ARALIK 2018 Yüksek Lisans - Matematik HASAN HOMAK

**T. C.**

**GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# YARIGRUPLARDA KONGRÜANSLAR VE GREEN DENKLİK BAĞINTILARI ARASINDAKİ İLİŞKİLER

**MATEMATİK**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**HASAN HOMAK**

**ARALIK 2018**

# Yarıgruplarda Kongrüanslar ve Green Denklik Bağıntıları Arasındaki İlişkiler

**Gaziantep Üniversitesi**

**Matematik**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Danışman**

**Doç. Dr. Belgin ÖZER**

**Hasan HOMAK**

**Aralık  2018**

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tezin Adı:Yarıgruplarda Kongrüanslar ve Green Denklik Bağıntıları Arasındaki İlişkiler

Öğrencinin, Adı Soyadı: Hasan HOMAK

Tez Savunma Tarihi: 27 Aralık 2018

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ahmet Necmeddin YAZICI

FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Belgin ÖZER

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

| Jüri Üyeleri | İmzası |
|---|---|
| Doç. Dr. Belgin ÖZER | ………………….. |
| Doç.Dr. Necati OLGUN | ………………….. |
| Dr. Öğr. Üyesi Bayram BALA | ………………….. |

**İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.**

**Hasan HOMAK**

# ABSTRACT

## THE RELATIONS BETWEEN CONGRUENCES AND GREEN EQUIVALENCES IN SEMIGROUPS

**HOMAK, Hasan**

**M.Sc. Thesis in Mathematics**

**Supervisor: Assoc. Prof. Belgin ÖZER**

**December 2018**

**41 pages**

In this study, semigroups, homomorfizm, congruences, Green equivalence relations, Completely regular semigroups were given. We explain the concept of kernel congruences, trace, congruence pairs, normality and left m-normal of congruences that has an important role in semigroups. To study congruence's kernel and trace easier is than directly to study about congruences. The kernel of homomorfism is a congruence.

Moreover the relations between congruences and Green equivalence relations were given.

**Keywords:** Congruences, Green equivalence relations, trace, kernel, mark.

# ÖZET

## KONGRÜANSLAR VE GREEN DENKLİK BAĞINTILARI ARASINDAKİ İLİŞKİLER

**HOMAK, Hasan**

**Yüksek Lisans Tezi, Matematik**

**Tez Yöneticisi: Doç.Dr. Belgin ÖZER**

**Aralık 2018**

**41 sayfa**

Bu çalışmada yarıgruplar, homomorfizma, kongrüanslar, Green denklik bağıntıları, tamamıyla regüler yarıgruplar verildi. Yarıgruplarda önemli yeri olan kongrüansların çekirdek, iz, kongrüans ikilileri, işaret, normallik, sol m-normal kavramları açıklandı. Yarıgruplarda kongrüansların çekirdek ve izi üzerinde çalışmak doğrudan kongrüanslar üzerinde çalışmaktan daha avantajlıdır. Homomorfizmaların çekirdeği kongrüanslardır.

Ayrıca, kongrüanslar ve Green denklik bağıntıları arasındaki ilişkiler verildi.



**Anahtar Kelimeler:** Kongrüanslar, Green denklik bağıntıları, iz, çekirdek, işaret.

***Çok kıymetli aileme…***

**TEŞEKKÜR**

Bu çalışma süresince desteğini, deneyimini ve emeğini hiçbir zaman benden esirgemeyen ve aynı zamanda kişiliğiyle de bana örnek olan Gaziantep Üniversitesi Öğretim Üyelerinden saygıdeğer hocam Doç. Dr. Belgin ÖZER'e, maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda bulunarak bugünlere gelmemde en büyük pay sahibi olan aileme ve tüm sevdiklerime minnettarlığımı ve teşekkürlerimi sunarım.

**İÇİNDEKİLER**

**Sayfa**

## SEMBOLLER LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $A^+$ | $A$ kümesinden oluşturulan en az bir uzunluklu kelimelerin kümesi |
| $A^*$ | $A^+ \cup \{1\}$ |
| $S \times S$ | $S$ kümesinin kartezyen çarpımı |
| $S/\rho$ | $S$ yarıgrubunun $\rho$ kongrüansı ile bölüm yarıgrubu |
| $S^1$ | $S$ yarıgrubuna $\{1\}$ elemanı eklenerek elde edilen monoid |
| $S^0$ | $S$ yarıgrubuna $\{0\}$ elemanı eklenmesiyle oluşan sıfırlı yarıgrup |
| $\langle A \rangle$ | $A$ kümesi tarafından doğrulan yarıgrup |
| $B(X)$ | $X$ kümesi üzerindeki tüm bağıntıların kümesi |
| $\rho$ | Kongrüans |
| $P$ | Herhangi bir Green Denklik Bağıntısı |
| $x\rho$ | $x$ elemanının $\rho$ kongrüansına göre denklik sınıfı |
| $R^\infty$ | $R$ denklik bağıntısının geçişmeli kapanışı |
| E($S$) | $S$ yarıgrubunda tüm idempotentlerin kümesi |
| V($a$) | $a$ ’nın bütün terslerinin kümesi |
| $\mathscr{R}\mathscr{R}$ | Dikdörtgen Band |
| $\mathcal{H},\mathcal{L},\mathcal{D},\mathcal{J},\mathcal{R}$ | Green Denklik Bağıntıları |
| $\ell(\boldsymbol{S})$ | Kongrüans latisi |
| $\tau$ | Yarıgruplarda en geniş saf idempotenttir. |

# BÖLÜM 1
# GİRİŞ

Kongrüans kavramı ilk olarak 19. yüzyıl başlarında Karl Frederich Gauss tarafından verildi. Kongrüanslar farklı cebirsel yapıların bölüm çalışmasında önemli rol oynar. Yarıgruplarda kongrüanslar üzerinde önemli teoremler (Howie ve Lallement, 1966), (Howie, 1976), (Howie,1995), (Jones, 1980), (Pastijn, 1987), (Petrich ve Reilly, 1999) tarafından çalışılmıştır.

Ayrıca (Chen ve Hsieh, 1973) Green denklik bağıntıları $H, L, R, D$ ile üretilen tamamıyla regüler yarıgruplar üzerinde kongrüansları ele almışlardır.

Green Denklik Bağıntıları ilk olarak 1951 yılında A.J. Green tarafından çalışılmıştır. Bu bağıntılar yarıgruplarda idealler ve denklik bağıntılarıyla ilgilidir. Dolayısıyla yarıgrup teorisinin gelişmesinde önemli rol oynamıştır.Yarıgruplarda Çekirdek-İz yaklaşımı regüler $S$ yarıgrubunda iki parçadan oluşur. Çekirdek yani bütün idempotentlerin kümesi $\rho$ bağlantılıdır. İz yani $S$'nin idempotenlerinin kümesinin kısıtlanışıdır. Bu yaklaşımın önemi şu gerçekten dolayıdır ki $\rho$ çekirdek ve İz'le belirlenir. Ayrıca çekirdek ve İz'le ayırım analizinde çalışmak doğrudan $\rho$ üzerinde çalışmaktan daha kolaydır. Ek olarak tamamıyla regüler yarıgrup $S$'de $\rho$ için çekirdek ve İz türünden daha basit bir açıklama vardır. Çekirdek ve İz birkaç bölümde incelendiğinde teoriyi daha zengin ve çeşitli yapar. Kongrüans çalışmasında kongrüans ikilisi de önemli bir rol oynar. Çünkü $S$ üzerindeki kongrüansın Çekirdek ve İzini içeren ikilileri temsil eder. Onların soyut özellikleri kongrüans yapısını daha iyi anlamamıza yardımcı olur. Bir kongrüans ikilisi Çekirdek ve İz'in soyutlaması olduğu gibi, işaretli bir ikili bir kongrüansın sol ve sağ İşaretlerinin soyutlamasıdır. $S$ üzerindeki kongrüansları daha iyi anlamaya çalışmanın yolu Green Denklik bağıntıları ve kongrüanslar arasındaki ilişkiyi anlamaya çalışmaktır. Burada herhangi bir kongrüansla herbir Green Denklik bağıntısı arasındaki bağlantıyı anlamak önemlidir.

$L$ ile $\rho$ kongrüans birleşiminin idempotente kısıtlanışı $\rho$ nun sol işaretidir. $\rho$ nun sol işareti İz ile yakından ilgili bir kavramdır. Bu gösterimler kongrüansın İz kavramını tanımlar ve benzer bir rol oynar. Kongrüans ikilisi Çekirdek ve İz'in soyutlaması olduğu gibi işaretli ikili bir kongrüansı sağ ve sol işaretlerinin soyutlamasıdır.

Bu tez kongrüanslar ve Green Denklik Bağıntıları arasındaki ilişkileri vermektedir.

Tezin 2. bölümünde temel tanım ve teoremler verilmiştir. 3. bölümde ise konuya temel oluşturan Çekirdek, İz, İşaret, Kongrüans İkilileri, Kongrüanslar ve Green Denklik Bağıntıları arasındaki ilişkiler verilmiştir. (Petrich,1994)

# BÖLÜM 2

# TEMEL TANIM VE TEOREMLER

## 2.1. Yarıgrup Tanımları

Bu bölümde ileride kullanacağımız yarıgrup teorisindeki önemli tanım ve teoremler verilecektir.

**Tanım 2.1.1:** $S$ boştan farklı bir küme olsun. $S \times S$ den $S$ ye tanımlı bir "$\mu$" fonksiyonuna $S$ üzerinde bir kapalı **ikili işlem** denir. Her $a, b \in S$ için $a$ ve $b$ elemanlarına uygulanan bu ikili işlem $a\mu b$ şeklinde gösterilir. Eğer "$\mu$", $S$ üzerinde bir ikili işlem ise $(S, \mu)$ ikilisine bir **grupoid** denir.

**Tanım 2.1.2:** $(S, \mu)$ bir grupoid olsun. Eğer "$\mu$" ikili işlemi $S$ üzerinde birleşme özelliğine sahip, yani her $a, b, c \in S$ için

$$a\mu(b\mu c) = (a\mu b)\mu c$$

ise $(S, \mu)$ grupoidine bir **yarıgrup** denir.

Genelde "ikili işlem" yerine "çarpma işlemi" denilecektir ve bu işlem "." ile gösterilecektir. Eğer çarpma işleminin ne olduğu içerikten belli ise, $(S, .)$ yerine $S$ ve $a.b$ yerine de $ab$ yazılacaktır.

**Tanım 2.1.3:** $S$ yarıgrubu değişme özelliğine sahip, yani her $a, b \in S$ için $ab = ba$ ise $S$ yarıgrubuna **değişmeli yarıgrup** denir.

**Tanım 2.1.4:** $S$ bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Her $x \in S$ için $ax = a$ ise $a$ ya $S$ ' nin bir **sol sıfır elemanı,** her $x \in S$ için $xa = a$ ise $a$ ya $S$'nin bir **sağ sıfır elemanı** denir. Eğer $a \in S$ hem sol hem de sağ sıfır eleman ise $a$ ya $S$ nin bir **sıfır elemanı** denir.

Bir yarıgrupta birden fazla sağ veya sol sıfır eleman olabilir. Fakat bir yarıgrupta sıfır eleman varsa aşağıdaki önermeden dolayı sıfır eleman tektir ve 0 ile gösterilir.

**Önerme 2.1.5:** Bir $S$ yarıgrubunun sıfır elemanı varsa tektir.

**İspat:** $0$ ve $0'$, $S$ nin iki sıfır elemanı olsun. O halde

$0 = 00'$ ( 0, sıfır eleman olduğundan)

$= 0'$ ( $0'$, sıfır eleman olduğundan)

olur.■

**Tanım 2.1.6:** $S$ bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Her $x \in S$ için $ex = x$ ise $e$ ye $S$ nin bir **sol birim elemanı,** her $x \in S$ için $xe = x$ ise $e$ ye $S$ nin bir **sağ birim elemanı** denir. Eğer $e \in S$ hem sağ hem de sol birim eleman ise $e \in S$ nin bir **birim elemanı** denir.

Birim eleman genellikle $1_S$ veya kısaca 1 ile gösterilir. Bir yarıgrupta birden fazla sağ veya sol birim eleman olabilir. Fakat bir yarıgrupta birim eleman varsa aşağıdaki önermeden dolayı tektir.

**Önerme 2.1.7:** Bir $S$ yarıgrubunun birim elemanı varsa tektir.

**İspat:** Önerme 2.1.5 teki gibi benzer şekilde ispatlanır.■

**Tanım 2.1.8:** $S$ herhangi bir yarıgrup olsun. Eğer $S$ nin birim elemanı varsa $S$ ye bir **monoid** denir.

$$S^1 = \begin{cases} S & 1 \in S \\ S \cup \{1\} & 1 \notin S \end{cases}$$

olmak üzere, $S^1$ üzerindeki ikili işlem her $x, y \in S^1$ için

$$y = \begin{cases} xy & x, y \in S \\ x & y = 1 \\ y & x = 1 \\ 1 & x = y = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa $S^1$ bir monoid olup eğer gerekli ise birim eleman eklenerek $S$ den elde edilen monoid olarak adlandırılır.

**Tanım 2.1.9:** $S$ bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer $e^2 = e.e = e$ ise $e$ ye $S$ nin bir **idempotent** elemanı denir. $S$ yarıgrubunun tüm idempotent elemanlarının kümesi $E(S)$ ile gösterilir. Eğer $S$ yarıgrubunun tüm elemanları birer idempotent yani $E(S) = S$ ise $S$ yarıgrubuna **band** denir. Eğer $S$ yarıgrubu hem değişmeli hem de bir band ise $S$ ye bir **yarılatis ( idempotentlerin değimeli yarıgrubu)** denir.

**Tanım 2.1.10:** $S$ bir yarıgrup olsun. Eğer, her $a \in S$ için $Sa = S$ ve $aS = S$ ise $S$ ye bir **grup** denir.

**Tanım 2.1.11:** $S$ bir yarıgrup olsun. Eğer, her $a \in S$ için $ea = a$ $(ae = a)$ olacak şekilde bir $e \in S$ ve her bir $a \in S$ için $a^{-1}a = e$ $(aa^{-1} = e)$ olacak şekilde bir $a^{-1} \in S$ mevcut ise $S$ ye bir **grup** denir. Burada $e \in S$ ye grubun **birim elemanı** ve $a^{-1} \in S$ ye de $a$ elemanının **tersi** denir.

**Tanım 2.1.12:** Sadece birim elemandan oluşan $\{1\}$ kümesi bir grup olup bu gruba **aşikar grup** denir.

**Tanım 2.1.13:** $S$ bir yarıgrup ve $\phi \neq T \subseteq S$ olsun. Eğer $T, S$ deki çarpma işlemine $T \leq S$ şeklinde gösterilir.

$$S^2 = SS = \{xy : x, y \in S\} \subseteq S$$

olup $S \leq S$ olur. Ayrıca $S$ de bir sıfır eleman var ise $\{0\} \leq S$ ve $S$ bir monoid ise $\{1\} \leq S$ olur. Bu altyarıgruplara **aşikar altyarıgruplar** ve bunların dışındaki altyarıgruplara **öz altyarıgruplar** denir.

$S$ bir yarıgrup ve $T$ de $S$ nin bir altyarıgrubu olsun. Eğer $T$, $S$ deki çarpma işlemiyle bir monoid oluyorsa $T$ ye $S$ nin bir **altmonoidi,** eğer bir grup oluyorsa $T$ ye $S$ nin bir **altgrubu** denir. Benzer şekilde bir monoidin altmonoidi, bir grubun altgrubu kavramları tanımlanabilir.

**Teorem 2.1.14:** $S$ bir yarıgrup olmak üzere aşağıdaki şartlar denktir.

(i) $S$ bir dikdörtgen banttır.

(ii) $S$'nin her elemmanı idempotent ise $abc = ab$ olur,bütün $a, b, c \in S$ için.

(iii) Bir sol sıfır yarıgrup $L$ ve bir sağ sıfır yarıgrup $R$ vardır öyle ki $S \simeq L \times R$

(iv) $S$, $A \times B$ şeklinde bir yarıgruba izomorfik, $A, B$ boştan farklı kümeler olmak üzere çarma işlemi $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1, b_2)$ şeklinde verilir.

## 2.2. Homomorfizmalar

**Tanım 2.2.1:** $S$ ve $T$ iki yarıgrup ve $\psi$ de $S$ den $T$ ye bir dönüşüm olsun. Eğer her $a,b \in S$ için

$$(ab)\Psi = (a)\Psi(b)\Psi$$

se $\Psi$ ye bir **homomorfizma** denir.

$$(ab)\Psi = (b)\Psi(a)\Psi$$

ise $\Psi$ ye bir **anti-homomorfizma** denir.

