3.5.3 Sonuçlar:

1) Bir (X,τ) topolojik uzayının T olması için gerek ve yeter şart bu uzayın $\mathcal{K}_g^{\tau}$ g-kapalılar ailesi ile $\mathcal{K}^{\tau}$ kapalılar ailesinin eşit olmasıdır.

$$[(X,\tau),\ T_{1/2}] \Leftrightarrow \mathcal{K}_g^{\tau} = \mathcal{K}^{\tau}$$

İspat: tanım(3.5.1) ve sonuç(3.1.3-1) in direk sonucu.

2) Her T_1 (T_2, T_3, T_4 vs.) uzayı $T_{1/2}$'dir ve her $T_{1/2}$ uzayı T_0'dır.

İspat :[9]

3) (X,τ),(Z,ρ) herhangi topolojik uzaylar, (Y,σ) bir $T_{1/2}$ uzay olmak üzere, eğer, f:X→Y ve g:Y→Z g-sürekli fonksiyonlarsa, $g\circ f$:X→Z fonksiyonu da g-süreklidir.

$$((X,\tau),\ (Z,\rho)\ \text{top. uz.})((Y,\sigma),\ T_{1/2})(f:X\to Y,\ g:Y\to Z\ \text{g-sür.}) \Rightarrow g\circ f:X\to Z\ \text{g-sür.}$$

İspat:

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}A\in\mathcal{K}^{\rho}\\ g,\ \text{g-sür.}\end{array}\right\}\Rightarrow g^{-1}[A]\in\mathcal{K}_g^{\sigma}\\ (Y,\sigma),\ T_{1/2}\Rightarrow \mathcal{K}_g^{\sigma}=\mathcal{K}^{\sigma}\end{array}\right\}\Rightarrow g^{-1}[A]\in\mathcal{K}^{\sigma}\\ f,\ \text{g-sür.}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow f^{-1}[g^{-1}[A]] = (g\circ f)^{-1}[A]\in\mathcal{K}_g^{\tau}$$

$g\circ f$:X→Z g-sür.[13]

4) (X,τ),(Z,ρ) herhangi topolojik uzaylar, (Y,σ), $T_{1/2}$ olmayan bir topolojik uzay ise, f:X→Y ve g:Y→Z fonksiyonlarının g-sürekli olması, $g\circ f$:X→Z bileşke fonksiyonunun da g-sürekli olmasını gerektirmez.

$$((Y,\sigma),\ T_{1/2}\ \text{değil}) \Rightarrow (\exists(X,\tau))(\exists(Z,\rho))(\exists f:X\to Y,\ \text{g-sür})(\exists g:Y\to Z,\ \text{g-sür.})$$

$$(g\circ f:X\to Z\ \text{g- sür.değil})$$

İspat: $X=Y=Z=\mathbb{R}$, $\tau=\{\emptyset,\mathbb{R},(1,3]\}$, $\sigma=\{\emptyset,\mathbb{R},\{4\}\}$, $\rho=\{\emptyset,\mathbb{R},[0,1)\}$, $f:(\mathbb{R},\tau)\to(\mathbb{R},\sigma)$,

$$f(x)=\begin{cases}(x-3)/(2x-4)\ , & x\neq 2\\ 2 & ,\ x=2\end{cases}\quad ,\ g:(\mathbb{R},\sigma)\to(\mathbb{R},\rho),\ g(x)=x\ \text{olsun...}$$

$$\mathcal{K}^{\tau}=\{\emptyset,\mathbb{R},\mathbb{R}\setminus(1,3]\},\ \mathcal{K}_g^{\tau}=\mathcal{K}^{\tau}\cup\{A \mid A\not\subset(1,3]\}$$

$$\mathcal{K}^{\sigma}=\{\emptyset,\mathbb{R},\mathbb{R}\setminus\{4\}\}\neq\mathcal{K}_g^{\sigma}=P(\mathbb{R})\setminus\{\{4\}\}\Rightarrow(Y,\sigma),\ T_{1/2}\ \text{değil.}$$

$$\mathcal{K}^{\rho}=\{\emptyset,\mathbb{R},\mathbb{R}\setminus[0,1)\},\ \mathcal{K}_g^{\rho}=\mathcal{K}^{\rho}\cup\{A \mid A\not\subset[0,1)\}$$

$R\backslash\{4\}\in\mathcal{K}^{\sigma}\Rightarrow f^{-1}[R\backslash\{4\}]=R\backslash\{13/7\}\in\mathcal{K}_g^{\tau},...\Rightarrow f$, g-sür.