**Tanım 2.2.2:** $S$ ve $T$ iki yarıgrup ve $\Psi$ de $S$ den $T$ ye bir homomorfizma olsun.

**(i)** Eğer $\Psi$ birebir ise $\Psi$ ye bir **monomorfizm** denir.

**(ii)** Eğer $\Psi$ örten ise $\Psi$ ye bir **epimorfizm** denir.

**(iii)** Eğer $\Psi$ hem monomorfizm hem de epimorfizm ise $\Psi$ ye bir **izomorfizm** denir.

**(iv)** Eğer $\psi$, $S$ den $S$ ye bir homomorfizm ise $\psi$ ye bir **endomorfizm** denir.

**(v)** Eğer $\psi$, $S$ den $S$ ye bir izomorfizm ise $\Psi$ ye bir **otomorfizm** denir.

**(vi)** Eğer $S$ den $T$ ye bir izomorfizm mevcut ise $S$ ile $T$ ye **izomorfik yarıgruplar** denir ve $S \cong T$ şeklinde gösterilir.

$S$ ve $T$ iki monoid ve $\psi$ de $S$ den $T$ ye bir (yarıgrup) anti-homomorfizma olsun. $\psi$ birebir ve örten ise $\psi$ ye **anti-izomorfizma** denir.

$S$ ve $T$ iki monoid ve $\psi$ de $S$ den $T$ ye bir (yarıgrup) homomorfizma olsun. Eğer $S$ nin birim elemanının $\psi$ altındaki görüntüsü $T$ nin birim elemanı, yani $(1_S)\psi = 1_T$ ise $\psi$ ye bir **monoid homomorfizmi** denir. Benzer şekilde, yukarıdaki diğer tanımlar da monoidler için genelleştirilebilir.

**Tanım 2.2.3:** $S$ ve $T$ iki yarıgrup ve $\psi : S \to T$ bir homomorfizm olsun. O zaman

$$\ker \Psi = \{(a,b) \in S \times S : a\Psi = b\Psi \}$$

$$im\Psi = S\Psi = \{x\Psi : x \in S \}$$

olarak tanımlanan kümelere sırasıyla nin $\Psi$ **çekirdek kümesi** ve **görüntü kümesi** denir.

**Tanım 2.2.4:** $S$ ve $T$ iki yarıgrup olsun. $S \times T = \{(s,t) : s \in S, t \in T\}$ kümesine $S$ ile $T$ nin **kartezyen çarpımı** denir. Ayrıca $s, s' \in S$ ve $t, t' \in T$ olmak üzere $S \times T$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde

$$(s,t)(s',t') = (ss',tt')$$

Şeklinde tanımlanan çarpma (ikili) işlemi ile $S \times T$ de bir yarıgruptur. Bu yarıgruba $S$ ile $T$ nin **direkt çarpımı** denir.

## 2.3. Bağıntılar ve Denklikler

**Tanım 2.3.1:** $\rho$ bir $X$ kümesi üzerinde bir ikili bağıntı olsun. Yani $\rho \subseteq X \text{ x } X$ dir. $x, y \in X$ için $(x, y) \in S$ olduğunda $x$ *ve* $y$ bağlantılıdır. Çoğu zaman $(x, y) \in \rho$ yerine $x\rho y$ yazılır.

$X \times X$ in boş alt kümesi $\emptyset$, $X \times X$ in bağıntısıdır. $X \times X$ in kendisi de bir bağıntıdır. Buna **evrensel bağıntı** denir.

**Tanım 2.3.2: (Eşitlik Bağıntısı):** $1_x = \{(x,x) x \in X\}$ şeklinde olup diagonal bağıntı olarak da adlandırılır. $1_X$ deki iki elemanın bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul o iki elemanın eşit olmasıdır.

$X$ üzerindeki tüm ikili bağıntıların kümesini $B_X$ ile gösterelim. $B_X$ üzerinde o işlemin her $\rho, \sigma \in B_X$ için $\rho \text{ o } \sigma = \{(x, y) \in X \text{ x } X : (\exists z \in X \ (x, z) \in \rho \text{ ve } (z, y) \in \sigma\}$ olarak tanımlayalım. $\rho, \sigma, \tau \in B_X$ için $\rho \subseteq \sigma \Rightarrow \rho \text{ o } \tau \subseteq \sigma \text{ o } \tau$ ve $\tau \text{ o } \rho \subseteq \tau \text{ o } \sigma$ dır. Şimdi $B_X$ deki o işlemin $\forall \rho, \sigma, \tau \in B_X$ için $\rho \text{ o } (\sigma \text{ o } \tau) = (\rho \text{ o } \sigma) \text{ o } \tau$ (birleşme özelliği) olduğunu gösterelim.

$(x, y) \in (\rho \text{ o } \sigma) \text{ o } \tau \Leftrightarrow (\exists z \in X)\ (x, z) \in (\rho \text{ o } \sigma) \text{ ve } (z\ y,) \in \tau \Leftrightarrow (\exists z \in X)$

$(\exists u \in X)\ (x, u) \in \rho$ ve $(u, z) \in \sigma$ ve $(z, y) \in \tau \Leftrightarrow (\exists z \in X)\ (\exists u \in X)\ (x, u) \in \rho$ ve $(u\ y,) \in \sigma \text{ o } \tau \Leftrightarrow (x, y) \in \rho \text{ o } (\sigma \text{ o } \tau)$ olur.

**Önerme 2.3.3**: $B_X$ , $X$ üzerinde tanımlanan tüm bağıntıların kümesi o işleminde $B_X$ de yukarıdaki gibi tanımlansın. $(B_X, \text{o})$ bir yarıgruptur. Bundan sonra $(B_x, \text{o})$ ile çalışırken $\rho \text{ o } \rho$, $\rho \text{ o } \rho \text{ o } \rho$ ,…yerlerine $\rho^2, \rho^3 \ldots$ yazacağız.

$\rho \in B_X$ ve $x \in X$ olsun. Buna göre $x\rho = \{ y \in X : (x,y) \in \rho \}$ şeklindedir.

$\forall \rho \in B_X$ olmak üzere domain dom $\rho = \{ x \in X ; \exists\, y \in X\ , (x,y) \in \rho \}$şeklinde olur. İmaj kümesi im $\rho = \{ y \in X : \exists\, x \in X , (x,y) \in \rho \}$ olarak tanımlanır. Ayrıca $\forall\, \rho, \sigma \in B_X$ için $\rho \subseteq \sigma \Rightarrow$ dom $\rho \subseteq$ dom $\sigma$ ve im $\rho \subseteq$ im σ olur.

$x\rho = \{y \in X : (x,y) \in \rho \}$ olup $x\rho \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in$ dom $\rho$ olur. Eğer $A \subseteq X$ ise

$A\rho = \cup \{ a\rho : a \in A \}$ olarak tanımlanır. Öte yandan $\forall\, \rho \in B_X$ için $\rho$ nun tersi $\rho^{-1}$ olmak üzere $\rho^{-1} = \{ (x,y) : (y, x) \in \rho \}$ olarak tanımlanır.

Buradan hareketle $\rho^{-1} \in B_X$ olduğu açıktır. $\rho, \sigma, \rho_1 \ldots \rho_n \in B_X$ için

$(\rho^{-1})^{-1} = \rho$ olur. Ayrıca $\left(\rho_1 o \rho_2 \ldots o \rho_n\right)^{-1} = \rho_n^{-1} o \ldots \rho_2^{-1} o\, \rho_1^{-1}$ şeklinde olur. Sonra $\rho \subseteq \sigma \Rightarrow \rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$ olur. Burada dikkat edilirse dom $(\rho^{-1})$= İm $(\rho)$ ve

Im( $\rho^{-1}$) = dom$\rho$ olur. $x\ \rho^{-1} \neq \emptyset \Leftrightarrow$ x ∈ Im$\rho$ olmasıdır. $\forall x \in$ dom φ için eğer |xφ|=1 ise φ ye $x$ in bir kısmi dönüşümü denir. $\forall\ x \in X$ $|x\varphi| \leq 1$ ise φ ye $x$ in bir kısmi dönüşümü denir. O halde $\forall\ x, y_1, y_2 \in X$ için $(x,y_1) \in \varphi$ ve $(x,y_2) \in \varphi_2$ $\Rightarrow y_1 = y_2$ oluyorsa φ'ye kısmi dönüşüm denir. Başka bir deyişle xφ kümesi $(x,y) \in \varphi$ olacak şekilde bir tek y elemanından oluşur.φ bir kısmi bağıntıdır. Eğer φ ,$\psi$ kısmi dönüşümleri $\varphi \subseteq \psi$ ise genellikle φ ye $\psi$ nin kısıtlaması $\psi$ ye de φ' nin genişlemesi denir.

**Tanım 2.3.4 (Kısmi dönüşüm):**

$x \in$ Dom $\alpha \Rightarrow |x(\alpha)| = 1$ ise α kısmi dönüşüm olur. (α da $x$'lerin görüntüsüdür.)

$(x,y_1), (x,y_2) \in \alpha \Rightarrow y_1 = y_2$ olur.

**Önerme 2.3.5:** $B_X$ in tüm kısmi dönüşümlerin kümesini $P_X$ ile gösterelim.

$P_X$ , $B_X$ in bir altyarıgrubudur.

**İspat:** $\emptyset$ , $\psi \in P_X$ alalım.$\emptyset$ o $\psi \in P_X$ olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki $(x,y_1), (x,y_2) \in \emptyset$ o $\psi$ olsun. $\emptyset$ o $\psi$ nin tanımından $(x,z_1) \in \emptyset$ , $(z_1,y_1) \in \psi$ $(x,z_2) \in \emptyset$ , $(z_2,y_2) \in \psi$ olacak şekilde $z_1,z_2 \in$ X vardır. Burada $\emptyset$ kısmi dönüşüm olduğundan $z_1 = z_2$ dir. $z_1 = z_2$ ve $\psi$ kısmi dönüşüm olduğundan $y_1 = y_2$ olur. O halde

$\emptyset$ o $\psi \in P_X$ dir. Yani $P_X$ , $B_X$ in bir altyarıgrubudur. ($P_X$,o) yarıgrubuna kısmi dönüşümler yarıgrubu denir. Dikkat edilecek olursa $\emptyset \in P_X$ise $\emptyset^{-1} \in P_X$ olmak zorunda değildir. Örnek olarak $\emptyset$ ={(1,1) , (2,1)} olsun. O halde

$\emptyset^{-1}$={ (1,1), (1,2)} $\notin P_X$ dir.

**Önerme 2.3.6:** Eğer $\emptyset$ , $\psi \in P_X$ ise

1) Dom($\emptyset$ o $\psi$) =[Im$\emptyset$ $\cap$dom$\psi$] $\emptyset^{-1}$

2) Im ($\emptyset$ o$\psi$ ) =[im$\emptyset$$\cap$dom$\psi$] $\psi$

3) $\forall$ x $\in$ dom($\emptyset$ o $\psi$) x($\emptyset$ o $\psi$) = (x$\emptyset$)$\psi$

**İspat 1):** $x \in$ dom ($\emptyset$ o $\psi$ ) alalım. ( $x$ ,y) $\in \emptyset$ o $\psi$ olacak şekilde y $\in X$ vardır.

( $x$ , $z$ ) $\in \emptyset$ ve ( $z$ , $y$ ) $\in \psi$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. $z \in$ Im$\emptyset$ ve $z \in$ dom $\psi$ $\Rightarrow$ $z \in$ Im$\emptyset$ $\cap$ dom $\psi$ dedir. ( $z$ , $x$ ) $\in \emptyset^{-1}$ dir. $x \in$ z$\emptyset^{-1} \subseteq$ [Im$\emptyset$ $\cap$Dom $\psi$] $\emptyset^{-1}$ olur. Dolayısıyla Dom($\emptyset$ o $\psi$) $\subseteq$ [Im$\emptyset$ $\cap$Dom$\psi$] $\emptyset^{-1}$ dir.

**İspat 2):** Tersine $x \in$ [Im$\emptyset$ $\cap$dom$\psi$] $\emptyset^{-1}$ alalım. $x \in$ Z $\emptyset^{-1}$ olacak şekilde $z \in$ Im$\emptyset$ $\cap$ dom $\psi$ vardır. $x \in$ z $\emptyset^{-1}$ $\Rightarrow$ ( $z$ , $x$ ) $\in \emptyset^{-1}$ olup ( $x$ ,z) $\in \emptyset$ dir. Ayrıca $z \in$ Im$\emptyset$ $\cap$ dom $\psi$ olup $z \in$ dom$\psi$ olur. O halde (z,y) $\in \psi$ olacak şekilde bir

y$\in X$ vardır.

O halde ( $x$ , $z$ ) $\in \emptyset \wedge$ ( $z$ , $y$ ) $\in \psi$ olup ( $x$ ,y) $\in \emptyset$ o $\psi$ olur. $x \in$ dom $\emptyset$ o $\psi$ dir.

Buradan [Im$\emptyset$ $\cap$dom $\psi$] $\emptyset^{-1}$ $\subseteq$ dom $\emptyset$ o $\psi$ olur.

Sonuç olarak [Im $\emptyset$ $\cap$dom$\psi$] $\emptyset^{-1}$ = dom $\emptyset$ o $\psi$ olur.

**İspat 3)** $x \in$ dom ($\emptyset$ o $\psi$) $\Leftrightarrow$ ( $x$ , $y$ ) $\in \emptyset$ o $\psi$ $\Leftrightarrow \exists$ z $\in X$ , ($x$, $z$) $\in \emptyset$ , (, $z$ $y$ ) $\in \psi$ olur.

$\emptyset$ ,$\psi$ , $\emptyset$ o $\psi$ ifadeleri kısmi dönüşüm oldukları için $z$ = $x$ $\emptyset$ ve $y$ = z$\psi$

ve $x$ ($\emptyset$ o $\psi$) = (z)$\emptyset$ = $y$ olur. Buradan $x$ ($\emptyset$ o $\psi$) = $y$ = z$\emptyset$ =( $x$ $\emptyset$)$\psi$ olur.

$X$ bir küme olsun. $X$ üzerinde herhangi bir kısmi dönüşüm α ‘ yı alalım. Burada

Dom$\alpha$ = $X$ olmak zorunda değildir. Eğer bir α kısmi dönüşümü için Dom $\alpha = X$ ise $\alpha$ ya bir fonksiyon denir. Böylece bir $X$ kümesi üzerinde $\emptyset$ bağıntısı bir fonksiyondur.

$\Leftrightarrow \forall\ x \in X$ $|x\emptyset|$=1 dir.( $\emptyset$ de $x$ lerin görüntüsü) Eğer $\emptyset$ ve $\psi$ fonksiyon ise $\emptyset$ o $\psi$ de bir fonksiyondur.

**Önerme 2.3.7:** $X$ 'ten $X$ e tüm fonksiyonların kümesi $T_X$ , $B_X$ in bir alt yarıgrubudur. $\alpha \in T_X$ ise $\alpha^{-1} \in T_X$ olmak zorunda değildir.

**Önerme 2.3.8:** X $\neq \emptyset$ bir küme olmak üzere

1) Eğer $\emptyset \in P_X$ için $\emptyset^{-1} \in P_X$ ise $\emptyset$ bire-birdir.

2) Eğer $\emptyset \in T_X$ için $\emptyset^{-1} \in T_X$ ise $\emptyset$ örtendir.

Bir önceki bölümde bağıntıya örnek olan sıralama bağıntısını yani yansıyan, anti-simetrik ve geçişmeli bir bağıntıyı gördük.

$P \in B_X$ olmak üzere $1_X \subseteq$ ρ ise ρ yansıyandır. $1_X : (x, x) \in$ ρ demektir. Ayrıca

$\rho \cap \rho^{-1} \subseteq 1_X \in \rho \Leftrightarrow x = y$ ise burada $\rho = (x, y)$ ve $\rho^{-1}$ =$(y, x)$ olur.

**Tanım 2.3.9:**

1 ) $1_x \subseteq \rho \Leftrightarrow \rho$ yansıyandır.

2) $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq 1_x \Leftrightarrow \rho$ anti-simetriktir.

3) $\rho \cap \rho^{-1} \Leftrightarrow \rho$ simetriktir

4 ) ρ o ρ ⊆ ρ ⇔ ρ geçişmelidir.

Burada $(x\ y,), (y, z) \in \rho \Rightarrow (x, z) \in \rho$ (Geçişme)

Ayrıca $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha^{-1} \subseteq \beta$ olduğunu hatırlayalım. $\rho^{-1} \subseteq\ \rho$ ve 3) ten dolayı.

O halde $\rho = \rho^{-1} \Leftrightarrow \rho$ simetriktir. Eğer ρ bir denklik bağıntısı ise

$\rho = 1_X$ o $\rho \subseteq \rho$ o $\rho \Rightarrow \rho \subseteq \rho$ o $\rho$ olur. Buradan $\rho$ o $\rho \subseteq \rho$ dur. O halde $\rho$ bir denklik bağıntıs $\rho o \rho = \rho \Leftrightarrow \rho$ geçişmelidir.

Eğer $\rho$ bir denklik bağıntısı ise

$1_X \subseteq \rho$ olup

$X = \mathrm{dom} 1_X \subseteq \mathrm{dom}\, \rho$

$X = \mathrm{Im} 1_X \subseteq \mathrm{Im}\, \rho$ ( Eğer ρ bir denklik bağıtısı ise $\mathrm{Im}\, \rho = \mathrm{dom}\, \rho = X$ olur.)

**Önerme 2.3.10:** $X$ kümesi üzerindeki her yansımalı bağıntı $S$ için $S^{\infty}$ bağıntısı $X$ kümesi üzerinde $S$ içeren en küçük geçişmeli bağıntı şeklinde tanımlanır.

**Önerme 2.3.11:** Eğer $X$ kümesi üzerinde $R$ bağıntısı mevcut ve $R^e$, $X$ üzerinde $R$ yi içeren en küçük denklik bağıntısı ise $(x, y) \in R^e$ olur ancak ve ancak her $x = y$ veya bazı $n \in N$ doğal sayıları için aşağıdaki geçişme sırası vardır.

$$x = z_1 \to z_2 \to \ldots z_n = y$$

## 2.4. Bir Kümenin Parçalanışı

**Tanım 2.4.1:** Bir $\pi = \{ A_i : i \in I \}$, $X$ 'in altkümelerinin ailesi eğer

(P1 ) $\forall A_i \neq \emptyset$

(P2 ) $\forall$ i,j ∈ I için $A_i \cap A_j = \emptyset$

(P3) (i∈I) için $\cup A_i = X$ oluyorsa π ye $X$ in bir parçalanışı denir.

**Önerme 2.4.2:** $\rho$, $X$ üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $X$ 'in altkümelerinin Φ(P)={ $x\rho$ : $x \in X$ } bir ailesi $X$ 'in bir parçalanışıdır. Tersine $\pi = \{A_i : i \in I\}$, $X$ 'in bir parçalanışı ise,

$$\psi(\pi) = (x, y) \in X \times X \;; (\exists\, i \in I)\; x, y \in A_i \}$$

$X$ üzerinde bir bağıntıdır. $X$ üzerindeki her denklik bağıntısı için $\psi$ (Φ(P)) = $\rho$ olur. $X$ in her $\pi$ parçalanışı için Φ( $\psi$ (π)) = π olur. Eğer $\rho$ bir denklik bağıntısı ise $(x, y) \in \rho$ yerine $x\rho y$ veya $x \equiv y \pmod{\rho}$ yazılır. $X / \rho$ kümesine (bu kümeler aslında $\rho$ ile ilişkili parçalanışın kümelerini oluşturuyordu ) $\rho$ - sınıfı veya denklik sınıfı denir. Elemanları $x\rho$ altkümelerinden oluşan $\rho$ - sınıflarının kümesi $\rho$ vasıtasıyla $X$ 'in bölüm kümesi denir. $X / \rho$ şeklinde yazılır.

**Önerme 2.4.3:** $\emptyset : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. O zaman $\emptyset \circ \emptyset^{-1}$ $X$ üzerinde $\emptyset^{-1} \circ \emptyset$ ise Y üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

**İspat:** $(x\ y,) \in \emptyset \text{ o } \emptyset^{-1}$ olsun. $\exists\ z \in Y$ için $(x,z) \in \emptyset$ ve $(z,\ y) \in \emptyset^{-1}$ ya da $(x\ z,) \in \emptyset$ ve $(y,z) \in \emptyset$ dir.Yani $x\emptyset = y\emptyset$ olur.[$\Rightarrow x\ \emptyset = y\emptyset \Rightarrow (x,y) \in \text{Ker}\ \emptyset$ ] $\Rightarrow$ [ $\emptyset \text{ o } \emptyset^{-1} = \text{Ker}\emptyset$ ] olur. Buradan $x\emptyset = x\emptyset \Rightarrow (x,x) \in \emptyset \text{ o } \emptyset^{-1}$ olup yansımalıdır.

$(\emptyset\ o\ \emptyset^{-1})^{-1} = \emptyset \text{ o } \emptyset^{-1}$ olup bu da gösterir ki $\emptyset \text{ o } \emptyset^{-1}$simetriktir.

$(\emptyset \text{ o } \emptyset^{-1}) \text{ o } (\emptyset \text{ o } \emptyset^{-1}) = \emptyset \text{ o } (\emptyset \text{ o} \emptyset^{-1}) \text{ o } \emptyset^{-1} = \emptyset \text{ o } \emptyset^{-1}$ olur veya

$(x,y),(y,z) \in \emptyset\ \ \emptyset^{-1}$ alalım. Buradan $x\emptyset = y\emptyset$ ve $y\emptyset = z\emptyset$ olup buradan

$x\emptyset = z\emptyset \Rightarrow (x,z) \in \emptyset \text{ o } \emptyset^{-1}$ olur. Dolayısıyla $\emptyset \text{ o } \emptyset^{-1}$geçişmelidir ve ispat biter.

**Tanım 2.4.4:** $X$ ve $Y$ boş olmayan iki küme olmak üzere $X \times Y$ in her bir $\rho$ alt kümesine ***X* ten *Y* ye bir bağıntı** denir. $X \times X$ in her bir $\rho$ altkümesine ise $X$ **üzerinde bir bağıntı** denir. $X$ üzerindeki tüm bağıntıların kümesi $B(X)$ ile gösterilir. $\emptyset, \Delta_X = 1_X = \{(x,x): x \in X\}$ kümesi ve $X \times X$ in kendisi $X$ üzerinde birer bağıntı olup bunlara sırasıyla **boş bağıntı, birim bağıntı** ve **evrensel bağıntı** denir. Ayrıca $\emptyset \text{ o } \emptyset^{-1}$ denklik bağıntısına $\emptyset$ nin çekirdeği denir ve $\emptyset \text{ o } \emptyset^{-1}$ =Ker $\emptyset$ olarak yazılır.

**Tanım 2.4.5:** Her $\alpha, \beta \in B(X)$ için

$$\alpha \circ \beta = \{(x,y) \in X \times X : z \in X \text{ için } (x,z) \in \alpha \text{ ve } (z,y) \in \beta\}$$

şeklinde tanımlanan ikili işlem ile $B(X)$ bir yarıgruptur. Bu yarıgruba **tüm bağıntılar yarıgrubu** denir. Ayrıca $B(X)$, birim elemanı $\Delta_X$ olan bir monoid olur.

Her $\rho \in B(X)$ için

$$\rho^{-1} = \{(x,y) \in X \times X : (y,x) \in \rho\}$$

bağıntısına $\rho$ nun **ters bağıntısı (tersi)** denir.

**Tanım 2.4.6:** $\rho$, $X$ üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. Eğer

**(i)** $1_X \subseteq \rho$ ise $\rho$ ya **yansımalı bağıntı;**

**(ii)** $\rho^{-1} = \rho$ ise $\rho$ ya **simetrik bağıntı;**

**(iii)** $\rho \circ \rho \subseteq \rho$ ise $\rho$ ya **geçişmeli bağıntı;**

**(iv)** $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_X$ ise $\rho$ ya **ters-simetrik bağıntı;**

denir. Eğer $\rho$ bağıntısı yansımalı, simetrik ve geçişmeli bir bağıntı ise $\rho$ ya $X$ üzerinde bir **denklik bağıntısı** denir.

**Tanım 2.4.7:** $\rho$, $X$ üzerinde bir denklik bağıntısı ve $x \in X$ olsun. O zaman

$$x/\rho = x\rho = \{y \in X: (x, y) \in \rho\}$$

kümesine bir **denklik sınıfı** denir. Ayrıca $X$ in tüm denklik sınıflarının ailesi olan

$$X/\rho = \{x\rho: x \in X\}$$

kümesine de $X$ in $\rho$ aracılığıyla oluşturulan **bölüm kümesi** denir.

**Tanım 2.4.8:** $X$ boş olmayan bir küme ve $R$, $X$ kümesi üzerinde herhangi bir bağıntı ise $R \subseteq X \times X$ olduğundan $R$ yi içeren denklik bağıntılarının ailesi boştan farklıdır. Böylece, $R$ yi içeren denklik bağıntılarının kesişimi de bir denklik bağıntısıdır ve bu denklik bağıntısı $R$ yi içeren en küçük denklik bağıntısıdır. Bu en küçük denklik bağıntısına $R$ **tarafından doğrulan denklik bağıntısı** denir ve $R^e$ ile gösterilir. Başka bir ifade ile $R^e = \cap \{\rho: R \subseteq \rho \text{ ve } \rho, X \text{ üzerinde bir denklik bağıntısı}\}$ olur.

Ayrıca $R = \emptyset \Rightarrow R^e = \Delta_X$,

$R$ bir denklik bağıntısı ise $R^e = R$ ve $R^e = (R^{-1})^e$ özellikleri sağlanır.

## 2.5. Kongrüanslar

**Önerme 2.5.1:** $S$ bir yarıgrup $\rho$ da $S$ üzerinde bir bağıntı olsun. $\rho$ kongrüanstır $\Leftrightarrow$ $\rho$ hem sol hem sağ kongrüanstır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ) $\rho$ bir kongrüans olsun. $(s,t) \in \rho$ alalım. $a \in S$ için $\rho$ denklik bağıntısı olup $(a,a) \in \rho$ olur. O halde $(sa,ta) \in \rho$ olup sağ kongrüans $(as,at) \in \rho$ olup $\rho$ sol kongrüanstır.

($\Leftarrow$): $\rho$ hem sağ hem sol kongrüans olsun. (s,t) , (s' ,t') $\in \rho$ alalım. (ss',tt' ) $\in S$ olmak üzere s' $\in S$ ve (s,t) $\in \rho$ ve $\rho$ da sağ uyumlu olup (ss' ,ts') $\in \rho$ olur.

t' $\in S$ ve (s' , t') $\in \rho$ ve $\rho$ sol uyumlu olup (ts' , tt') $\in \rho$ olur.( x/$\rho$ geçişmeli olup) (ss',tt') $\in \rho$ olur ki buradan $\rho$ bir kongrüanstır sonucu elde edilir.

Eğer $\rho$ bir $S$ yarıgrubu üzerinde kongrüans ise $S/\rho$ kümesinde bir ikili işlemi

$a,b \in S$ aldığımızda $(a\rho)(b\rho)$=$(ab)\rho$ şeklinde tanımlayalım. $a$, $a'$ , $b$, $b' \in S$ için $a\rho = a'\rho$ ve $b\rho = b'\rho$ ise $(a, a') \in \rho$ ve $(b, b') \in \rho$ olur. Dolayısıyla $\rho$ uyumlu olup $(ab, a'b') \in \rho$ olur. Öyle ise $\Rightarrow$ $(ab)\rho$= $(a',b')\rho$ olur. Yani tanımlanan işlem iyi tanımlıdır.

Yarıgrup homomorfizmalarının çekirdeği kongrüans olduğundan, kongrüans kavramı yarıgrup teorisinde önemli yer tutmaktadır.

**Tanım 2.5.2:** $S$ bir yarıgrup ve $R$ de $S$ üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer, her $a \in S$ ve her $(s,t),(s',t') \in R$ için

**(i)** $(as,at) \in R$ ise $R$ bağıntısına **sol uyumlu;**

**(ii)** $(sa,ta) \in R$ ise $R$ bağıntısına **sağ uyumlu;**

**(iii)** $(ss',tt') \in R$ ise $R$ bağıntısına **uyumlu**

bağıntı denir. Ayrıca sol uyumlu denklik bağıntısına bir **sol kongrüans;** sağ uyumlu denklik bağıntısına bir **sağ kongrüans;** ve uyumlu denklik bağıntısına bir **kongrüans** denir.

**Önerme 2.5.3:** $S$ bir yarıgrup ve $R$, $S$ üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $R$ nin bir kongrüans olması için gerek ve yeter koşul $R$ nin hem sol hem de sağ kongrüans olmasıdır.(Clifford ve Preston, 1961).

**Tanım 2.5.4:** $S$ bir yarıgrup ve $R$, $S$ üzerinde bir denklik bağıntısı olmak üzere tanımdan kolayca görülüyor ki, $R$ nin bir kongrüans olması için gerek ve yeter koşul $R$ nin $S \times S$ nin bir altyarıgrubu olmasıdır. O halde $S \times S$ nin altyarıgrubu olan $\Delta_S$ ve $S \times S$, $S$ üzerinde birer kongrüanstır. Bu kongrüanslara sırasıyla $S$ nin **aşikar kongrüansı** ve **evrensel kongrüansı** denir.

**Tanım 2.5.5:** $S$ bir yarıgrup ve $\rho$, $S$ üzerinde bir kongrüans olsun. $S$ nin $\rho$ ile elde edilen bölüm kümesi $S/\rho$ üzerinde bir çarpma işlemi her $a\rho, b\rho \in {}^{S}/_{\rho}$ için

$$(a\rho)(b\rho) = (ab\rho)$$

şeklinde tanımlanır ise $S/\rho$ bu çarpma işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba $S$ nin $\rho$ ile elde edilen **bölüm yarıgrubu** denir. Kolayca görülüyor ki, eğer $S$ birim elemanı $1$ olan bir monoid ise $S/\rho$ da birim elemanı $1_\rho$ olan bir monoiddir. Burada ${}^{a}/_{\rho} = \{b \in S: a\rho b\}$ şeklinde gösterilecektir.

**Tanım 2.5.6:** $S$ bir yarıgrup ve $\rho$, $S$ üzerinde bir kongrüans olsun. O zaman her $x \in S$ için $x\rho^{\#} = x\rho$ olarak tanımlanan $\rho^{\#} = S \to S/\rho$ dönüşümü bir örten homomorfizm olup bu homomorfizme **doğal homomorfizma** denir.

**Tanım 2.5.7:** $S$, $T$ iki yarıgrup ve $\psi: S \to T$ bir homomorfizm olsun. Bu durumda

$$\ker\psi = \psi o \psi^{-1} = \{(x,y) \in X \times X : x\psi = y\psi\}$$

$S$ üzerinde bir kongrüanstır.

**Teorem 2.5.8: (1. İzomorfizm Teoremi)** $S$, $T$ iki yarıgrup ve $\psi: S \to T$ örten bir homomorfizm ise $S/_{ker\psi} \cong T$ olur.

**İspat:** $\rho = ker\psi$ alalım ve $\phi: S/\rho \to T$ dönüşümü her $x\rho \in S/\rho$ için $(x\rho)\phi = x\psi$ olarak tanımlayalım. Her $x\rho, y\rho \in S/\rho$ için

$x\rho = y\rho \Leftrightarrow (x,y) \in \rho = \ker\psi \Leftrightarrow x\psi = y\psi \Leftrightarrow (x\rho)\phi = (y\rho)\phi$ ve

$(x\rho y\rho)\phi = ((xy)\rho)\phi = (xy)\psi = (x)\psi(y)\psi = ((x\rho)\phi)((y\rho)\phi)$

olduğundan $\phi$ hem iyi tanımlı hem de bir monomorfizmdir. Ayrıca $\psi$ örten olduğundan $im\phi = im\psi = T$ olup $\phi$ bir izomorfizmdir. ■

**Tanım 2.5.9:** $R$ bir $S$ yarıgrubu üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. O zaman $R^c$ kümesi

$$R^c = \{(xay, xby) : x, y \in S^1, (a,b) \in R\}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda kolayca görülür ki $R^c$, $S$ yarıgrubu üzerinde $R$ yi içeren en küçük sol ve sağ uyumlu bağıntıdır. Ayrıca, $Q$ da $S$ üzerinde herhangi bir bağıntı olmak üzere

- $R \subseteq Q \Rightarrow R^c \subseteq Q^c$,
- $(R^{-1})^c = (R^c)^{-1}$,
- $(R \cup Q)^c = R^c \cup Q^c$ ve
- $R$ bir kongrüans ise $R^c = R$ olur.

**Yardımcı Teorem 2.5.10:** $R$, $S$ yarıgrubunda sol ve sağ uyumlu bağıntı olsun. Burada $n \geq 1$olduğunda $R^n\,(= RoRoR...R)$de sol ve sağ uyumludur.

**Önerme 2.5.11:** $S$ yarıgrubunda her $R$ denkliği için aşağıdaki şart geçerlidir.

$R^* = ((R)^c)^e$ şeklinde olur.

## 2.6. Green Denklik Bağıntıları

**Tanım 2.6.1:** Eğer $a$ bir $S$ yarıgrubunun elemanı ise $a$'yı içeren $S$'nin en küçük sol ideali $Sa\cup\{a\}$ olup daha önce bu kümeyi $S^1a$ ile göstermiştik. Buna $a$ tarafından doğurulan sol esas ideal diyeceğiz. $S$ yarı grubu üzerindeki $L$ denkliği aşağıdaki kurallarla tanımlanır.

$aLb \Leftrightarrow a$ ve $b$ aynı sol esas ideali doğurur.

$aLb \Leftrightarrow S^1a = S^1b$

Benzer tanımlar sağ esas idealler için de yapılır ve $R$ denkliği tanımlanır.

$aRb \Leftrightarrow a$ ve $b$ aynı esas sağ ideali doğurur.