$R\backslash(0,1]\in\mathcal{K}^{\rho}\Rightarrow g^{-1}[R\backslash(0,1]]=R\backslash(0,1]\in\mathcal{K}_g^{\sigma},...\Rightarrow g$, g-sür.

$R\backslash(0,1]\in\mathcal{K}^{\rho}\Rightarrow (g\circ f)^{-1}[R\backslash(0,1]]=f^{-1}[g^{-1}[R\backslash(0,1]]=f^{-1}[R\backslash(0,1]]=(1,3]\notin\mathcal{K}_g^{\tau}\Rightarrow$

$g\circ f:X\to Z$ g-sür.değil.

5) $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar, A, (X,τ)'da bir kapalı küme, $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ g-sürekli bir fonksiyon ise, $f_A:(A,\tau_A)\to(Y,\sigma)$, A'ya kısıtlanmış fonksiyonu da g-süreklidir.

$$(f:(X,\tau)\to(Y,\sigma),\text{ g-sür.})(A\in\mathcal{K}^{\tau})\Rightarrow(f_A:(A,\tau_A)\to(Y,\sigma),\text{ g-sür.})$$

İspat:

$$\left.\begin{array}{r}(U\in\tau_A)(f^{-1}[B]\cap A\subset U)(V\in\tau)(U=A\cap V)\Rightarrow f^{-1}[B]\cap A\subset A\cap V\subset V\\ \left.\begin{array}{r}B\in\mathcal{K}^{\sigma}\\ f:(X,\tau)\to(Y,\sigma),\text{ g-sür}\end{array}\right\}\Rightarrow f^{-1}[B]\cap A\in\mathcal{K}_g^{\sigma}(\text{Levine})\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{f^{-1}[B]\cap A}\subset V\\ f_A^{-1}[B]=f^{-1}[B]\cap A\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{f_A^{-1}[B]}\subset V\Rightarrow f_A^{-1}[B]\text{'nin, }(A,\tau_A)\text{'daki kapanışı:}=Cl_A(f_A^{-1}[B])$$

$$Cl_A(f_A^{-1}[B])=\overline{f_A^{-1}[B]}\cap A\subset V\cap A=U\in\tau_A\;/\;f_A^{-1}[B]\in\mathcal{K}_g^{\tau_A}\;/\;f_A:(A,\tau_A)\to(Y,\sigma),\text{ g-sür..}$$

6) $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar, A, (X,τ)'da (kapalı olmayan) bir küme, $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ g-sürekli bir fonksiyon ise, $f_A:(A,\tau_A)\to(Y,\sigma)$, A'ya kısıtlanmış fonksiyonu g-sürekli olmayabilir.

$(\exists(X,\tau),(Y,\sigma)$ top. uz.$)(\exists(f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$, g-sür.$)(A\subset X)(A\notin\mathcal{K}^{\tau})$

$((f_A:(A,\tau_A)\to(Y,\sigma)$, g-sür. değil)

İspat: $X=\{a,b,c\}$, $\tau=\{\emptyset,X,\{b\}\}$, $Y=\{d,e\}$, $\sigma=\{\emptyset,Y,\{d\}\}$, $f=\{(a,d),(b,e),(c,e)\}$, $A=\{a,b\}$ alınırsa, f, g-sürekli fakat, $f_A=\{(a,d),(b,e)\}$ sürekli değildir.

7) $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar, $X=A\cup B$, $A\in\mathcal{K}_g^{\tau}$, $B\in\mathcal{K}_g^{\tau}$, $f:(A,\tau_A)\to(Y,\sigma)$, $g:(B,\tau_B)\to(Y,\sigma)$, g-sürekli fonksiyonlar, her $x\in A\cap B$ için $f(x)=g(x)$ ise,

$$f*g:(X,\tau)\to(Y,\sigma),\; f*g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in A\\ g(x), & x\in B\end{cases}$$

kombine fonksiyonu da g-süreklidir.