$aRb \Leftrightarrow aS^1 = bS^1$ dir. Bu tanımlara denk olarak $L$ için karakterizasyonlar aşağıdaki önermededir.

**Önerme 2.6.2:** $a,b \in S$ olsun.

$aLb \Leftrightarrow \exists x,y \in S^1$ öyle ki $xa = b$ ve $yb = a$ olur.

$aRb \Leftrightarrow \exists u,v \in S^1$ öyle ki $au = b$ ve $bv = a$ olur.

**İspat:** $(a,b) \in L$ yerine $aLb$ yazacağız.

$(\Rightarrow)$ $aLb$ olsun. $S^1a = S^1b$ dir. $a \in S^1a \Rightarrow a \in S^1b$ dir.$\Rightarrow \exists\ y \in S^1$ öyle ki $yb=a$ olur. Öte yandan $b \in S^1b \Rightarrow b \in S^1a \Rightarrow \exists\ x \in S^1$ öyle ki $xa=b$ dir $\exists x,y \in S^1$. olmak üzere $xa=b$ ve $yb=a$ olsun. $S^1a \subseteq S^1b$ olduğunu gösterelim. $c \in S^1a$ alalım. $\exists z \in S^1$ olmak üzere $c = za$ dır. $c = za = zyb \in S^1b$ olur. Buradan $S^1a \subseteq S^1b$ elde edilir. Benzer yolla $S^1b \subseteq S^1a$ gösterilir. O halde $S^1a = S^1b$ olup $aLb$ dir. Benzer şekilde R için de gösterilebilir.

**Örnek 2.6.3:** G bir grup ise $L$ =? $R$ =?

**Çözüm:** $(a,b) \in G\times G$ alalım. O halde $(ba^{-1})a = b$ $x = ba^{-1} \in G$ olur. Ayrıca $(ab^{-1})b=a$ ve $y=ab^{-1} \in G$ olur. Burada $L = G\times G$ dir. Benzer şekilde $(a,b) \in G\times G$ için $a(a^{-1}b)=b$ ve $b(b^{-1}a) = a$ olur. O halde $R = G\times G$

**Örnek 2.6.4:** S bir değişmeli yarıgrup ise (sağ kongrüans) $L = R$ (sol kongrüans) $(a,b) \in$ L alalım. $\exists\ x,y \in S^1$ için $xa=b$, $yb=a$ dır. Buradan $ax=b$, $by=a$ olup (a,b) $\in$ R dir ve $L = R$ dir.

**Örnek 2.6.5:** $S$ sol sıfır yarıgrup olsun. $L = S\times S$ ve $R = I_S$ dir. ( $ab = a$ )

**Çözüm:** $(a,b) \in \mathcal{L}$ alalım. $\exists\ x, y \in S^1$ $xa = b$ ve $yb = a$ dır. $\mathcal{L} = S \times S$ ve $(a,b)$ $\in \mathcal{R}$ alalım. $\exists u, v \in S^1$ olmak üzere $au=b$ ve $bv=a$ vardır. Buradan $(a,b) \in \mathcal{R}$ ise $a=b$ dir. $\mathcal{R} = 1_S$ olur.

**Önerme 2.6.6:** $L$ sağ kongrüans ve $R$ de bir sol kongrüanstır. $\mathcal{L}$ bir denklik bağıntısıdır.

**İspat:** $S^1a = S^1a \Rightarrow (a,a) \in \mathcal{L}$ yansıyandır, simetri ve geçişme özelliği vardır. $S^1a = S^1a$ $(a,a) \in$ L yansıyandır. $S^1a = S^1b$, $S^1b = S^1c$, $S^1a = S^1c$ $(a,c) \in$ L $(a,b) \in \mathcal{L}$ ve c $\in$ S alalım. $S^1a = S^1b \Rightarrow S^1ac = S^1bc \Rightarrow (ac,bc) \in \mathcal{L}$ olup $\mathcal{L}$ sağ kongrüanstır. Benzer yolla $aS^1 = bS^1$ ve $caS^1 = cbS^1 \Rightarrow (ca,cb) \in \mathcal{L}$ olup $\mathcal{R}$ sol kongrüanstır. $(a,b) \in \rho \circ \sigma$ olmak üzere $\exists\, x$, $(a, x) \in \rho$ ve $(x,b) \in \sigma$ olur.

**Önerme 2.6.7:** $L \circ R = R \circ L$

**İspat:** $(a,b) \in$ S için $(a,b) \in L \circ R$ olsun. $\exists c \in S$ vardır öyle ki $(a,c) \in L$ ve $(c,b) \in$ $R$ olur. Yani buradan $aLccRb$ olur. $\exists\ x, y, u, v \in S^1$ vardır öyle ki $xa = c$ ve $yc = a$ şeklinde olur. Buradan $cu = b$ ve $bv = c$ dir. Burada amaç $(a,b) \in$ R o $L$ ve $(a,d) \in R$ ve $(d,b) \in L$ olmalıdır. Dolayısıyla $au = ycu = d$ diyelim. $dv = ycuv = ybv = yc = a$ olur. Yani $au = d$, $dv = a$ olup $(a,d) \in R$ ani $aRb$ dir. Buradan $yb = ycu = d$ olur. Dolayısıyla $xd = xcyu = xdu = cu = b$ olur. O halde $yb = d$ ve $xd = b$ olup $(d,b) \in$ $L$ ve $dLb$ olur. $aRb$ ve d $\mathcal{L}$ $b$ olup
$(a,b) \in$ R o $\mathcal{L}$ dir.

Buradan $\mathcal{L} \circ R \subseteq R \circ \mathcal{L}$ olduğu gösterildi. $R \circ \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L} \circ$ R olduğu benzer şekilde gösterilir. Dolayısıyla $R \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ R$ elde edilir.

**Tanım 2.6.8:** $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ için $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ de bir denkliktir. Bu denkliğe $H$ diyelim. Bu durumda $H = L \cap R$ dir. $D = L \cup R = L \cup R$ ( $L \cup R$ ) yi içeren en küçük denklik bağıntısıdır. Dolayısıyla $D = L \circ R = R \circ L$ dir. Şimdi $aJb \Leftrightarrow S^1aS^1 = S^1bS^1$ dir.$\Leftrightarrow \exists\, x$,y,u,v $\in S^1$ vardır öyle ki $x\,ay$=b ve ubv=$a$ dır. $H = \mathcal{L} \cap R$ şeklinde olur. $D = (\mathcal{L} \cup R)^e$, $\mathcal{L}$ ve $R$ yi içeren en küçük denklik D = $\mathcal{L} \circ R = R \circ \mathcal{L}$ olur. Şimdi $aJb \Leftrightarrow S^1aS^1 = S^1bS^1$ dir.$\Leftrightarrow \exists\, x$,y,u,v $\in S^1$ vardır öyle ki $x\,ay$=b ve $ubv = a$ olur. $(a,b) \in$ J dir. $(a,b) \in \mathcal{L}$ alalım.

O zaman $S^1a = S^1b$ ve $S^1 a\, x = S^1$ , $S^1a = S^1b$ $S^1a = S^1b$ $S^1a = S^1b$ $S^1a = S^1b$ şeklinde olur. Ayrıca $D = J$ tanımlamadan önce yarıgruplar Green denklik bağıntılarında başka önemli özellikleri tanımlamamız gerekiyor. Burada genel özellik olarak $L-, R-, H-, D-, J-$, denklik sınıfları $a$'yı içerdiğinde $L_a$ ile gösterilir. Benzer şekilde $a$'yı içeren diğer Green denklik bağıntı sınıfları $R_a, H_a, D_a, J_a$ ile gösterilir. Burada $L, R, J$ bağıntıları onların idealleriyle
tanımlı olduğundan bu denklik sınıfları arasında aşağıdaki ilişki vardır.

Eğer $S^1a \subseteq S^1b \Rightarrow L_a \le L_b$

$aS^1 \subseteq bS^1 \Rightarrow R_a \le R_b$

$S^1aS^1 \subseteq S^1bS^1 \Rightarrow J_a \le J_b$ şeklinde olur.

## 2.7 Tamamıyla Regüler Yarıgruplar

Regüler bir yarıgrupta kongrüans analizi iki bölümden oluşur. Çekirdek yani idempotentlerle ve $\rho$- bağlantılı elemanlar kümesi ve İz yani $S$'nin idempotentler kümesinin $\rho$ ya kısıtlanışıdır. Böyle bir yaklaşım önemlidir. Çünkü $\rho$ Çekirdek ve İz ile tek şekilde tanımlanabilir. Çekirdek ve İz ayrı analizi üzerinde araştırma yapmak doğrudan $\rho$ kongrüansı üzerinde araştırma yapmaktan daha kolaydır. Kongrüans latisi $\ell(S)$ olmak üzere kongrüans latisi üzerindeki herhangi bir denklik bağıntısı bir kongrüans olur.

**Tanım 2.7.1:** Bir $S$ yarıgrubunda $a \in S$ olmak üzere eğer $a = axa$ olacak şekilde $x \in S$ mevcut ise $a$ regülerdir. $S$ 'nin tüm elemanları regüler ise $S$ de regülerdir. $S$ regüler yarıgrubunda $x$=$xax$ olacak şekilde $x$ varsa buna $a$'nın tersi denir. $a$'nın tüm ters elemanlarının kümesi V($a$) ile gösterilir.

**Tanım 2.7.2:** $S$ yarıgrubunda $a$ eleman için $a = axa$ ve $ax = xa$ olacak şekilde $x$ elemanı var ise S'ye tamamıyla regüler yarıgrup denir.

**Tanım 2.7.3:** $S$ yarıgrubu $a = axa$ birimini sağlarsa dikdörtgen band denir. Dikdörtgen bandları $\mathcal{RR}$ ile gösteririz.

**Tanım 2.7.4:** $\rho^*$, $S$ 'de en küçük dikdörtgen band kongrüansıdır.

**Tanım 2.7.5 :** $\rho$ , $S$ regüler yarıgrubunda denklik bağıntısı olsun.

a) Eğer $\rho$ | E( $S$ )=$\varepsilon$. $\rho$ 'nun E( $S$ ) üzerine kısıtlanışı $\varepsilon$ ise $\rho$ idempotent ayırıcıdır.

b) Eğer $a\rho$e ve $a \in S$ , e $\in$ E( $S$ ) $\Rightarrow$ $a \in$ E( $S$ ) oluyorsa $\rho$ saf idempotenttir.

**Yardımcı Teorem 2.7.6:** $S$ regüler yarıgrup $\rho \in \ell(S)$ olmak üzere

(i) $S$ 'nin her homomorfik görüntüsü regülerdir.

(ii) Eğer $a \in S$ ve $a\rho \in E(S/\rho)$ ise $a\rho e$ olacak şekilde $e \in E(aSa)$ vardır.

(iii) $\rho$ idempotent ayırıcıdır $\Leftrightarrow \rho \subseteq \mathcal{H}$

(iv) Eğer $\rho$ saf idempotent ise $\rho \cap \mathcal{H} = \varepsilon$

(v) $S$ tamamıyla regüler yarıgrup olsun. Eğer $\rho \cap \mathcal{H} = \varepsilon$ ise $\rho$ saf idempotent olur.

**İspat: (i):** Hehangi bir $a \in S$ için $a^{-1}\vartheta = (a\vartheta)^{-1}, a^{0}\vartheta = (a\vartheta)^{0}$ şeklinde olur.

**(ii)** : $x \in V(a^2)$ olsun. Dolayısıyla buradan

$$(axa)^2 = a x\ x a^2 a = axa \Rightarrow axa\rho a^2 x a^2 = a^2 \rho a \text{ ve } e = axa$$

olur.

**(iii)** $\rho$ idempotent ayırıcı ve $a\rho b$ olsun. $a' \in V(a)$ olup buradan $(a'b)\rho = (a'a)\rho \in E(S/\rho)$ olup (ii) den $e \in E(a'bSa'b)$ vardır öyle ki $e\rho = (a'b)\rho = (a'a)\rho$ olur. $\rho$ idempotent ayırıcı olduğundan $e = a'a$ olur. Dolayısıyla $L_a = L_{a'a} = L_e \leq L_{a'b} \leq L_b$ olup benzer şekilde $L_b \leq L_a$ ve $L_b = L_a$ olur. Sonuç olarak $H_a = H_b$ olur ve buradan $\rho \subseteq \mathcal{H}$ olur.

**iv)**: $\rho$ saf idempotent $a(\rho \cap \mathcal{H})b$ ve $a' \in V(a)$ olsun. $aa' \in E(S)$ ve $\rho$ saf idempotent olduğundan $aa'\rho ba'$ olur. Buradan $ba' \in E(S)$ olur. $aR_{aa'}$ olduğundan sonuçta $aa', ba' \in H_{aa'}$ olur. Fakat $aa', ba' \in E(S) \Rightarrow aa' = ba'$

$aL_{aa'}$ öyle ki $bL_{aa'}$ ve $b = ba'a$ Dolayısıyla $a = aa'a = ba'a = b$ olur.

**(v)** $\rho \cap \mathcal{H} = \varepsilon$ alalım. $a \in S$ , $e \in E(S)$ öyle ki $a\rho e$ olur. $a^0 \rho e \rho a$ yani $a(\rho \cap \mathcal{H})a^0$ olup $\rho$ saf idempotent olduğunda, hipotezden $\Rightarrow a = a^0$ olur.

**Yardımcı Teorem 2.7.7:** S regüler bir yarıgrup olsun. $\mathcal{H}^0$ en geniş idempotent ayırıcı kongrüanstır S'de ve $\pi_{E(S)}$ en geniş saf idempotent kongrüanstır.

**İspat:** $S$ Yarıgrubunda $H$ Green denklik bağıntısında içerilen en büyük $S$ kongrüansında en büyük idempotent ayırıcı kongrüansın $H^0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $\pi_{E(S)}$, $S$'de en büyük saf idempotenttir. $S$ regüler yarıgrubu için en büyük idempotent ayırıcı kongrüansları $\mu_S, \tau_S$ ile gösterilir. Burada gördüğümüz gibi Green denklik bağıntıları regüler alt yarıgrupların regülerlik düzeyini gösterir.

**Yardımcı Teorem 2.7.8:** $S$ tamamıyla regüler yarıgrup olsun. $L$ ve $R$ Green denklik bağıntıları ve Regüler yarıgruplar arasında

(i) $a\ L\ b \Leftrightarrow a=ab^0\ ,\ b=ba^0 \quad (a,b \in S)$

(ii) $a\ R\ b \Leftrightarrow a=b^0a\ ,\ b=a^0b \quad (a,b \in S)$ şeklinde ilişki vardır.

**Sonuç 2.7.9:** $S$ : =(Y;$S_\alpha$) tamamıyla regüler yarıgrup olsun. $a \in S_\alpha$ , $b \in S_\beta$ ,$\alpha \leq \beta$

(i) $a^0 = (aba)^0$

(ii) $a\,L\,ba$ , $a\,R\,ab$

(iii) $a=a(ba)^0=(ab)^0a$

**İspat: i)** $(aba)^0=a^0(aba)^0=(aba)^0a^0$ olduğunu biliyoruz.

Dolayısıyla $a^0$ ,$(aba)^0 \in S_\alpha$ ve $(aba)^0 \leq a^0$ olur. Buradan da $(aba)^0 = a^0$ sonucuna ulaşırız.

ii) i) den $a = a^0\ a = (aba)^0\ a = aba(aba)^{-1}a$ olur ve Green denklik bağıntısıyla regüler yarıgrupta $aRab$ elde edilir.

iii) ii) den $aRabR(ab)^0$ elde edilir öyle ki $a=(ab)^0$a olur ve ispat biter.

# BÖLÜM 3

## KONGRÜANSLAR VE GREEN DENKLİK BAĞINTILARI ARASINDAKİ İLİŞKİLER

### 3.1. Denklik Bağıntılarının Latisi

**Tanım 3.1.1:** $\varepsilon_q(X)$, $X$ üzerindeki tüm denklik bağıntılarının kümesidir. $x \in X$ olmak üzere $\rho \in \varepsilon_q(X)$

$$x\rho = \{y \in X | x\rho y\}$$

kümesi $X$ in $\rho$- sınıfıdır. Bütün $\rho$-sınıfların kümesi $X/\rho$ ile gösterilir.

$\beta$(X) in $\alpha\beta$ çarpımı şöyle tanımlanır:

$$X\alpha\beta y \Leftrightarrow x\alpha z, z\beta y (z \in X, x, y \in X)$$

$\omega = X \times X$ olmak üzere eşitlik bağıntısı $\varepsilon$ ile gösterilir. $X$ 'de tüm denklik bağıntılarının kümesi $\mathcal{E}_x$ ile gösterilir. $\mathcal{E}_x$ kümesi üzerinde ters eleman olmak üzere $\rho^{-1}$ şöyle tanımlanır:

$x\rho^{-1}$y olur eğer y$\rho x$ ise ( $x$ ,y $\in X$ )

$\rho^t$ bağıntısı için $\rho^t = \cup_{n=1}^{\infty} \rho^n$ $\rho$ nun geçişmeli kapanışı $x\rho^t y \Leftrightarrow z_0$ $z_i \rho z_{i+1} \ldots z_n$=y olur. Buradan $\rho^t$ $X$ üzerinde $\rho$ yu içeren en küçük geçişken bağıntıdır. Bu nedenle $\rho^e = (\rho \cup \rho^{-1} \cup \mathcal{E})^t$ $X$ üzerinde $\rho$ yu içeren en küçük denklik bağıntısıdır. $\rho^e$ ifadesi $\rho$ tarafından doğurulan bir denklik bağıntısıdır.

**Yardımcı Teorem 3.1.2:** $\alpha, \beta \in \mathcal{E}_q$(X) olsun. $\alpha, \beta \in \mathcal{E}_q$(X) $\Leftrightarrow \alpha\beta = \beta\alpha$ ve

$$\alpha\beta = \alpha \vee \beta$$

şeklinde olur.

**İspat:** $\Rightarrow$: $\alpha, \beta \in \mathcal{E}_q(X)$ olsun. $\alpha \cup \beta \subseteq \alpha\beta \subseteq \alpha \cup \beta$ olduğundan $\alpha\beta$ denklik bağıntısı ise $\alpha\beta = \alpha \vee \beta$ olur ve dolayısıyla $\alpha\beta$ simetriktir. Buradan

$$\alpha\beta = (\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1} = \beta\alpha \text{ olur.}$$

$\Leftarrow$ : $\alpha\beta = \beta\alpha$ ise $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1} = \beta\alpha = \alpha\beta$ olup buradan

$$\alpha\beta\alpha\beta = \alpha\alpha\beta\beta = \alpha\beta \text{ olduğundan } \alpha\beta \text{ geçişmelidir.}$$

### 3.2. Homomorfizma ve Kongrüanslar

**Tanım 3.2.1** : Eğer$(ab)\vartheta = (a\vartheta)(b\vartheta), (a,b \in S)$ $SveS'$ yarıgruplar olsun. $\vartheta : S \to S'$ bir fonksiyon olmak üzere $\vartheta'$ bir homomorfizmadır.

**Uyarı 3.2.2.**: S' de $\rho$ bağıntısı sol uyumludur. Eğer $a\rho b \Rightarrow ca\rho cb$ şeklinde olur. Benzer şekilde $\rho$ bağıntısı sağ uyumludur eğer $a\rho b \Rightarrow ac\rho bc$ şeklinde olur. Eğer sağ ve sol uyumlu ise uyumludur denir. Kolay bir argüment S'de bir denklik bağıntısı kongrüanstır. $\Leftrightarrow a\rho b ve c\rho d \Rightarrow ac\rho bd$ olur.

**Tanım 3.2.3:** $\rho$, $S$ 'de bir bağıntı olsun. $S$ 'de $\rho^c$ bağıntısını tanımlayalım.

Eğer $a = xcy$ ve $b = xdy$ ise $a\rho^c b$ $(x, y \in S^1)$ ve buradan $c\rho d$ olur.

**Tanım 3.2.4:** $\rho$ , $S$ üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. $\rho^*$ifadesi $S$ 'de $\rho$ tarafından doğurulan bir kongrüanstır.

**Yardımcı Teorem 3.2.5:** $\rho, S$ 'de ikili bağıntı olmak üzere

$$\rho^* = ((\rho \cup \rho^{-1}) \cup \varepsilon)^c)^t$$

$S$ de $\rho$' yu içeren en küçük kongrüanstır.

**İspat:** $\rho^*$ kongrüansı $\varepsilon$ içerdiğinden yansımalıdır. Burada $(\rho \cup \rho^{-1} \cup \varepsilon)$ simetriktir. Bu yüzden $(\rho \cup \rho^{-1} \cup \varepsilon)^c$ de simetriktir. O halde $\rho^*$ da simetriktir.

Öte yandan $\rho^*$ ın geçişkenliği açıktır. Ayrıca $(\rho \cup \rho^{-1} \cup \varepsilon)^c$ uyumlu olduğundan (çarpmayla) $\rho^*$ dır. Dolayısıyla $\rho^*$ bir kongrüanstır. Eğer $\tau, S$ 'de $\rho$ yu içeren bir kongrüans ise $\rho \cup \rho^{-1} \cup \varepsilon \subseteq \tau$ ve $(\rho \cup \rho^{-1} \cup)^c \subseteq \tau$ olur ve buradan sonuç olarak

$\rho^* \subseteq \tau$ olur.

Buradan açıkça görülür ki,

$$a\rho^* b \Leftrightarrow a = b \text{ yani}$$

$$a = x_1 c_1 y_1 \quad x_1 d_1 y_1 = x_2 c_2 y_2$$

$$x_2 d_2 y_2 = x_3 c_3 y_3 \quad \ldots \, x_n d_n y_n = b \text{ olur.}$$

**Tanım 3.2.6:** $\rho$ , $S$ 'de bir kongrüans olsun. $s \in S$ için ' $s$ yi içeren $\rho$ - sınıfları $s\rho$ ile gösterilir. $S/\rho$ kümesinde bütün $\rho$- sınıfları için çarpma özelliği

$$(a\rho)(b\rho) = (ab)\rho$$

olur ve $\rho$ indirgenen bölüm yarıgrubudur.

**Tanım 3.2.7:** $\ell(S)$ , $S$ de denklik bağıntısı ve $\mathcal{E}_q(S)$ latisinin tam alt latisidir.

**Tanım 3.2.8:** $S$ 'de bir $\theta$ denklik bağıntısı için $\theta^0$, $\theta$ tarafından üretilen kongrüans olmak üzere $a\,\theta^0\,b$ bağıntısı $xay\;\theta\;xby$ tüm $x, y \in S^1$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca K $\subset S$ için $\theta_k$ $\{K_u$,S/K$\}$ kümesinin boştan farklı sınıflarını gösteren bir denklik bağıntısı olsun. Buradan $\pi_k=(\theta_k)^0$ S'de K ile üretilen temel kongrüanstır.

$$a\pi_k b \Leftrightarrow xay \in K \Leftrightarrow xby \in K \quad (x, y \in S^1)$$

şeklinde tanımlanmış olur.

**Yardımcı Teorem 3.2.9:** $S$ bir yarıgrup olsun.

i) Eğer $\theta$ , $\mathcal{E}_q$(S) ise $\theta^0$,$\theta$ tarafından içerilen en büyük kongrüanstır.

ii) Eğer K$\subseteq$S ise $\pi_k$ ifadesi K'yi sağlayan en büyük kongrüanstır.

iii) $\theta$,$\tau \in \mathcal{E}_q$(S) ise $\theta\subseteq\tau$ ve $\theta^0 \subseteq \tau^0$

### 3.3. Yarıgruplarda Çekirdek

**Tanım 3.3.1:** $\rho \in \ell(S)$ ise $\rho$'nun çekirdeği

$$Ker\,\rho = \{a \in S : a\rho e \exists e \in E(S)\}$$

Bu tanım regüler yarıgruplar için geçerlidir.

Tamamıyla regüler yarıgruplar için

$$Ker\,\rho = \{a \in S : a\rho a^0\}$$ şeklinde tanımlanır.

**Tanım 3.3.2:** $K \subset S$ ve aşağıdaki şartlar sağlanırsa $S$ normaldir.

K1) E($S$)$\subseteq K$

K2) $k \in K \Rightarrow k^{-1} \in K$

K3) $x\,y \in K \Rightarrow yx \in K$ $(x, y \in K)$

K4) $x, x^0 y \in K \Rightarrow x\,y \in K$ $(x, y \in S$

$K(S)$ , $S$ nin bütün normal alt kümeleri tarafından oluşturulur. $K \subset S$ $K \notin \{E(S), S\}$ ise $S$'nin $K$ normal alt kümesine özalt küme denir. E($S$) $K$1) , $K$2) ve $K$4) ü sağlar.

E($S$) nin K3) eşitliğini sağladığını görmüştük. Dolayısıyla E(S) her zaman normal alt kümedir. E(S) nin altyarı grup olmasına gerek olmadığı için normal alt kümenin alt yarıgrup olmasına gerek yoktur.

**Yardımcı Teorem 3.3.3:** Kısmi sıralı $K(S)$ tam latistir.

$$\wedge K = \cap K, \ \vee K = \cap\{\rho \in K(S) : \cup K \subseteq P\}$$

**Gösterim 3.3.4:**. $K \subset S$ için $K_K = \{(k, k^2) : k \in K\}$

**Teorem 3.3.5:** $K \subset S$ için aşağıdakiler geçerlidir.

1) $K$ normaldir. 2) $K = K$ er $\pi_K$ 3) $K = K$ er $\rho$ bazı $\rho \in \ell(S)$ 4) $K = K$ er $K_K$

**İspat:** 1⇒2: $k \in$ ker $\pi_K$ alalım. K1)ile $k^0 \in K$ olacak şekilde $k \pi_K k^0$ olur. $K$ ,$\pi_K$ sınıfları birleşimi olduğu için $k \in K$ olur. Dolayısıyla Ker$\pi_K \subseteq K$ olur. Tersinden $k \in K$ $x\,y \in S^1$ ve $k\ x\,y\,k \in K$ u=y$x$ olsun. $K$ 3) ten ku $\in K$ elde ederiz. $K$ 2) den $k^{-1} \in K$ olur. $k^{-1}(k^{-1})^0$(ku) $\in K$ olur.

$K$ 4) ile $k^0 y\,x = k^0$u$= k^{-1}$ku $\in K$ $K$ 3) ile $x\,k^0$y $\in$ K olur. Benzer ilişkiden $x\,k^0$y $\in K \Rightarrow xky \in K$ olur. Yani k$\pi_K k^0$ ve k $\in$ Ker $\pi_K$ olduğundan K $\subseteq$ Ker $\pi_K$.

Buradan $K$ = Ker $\pi_K$ olur.

**2⇒3** açıktır.

**3 ⇒ 4**: $K_K = \{(x, x^2) : x \in ker\ \rho\}^* = \{(x, x^2) : x \rho x^2\}^* \subseteq \rho$ olur. Dolayısıyla Ker$K_K \subseteq$ Ker$\rho$ olur. Tersinden k $\in$ Ker $\rho$ alalım. k$\rho k^2$ ve dolayısıyla k$K_K k^2$ yani $k^0 K_K$k ve $k \in$ Ker $K_K$ olur ve dolayısıyla ker $\rho \subseteq$ Ker $K_K$ olur.

**4 ⇒ 1**: $K$ 1) çekirdek tanımından çıkar. $K$ 2) bir kongrüansın bir altgruba kısıtlanışı bir grup kongrüansıdır. $\rho = K_K$ alalım.

$xy \in K \Rightarrow yx = yx\ yx\,(yx)^{-1}$=y( $x$ y) $x\,(yx)^{-1}$=y $x\,(xy)^2\,x\,(yx)^{-1}$=$(yx)^3(yx)^{-1}$= $(yx)^2$olur.

Dolayısıyla y $x \in K$ ve K3) elde edilir. Sonuç olarak $x$, $x^0$y $\in K \Rightarrow x\,\rho x^0$ ,$x^0$y $\in K$ , $\Rightarrow x$ y$\rho x^0$y $x^0$y $\in K$ , $\Rightarrow xy\ K \in K$ ,4) te sağlanır. Dolayısıyla $K$ normaldir. $K_K \subseteq \rho$ ve $\rho \subseteq \pi_K$ Ayrıca $K_K \subseteq \rho \subseteq \pi_K$olur. Tersinden $K_K \subseteq \rho \subseteq \pi_K$ olduğundan $K$ =Ker $K_K \subseteq$ Ker $\rho \subseteq$ Ker $\pi_K$= $K$ olur ve sonuçta $K$ = Ker $\rho$ olur.

**Yardımcı Teorem 3.3.6:** $K \in K$ (S) ve $a, b \in S$ olmak üzere

$$a\,\pi_K\,b \Leftrightarrow [xa \in K \Leftrightarrow xb \in K\ \forall\, x \in S] \text{ olur.}$$

**İspat:** $\rho$ sağ yönlü bir bağıntı olsun ve $a\rho b$ olmak üzere herhangi $x$ ,y $\in S^1$ ve $x$ ,y $\in S$ olmak üzere $x\,ay \in K \Leftrightarrow$ y $x\,a \in$ K ( K3) $\Leftrightarrow$ y $x\,b \in$ K ve $a\rho$b olduğundan $\Leftrightarrow x\,by \in K$ (K3 ile) K3) ü kullanarak $a \in$ K $\Rightarrow a^0 a \in$ K $\Rightarrow a^0 b \in$ K $\Rightarrow a^0\, b\, b^0 \in$ K $\Rightarrow b^0 a^0$b $\in$ K $\Rightarrow b^0 a^0 a \in$ K $\Rightarrow b^0 a \in$ K $\Rightarrow b^0$b $\in$ K $\Rightarrow$ b $\in$ K ve yalnız $b \in$ K $\Rightarrow a \in$ K olur. Dolayısıyla $a\,\pi_K\,b$ olur ve $\rho \subseteq \pi_K$ elde edilir.

**Tanım 3.3.7:** $F$ bağıntısı $a\,F\,b$ eğer $ab^{-1} \in$ E(S) olmak üzere ($a$,$b \in S$ )şeklinde tanımlanır.

**Yardımcı Teorem 3.3.8:** $\rho \in \ell(S)$ için aşağıdakiler denktir.

1) $\rho$ saf idempotenttir.
2) $Ker\ \rho$ = E($S$)
3) $\rho \subseteq F$
4) $\rho$ bandlar üzerinde tanımlıdır.
5) $\rho \cap D \subseteq \mathcal{Y}$

**Yardımcı Teorem 3.3.9:** $\rho \in \ell( S )$ için aşağıdakiler denktir.

1) $\rho$, $RR$ üzerinde tanımlıdır. 2) $\rho \subseteq \mathcal{Y}$ 3) $\rho \subseteq \mathcal{D}$ , $\rho \cap$ H= $\varepsilon$

**İspat:1)⇒**2):$a\rho b$,$a' \in$ V($a$) olsun. $a'$=$aa'\rho ba'$ hipotezden $aa'$=($aa'$)($ba'$)($aa'$) olur, $a'$=$a'ba'$ olduğunda $a$=$aa'a \Rightarrow b\rho ba'b$ herhangi $b' \in$ V($b$) için $bb'\rho ba'bb'$ elde edilir. Yine hipotezden ($bb'$)= ($bb'$) (b$a'bb'$) ($bb'$) ($b$=b$a'b$) Buradan $a' \in$ V($b$) olduğundan, V($a$) $\subseteq$ V($b$) ve simetri özelliğinden V($a$) = V($b$) ve $\rho \subseteq \mathcal{Y}$ olur.

**2)⇒ 3**): $a\mathcal{Y}b$ alalım. Buradan V($a$) = V($b$) ve $a^{-1} \in$ V($a$) $\Rightarrow a^{-1} \in$ V($b$) olup $a^{-1}$=$a^{-1}b\ a^{-1}$ ve $b$=b$a^{-1}b \Rightarrow a\mathcal{D}b$. Hipotezden $\rho \cap \mathcal{D} \subseteq \mathcal{Y}$ olur ve

Sonuç olarak $\rho \cap \mathcal{H}$ =$\varepsilon$ olur.

**3)⇒ 1):** $\rho \subseteq \mathcal{D}$ olduğundan $\rho$ tamamıyla basit yarıgruplar üzerinde tanımlıdır. Buradan $\rho \cap \mathcal{H}$ =$\varepsilon$ olup $\rho$ bandlar üzerinde tanımlıdır ve dolayısıyla dikdörtgen band üzerinde tanımlıdır.

**Sonuç 3.3.10:** $y^0$, $S$'de dikdörtgen band üzerinden, $S$'deki en büyük kongrüanstır.

**Yardımcı Teorem 3.3.11:** $\rho \in \ell( S )$ için aşağıdakiler denktir.

1) $\rho$, $RL$ üzerinde tanımlıdır.
2) $\rho \subseteq \mathcal{Y} \cap R$

3) $\rho \subseteq \tau_S \cap R$

4) $\rho \subseteq R$, $\rho \cap L = \varepsilon$

5) $\rho \subseteq R$ , $\rho \cap \mathcal{H} = \varepsilon$

**Sonuç 3.3.12:** $\mathcal{Y}^0 \cap \mathcal{R}^0 = \tau_S \cap \mathcal{R}^0$ $R$ $RL$ üzerinden, $S$ 'de en geniş kongrüanstır.

**İspat:** $\mathcal{Y}^0 \cap \mathcal{R}^0 = (\mathcal{Y} \cap \mathcal{R})^0 = (\tau \cap \mathcal{R})^0 = \tau \cap \mathcal{R}^0$

$$\tau = \{ (a,b) \in S \times S : xa \in E(S) \Leftrightarrow xb \in S \ \forall x \in S \}$$

olur ve buradan $\tau \cap \mathcal{D}$ elde edilir. Böylece $\tau$ nun $aDb$ karakteristiği oluşur.