$((X,\tau),(Y,\sigma)$ top. uz.$)(X=A\cup B)(A\in\mathcal{K}_g^{\tau})(B\in\mathcal{K}_g^{\tau})$ $(f:(A,\tau_A)\to(Y,\sigma)$, g-sür.$)$

$(g:(B,\tau_B)\to(Y,\sigma)$, g-sür.$)(x\in A\cap B\Rightarrow f(x)=g(x))\Rightarrow$

$$f*g:(X,\tau)\to(Y,\sigma),\ f*g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in A \\ g(x), & x\in B\end{cases}, \text{ g-sür.}$$

İspat: $(K\in\mathcal{K}_g^{\sigma})(f:(A,\tau_A)\to(Y,\sigma)$, g-sür.$)(g:(B,\tau_B)\to(Y,\sigma)$, g-sür.$)\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r}(f^{-1}[K]\in\mathcal{K}_g^{\tau_A})(g^{-1}[K]\in\mathcal{K}_g^{\tau_B}) \\ (A\in\mathcal{K}_g^{\tau})(B\in\mathcal{K}_g^{\tau})\end{array}\right\}\Rightarrow f^{-1}[K]\in\mathcal{K}_g^{\tau})(g^{-1}[K]\in\mathcal{K}_g^{\tau})(\text{Levine}) \\ (f*g)^{-1}[K]=f^{-1}[K]\cup g^{-1}[K] \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$(f*g)^{-1}[K]\in\mathcal{K}_g^{\tau})$

$f*g$, g-sür.

3.6 GO-Kompaktlık

3.6.1 Bir Kümenin g-açık Örtüsü

3.6.1.1 Tanım: (X,τ) topolojik uzay, $A\subset X$, $\mathcal{A}\subset\tau_g$ olmak üzere, eğer $\mathcal{A}$ ailesi A'nın bir örtüsü (yani, $A\subset\cup\mathcal{A}$) ise, $\mathcal{A}$'ya A kümesinin bir g-açık örtüsü denir.

$\mathcal{A}$, A'nın g-açık örtüsü:$\Leftrightarrow(\mathcal{A}\subset\tau_g)(A\subset\cup\mathcal{A})$

A=X ise,

$\mathcal{A}$, X'in g-açık örtüsü:$\Leftrightarrow(\mathcal{A}\subset\tau_g)(X=\cup\mathcal{A})$

3.6.1.2 Örnek: $X=\{a,b,c\}$, $\tau=\{\emptyset,X,\{a\},\{b,c\}\}=\mathcal{K}$, $\tau_g=P(X)$, $A\subset X$ ise, (X,τ) uzayında, A'nın tüm örtüleri, (aynı zamanda) A'nın, g-açık örtüleridir. $A=\{a,b\}$ için, A'nın g-açık örtülerinin ailesi:

$\{\mathcal{A}\mid(\mathcal{A}\subset\tau_g=P(X))(A\subset\cup\mathcal{A})\}:=\{\{X\},\{A\},\{A,\{a\}\},\{\{a\},\{b\}\},\ldots\}$

A'nın açık örtülerinin ailesi:

$\{\mathcal{A}\mid(\mathcal{A}\subset\tau)(A\subset\cup\mathcal{A})\}=\{\{X\},\{X,\{a\}\},\{X,\{b,c\}\},\{\{a\},\{b,c\}\},\ldots\}$ (11)

3.6.2 Sonlu Alt Örtü

3.6.2.1 Tanım: (X,τ) topolojik uzay, $A \subset X$, $\mathcal{A}$, A'nın bir g-açık örtüsü olmak üzere, eğer $\mathcal{A}$'nın, A kümesinin g-açık örtüsü olan sonlu bir $\mathcal{A}^*$ alt ailesi varsa, $\mathcal{A}$'ya sonlu bir g-açık örtüye indirgenebilir bir g-açık örtü, $\mathcal{A}^*$ ailesine de, A'nın bir sonlu g-açık alt örtüsü denir.

$\mathcal{A}$, A'nın sonlu g-açık örtüye indirgenebilir g-açık örtüsü:$\Leftrightarrow$

$(\mathcal{A} \subset \tau_g)(A \subset \cup \mathcal{A})(\exists\, \mathcal{A}^* \subset \mathcal{A})(\,|\mathcal{A}^*| < \aleph_0)(A \subset \cup \mathcal{A}^*)$

3.6.3 GO-Kompakt Uzay

3.6.3.1 Tanım: (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere, eğer, X'in her g-açık örtüsü sonlu bir alt örtüye indirgenebilirse, (X,τ)'ya bir GO-kompakt topolojik uzay denir.