**Yardımcı Teorem 3.3.13:** $ab \in S$ alalım. $ab^{-1}$, $a^0 b^0 \in$ E(S) ve $a\mathcal{D}b$ olsun.

O halde $a \in E(S) \Leftrightarrow b \in E(S)$ dir.

**Tanım 3.3.14:** $S$ regüler yarıgrup E-ayırdedici $S$ 'de denklik bağıntısı ise saf idempotent kongrüanstır. $S$ 'de bir kongrüans eğer $S/\rho$ ayırt edici ise E- ayırt edicidir.

Bütün sağ E-ayırt edicileri tam regüler yarıgruplar için oluştururuz. Özellikle $S$ bir E-ayırt edicidir $\Leftrightarrow \tau = \varepsilon$

**Önerme 3.3.15:** $\tau_s$ kongrüansı $S$ üzerinde tek saf idempotenttir ve E-ayırt edici kongrüanstır.

**Yardımcı Teorem 3.3.16:** $\lambda, \rho \in \ell(S)$ ve $\rho \subseteq \lambda$ olsun.

$$\lambda/\rho \text{ saf idempotenttir.} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\lambda = \mathrm{Ker}\rho \text{ dir.}$$

**Yardımcı Teorem 3.3.17:** $\rho \in \ell(S)$ için aşağıdakiler denktir.

(i) $\rho$ bir band kongrüanstır.

(ii) $\mathcal{H} \subseteq \rho$

(iii) Ker $\rho = S$

**İspat:** $a, b \in S$ olsun.

(i) $\Rightarrow$(ii): Daha önce Green denklik bağıntılarından dolayı

$$aHb \Rightarrow a^0 = b^0 \Rightarrow a\rho a^0 = b^0 \rho b$$

olduğundan $H \subseteq \rho$ olur.

(ii)$\Rightarrow$(iii): $aHa^0$ olduğunu biliyoruz. Hipotezden $a\rho a^0$ olur. Öyle ki $a \in \ker\rho$ ve dolayısıyla $S \subseteq \ker\rho$ elde edilir.

(iii)$\Rightarrow$(i): Hipotezden $a \in \ker\rho$ ve $a \in S$ olduğunu biliyoruz. Buradan hareketle $a\rho a^0$ ve $a\rho \in E(S/\rho)$ olur. Sonuç olarak $S/\rho$ bir banddır.

Dolayısıyla çekirdek ve özellikleri kongrüansları daha iyi anlamamıza yardımcı olur. Çünkü belirli denklik sınıfları kendilerinin çekirdek özellikleriyle tanımlanır. Önemli bir özellik band kongrüans en küçük $\beta$ band kongrüansıyla belirlendiği görülür.

### 3.4. Yarıgruplarda İz

**Tanım 3.4.1:** $\rho \in \varepsilon_q(S)$ için $\rho$ 'nun izi tr $\rho = \rho \mid E(S)$ dir.

E($S$) üzerindeki bir $\tau$ denklik bağıntısı aşağıdaki koşulları sağlarsa normaldir.

$$\text{(T)} \quad e\tau f \quad x,y \in S^1 \Rightarrow (xey)^0\tau(xfy)^0$$

**Tanım 3.4.2:** $S$ tamamıyla regüler yarıgrubuna temel denir. Eğer $S$ 'de eşitlik bağıntısı onun tek idempotent ayırıcı kongrüansları ise. Ayrıca $S/\rho$ temel ise $\rho$ da temeldir. Özel olarak $S$ temeldir $\Leftrightarrow \mu_s=\varepsilon$

**Teorem 3.4.3:** $\rho$ , $E(S)$ de olmak üzere aşağıdakiler denktir.

(i) $\tau$ normaldir.

(ii) $\tau=(\mathcal{H}\tau\mathcal{H})^0$

(iii) $\tau=$ tr$\rho$ bazı $\rho \in \ell(S)$

(iv) $\tau = tr\tau^*$

**İspat :** (i) ⇒ (ii): $\mathcal{H}\tau\mathcal{H}$ ın yansımalı ve simetrik olduğu açıktır. $aH\tau Hb$ ve $bH\tau Hc$ olsun. O halde bazı $x, y, z, \omega$, için $aHx\tau yHbH\omega\tau zHc$ olur. Fakat $x\tau y$ ve $\omega\tau z$ olduğundan $yH\omega$ ve $y,\omega \in E(S)$ olur. Buradan $y=\omega$ ve dolayısıyla $x\tau z$ olur ki $aHx\tau zHc$ ve $aH\tau Hc$ olur. Dolayısıyla $H\tau H$ geçişmeli olur ve böylece $\lambda=(H\tau H)^0$ tanımlanır. $e\tau f$ ve $x,y \in S^1$ olsun. Buradan $(xey)H(xey)^0\tau(xfy)H(xfy)^0$ ve $(xey)H\tau H(xfy)$ olur. Sonuçta $\tau \subseteq \lambda$ ve özel olarak $\tau \subseteq$ tr$\lambda$ olur.

Tersinden $e$ tr$\lambda$ $f$ olsun. Sonra $e\mathcal{H}\tau\mathcal{H}f$ ve dolayısıyla $e\mathcal{H}g\tau h\mathcal{H}f$ olur bazı $g,h \in E(S)$ olur. Fakat sonra $e\tau f$ olduğundan $g=h$ ve $h=f$ olur. Sonuç olarak tr$\lambda \subseteq \tau$ olur ve eşitlik sağlanır.

**(iii)⇒(iv):** Öncelikle $\tau^*=(tr\ \rho)^* \subseteq \rho$ olur ve dolayısıyla $(tr\ \tau)^* \subseteq$ tr$\rho$ olur.

Eğer $e$ tr$\rho$ $f$ ise buradan $e\tau f$ ve $e\tau^* f$ olur. Buradan tr $\rho \subseteq$ tr$\tau^*$ olur ve eşitlik sağlanır.

**iv)⇒ (i)** : $e\tau f \Rightarrow e\tau^* f \Rightarrow (xey)^0\tau^*(xfy)^0 \ \forall\ x,y \in S^1 \Rightarrow (xey)^0\tau(xfy)^0$

$\forall \ x,y \in S^1$ olur ve dolayısıyla $\tau$ normaldir.

**i) ⇒ (iv)**: $\rho \in \ell(S)$ olsun. $\tau$ = tr $\rho$ varsayalım. Sonra $\tau^*=(tr\ \rho)^* \subseteq \rho$ herhangi

$a,b \in S$ için $a\rho b$ olur. Buradan $a\mathcal{H}a^0$tr $\rho$ $b^0\mathcal{H}b$ olur öyle ki $a\mathcal{H}\tau\mathcal{H}b$.

Dolayısıyla $\rho \subseteq \mathcal{H}\tau\mathcal{H}$ ve buradan $\rho \subseteq (\mathcal{H}\tau\mathcal{H})^0$ olur. Tersinden $\tau^* \subseteq \rho \subseteq (\mathcal{H}\tau\mathcal{H})^0$

(ii) ve (iv) koşullarından $\tau$ = tr $\tau^* \subseteq$ tr $\rho \subseteq$ tr$(\mathcal{H}\tau\mathcal{H})^0 = \tau$ olur ve buradan $\tau$= tr $\rho$ olup ispat biter.

**Önerme 3.4.4:** $\mu_S$ kongrüansı

i) En küçük temeldir.
ii) S'de tek temel idempotent ayırıcı kongrüanstır.

**İspat**: Önce $\mu$ 'nün temel olduğunu göstermeliyiz. Denk olarak, herhangi $a,b \in$ S ve $x,y \in S^1$olmak üzere, $\mu_{s/\mu}=\mathcal{E}_{s/\mu}$ olmak üzere

a$\mu\mu_{s/\mu}$b$\mu$ ⇒(x$\mu$)(a$\mu$)(y$\mu$) $H$ (x$\mu$)(b$\mu$)(y$\mu$)

⇒$(xay)\mu\, H$ (xby)$\mu$ $=((xby)\mu)^0 \Rightarrow (xay)^0\ \mu(xby)^0$

⇒$(xay)^0\, H\, (xby)^0$⇒xay $H$ xby ⇒ a$\mu$b⇒a$\mu$=b$\mu$ olur ve dolayısıyla $\mu$ temeldir.

Şimdi $a\mu$b ve $\rho$, $S$'de temel kongrüans olsun. Herhangi $x,y\ b \in S^1$ için $xay\, H\, xby$ ve $(x\rho)(a\rho)$(y$\rho$) $H$ $(x\rho)(b\rho)$(y$\rho$) olur öyle ki $a\,\rho\mu b\,\rho$ olup hipotezden $\rho$ temel olur. $a\,\rho = b\rho$ öyle ki $a\,\rho b$ olur. Dolayısıyla $\mu \subseteq \rho$ olur ki bu $\mu$ nün minimalitesini verir.

iii) $\mu$ nün tanımıdan ve i) bölümünden elde edilir.

### 3.5. Kongrüans İkilileri

**Tanım 3.5.1:** $S$ 'nin tanımlanan alt kümeleri Çekirdekler olabilir. E($S$) üzerindeki bu denklikler İz de olabilir. Bir normal alt küme ve bir normal denkliğin bir çekirdek ve aynı kongrüansın izi ile eşleştirilebilmesi doğaldır. Burada $S$ 'de bir kongrüansı sadece Çekirdek ve İz ile tanımlanır.

**Yardımcı Teorem 3.5.2:** Herhangi bir $\rho \in \ell$(S) olmak üzere ve $a,b \in S$ ise a$\rho b$ ⇔ $a^0$tr$\rho b^0$ ve a$b^{-1} \in$ ker $\rho$ olur.

**İspat**: Eğer a$\rho b$ ise $a^0\rho b^0$ ve a$b^{-1}\rho b^0$ olur.$a^0$tr$\rho b^0$ iken a$b^{-1} \in$ ker$\rho$

Tersinden $a^0$tr$\rho b^o$ ve a$b^{-1} \in$ ker$\rho$ olsun. $a$=a$a^{-1}$a$\rho$b$b^{-1}$a=b$b^0b^{-1}$a$a^0\rho$

b$a^0b^{-1}$a$b^0$ =b$a^{-1}$(a$b^{-1}$)(a$b^{-1}$)bab$a^{-1}$(a$b^{-1}$)b=b$a^0b^0\rho$ ab$b^0$=b olur.

**Sonuç 3.5.3**: $\lambda, \rho \in \ell(S)$ için

$\lambda \subseteq \rho \Leftrightarrow \ker\lambda \subseteq \ker\rho$ ve $tr\lambda \subseteq tr\rho$, özellikle $\lambda = \rho \Leftrightarrow \ker\lambda = \ker\rho$ ve $tr\lambda = tr\rho$ olur.

**Tanım 3.5.4.:** $K$ S'nin bir normal alt kümesi ve $\tau$, E(S) de normal denklik olsun. S'de ( $K$ ,$\tau$) aşağıdaki şartları sağlarsa kongrüans ikilisidir.

CP1) $e\tau f$, $x \in S$ $ex \in K \Rightarrow fx \in K$

CP2) $k \in K$ ve $x, y \in S^1 \Rightarrow (xky)^0 \tau (xk^0y)^0$ olur. Bu durumda $\rho(K, \tau)$aşağıdaki gibi tanımlanır.

CP3) $a \ \rho_{(K,\tau)} b$ olur. Eğer $a^0 \tau b^0, a\, b^{-1} \in K$ $(a, b \in S)$

$S$ için bütün kongrüans ikilisi kümeleri $LP$(S) ile gösterilir.

**Not 3.5.5**: Burada yarıgrup S'nin herhangi bir $K$ alt kümesi için K ve S/ $K$ denklik bağıntıları $\theta_K$ ile gösterilir.

**Teorem 3.5.6:** S'nin $K$ alt kümesi ve normal kongrüans $\tau$ için aşağıdakiler denktir.

i) ( $K$ , $\tau$) S'nin kongrüans ikilisidir.

ii ) $K$ = ker η $\tau$=tr η η=$\pi_K \cap (H\tau H)^0$

iii) $K$ =ker$\rho$ $\tau$=tr $\rho$ bazı $\rho \in \mathcal{L}(S)$

iv) $K$ =Ker$\xi$ ve $\tau$=tr $\xi$ $\xi = K_K \cup \tau^*$ dir.

**Önerme 3.5.7 (Kongrüans Latisi):** $X \neq \emptyset$ olmak üzere $X$ kümesi üzerinde $(X, \leq)$ ikilisine kısmi sıralı küme denir. Eğer $\leq$ bağıntısı yansıma, ters simetrik ve geçişmeli bir bağıntı ise yani $X$'in $x$ ve $y$ elemanlarının en büyük alt sınıra sahipse bu eleman $x \wedge y$ ile gösterilir ve buluşma noktası denir.Ayrıca yine $X$'in $x$ ve $y$ elemanları en küçük alt sınıra sahipse bu $x \vee y$ ile gösterilir ve buna katılma noktası denir. Eğer $X$'in her iki elemanı buluşma noktasına sahipse $X$ e yarılatis denir. Kısmi sıralı bir kümede herhangi iki eleman katılma noktası ve buluşma noktasına sahipse buna Latis denir. Kongrüans Latisi $\ell(S)$ ile gösterilir.

$S$ = (Y; $S_\alpha$) yarıgruplarının Y yarılatisi denir. $L$ herhangi bir latis olmak üzere $L$'nin boştan farklı herhangi bir alt kümesi buluşma noktası be katılma noktasına sahip ise alt latis denir. $L$'nin her alt kümesi buluşma ve katılma noktasına sahip ise tam latis denir. Ayrıca $\vartheta: S \longrightarrow Y$ olmak üzere $\alpha\vartheta^{-1} = S_\alpha$ ise bir örten $\vartheta$ örten homomorfizma olur.

$L$ yarılatisinde herhangi bir $\rho$ denklik bağıntısı kongrüanstır.

Eğer $x\rho y \Rightarrow x \wedge z\rho y \wedge z$ $(x,y,z \in L)$ şartını sağladığında. Sırasıyla $x\rho y \Rightarrow x \wedge z\rho y \wedge z$, $x\rho y \Rightarrow x \vee z\rho y \vee z$ $(x,y,z \in L)$ olur. Ayrıca $L$ latis veya yarılatisinde kısmi sıralılığı içerdiğinde ve kısmi sıralılığa uyduğunda latistir ve bu $L$ kongrüansı $\ell(L)$şeklinde gösterilir. $L$ tam latisinde $\rho$ kongrüansı tam kongrüans olarak adlandırılır, $\{x_\alpha\},\{y_\alpha\}$ aralığında olduğunda. $x \in L$ olmak üzere $x_\rho = \wedge y$, $x^\rho = \vee y$ tanım aralığı için en büyük $x\rho$ aşağıdaki aralıktadır. $x\rho = \left[x_\rho, x^\rho\right]$

### 3.6 Sol İşaret ve Sol İz

Burada $\rho$ kongrüansın İzi ile $\rho$ kongrüansın sol ve sağ İzleri yakından ilişkilidir.

**Tanım 3.6.1:** $\rho \in \ell(S)$ için, $\rho$ nun sol İşareti lm$\rho$ bağıntısı şöyle tanımlanır:

$elm\rho f$ eğer $e\rho ef$ , $f\rho fe$ $(e, f \in E(S))$ olarak tanımlanır.

Sağ işareti $rm\rho$ benzer şekilde şöyle tanımlanır:

$erm\rho f$ eğer $efe\rho$, $fef\rho$ $(e, f \in E(S))$

Özellikle $lm\varepsilon = \mathcal{L}l_{E(s)}$ olur. $\gamma$ =lm$\rho$ nın temel özellikerinden bazılarını araştırıyoruz.

$P = H$ veya $L$ için, S'de en küçük denklik bağıntısı ($\gamma$ ve $P$ yi içeren)

$\gamma$ veya $P$ ile gösterilir.

**Yardımcı Teorem 3.6.2:** $\rho \in \mathcal{L}(S)$ ve $\gamma$ =lm$\rho$

i) $e\Upsilon f \Leftrightarrow e\rho L f\rho$ $(e,f \in E(S))$

ii) $\Upsilon \in \mathcal{E}_q E(S)$

iii) tr L,tr$\rho \subseteq \Upsilon$

iv) $\Upsilon H \Upsilon = \Upsilon$

iv) $\Upsilon \vee H = \Upsilon \vee L = H\Upsilon H = \rho \vee L$

v) $\Upsilon$=tr $(\Upsilon \vee L)$=tr$(\rho \vee L)$

**Tanım 3.6.3:** E$(S)$'de $\gamma$ bir denklik bağıntısı olmak üzere sol m-normal aşağıdaki şekilde tanımlanır.

LM1) tr$L \subseteq \gamma$

LM2) $e\gamma f, x,y \in S \Rightarrow (xey)^0 \gamma (xefy)^0, (xfy)^0 \gamma (xfey)^o$

Sağ m-normal denkliği benzer şekilde tanımlanabilir.

**Teorem 3.6.4:** $E(S)$' de $\gamma$ denkliği için aşağıdaki özellikler denktir.

i) $\gamma$ denkliği sol m-normaldir.

ii) $\gamma = \mathrm{lm}(H\gamma H)^0$

iii) $\gamma = lm\rho$ bazı $\rho \in \ell(S)$ için.

iv) $\gamma = lm\left(\gamma \cap \leq_r\right)^*$

Bu teorem sol işaret ve $\gamma$ arasındaki ilişkiyi göstemekle birlikte (i)-(iv) eşitlikleri ispatlandığında sol işaret $\gamma$ kongrüansı tam olarak $\left[\gamma \cap \leq_r, (H\tau H)^0\right]$ aralığında olduğu görülecektir.

### 3.7 Sol M-normal

**Tanım 3.7.1:** E(S) de bir $\Upsilon$ denkliği aşağıdaki şartları sağladığında sol m-normaldir.

$LM1$) $\mathrm{tr}\alpha \subseteq \gamma$

$LM2$) $e\gamma f$ $x, y \in S^1 \Rightarrow (xey)^0 \gamma (xefy)^0 \Rightarrow (xfy)^0 \gamma (xfey)^0$ şeklinde tanımlanır.

Sağ m-normal benzer şekilde tanımlanır.

$RM1$) $\gamma \subseteq \mathrm{tr}\gamma$

$RM2$) $e\gamma f$ olsun. $x,y \in S^1 \Rightarrow (xefy)^0 \gamma (xey)^0 \Rightarrow (xfey)^0 \gamma (xey)^0$ olur.

Sol $m$-normal $LM(S)$, Sağ $m$-normal $RM(S)$ şeklinde gösterilir.

**Önerme 3.7.2** $L^0$ kongrüansı için aşağıdakiler denktir.

**i)** En küçük sol temeldir.

**ii)** Sol temel $S$ kongrüansında tek sağ idempotent ayırıcıdır.

**Tanım 3.7.3:** $\rho \in \ell(S)$ için bağıntı

$Ltr\rho = tr(\rho \vee L)^0$ $Rtr\rho = tr(\rho \vee R)^0$ $\rho$ nun sağ ve sol izleridir.

**Yardımcı Teorem 3.7.4:** $\rho \in \ell(S)$ için

(i) $ltr\rho \subseteq lm\rho$ ve $rtr\rho \subseteq rm\rho$

(ii) $tr\rho = ltr\rho \cap rtr\rho = lm\rho \cap rm\rho$

**Tanım 3.7.5:** $S$'de $\rho$ kongrüansı sağ idempotent ayırıcıdır. Eğer $e,f \in E(S)$ olmak üzere $e(\rho \cap \leq_r)f \Rightarrow e = f$. Ayrıca $S$ yarıgrubu sol temeldir. Eğer $S$ 'deki eşitlik bağıntısı yalnız $\Upsilon$ tarafından içerilen $S$ 'de bir kongrüanstır. Eğer $S/\rho$ sol temel ise $S$'de $\rho$ kongrüansı sol temeldir. Sıradaki Lemma teoremi bu özellikleri ayrıştırmamıza yardımcı olacaktır. Ayrıca eşitlik bağıntısı sağ idempotent ayırıcı olduğunda $\Leftrightarrow$ $S$ sol temeldir.

**Yardımcı Teorem 3.7.6:** $\rho \in \ell(S)$ için aşağıdakiler denktir.

(i) $\rho$ sağ idempotent ayırıcıdır.

(ii) $l m\rho = trL$

(iii) $\rho \subseteq L$

(iv) $ltr\rho = trL^0$

(v) $\rho$ sol gruplarla tanımlıdır.

(vi) $\rho \cap \Theta_r = \varepsilon$

## 3.8. Kongrüanslar ve Green Denklik Bağıntıları Aarasındaki İlişkiler

Tezimizin ana konusu olan bu bölümde kongrüanslar ile herbir Green Denklik Bağıntıları arasındaki ilişkilere yer verilmiştir. (Petrich,1994)

**Teorem 3.8.1:** $\rho \in \ell(S)$ olmak üzere $P$ herhangi bir Green denklik bağıntısı olsun. Buna göre

i) $\rho \vee P = \rho P \rho = (\rho \vee P)^0 \vee P$

ii) $a(\rho \vee P)b \Leftrightarrow a\rho P b\rho$ $(a,b \in S)$

**İspat**: $a,b \in S$ olsun.Öncelikle $a\rho P\rho b \Leftrightarrow a\rho P b\rho$ olduğunu göstermeliyiz.

Gerçekten $a\rho P b\rho \Rightarrow a\rho x P y b\rho$ (bazı $x,y \in S$)

$\Rightarrow a\rho = x\rho P y\rho = b\rho \Rightarrow a\rho P b\rho$

Tersi için bir kaç durumu ele alalım. Önce g= $(a^0 b^o)^0$ olsun.

Buradan $a\rho H b\rho \Rightarrow (a\rho)^0 = (b\rho)^0 \Rightarrow a^0 \rho b^0 \Rightarrow a\rho gag\, H\, gbg\rho b \Rightarrow a\rho\, H\, \rho b$ olur.

Daha sonra $a\rho\, L\, b\rho \Rightarrow (a\rho) = (b\rho)^0$,

$b\rho = (b\rho)(a\rho)^0 \Rightarrow a\rho a b^0$ , $b\rho b a^0$ olur.

Buradan $x = ab^0$, $y = ba^0 b^0 = ba^{-1}(ab^0)$, elde ederiz.

Böylece $xy^0 = (ab^0)(ba^0 b^0)^0 = ab^0 = x$

$yx^0 = (ba^0 b^0)(ab^0)^0 (ba^0 b^0) = y$ olur.

Devamında $a\rho\, L\, b\rho \Rightarrow a\rho x\, L\, y\rho b \Rightarrow a\rho\, L\, \rho b$ olur.

Sonuçta $a\, D\, \rho b\rho \Rightarrow a\rho\, L\, c\rho\, R\, b\rho$ $(c \in S$ için$) \Rightarrow a\rho a c^0, c\rho c a^0, c\rho b^0 c, b\rho c^0 b$

$\Rightarrow a\rho a\, (b^0 c)^0\ D\ (c a^o)^0 b\rho c^0 b\rho b$

$\Rightarrow a\rho\, D\, \rho b$ olur.

Dolayısıyla $a\rho\, P\, b\rho$ tüm durumlarda geçerlidir. Bu da 1. bağıntıyı kurar ve buradan $\rho\, P\, \rho$ nun denklik bağıntısı olduğu görülür.

$\rho \cup P \subseteq \rho P \rho \subseteq \rho \vee P$ olduğundan $\rho\, P\, \rho = \rho \vee P$ elde ederiz. Şimdi i) bölümünde ikinci eşitliği sağlamak kaldı. $\rho \subseteq \rho \vee P$ olduğundan

$\rho \subseteq (\rho \vee P)^0$ elde edilir.

Dolayısıyla $\rho \vee P \subseteq (\rho \vee P)^0 \vee P$ olur. Tersinden$(\rho \cup P)^0$,

$$P \subseteq \rho \vee P \Rightarrow (\rho \vee P)^0 \vee P \subseteq \rho \vee P \text{ olur.}$$

**Sonuç 3.8.2:** $P$ herhangi bir Green denklik bağıntısı olsun. $\rho \in S$ ve $a,b \in S$ öyle ki $a(\rho \vee P)\, b$ olacak şekilde u,v $\in D_{ab}$ vardır öyle ki $a\rho u\, P$ v$\rho$b dir.

**İspat:** İddia Teorem 3.8.1. kısmından ispatlanır. $P = L$, $R$ veya $H$ olabilir.

Teorem 3.8.1. ispatına göre $D$ için $c \in S$ olmak üzere

$a\rho a(b^0c)^0\mathcal{D}(ca^0)^0 b\rho b$ vardır.

Şimdi $D_{abc} \leq D_{ab} \leq D_a, D_b$ olur. Dolayısıyla $u,v \in D_{ab}$ olacak şekilde $a\rho u$ ve $b\rho$ olur. Dolayısıyla $a\rho u\, D v\rho b$ olur ki böylece iddia ispatlanmış olur.

Aşağıda ifadeleri veilen yardımcı teoremler bundan sonraki teorem, sonuç ve yardımcı teoremler içinde bazı ispatlar için referans olacaktır.

**Yardımcı Teorem II.4.6.** S=(Y;$S_\alpha$)tamamıyla regüler yarıgrup olup $a \in S_\alpha$ olsun. $b \in S_\beta$ ve $a \geq b$ olmak üzere e,f $\in$ E($S_\beta$) için vardır $b$=e$a$=$a$f.

**Yardımcı Teorem II.4.7.(i)** $\alpha \geq \beta$ $a,c \in S_\alpha$ $b \in S_\beta$ için $a\rho b$ daha sonra $c\rho d$ olur bazı $d \in S_\beta$ için $d \leq c$ olur.

**Yardımcı Teorem II.4.7.(ii).** $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ $a$, $x \in S_\alpha$ olmak üzere $\omega \in S_\beta$, $c \in S_\gamma$ ve buradan $a\rho c$ olur. Sonra $x\rho y$ olur bazı $y \in S_\beta$ olur ve buradan $\omega\rho z$ elde edilir bazı z $\in S_\gamma$ olur.

**Yardımcı Teorem II.4.7.(iii).** $a$, $x \in S_\alpha$ olsun. $y \in S_\beta$ dan $a\rho b$ ve $x \geq y$ den daha sonra $a\rho x$ olur. Sıradaki Yardımcı Teorem 3.8.3 her bir Green Denklik Bağıntısının kongrüans ile birleşimini verir.

**Yardımcı Teorem 3.8.3:** $\rho \in \ell(S)$

i) $a(\rho \vee H)b \Leftrightarrow a^0 \rho\, b^0 (a,b \in S)$

ii) $a(\rho \vee \mathrm{L})b \Leftrightarrow a\rho ab^0$, $b\rho b a^0$ $(a,b \in \mathrm{S})$

iii) $S=(\mathrm{Y};S_\alpha)$ $a \in S_\alpha, b \in S_\beta$ olmak üzere

$a(\rho \vee \mathrm{D})b \Leftrightarrow a(\rho \cap \geq)x$, $b(\rho \cap \geq)y$ olur bazı $x, y \in S_{\alpha\beta}$

**İspat**: i) Teorem 3.8.1. e göre $a\rho\, H\, b\rho \Rightarrow (a\rho)^0 = (b\rho)^0 \Rightarrow a^0 \rho\, b^0$

ii) $a\rho \mathrm{L} b\rho \Rightarrow a\rho = (a\rho)(b\rho)^0$ , $b\rho = (b\rho)(a\rho)^0$ olur ve Teorem 3.8.1' e göre $a\rho a b^0$, $b\rho b a^0$, $a(\rho \vee \mathcal{D})b$ olsun. Teorem 3.8.1. e göre $a\rho u \mathcal{D} v \rho b$ elde edilir. Böylece u ,v $\in S_\alpha$ olur. Dolayısıyla $a^2 \rho a u$ olur. $a^2 \in S_\alpha$ ve $au \in S_{\alpha\gamma}$ olmak üzere

benzer şekilde $(av)^2\ \rho (ab)(av)$ olur. Böylece $(av)^2 \in S_{\alpha\gamma}$ ve $(ab)(av) \in S_{\alpha\beta\gamma}$ elde edilir. $S_\alpha$ ,$S_{\alpha\gamma}$ ve $S_{\alpha\gamma}$ ,$S_{\alpha\beta\gamma}$ olur ve $a\rho s$ sonucuna varırız bazı $s \in S_{\alpha\beta\gamma}$. Fakat sonra Lemma II.4.7 (ii) den $t \in S_{\alpha\beta}$ ve $a\rho t$ varlığını sağlar. Lemma II.4.6 (i) $a \geq x$ elde ederiz bazı $x \in S_{\alpha\beta}$ için. Lemma II.4.7 den $a\rho x$ elde edilir. Benzer şekilde $y \in S_{\alpha\beta}$ ve $b\rho y$ ve buradan $b \geq y$ olur. Dolayısıyla

$x,y \in S_{\alpha\beta}$ olduğundan $x\mathrm{D}y$ olur.

$\Leftarrow$ : (iii) bölümünden açıktır.

**Yardımcı Teorem 3.8.4:** $\rho \in \ell(\mathrm{S})$ ve $P$ herhangi bir Green bağıntısı olsun.

(i). $\rho \cap P = (\rho \cap P)^* \cap P$

(ii). $\mathrm{Ker}\rho = \ker(\rho \cap P)^*$

**İspat:** (i): $\rho \cap P \subseteq (\rho \cap P)^* \cap P$ olduğu açıktır. Tersinden $(\rho \cap P)^* \subseteq \rho$ olur. Dolayısıyla $(\rho \cap P)^* \cap P \subseteq \rho \cap P$ olur.

**İspat (ii):** Eğer $a \in \ker \rho$ ise $a(\rho \cap \mathrm{P})a^0$ ve buradan $a(\rho \cap P)^* a^0$ ve dolayısıyla $a \in \ker(\rho \cap P)^*$ olur. Buradan $\ker \rho \subseteq \ker (\rho \cap P)^*$ olur ki

$(\rho \cap P)^* \subseteq \rho$ olduğundan ters içerme sağlanır.

**Yardımcı Teorem 3.8.5**: $\rho \in \ell(\mathrm{S})$ olsun. Bu teorem Green Denklik bağıntılarının kombinasyonlarıyla kongrüanslar arasında bağıntıları kurmaktadır.

i) $\rho \vee H = H \rho H = H (\mathrm{tr}\rho) H = (\mathrm{tr}\rho) \vee H = (\rho \vee L) \cap (\rho \vee R)$

ii) $\mathrm{tr}\rho = \mathrm{tr}\, (\rho \vee H)^0 = \mathrm{tr}\, (\rho \vee H)$

iii) $\rho \cap \mathrm{D} = (\rho \cap \mathrm{L})(\rho \cap \mathrm{R}) = (\rho \cap \mathrm{R})(\rho \cap \mathrm{L}) = (\rho \cap L) \vee (\rho \cap \mathrm{R})$

**İspat** i) $a,b \in \mathrm{S}$ olsun. Teorem 3.8.3 (i) den

$a(\rho \vee H)b \quad \Rightarrow a^0 \rho b^0 \Rightarrow a\, H\, a^0 \rho b^0\, H\, b \;\Rightarrow\; a\, H\, (\mathrm{tr}\rho)\, H\, b$ olur ve buradan açıkça görülür ki

$a[\,(\mathrm{tr}\rho) \vee H\,)b \Rightarrow a(\rho \vee H\,)b$ olur ve (i) deki ilk üç eşitlik sağlanır.

$a[(\rho \vee \mathrm{L}) \cap (\rho \vee \mathrm{R})]$ olsun. Teorem 3.8.1.(i) den $a(\rho \mathrm{L} \rho \cap \rho \mathrm{R} \rho)b$ elde edilir ki bu

$x, y, w, z \in \mathrm{S}$ varlığını ispatlar öyle ki $a\rho x \mathrm{L} y \rho b$, $a\rho w \mathrm{R} z \rho b$ öyle ki

$a\; H\; a^0 \rho x^0 = x^0 y^0 \rho a^0 b^0 \rho w^o z^0 = \; H\, z^0 \rho b^0 b$ olur.

Buradan $a\;\; H\, \rho\, H\, b$ olur. Bu $(\rho \vee \mathrm{L}) \cap (\rho \vee \mathrm{R}) \subseteq \rho \vee H$ iddiasını ispatlar.

Bu iddianın tersi açıktır.

**İspat** (ii): Eğer $e\,\mathrm{tr}(\rho \vee H\,)f$ ise Yardımcı Teorem 3.8.3.(i) den $e\rho f$ elde ederiz. Bu (ii) deki eşitliği sağlar

**İspat** (iii): $a(\rho \cap \mathrm{D})b$ olsun. Buradan $a^0 \rho b^0$ olur öyle ki $a(\rho \cap \mathrm{L})b a^0 (\rho \cap \mathrm{R})b$

Dolayısıyla $\rho \cap D \subseteq (\rho \cap \mathrm{L})(\rho \cap \mathrm{R}) \subseteq (\rho \cap \mathrm{L}) \vee (\rho \cap \mathrm{R}) \subseteq \rho \cap \mathcal{D}$ olur ki bu (iii) bölümünün ilk üç eşitliğini sağlar ve 4.eşitliği oluşturur.

Şu önerme $\rho$ kongrüansı ile her $P$ Green denklik bağıntısı için $\rho \vee P$ ve $\rho \cap P$ özelliklerinin ilişkisini verir.

**Önerme 3.8.6:** Herhangi $\rho \in \ell(\mathrm{S})$ ve $a,b \in \mathrm{S}$ olsun. Bu önermede $\rho$ kongrüansı her Green bağıntısı $P$ için $\rho \vee P$ ve $\rho \cap P$ cinsinden ifade edilmiştir.