(X,τ), GO-komp. top.uz.:$\Leftrightarrow[(\mathcal{A} \subset \tau_g)(X = \cup \mathcal{A}) \Rightarrow (\exists\, \mathcal{A}^* \subset \mathcal{A})(\,|\mathcal{A}^*| < \aleph_0)(X = \cup \mathcal{A}^*)]$

3.6.4 Göreceli GO-Kompakt Küme

3.6.4.1 Tanım: (X,τ) topolojik uzay, $A \subset X$ olmak üzere, eğer, A'nın her örtüsünün, bir sonlu alt örtüsü varsa, A'ya, X'e göre GO-kompakt küme denir.

A, X'e göre GO-komp.:$\Leftrightarrow[(\mathcal{A} \subset \tau_g)(A \subset \cup \mathcal{A}) \Rightarrow (\exists\, \mathcal{A}^* \subset \mathcal{A})(\,|\mathcal{A}^*| < \aleph_0)(A \subset \cup \mathcal{A}^*)]$

3.6.5 GO-Kompakt Küme

3.6.5.1 Tanım: (X,τ) topolojik uzay, $A \subset X$ olmak üzere, eğer (A,τ_A) alt uzayı GO-kompakt ise, A'ya, X'in bir GO-kompakt alt kümesi denir.

$((X,\tau)$ top. uz.$)(A \subset X) \Rightarrow [$A, GO-komp.:$\Leftrightarrow(A,\tau_A)$, GO-komp.$]$

3.6.5.2 Sonuçlar

1) Her GO-kompakt alt küme, X'e göre GO-kompakttır.

$((X,\tau)$ top. uz.$)(A \subset X) \Rightarrow [$A, GO-komp. $\Rightarrow$ A, X'e göre GO-komp.$]$

2) X'e göre GO-kompakt bir küme, GO-kompakt olmayabilir.

$(\exists (X,\tau)$ top. uz.$)(\exists A \subset X)($A, X'e göre GO-komp.$)($A, GO-komp. değil$)$

3) GO-kompakt bir uzayın, g-kapalı bir alt kümesi, X'e göre GO-kompakttır.

$((X,\tau)$, GO-komp.$)(A \in \mathcal{K}_g^{\tau}) \Rightarrow$ A, X'e göre GO-komp.

İspat:
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r} A\in \mathcal{K}_g^{\tau} \Rightarrow \backslash A\in\tau_g \\ (\mathcal{A}\subset \tau_g)(A\subset\cup\mathcal{A}) \end{array}\right\} \Rightarrow (\mathcal{A}_1=\mathcal{A}\cup\{\backslash A\}\subset\tau_g)(X=\cup\mathcal{A}_1) \\ \hfill (X,\tau),\ \text{GO-komp.} \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow (\exists\, \mathcal{A}^* \subset \mathcal{A}_1)(\,|\,\mathcal{A}^*\,| < \aleph_0)(X=\cup\,\mathcal{A}^*)$

$\Rightarrow [\ \backslash A\in\mathcal{A}^* \Rightarrow (\mathcal{A}_1^{\,*}=\mathcal{A}^*\backslash\{\ \backslash A\}\subset\mathcal{A})(\,|\,\mathcal{A}_1^*\,| < \aleph_0)(A\subset\cup\,\mathcal{A}_1^*) \Rightarrow \mathcal{A}_1^{\,*}$, $\mathcal{A}$'nın sonlu örtüsü]

$\vee\ [\ \backslash A\notin\mathcal{A}^* \Rightarrow (\mathcal{A}^*\subset\mathcal{A})(\,|\,\mathcal{A}^*\,| < \aleph_0)(A\subset\cup\,\mathcal{A}^*)$

$\Rightarrow \mathcal{A}^*$, $\mathcal{A}$'nın sonlu örtüsü]

A, X'e göreGO-komp.[11]

4) (X,τ) GO-kompakt bir topolojik uzay, (Y,σ) bir topolojik uzay, f:X→Y örten bir fonksiyon olmak üzere, eğer f fonksiyonu g-sürekli ise, f[X] = Y kompakttır.

$((X,\tau),\ \text{GO-komp.})((Y,\sigma),\ \text{top. uz.})(f{:}X\to Y\ \text{örten, g-sür.}) \Rightarrow ((Y,\sigma)\ \text{komp.})$

İspat:
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r} (f{:}X\to Y,\ \text{g-sür.}) \\ \mathcal{A}=\{f^{-1}[B]\mid B\in\mathcal{B}\} \\ (\mathcal{B}\subset\sigma)(Y=\bigcup\mathcal{B}) \end{array}\right\} \Rightarrow (\mathcal{A}\subset\tau)(X=\bigcup\mathcal{A}) \\ \hfill (X,\tau),\ \text{GO-komp.} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow (\exists\mathcal{A}^* = \{f^{-1}[B_1],\ldots,f^{-1}[B_n]\} \subset\mathcal{A})(X=\bigcup\mathcal{A}^*) \\ f{:}X\to Y\ \text{örten} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\mathcal{B}^* = \{B_1,\ldots,B_n\} \subset\mathcal{B})(Y=\bigcup\mathcal{B}^*)$

(Y,σ) komp.

SONUÇ

Bu çalışmanın II. Bölümünde temel kavramlar; metrik uzaylar, topolojik uzaylar, bazlar, çarpım ve bölüm uzayları, süreklilik, homeomorfizm, sayılabilir uzaylar, ayrılabilirlik, kompakt uzaylar ve ayırma aksiyonları mümkün olduğunca formel olarak tanımlanmıştır.

Genelleştirilmiş kapalı (genelleştirilmiş açık) kümeler sınıfının, kapalı (açık) kümeler sınıfını, genelleştirilmiş sürekli fonksiyonlar sınıfının da sürekli fonksiyonlar sınıfını kapsadığı ve bu kavramların ise $T_{1/2}$ uzayında çakıştığı görüldü. Bu çalışmada genelleştirilmiş kapalı kümelerin yalnızca kapalı kümeler, sürekli fonksiyonlar ve kompaktlık ile ilgili sonuçları bulundu. Bölüm II'de temel kavramlar kısmında yer alan diğer tüm konulara ilişkin sonuçlar araştırmaya açık olan çalışmalardır.

KAYNAKÇA

1. Lipschutz, S.; (1965), Theory and Problems of General Topology, McGraw-Hill, USA.
2. Simmons, G.F.; (1963), Introduction to Topology and Modern Analysis, Tosho Printing Co., Tokyo, Japan.
3. Giacomo, S.; (1971), Analiz Dersleri, İstanbul Üniv. Yayınları, İstanbul.
4. Aslım, G.; (1998), Genel Topology, Ege Üniv. Fen Fak. Yay. No:109, İzmir.
5. Güney, Z.; (1993), Soyut Matematiğe Giriş, Dokuz Eylül Üniv. Yay., İzmir.
6. Munkres, J.R.; (1975), Topology a First Course, Prentice Hall, Inc., USA.
7. Matshusima, Y.; (1986), Differentiable Manifolds, McGraw-Hill, USA.
8. McCarty, G.; (1967), Topology : An Introduction with Application to Topological Groups, McGraw-Hill, USA.
9. Levine, N.; (1970), Generallized Closed Sets in Topology, Rend. Cir. Mat. Palermo. 19, 89-96.
10. Dunham, W.; (1982), A New Closure Operador For Non-T_1 Topologies, Kyungpook Math. J. 22, 55-60.
11. Balachandran, K., Sundaram, P., and Maki, H.; (1991), On Genaralized Continuous Maps in Topological Spaces, Men.Fac.Sci. Kochi Univ. 12, 5-13.
12. Dunham, W.; (1977), $T_{1/2}$-spaces, Kyungpook Math. J., 161-169.
13. Cueva, M.C.; (1991), On g-Closed Sets and g-Continuous Mappings, Depertamento de Matematica Aplicada IMUFF Rau São Paulo, Brazil.

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Murad ÖZKOÇ
Doğum Yeri : Hollanda
Doğum Yılı : 07.12.1976
Medeni Hali : Bekar

EĞİTİM VE AKADEMİK BİLGİLER

İlköğretim : 1983-1991, İzmir, Beydağ Atatürk İlköğretim Okulu
Lise : 1991-1994, İzmir, Ödemiş Lisesi
Lisans : 1994-1998, İzmir, Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği
Yabancı Dil : İngilizce

MESLEKİ BİLGİLER

1999-2002 : Araştırma Görevlisi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Muğla Üniversitesi, Muğla