$a\rho b \Leftrightarrow \mathrm{a}(\rho \vee H)^0 b,\; ab^{-1} \in \ker\, (\rho \cap H)^*$

$\Leftrightarrow a\, (\rho \vee L)^0 b,\; a^0 \mathrm{b}(\rho \vee \mathrm{L}) b^0 a^0 \mathrm{b},\; ab^{-1} \in \ker\, (\rho \cap L)^*$

$\Leftrightarrow a(\rho \vee \mathrm{D})b \;\; , ab(\rho \cap \mathrm{D})ba \quad ab^{-1} \in \ker\, (\rho \cap \mathcal{D})$

**İspat:** $a\rho b$ ve $\rho$ herhangi bir Green denklik bağıntısı olsun. $\rho \subseteq \rho \vee P$ olduğundan $\rho \subseteq (\rho \vee P)^0$ olur ve $a(\rho \vee P)^0 b$ olur. Ayrıca $ab^{-1}$ $\ker \rho = \ker\, (\rho \cap P)^*$ yardımcı teorem 3.8.4.(ii) den sağlanır. Ek olarak $a^0 \mathrm{b}(\rho \cap \mathrm{L}) b^0 a^0 \mathrm{b}$ ve $ab\mathcal{D}ba$ olur. Bu da sağ yönlü olarak $a\rho b$ yi ispatlar.

$\Leftarrow$: Karşıt iddia için Yardımcı Teorem 3.8.1. ve 3.8.4.(ii) sağ yönü ispatlamak için yeterlidir. Öyleyse $a^0 \rho b^0$ olur.

Eğer $a\;\; (\rho \vee H)^0 \mathrm{b}$ ise $a^0 (\rho \vee H)^0 b^0$ olur ve Yardımcı Teorem 3.8.5 (ii)den $a^0 \rho b^0$ olur. Eğer $a(\rho \vee L)^0 b$ ve $a^0 \mathrm{b}(\rho \cap \mathrm{L}) b^0 a^0 b$ Tardımcı Teorem 3.8.3.(ii) $a^0 \rho a^0 b^0$ ve $b^0 \rho b^0 a^0$ olur ve böylece $a^0 b^0 \rho \;\; b^0 a^0 b^0 \;\; \Rightarrow a^0 \rho b^0$ olur. Şimdi $a$ $(\rho \vee \mathrm{D})\mathrm{b}$ ve $ab(\rho \cap \mathcal{D})ba$ olur.

Sonuç 3.8.2.den u,v $\in D_{ab}$ için $a\rho u$, $v\rho b$ olur. Hipotezden $ab\rho ba$ öyle ki $(ab)^0\rho \le a^0\rho$ olur. Fakat $a^0\rho u^0$D $(ab)^0$ olur. Dolayısıyla $a^0\rho(ab)^0$ olur. Benzer şekilde $b^0\rho(ab)^0$ ve $a^0\rho b^0$ olur.

**Sonuç 3.8.7:** Herhangi $\lambda$ , $\rho \in \ell(S)$ ve $P$ herhangi bir Green denklik bağıntısı olmak üzere λ=$\rho$ ⇔λ∨ $P = P \vee P$ ve λ∩ $P$ =$\rho$∩ $P$ olur. $\theta^0$ kongrüans tanımında $\theta$ , S'de bir denklik bağıntısı olur.

**Yardımcı Teorem 3.8.8:** $a$,b ∈ $S$ ve $\rho \in \ell(S)$ olsun.

(i) $aL^0$b ⇔ $xaLx$b $x \in S^1$⇔$a\mathcal{D}$b ve $xa$=$xb(xb)^0$ $\forall\, x \in S^1$

ii) $a(\rho \vee L)^0$b⇔ $xa(\rho \vee L)xb$ $x \in S^1$

**İspat:** Önce (ii) bölümünü oluşturalım.

⇒$(\rho \vee L)^0$,$(\rho \vee L)$ de içerilen bir kongrüanstır. Dolayısıyla bu kısım $(\rho \vee L)^0$ ifadesinin bir sonucudur.

⇐ : $x$,y ∈ $S^1$, $xa(\rho \vee L)\,x$ b elde edilir. Fakat $\rho$ ve $L$ sağ kongrüanstırlar. Dolayısıyla $\rho \vee$ L de sağ kongrüanstır. O halde $a(\rho \vee L)^0$b olduğundan ,

$xay(\rho \vee L)xby$ olur. $xa$=$xa$ ve xb=xb$(xa)^0$ , $x \in S^1$ dir.

⇔$a\,D\,b$ ve $xa$=$xa(xb)^0$ olur $x \in S^1$$x$=1 yazdığımızda sağlanır. Tersinden herhangi bir $x \in S^1$ ve $a\,D$ b ise$xa\,D\,xb$ ve buradan $D_{xa}$ için,

$xa$=$(xa)(xb)^0$ ⇒$xa$L $x$ b⇒ $xb = xb(xa)^0$ olur.

**Sonuç 3.8.9:** Eğer $\varphi$: $S$ ↦T bir epimorfizma ve $a,b \in S$ olmak üzere $aL^0b$ olacak şekilde $a,b \in S$ ise $a\,\varphi L^0 b\varphi$ olur.

**İspat:** Yardımcı teorem 3.8.8.(i) nin bir sonucudur. Ayrıca buradan sol İz ile ilgili önemli sonuçlar elde ederiz.

**Tanım 3.8.10:** $\tau$, E($S$) de bir denklik bağıntısı olmak üzere sol t-normal aşağıdaki özellikleri oluşturur..

LT1) $\tau\ L\tau L\tau$=$\tau\ L\,\tau$

LT2) $\tau$=$tr\ (L\tau L\tau L)^0$

**Teorem 3.8.11:** E($S$) de $\tau$ denkliği için aşağıdaki şartların hepsi denktir.

i) $\tau$ sol t-normaldir.

ii) $\tau$= ltr$(L\tau L\tau L)^0$

iii) $\tau= ltr\rho$ olur bazı $\rho\in\ell(S)$ için

iv) $\tau=ltr\ (\tau\cap\leq_{r)}{}^{*})$

Ayrıca i)-iv) şartları sağlandığında $\tau$ Sol İz ile kongrüanslar $[(\tau\cap\leq_{r}),\ (L\tau L\tau L)^{0}]$ aralığında olmak durumundadır.

**İspat:** i)⇒ii) $LT1$ şartıyla $L\tau L\tau L$ sağlanır, geçişmelidir ve bir denklik bağıntısıdır. Dolayısıyla $\rho=(L\tau L\tau L)^{0}$ S' de bir kongrüanstır. Ek olarak

$\rho\vee L\subseteq L\tau L\tau L$ ve $L=L\tau L\tau L$ olur ki buradan da $(\rho\vee L)^{0}\subseteq\rho$ olur. Hatta $\rho\subseteq\rho\vee L$ olduğu görülür.

Ayrıca $\rho\subseteq(\rho\vee L)^{0}$ iken tr $(\rho\vee L)^{0}\subseteq$tr$\rho\subseteq$tr$(\rho\vee L)^{0}$ olur. Dolayısıyla

ltr$\rho$ =tr$\rho=\tau$ ($L$T2) elde edilir.

**ii)⇒iii):** Tanımdan açıktır.

**iii)⇒**i)**:** Teorem 3.8.1(i) den $\tau L\tau L\tau\subseteq(\rho\vee L)^{0}\vee L=\rho\vee L=\rho L$ olup $\rho L$ nin denklik bağıntısı olduğu görüldü.

e, $f\in E(S)$ ise e$\tau L\tau L\tau$f öyle ki e$\rho x\ L\ y\rho f$ bazı $x,y\in S$ olur e$\rho x^{0}\ L\ y^{0}\rho f$ iken öyle ki buradan e$\tau L\tau$f olur. Dolayısıyla $\tau L\tau L\tau\subseteq\tau L\tau$ olur ve karşıt iddia açıktır.

Bu $LT1$ i ispatlar. Şimdi $LT1$ den

$$(L\tau L\tau L)(L\tau L\tau L)\subseteq L\ (\tau L\tau L)L\tau L=L\ (\tau L\tau)\ L\tau L$$

$$a=L\ (\tau L\tau L\tau)\ L=\tau L\ L\tau L$$

olsun. Öyle ki $L\tau L\tau L$ geçişkendir ve bu denklik bağıntısıdır.$\lambda=(L\tau L\tau L)^{0}$ olsun.

$\rho\subseteq\rho\vee L$ olduğundan $\rho\subseteq(\rho\vee L)^{0}$ elde ederiz.Herhangi $a,b\in S$ için Teo 3.8.1.(i) den $x\in S^{1}$ için $a\rho b\Rightarrow a(\rho L\rho)^{0}b$

$\Rightarrow xa\rho L\rho xb$

$\Rightarrow xa L(xa)^{0}\tau L\tau(xb)^{0}Lxb$

$\Rightarrow xa L\tau L\tau Lxb$

$\Rightarrow a(L\tau L\tau L)^{0}b\Rightarrow a\lambda b$ öyle ki $\rho\subseteq\lambda$ olur.

Böylece buradan

$\tau=$ltr$\rho\subseteq$ltr$\lambda=$tr $((L\tau L\tau L)^{0}\vee L)^{0}$

$\subseteq$tr$((\rho\vee L)^{0}\vee L)^{0}$ (2)den

$=$tr$(\rho\vee L)^{0}$ Teorem 3.8.1.(i)

$=$ltr $\rho=\tau$ olduğu görülür.

Dolayısıyla $\tau$=ltr=tr$(\lambda \vee L)^0$=tr$((L\tau L\tau L)^0 \vee L)^0$=tr$(L\tau L\tau L)^0$=trλ ve( $L$ T2) sağlanır.

**iii)⇒iv):** Önce $\tau$=ltr$\rho$ =tr$(\rho \vee L)^0 \subseteq (\rho \vee L)^0$ olur ki $\tau^* \subseteq (\rho \vee L)^0$ Teorem.3.8.1.(i) $(\tau^* \vee L)^0 \subseteq ((\rho \vee L)^0 \vee L)^0 = (\rho \vee L)^0$ dir.

Buradan ltr$\tau^* \subseteq$ ltr$\rho = \tau$ olur. Diğer taraftan $\tau \subseteq \tau^* \Rightarrow \tau \subseteq$tr$\tau^* \subseteq$ltr$\tau^*$olur ve sonuçta $\tau = ltr\ \tau^*$ olur.O halde ltr $(\tau \cap \leq_r)^*$= tr$((\tau \cap \leq_r)^* \vee L)^0$

$\subseteq$tr$(\tau^* \vee L)^0$

$= ltr\ \tau^* = \tau$ olur.

Tersini kurmak için e, $f$ ∈ E($S$) ve e$\tau$f olsun.

Sonra e$\tau^*$ $f$ olur. $e_1$,$f_1$∈ ($D_{ef}$) olsun.

$e_1(\tau^* \cap \leq)$e $f_1(\tau^* \cap \leq)$f ($e_1$ ve $f_1$ ( idempotent olduklarından).

Buradan $e_1(\tau \cap \leq)$e , $f_1(\tau \cap \leq)$f ve $e_1 \tau e \tau f \tau f_1$ olur.

Şimdi $e_1 \tau f_1 \Rightarrow e_1 \tau^* e_1 f_1 \tau^* f_1$

$\Rightarrow e_1 \tau^* (e_1 f_1)^0 \tau^* f_1$

$\Rightarrow e_1 \tau (e_1 f_1)^0 \tau f_1$ olur.

Dolayısıyla $e_1(\tau \cap \leq e$ $e_1(\tau \cap \leq_r)(e_1 f_1)^0$

$(e_1 f_1)^0$L$f_1$ ve $f_1(\tau \cap \leq)$f olur. Böylece $\tau \subseteq (\tau \cap \leq_r)^* \vee L$ olur.

$L\ \tau\ L\ \tau\ L \subseteq (\tau \cap \leq_r)^* \vee L$olur.

Dolayısıyla buradan

$\tau$=tr $(L\tau L\tau L)^0$ $\subseteq$ tr $[(\tau \cap \leq_r)^* \vee L]^0$

$= ltr\ (\tau \cap \leq_r)^*$ elde edilir.

Böylece $ltr\ (\tau \cap \leq_r)^* = \tau$ olur.

**iv) ⇒ iii):** Tanımdan dolayı açıktır.

Teoremin son iddiasını ispatlamak için $\rho \in \ell(S)$ olmak üzere $\tau$=ltr$\rho$ olsun.

$e$ $f$ ,∈ E( $S$ ) olsun, öyle ki $e$ $(\tau \cap \leq_r)$ $f$ olur ve sonra $e\ \tau\ f$ olur.

Buradan $e\,(\rho \vee L)^0\ f$ ve $e\,(\rho \vee L) f$ olur.

Teorem 3.8.1 den $e\rho L\rho f$ elde edilir. Bunun ispatında, $x$ ,y ∈ $D_{ef}$=$D_e$ ve buradan $e\,\rho x L y \rho f$ olur. $e \leq_r f$ olduğundan

$e\rho xeLye\rho\, fe = e$ olur öyle ki $xe\rho ye$ ve $g = (ex)^0$ olsun. Buradan

$xeg = x\,(eg) = x\ g = x$ olur. Benzer şekilde $yegy$ olur.

Sonuçta $x = xeg\rho yeg$ =y ⇒e$\rho f$olur.

Buradan $(\tau \cap \leq_r) \subseteq \rho$ ve $(\tau \cap \leq_r)^* \subseteq \rho$ olur.

Ayrıca $\tau$=tr$(\rho \vee L)^0 \subseteq$tr $(\rho \vee H \vee L)^0$ =tr $(\tau \vee L)^0$=tr $( L\, \tau\, L\, \tau\, L\, )$ $\quad$ $(L$ T1)

Sonra $a\rho b$ olsun. Buradan $a^o \rho (a^0 b^0)^0$ ve $(b^0 a^0 b^0)^0 \rho b^0$ ile birlikte

tr$\rho \subseteq$ tr $(\rho \vee L)^0 = \tau \Rightarrow a\, L\, a^0\ \tau (a^0 b^0)^0 L\, (b^0 a^0 b^0)^0 \tau b^0\ L\ b$ olur.

Sonuç olarak $a\, L\, \tau\, L\, \tau\, L\ b$ olur.

Bu da gösterir ki $\rho \subseteq (L\tau L\tau L)^0$ iken $\rho \subseteq L\, \tau\, L\, \tau\, L$ olur.

Böylece $\tau = ltr\ \rho$ olduğunu ispatladık. $\tau = ltr\, \rho \Rightarrow (\tau \cap \leq_r)^* \subseteq \rho \subseteq (L\tau L\tau L)^0$olur.

Ters iddia ii) ve iv) denkliği ve ltr fonksiyonuyla ilgilidir.

Bu teoremle $\tau$ yani yarıgruplarda en geniş saf idempotent, $L$ Green Denklik Bağıntısı, İz, Normallik ve $\rho$ kongrüansı ve tamamıyla regüler yarıgruplar ilişkisini gösterdik.

# BÖLÜM 4

## SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Kongrüanslar ve Green Denklik Bağıntıları arasındaki ilişkiler verilmiştir. Bu ilişki kurulurken yarıgruplarda önemli bir yeri olan kongrüansların Çekirdek, İz, Kongrüans İkilileri, İşaret, Normallik, sol m-normal kavramlarından yararlanılmıştır**.** Kongrüanslar ve Green Denklik Bağıntıları arasındaki ilişkiler hakkında oluşturulan İngilizce Makale Gaziantep Üniversitesi'nde düzenlenen Uluslararası UMTEB kongresinde sunulmuştur.

## KAYNAKLAR


Chen S.Y.and *C.*Hsieh. *1973A note on rectangular semigoups, Tamkang J. Math*. 4, 27-28.Chistyakova I.

Clifford A.H. and G.B.Priston*. 1961. The Algebraic Theory of Semigroups*, Amer. Math. Soc., Math. Surveys No.**7** Providence; , 1967

Howie *J*.M. and *G*.Lallement.*1966.*Certain fundamental congruences on a regular semigroup, *Proc Assoc*. *Math* **7**, 145-159.

Howie J.M.1976. *An Introduction to Semigroup Theory,* Academic Press, London,

Howie.J.M.1995.Fundamentals of Semigroup Theory.OX2 6DP.Newyork. Great Britain by Biddles. 22

Jones P.R. 1980. *Congruences contained in an equvialence on a semigroup, J. Austral. Math. Soc.* 29A 162-176

Pastijn F.j. and M. Petrich.1987. Congruences on Regular semigroups associated with Green's relations, *Boll. Un.*Mat. Ital B1, 591-603.

Petrich M, Reilly N.1999. Completely Regular Semigroups, II.Title III.Series.Canada

Petrich *M.* 1993. Congruence networks for strong semilattices of regular simple semigroups, *Rocky Mountain J. Math.* **23** 1385-1408.

Petrich.M.1994 The Green relations approach to congruences on comletely regular semigroups, *Ann. Mat.Pura Appl.* **23** 1385-1408

Petrich**.M.** 1994. Congruence networks for completely semigroups, *J.*austral *Math Soc A56*.243-266.